ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 3

Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5,6,7

Ασκήσεις για παράδοση: No. 8, 9, 10

Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Μαΐου 2018

Άσκηση 1:

Να βρεθούν οι φασιθέτες των κάτωθι χρονομεταβλητών σημάτων:

(α) $z(t) = 3\cos[2\pi 30t - \pi/4]$

(β) $z(x,t) = 4\exp[-3x]\sin[\omega t - \pi/6]$

(γ) $z(t) = 2\sin[\omega t + \pi/3] + 3\cos[\omega t - \pi/6]$

Να βρεθούν οι στιγμιαίες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις των κάτωθι φασιθετών:

(δ) $Z = \sqrt{j}\,6\exp[j\pi/4]$

(ε) $Z = 3 - j4$

(στ) $Z = -3\exp[j\pi/3]$

Άσκηση 2:

Ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου ενός επιπέδου κύματος που διαδίδεται σε ένα ομογενές, ισότρο-πο, γραμμικό, και μή μαγνητικό υλικό δίδεται από την εξίσωση:

$$\vec{E} = E_0\left(\hat{\imath}_x + \hat{\imath}_y - \hat{\imath}_z\right)\exp\left[-j\frac{2\omega}{c}\left(\frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

όπου E_0 είναι πραγματική σταθερά (σε Volts/meter), $\omega = 2\pi f$, όπου f είναι η συχνότητα του επιπέδου κύματος, και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Να βρεθούν:

(α) Η σχετική επιτρεπτότητα του υλικού,

(β) Το κυματοδιάνυσμα,

(γ) Η κυματική αντίσταση του υλικού, και

(δ) Το διάνυσμα Poynting που ορίζεται ως (1/2)Re$\{\vec{E}\times\vec{H}^*\}$ όπου ο “ * ” συμβολίζει το συζυγές μι-γαδικό. Το διάνυσμα Poynting εκφράζει την ισχύ ανά μονάδα επιφανείας (σε W/m^2) που μεταφέρει το κύμα.

Άσκηση 3:

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου ενός κύματος που διαδίδεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονος y μέσα σε θαλασσινό νερό ($\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4$ S/m) δίδεται από την εξίσωση

$$\vec{H} = \vec{H}(y=0,t) = \hat{\imath}_x 0.1\sin\left[10^{10}\pi t - \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{(A/m)}$$

για $y = 0$.

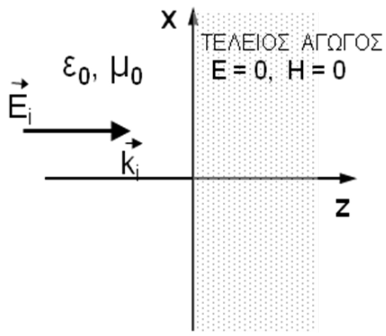
(α) Να προσδιορισθούν ο συντελεστής απόσβεσης του κύματος, ο συντελεστής διάδοσης του κύμα-τος, η κυματική αντίσταση του θαλασσινού νερού, η φασική ταχύτητα του κύματος, το μήκος κύματος στο θαλασσινό νερό, και το βάθος διείσδυσης του κύματος μέσα στο θαλασσινό νερό.

(β) Να βρεθεί σε ποιά απόσταση το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι 0.01 A/m.

(γ) Να γραφούν οι στιγμιαίες (δηλαδή με εξάρτηση χρόνου) εκφράσεις της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στην θέση $y = 0.5$ meters.

Άσκηση 4:

Ένα επίπεδο κύμα με φασιθέτη ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{E} = E_0[2\hat{\iota}_x - j\hat{\iota}_y]\exp(-j\beta z)$, διαδίδεται στον αέρα κατά την διεύθυνση του θετικού άξονα z και προσπίπτει σε ένα τέλειο αγωγό όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. E_0 και β είναι πραγματικές σταθερές. Στον αέρα η επιτρεπτότητα και η διαπερατότητα είναι ε_0 και μ_0 αντίστοιχα. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του αέρα και του τέλειου αγωγού είναι το επίπεδο $z = 0$. Η συχνότητα του κύματος είναι ω. (α) Να προσδιοριστεί πλήρως η σταθερά β καθώς και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος. (β) Να προσδιορισθεί πλήρως το ανακλώμενο από τον τέλειο αγωγό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο καθώς και η πόλωση του. (γ) Να προσδιορισθεί η στιγμιαία έκφραση του ολικού ηλεκτρικού πεδίου στο αέρα ($z < 0$). (δ) Να προσδιορισθεί η στιγμιαία επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος και πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια.



