



ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 3

Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5,6,7

Ασκήσεις για παράδοση: No. 8, 9

Ημερομηνία Παράδοσης: **25 Μαΐου 2017**

Άσκηση 1:

Να βρεθούν οι φασιθέτες των κάτωθι χρονομεταβλητών σημάτων:

(α) $z(t) = 3 \cos[2\pi 30t - \pi/4]$

(β) $z(x,t) = 4 \exp[-3x] \sin[\omega t - \pi/6]$

(γ) $z(t) = 2 \sin[\omega t + \pi/3] + 3 \cos[\omega t - \pi/6]$

Να βρεθούν οι στιγμιαίες συνημιτονοειδείς συναρτήσεις των κάτωθι φασιθετών:

(δ) $Z = \sqrt{j} 6 \exp[j\pi/4]$

(ε) $Z = 3 - j 4$

(στ) $Z = -3 \exp[j\pi/3]$

Άσκηση 2:

Ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου ενός επιπέδου κύματος που διαδίδεται σε ένα ομογενές, ισότροπο, γραμμικό, και μη μαγνητικό υλικό δίδεται από την εξίσωση:

$$\vec{E} = E_0(\hat{i}_x + \hat{i}_y - \hat{i}_z) \exp[-j \frac{2\omega}{c} (\frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{2z}{\sqrt{6}})]$$

όπου E_0 είναι πραγματική σταθερά (σε Volts/meter), $\omega = 2\pi f$, όπου f είναι η συχνότητα του επιπέδου κύματος, και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Να βρεθούν:

(α) Η σχετική επιτρεπτότητα του υλικού,

(β) Το κυματοδιάνυσμα,

(γ) Η κυματική αντίσταση του υλικού, και

(δ) Το διάνυσμα Poynting που ορίζεται ως $(1/2)\text{Re}\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$ όπου ο “*” συμβολίζει το συζυγές μιγαδικό. Το διάνυσμα Poynting εκφράζει την ισχύ ανά μονάδα επιφανείας (σε W/m^2) που μεταφέρει το κύμα.

Άσκηση 3:

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου ενός κύματος που διαδίδεται κατά την θετική διεύθυνση του άξονος y μέσα σε θαλασσινό νερό ($\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4 \text{ S/m}$) δίδεται από την εξίσωση

$$\vec{H} = \vec{H}(y=0, t) = \hat{i}_x 0.1 \sin[10^{10} \pi t - \pi/3] \quad (\text{A/m})$$

για $y = 0$.

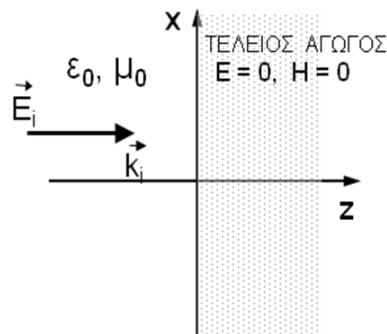
(α) Να προσδιορισθούν ο συντελεστής απόσβεσης του κύματος, ο συντελεστής διάδοσης του κύματος, η κυματική αντίσταση του θαλασσινού νερού, η φασική ταχύτητα του κύματος, το μήκος κύματος στο θαλασσινό νερό, και το βάθος διείσδυσης του κύματος μέσα στο θαλασσινό νερό.

(β) Να βρεθεί σε ποιά απόσταση το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι 0.01 A/m .

(γ) Να γραφούν οι στιγμιαίες (δηλαδή με εξάρτηση χρόνου) εκφράσεις της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στην θέση $y = 0.5 \text{ meters}$.

Άσκηση 4:

Ένα επίπεδο κύμα με φασιθέτη ηλεκτρικού πεδίου, $\vec{E}_i = E_0[2\hat{i}_x - j\hat{i}_y] \exp(-j\beta z)$, διαδίδεται στον αέρα κατά την διεύθυνση του θετικού άξονα z και προσπίπτει σε ένα τέλειο αγωγό όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. E_0 και β είναι πραγματικές σταθερές. Στον αέρα η επιτρεπτότητα και η διαπερατότητα είναι ϵ_0 και μ_0 αντίστοιχα. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του αέρα και του τέλειου αγωγού είναι το επίπεδο $z = 0$. Η συχνότητα του κύματος είναι ω . (α) Να προσδιοριστεί πλήρως η σταθερά β καθώς και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος. (β) Να προσδιορισθεί πλήρως το ανακλώμενο από τον τέλειο αγωγό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο καθώς και η πόλωση του. (γ) Να προσδιορισθεί η στιγμιαία έκφραση του ολικού ηλεκτρικού πεδίου στο αέρα ($z < 0$). (δ) Να προσδιορισθεί η στιγμιαία επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος και πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια.



