ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α (Τμήμα Ρ-Ω)
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 2

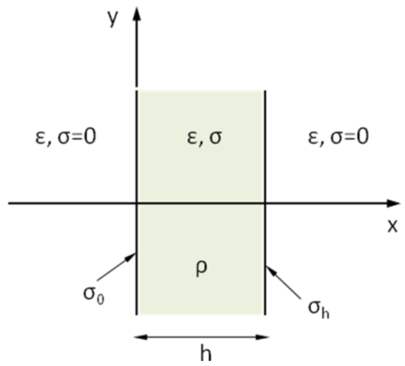
Ασκήσεις για εξάσκηση: Νο. 1,2,3,4,5,6,7

Ασκήσεις για παράδοση: Νο. 8,9,10

Ημερομηνία Παράδοσης: 27 Απριλίου 2017

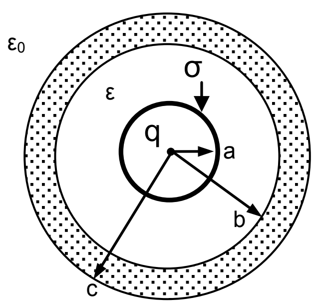
Άσκηση 1 (από το βιβλίο Τσαλαμέγκα-Ρουμελιώτη):

Αγώγιμη πλάκα (άπειρης έκτασης στο επίπεδο *yz*) πάχους h, φαίνεται σε τομή στο επίπεδο *xy*. Το υλικό της είναι ομογενές με επιτρεπτότητα ε και ειδική αγωγιμότητα σ. Έξω από την πλάκα υπάρχει ομογενές διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα ε και μηδενική ειδική αγωγιμότητα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ υπάρχουν επιφανειακά φορτία με σταθερές πυκνότητες $\sigma_0(t=0)=\sigma_0(0)$ και $\sigma_h(t=0)=\sigma_h(0)$, τοποθετημένα στις επίπεδες επιφάνειες με $x = 0$ και $x= h$, αντίστοιχα, της αγώγιμης πλάκας, καθώς και το χωρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho(x,t=0)=\rho(x,0)=\rho_0(x/h)$, τοποθετημένο στο εσωτερικό της πλάκας ($0 < x < h$). (α) Να βρεθούν οι πυκνότητες των ηλεκτρικών φορτίων $\sigma_0(t)$, $\rho(x,t)$, και $\sigma_h(t)$ για
$t \geq 0$ καθώς και η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της πλάκας για $t \geq 0$. (β) Η κατανομή των φορτίων για $0 \leq x \leq h$, η πυκνότητα ρεύματος και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (για $0 < x < h$) στη μόνιμη κατάσταση $t \to \infty$.



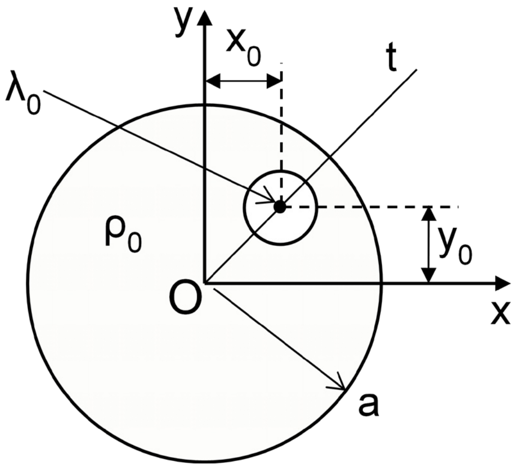
Άσκηση 2:

Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει απειροστό πάχος και επιφανειακό φορτίο με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ. Στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους υπάρχει σημειακό φορτίο q. Το σφαιρικό κέλυφος περικλείεται από ένα μεγαλύτερο ομόκεντρο σφαιρικό κέλυφος με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική ακτίνα c το οποίο φέρει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\rho(r) = A/r^2$ όπου A μιά γνωστή σταθερά και r η ακτινική απόσταση από το κέντρο της σφαιρικής διαταξης. Η επιτρεπτότητα του χώρου είναι παντού ε_0 εκτός από το διάκενο μεταξύ των δύο κελύφων όπου είναι ε. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο και να επαληθευθούν οι οριακές συνθήκες όπου χρειάζονται.