Άσκηση 5:

Στο κάτωθι σχήμα δίδεται ένας συμμετρικός διηλεκτρικός κυματαγωγός κατάλληλος για κυματοδήγηση οπτικών σημάτων. Ο κυματοδηγός είναι ομοιόμορφος στην διεύθυνση του άξονος y. Ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου δίδεται ανάλογα με την περιοχή (συνάρτηση του x) από τις ακόλουθες εξισώσεις:

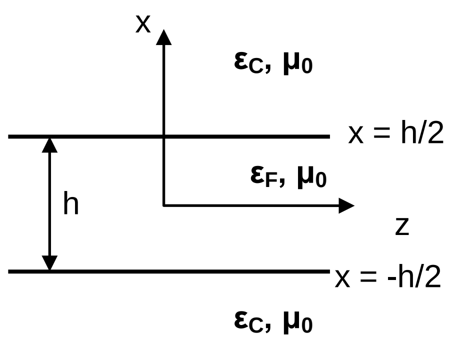
$$\vec{E} = \hat{\iota}_y E_c \exp\left[-\gamma_c\left(x - \frac{h}{2}\right)\right]\exp(-j\beta z) \qquad \frac{h}{2} < x < \infty$$

$$\vec{E} = \hat{\iota}_y E_f \cos(k_f x)\ \exp(-j\beta z) \qquad -\frac{h}{2} < x < \frac{h}{2}$$

$$\vec{E} = \hat{\iota}_y E_c \exp\left[+\gamma_c\left(x + \frac{h}{2}\right)\right]\exp(-j\beta z) \qquad -\infty < x < -\frac{h}{2}$$

Όπου $k_f = (k_0^2 n_f^2 - \beta^2)^{1/2}$, $\gamma_c = (\beta^2 - k_0^2 n_c^2)^{1/2}$, $k_0 = \omega/c$, με ω = γωνιακή συχνότητα του πεδίου και c = ταχύτητα του φωτός στο κενό, $n_c^2 = \varepsilon_c/\varepsilon_0$, $n_f^2 = \varepsilon_f/\varepsilon_0$, και ε_0 η επιτρεπτότητα του κενού.

(α) Να βρεθεί ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου. (β) Να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των E_c, E_f, k_f, γ_c, και β, ώστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να αποτελούν λύση των εξισώσεων του Maxwell και να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Να βρεθεί η εξίσωση από την οποία μπορεί να προσδιορισθεί η σταθερά β. Σχολιάστε τις λύσεις αυτής της εξίσωσης χωρίς να επιλύσετε την εξίσωση αν $k_0 n_c < \beta < k_0 n_f$. (γ) Να βρεθεί το στιγμαίο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. (δ) Να βρεθούν οι χρονικοί μέσοι όροι των διανυσμάτων Poynting παντού στο χώρο.



Άσκηση 6:

Ένα επίπεδο κύμα με φασιθέτη μαγνητικού πεδίου, $\vec{H}_i = 100\hat{\imath}_y\, exp\,[-j(50x + 50\sqrt{3}z)]$(A/m), διαδίδεται στον αέρα κατά την διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα και προσπίπτει πάνω σε επίπεδο διηλεκτρικό με επιτρεπτότητα $\varepsilon_2=9\varepsilon_0$ και διαπερατότητα $\mu_2=\mu_0$. Στον αέρα η επιτρεπτότητα και η διαπερατότητα είναι ε_0 και μ_0 αντίστοιχα. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του αέρα και του διηλεκτρικού είναι το επίπεδο $z = 0$. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι c ≈ 300000 km/sec.

(α) Να προσδιοριστεί πλήρως το μήκος κύματος, η συχνότητα σε GHz, η γωνία πρόσπτωσης, καθώς και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος.