Άσκηση 5:

Στο κάτωθι σχήμα δίδεται ένας συμμετρικός διηλεκτρικός κυματοαγωγός κατάλληλος για κυματοδηγηση οπτικών σημάτων. Ο κυματοδηγός είναι ομοιόμορφος στην διεύθυνση του άξονος y . Ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου δίδεται ανάλογα με την περιοχή (συνάρτηση του x) από τις ακόλουθες εξισώσεις:

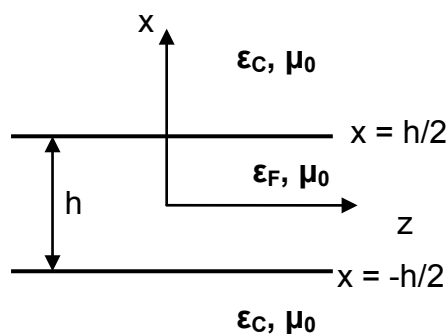
$$\vec{E} = \hat{i}_y E_c \exp[-\gamma_c(x - h/2)] \exp(-j\beta z) \quad h/2 < x < \infty$$

$$\vec{E} = \hat{i}_y E_f \cos(k_f x) \exp(-j\beta z) \quad -h/2 < x < h/2$$

$$\vec{E} = \hat{i}_y E_c \exp[+\gamma_c(x + h/2)] \exp(-j\beta z) \quad -\infty < x < -h/2$$

Όπου $k_f = (k_0^2 n_f^2 - \beta^2)^{1/2}$, $\gamma_c = (\beta^2 - k_0^2 n_c^2)^{1/2}$, $k_0 = \omega/c$, με $\omega =$ γωνιακή συχνότητα του πεδίου και $c =$ ταχύτητα του φωτός στο κενό, $n_c^2 = \epsilon_c / \epsilon_0$, $n_f^2 = \epsilon_f / \epsilon_0$, και ϵ_0 η επιτρεπτότητα του κενού.

(α) Να βρεθεί ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου. (β) Να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των E_c , E_f , k_f , γ_c και β , ώστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να αποτελούν λύση των εξισώσεων του Maxwell και να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Να βρεθεί η εξίσωση από την οποία μπορεί να προσδιορισθεί η σταθερά β . Σχολιάστε τις λύσεις αυτής της εξίσωσης χωρίς να επιλύσετε την εξίσωση αν $k_0 n_c < \beta < k_0 n_f$. (γ) Να βρεθεί το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. (δ) Να βρεθούν οι χρονικοί μέσοι όροι των διανυσμάτων Poynting παντού στο χώρο.



Άσκηση 6:

Ένα επίπεδο κύμα με φασική μαγνητικού πεδίου, $\vec{H}_i = 100\hat{i}_y \exp[-j(50x + 50\sqrt{3}z)]$ (A/m), διαδίδεται στον αέρα κατά την διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα και προσπίπτει πάνω σε επίπεδο διηλεκτρικό με επιπεπτότητα $\epsilon_2 = 9\epsilon_0$ και διαπερατότητα $\mu_2 = \mu_0$. Στον αέρα η επιπεπτότητα και η διαπερατότητα είναι ϵ_0 και μ_0 αντίστοιχα. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του αέρα και του διηλεκτρικού είναι το επίπεδο $z = 0$. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c \approx 300000$ km/sec.

(α) Να προσδιοριστεί πλήρως το μήκος κύματος, η συχνότητα σε GHz, η γωνία πρόσπτωσης, καθώς και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος.

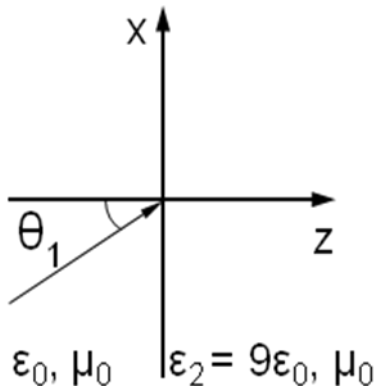
(β) Να προσδιοριστεί πλήρως το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο καθώς και η πόλωση του.