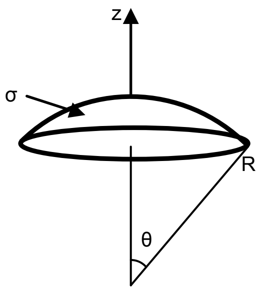
Άσκηση 3:

Κύλινδρος απείρου μήκους με κέντρο τον άξονα z, ακτίνας a, φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ_0. Κατά μήκος του άξονος z του κυλίνδρου και με κέντρο το σημείο (x_0,y_0) υπάρχει μια κυλινδρική οπή απείρου μήκους στην οποία δεν υπάρχει κανένα ηλεκτρικό φορτίο πλην του κέντρου της όπου υπάρχει μια σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0 και αυτή παράλληλη με τον άξονα z. Η οπή αυτή έχει ακτίνα b. Η επιτρεπτότητα παντού στο χώρο είναι ε_0. (α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. Να εκφρασθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς *xyz* [δηλαδή οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_w να εκφραστούν ως $E_w(x,y,z)$ όπου $w = x,y,z$]. (β) Να προσδιοριστεί η συνθήκη ανάμεσα σε ρ_0 και λ_0 ώστε να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του επιπέδου *Ot* τα οποία είναι έξω από τον κύλινδρο ακτίνας a και για τα οποία $r_T = k(x_0^2 + y_0^2)^{1/2} = kR_0 > a$ όπου k είναι μια σταθερά.



Άσκηση 4:

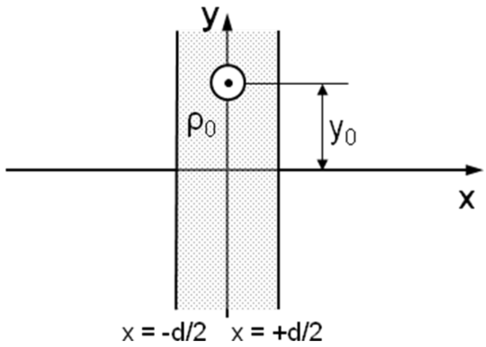
Τμήμα σφαιρικού κελύφους ακτίνας R, απειροστού πάχους φέρει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μέγεθος του σφαιρικού κελύφους ορίζεται από την γωνία θ και την ακτίνα R. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο O της νοητής σφαίρας μέρος της οποίας είναι το σφαιρικό κέλυφος. Να δοθεί το μέτρο της έντασης του ηλεκτρκού πεδίου στο O σαν συνάρτηση της γωνίας θ με σταθερά ακτίνα R. Σε αυτό το πρόβλημα να χρησιμοποιήσετε την αρχή της επαλληλίας.



Άσκηση 5:

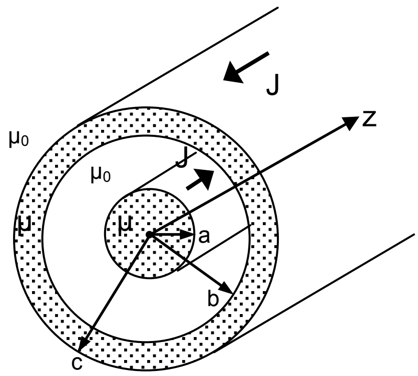
Πλάκα απείρου έκτασης στο επίπεδο *yz* και πάχους *d* φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο με σταθερή χωρική πυκνότητα ρ_0. Κατά μήκος του άξονος z και σε απόσταση y_0 υπάρχει μια κυλινδρική οπή απείρου μήκους στην οποία δεν υπάρχει κανένα ηλεκτρικό φορτίο. Η οπή αυτή έχει ακτίνα a. Στο κέντρο της κυλινδρικής οπής υπάρχει μια σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ_0 και αυτή παράλληλη με τον άξονα z. Η επιτρεπτότητα παντού στο χώρο είναι ε_0.