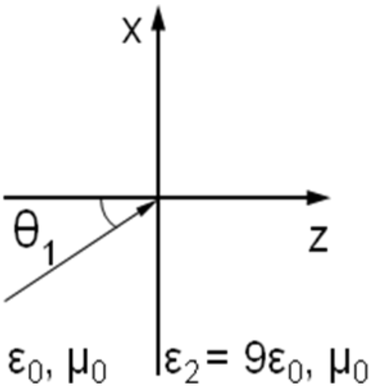
(β) Να προσδιορισθεί πλήρως το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο καθώς και η πόλωση του.

(γ) Να προσδιορισθεί πλήρως το διαθλώμενο ηλεκτρικό πεδίο καθώς και η πόλωση του.

(δ) Να προσδιοριστεί η στιγμιαία τιμή του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή $z > 0$.

(ε) Να βρεθεί ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting στην περιοχή $z > 0$.

(στ) Να βρεθεί το ποσοστό της προσπίπτουσας ισχύος που ανακλάται και το ποσοστό που διαθλάται.



Εξισώσεις Fresnel

$$r_{TE} = r_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1\cos\theta_2 - Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1}$$

$$t_{TE} = t_\perp = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_2 + Z_2\cos\theta_1}$$

$$r_{TM} = r_\parallel = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1\cos\theta_1 - Z_2\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

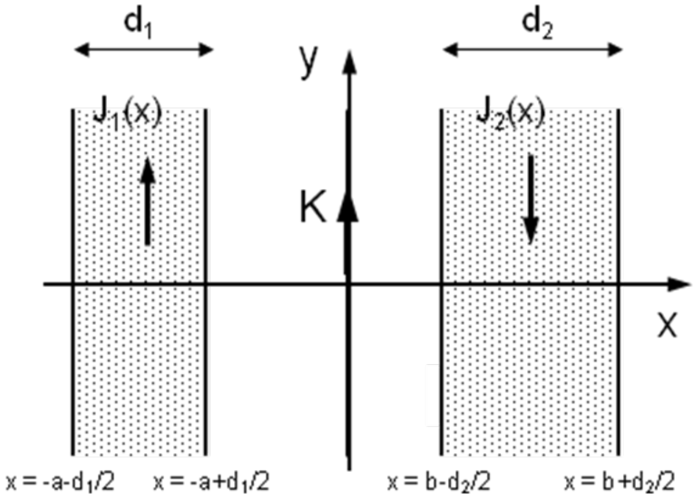
$$t_{TM} = t_\parallel = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

Άσκηση 7:

Δύο απέραντες πλάκες πάχους d_1 και d_2 αντίστοιχα διαρρέονται από ρεύματα χωρικής πυκνότητας $\vec{J}_1 = J_{01}\cos\left[\pi(x+a)/d_1\right]\hat{\imath}_y$ και $\vec{J}_2 = -J_{02}\cos\left[\pi(x-b)/d_2\right]\hat{\imath}_y$. Στο επίπεδο $x = 0$ βρίσκεται επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = K_0\,\hat{\imath}_y$. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0. Τα μέσα των δύο πλακών βρίσκονται σε αποστάσεις a και b από τον άξονα y.

(α) Να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ των J_{01}, J_{02}, και K_0 ώστε το μαγνητικό πεδίο να είναι μηδενικό στο $x = \pm\infty$.

(β) Να προσδιορισθεί το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή $-a-d_1/2 < x < b+d_2/2$ όταν ισχύει το (α).