(γ) Να προσδιοριστεί πλήρως το διαθλώμενο ηλεκτρικό πεδίο καθώς και η πόλωση του.

(δ) Να προσδιοριστεί η στιγμιαία τιμή του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή $z > 0$.

(ε) Να βρεθεί ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting στην περιοχή $z > 0$.

(στ) Να βρεθεί το ποσοστό της προσπίπτουσας ισχύος που ανακλάται και το ποσοστό που διαθλάται.



Εξισώσεις Fresnel

$$r_{TE} = r_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_2 - Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}$$

$$t_{TE} = t_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}$$

$$r_{TM} = r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}$$

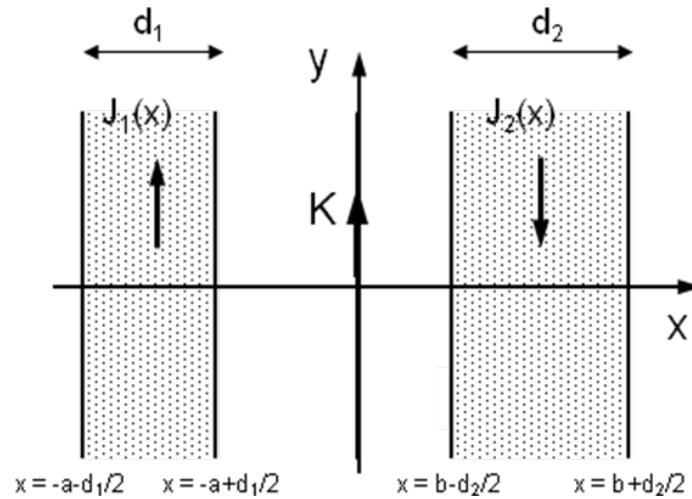
$$t_{TM} = t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}$$

Άσκηση 7:

Δύο απέραντες πλάκες πάχους d_1 και d_2 αντίστοιχα διαρρέονται από ρεύματα χωρικής πυκνότητας $\vec{J}_1(x) = J_{01} \cos[\pi(x+a)/d_1] \hat{i}_y$ και $\vec{J}_2(x) = -J_{02} \cos[\pi(x-b)/d_2] \hat{i}_y$. Στο επίπεδο $x = 0$ βρίσκεται επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = K_0 \hat{i}_y$. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0 . Τα μέσα των δύο πλακών βρίσκονται σε αποστάσεις a και b από τον άξονα y .

(α) [8%] Να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ των J_{01} , J_{02} , και K_0 ώστε το μαγνητικό πεδίο να είναι μηδενικό στο $x = \pm\infty$.

(β) [12%] Να προσδιορισθεί το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή $-a-d_1/2 < x < b+d_2/2$ όταν ισχύει το (α).



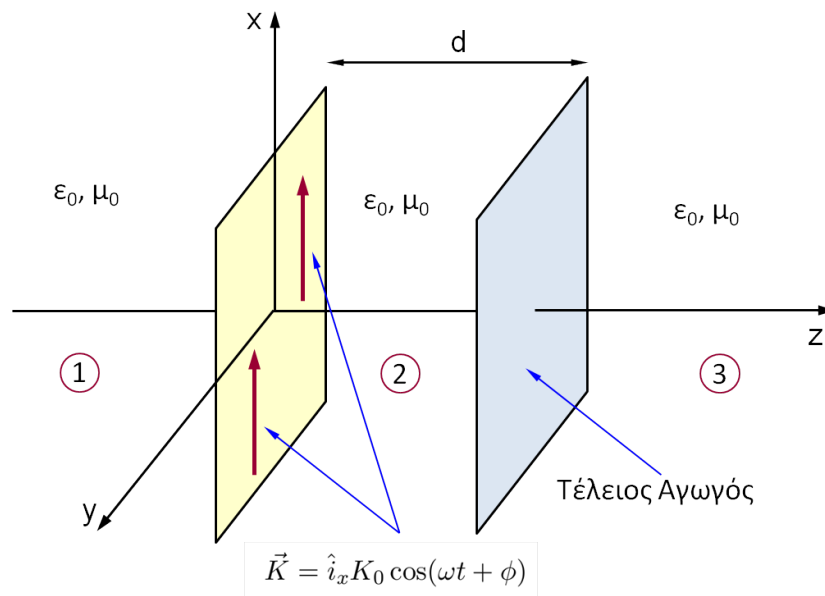
Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [50%]

Μια άπειρη επίπεδη ρευματική κατανομή έχει χρονικά μεταβαλλόμενη επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, $\vec{K} = \hat{i}_x K_0 \cos(\omega t + \phi)$ και βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε απόσταση d δεξιά από την κατανομή ρεύματος βρίσκεται ένας άπειρος επίπεδος τέλειος αγωγός παράλληλος με το επίπεδο του επιφανειακού ρεύματος. Ο χώρος παντού χαρακτηρίζεται από επιτρεπτότητα ϵ_0 και διαπερατότητα μ_0 .