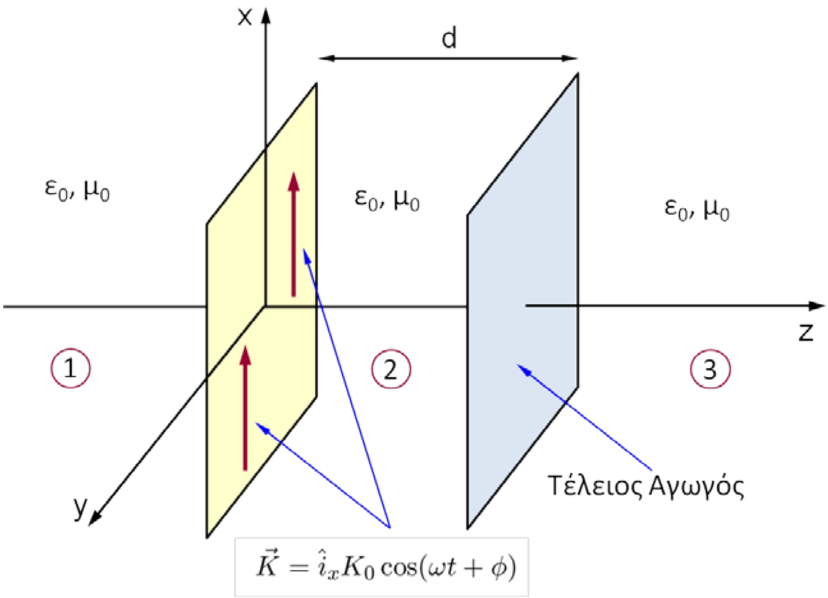
Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [25%]

Μια άπειρη επίπεδη ρευματική κατανομή έχει χρονικά μεταβαλλόμενη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, $\vec{K} = \hat{\imath}_x K_0 \cos(\omega t + \varphi)$ και βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε απόσταση d δεξιά από την κατανομή ρεύματος βρίσκεται ένας άπειρος επίπεδος τέλειος αγωγός παράλληλος με το επίπεδο του επιφανειακού ρεύματος. Ο χώρος παντού χαρακτηρίζεται από επιτρεπτότητα ε_0 και διαπερατότητα μ_0.

(α) [12%] Να βρεθούν οι δυνατές λύσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (με την μορφή φασιθετών ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου) στις περιοχές δεξιά (περιοχές 2 και 3) και αριστερά (περιοχή 1) από το ρευματοφόρο επίπεδο.

(β) [3%] Να βρεθεί ο φασιθέτης του επαγόμενου επιφανειακού ρεύματος και ο φασιθέτης του επαγόμενου επιφανειακού φορτίου πάνω στον τέλειο αγωγό.

(γ) [10%] Να βρεθούν οι τιμές της απόστασης d που μεγιστοποιούν την διαδιδόμενη ισχύ στην περιοχή 1 ($z < 0$). Για ποιές τιμές της d η διαδιδόμενη ισχύς στην περιοχή 1 ελαχιστοποιείται? Να δείξετε ότι το ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting στην περιοχή 2 είναι μηδενικός.



Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [25%]

Ένα TM πολωμένο (παράλληλη πόλωση με πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0) επίπεδο κύμα και μήκος κύματος στο κενό λ_0 = 1μm = 10^{-6} m, διαδίδεται σε μη μαγνητικό διηλεκτρικό με σχετική επιτρεπτότητα ε_r = 2.25 και προσπίπτει υπό γωνία θ = 55° στον αέρα όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Στον αέρα η επιτρεπτότητα είναι $\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ *F/m* και η διαπερατότητα $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ *H/m*. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του διηλεκτρικού και του αέρα είναι το επίπεδο $x = 0$. Η ταχύτητα του φωτός στον αέρα είναι $c \approx 3\times10^{8}$ *m/s*.

(α) [2%] Να προσδιορισθεί το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος. Να προσδιορίσετε <u>αριθμητικά</u> στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

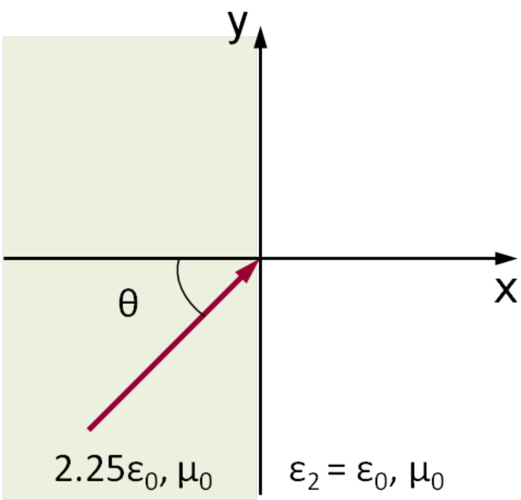
(β) [7%] Να προσδιορισθεί η στιγμιαία έκφραση του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου. Ποια είναι η φασική διαφορά μεταξύ του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου; Να προσδιορίσετε <u>αριθμητικά</u> στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

(γ) [5%] Να προσδιορισθεί ο φασιθέτης και η στιγμιαία έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου στον αέρα. Να προσδιορίσετε <u>αριθμητικά</u> στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

(δ) [2%] Να προσδιοριστεί το μιγαδικό διάνυσμα Poynting στον αέρα. Να προσδιορισθεί ο χρονικός μέσος όρος της *x* συνιστώσας του διανύσματος Poynting στον αέρα.