(α) [25%] Να βρεθούν οι δυνατές λύσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (με την μορφή φασιθετών ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου) στις περιοχές δεξιά (περιοχές 2 και 3) και αριστερά (περιοχή 1) από το ρευματοφόρο επίπεδο.

(β) [10%] Να βρεθεί ο φασιθέτης του επαγόμενου επιφανειακού ρεύματος και ο φασιθέτης του επαγόμενου επιφανειακού φορτίου πάνω στον τέλειο αγωγό.

(γ) [15%] Να βρεθούν οι τιμές της απόστασης d που μεγιστοποιούν την διαδιδόμενη ισχύ στην περιοχή 1 ($z < 0$). Για ποιές τιμές της d η διαδιδόμενη ισχύς στην περιοχή 1 ελαχιστοποιείται? Να δείξετε ότι το ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting στην περιοχή 2 είναι μηδενικός.



Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [50%]

Ένα TM πολωμένο (παράλληλη πόλωση με πλάτος ηλεκτρικού πεδίου E_0) επίπεδο κύμα και μήκος κύματος στο κενό $\lambda_0 = 1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$, διαδίδεται σε μη μαγνητικό διηλεκτρικό με σχετική επιτρεπτότητα $\epsilon_r = 2.25$ και προσπίπτει υπό γωνία $\theta = 55^\circ$ στον αέρα όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Στον αέρα η επιτρεπτότητα είναι $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ και η διαπερατότητα $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ H/m}$. Η διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του διηλεκτρικού και του αέρα είναι το επίπεδο $x = 0$. Η ταχύτητα του φωτός στον αέρα είναι $c \approx 3 \times 10^8\text{ m/s}$.

(α) [5%] Να προσδιορισθεί το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος. Να προσδιορίσετε αριθμητικά στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

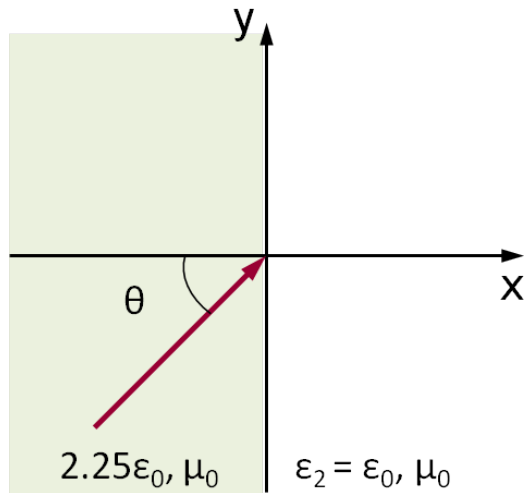
(β) [10%] Να προσδιορισθεί η στιγμιαία έκφραση του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου. Ποια είναι η φασική διαφορά μεταξύ του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου; Να προσδιορίσετε αριθμητικά στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

(γ) [15%] Να προσδιορισθεί ο φασιθέτης και η στιγμιαία έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου στον αέρα. Να προσδιορίσετε αριθμητικά στο σύστημα SI ότι είναι εφικτό.

(δ) [5%] Να προσδιορισθεί το μιγαδικό διάνυσμα Poynting στον αέρα. Να προσδιορισθεί ο χρονικός μέσος όρος της x συνιστώσας του διανύσματος Poynting στον αέρα.

(ε) [5%] Να προσδιορισθούν τα ποσοστά (αριθμητικά) της ανακλώμενης και διαθλώμενης ισχύος.

(στ) [10%] Να γίνει η γραφική παράσταση της ανακλώμενης και της διαθλώμενης ισχύος σαν συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης θ ($0 \leq \theta < 90^\circ$).



Εξισώσεις Fresnel

$$r_{TE} = r_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}$$

$$t_{TE} = t_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}$$

$$r_{TM} = r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}$$

$$t_{TM} = t_{\parallel} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}$$