(ε) [3%] Να προσδιορισθούν τα ποσοστά (αριθμητικά) της ανακλώμενης και διαθλώμενης ισχύος.

(στ) [6%] Να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης και της διαθλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης θ ($0 \le \theta < 90^\circ$).



<u>Εξισώσεις Fresnel</u>

$$r_{TE} = r_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}$$

$$t_{TE} = t_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}$$

$$r_{TM} = r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1\cos\theta_1 - Z_2\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

$$t_{TM} = t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

Άσκηση 10: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [50%]

Ένα επίπεδο κύμα (με μήκος κύματος στο κενό λ_0 =1.0μm), προσπίπτει υπό γωνία Brewster (για μη μαγνητικά υλικά) θ πάνω σε επίπεδο διηλεκτρικό με επιτρεπτότητα $\varepsilon_2=5\varepsilon_0$ και διαπερατότητα $\mu_2=\mu_0$ όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c \approx 3 \times 10^8$ *m/s*. Το επίπεδο κύμα αρχικά διαδίδεται στην περιοχή με επιτρεπτότητα ε_0 και διαπερατότητα μ_0. Ο φασιθέτης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος δίδεται από την σχέση:

$$\vec{E} = [2\cos\theta\, \hat{\imath}_x - j3\hat{\imath}_y - 2\sin\theta\hat{\imath}_z\,]\exp\left(-j\vec{k}\cdot\vec{r}\right), \quad (\text{σε V/m})$$

όπου $\vec{k}$ το κυματοδιάνυσμα, και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης.

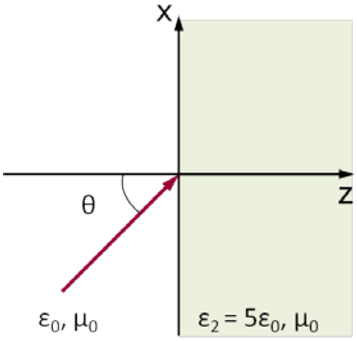
(α) [5%] Να προσδιορισθεί το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$ στο σύστημα αναφοράς *xyz* του σχήματος. Να υποθέσετε ότι το κυματοδιάνυσμα δεν έχει *y*-συνιστώσα.

(β) [15%] Να προσδιορισθούν οι φασιθέτες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου τόσο του ανακλωμένου όσο και του διαδιδομένου επιπέδου κύματος. Οι φασιθέτες να εκφρασθούν στο σύστημα αναφοράς *xyz* του σχήματος.

(γ) [10%] Να προσδιορισθεί ο φασιθέτης του ολικού μαγνητικού πεδίου στην περιοχή $z < 0$. ($Z_0 \approx 377\Omega$)

(δ) [15%] Να προσδιοριστεί η πόλωση του προσπίπτοντος, του ανακλώμενου, και του διαδιδόμενου κύματος. Εξηγήστε την απάντησή σας με σαφήνεια για να πιστωθείτε τους βαθμούς του ερωτήματος.

(ε) [5%] Να βρεθούν τα ποσοστά της ανακλώμενης και διαδιδόμενης ισχύος.



Εξισώσεις Fresnel

$$r_{TE} = r_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2\cos\theta_1 - Z_1\cos\theta_2}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}$$

$$t_{TE} = t_\perp = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_2\cos\theta_1 + Z_1\cos\theta_2}$$

$$r_{TM} = r_\parallel = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1\cos\theta_1 - Z_2\cos\theta_2}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$

$$t_{TM} = t_\parallel = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_1}{Z_1\cos\theta_1 + Z_2\cos\theta_2}$$