(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο. Να εκφρασθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αναφοράς *xyz* [δηλαδή οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_w να εκφραστούν ως $E_w(x,y,z)$ όπου $w = x, y, z$]. (β) Να προσδιοριστεί η συνθήκη ανάμεσα σε ρ_0 και λ_0 ώστε να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του επιπέδου *yz* τα οποία είναι έξω από την κυλινδρική οπή.



Άσκηση 6:

Η κάτωθι κυλινδρική διάταξη αγωγών μπορεί να θεωρηθεί απείρου μήκους. Στον εσωτερικό αγωγό ακτίνας a ρέει ηλεκτρικό ρεύμα προς την διεύθυνση +z με χωρική πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J_a}(r_T) = J_0\, r_T^2/a^2\ \hat{i}_z$ όπου r_T η ακτινική απόσταση από τον άξονα των κυλίνδρων και J_0 γνωστή σταθερά. Το ρεύμα επιστρέφει από το εξωτερικό κυλινδρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής ακτίνας c. Λόγω του επιδερμικού φαινομένου η χωρική πυκνότητα στο κυλινδρικό κέλυφος είναι $\mathbf{J_b}(r_T) = J_1 \exp(-k\, r_T)\, (-\hat{i}_z)$ όπου k και J_1 σταθερές. Να υπολογισθεί η σταθερά J_1 αν είναι γνωστή η k. Επίσης να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου παντού στο χώρο όπως και η μαγνητική επαγωγή. Η διαπερατότητα είναι παντού μ_0 εκτός από τις περιοχές πού καταλαμβάνονται από τα αγώγιμα υλικά που είναι μ.

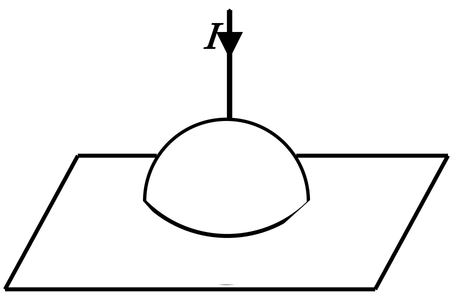


Άσκηση 7:

Νηματοειδές ρεύμα I διαρρέει το θετικό ημιάξονα z με φορά προς τα αρνητικά z όπως φαίνεται στο σχήμα. Το ρέυμα διοχετεύεται ομοιόμορφα στο αγώγιμο ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας R και κατόπιν στο αγώγιμο απέραντο επίπεδο και πάλι ομοιόμορφα και ακτνικά.

(α) Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου παντού στο χώρο.

(β) Να βρεθούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος τόσο στο ημισφαιρικό κέλυφος όσο και στο απέραντο επίπεδο.

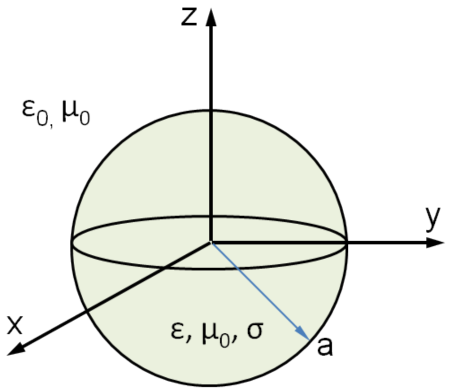


Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a με επιτρεπτότητα ε, διαπερατότητα μ_0, και ειδική αγωγιμότητα σ έχει την χρονική στιγμή $t = 0$ ηλεκτρικό φορτίο Q_0 ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. Ο υπόλοιπος χώρος έξω από την σφαίρα είναι αέρας με επιτρεπτότητα ε_0 και διαπερατότητα μ_0.

(α) [15%] Να βρεθούν σαν συνάρτηση του χρόνου το ηλεκτρικό πεδίο, καθώς και όποιες πυκνότητες φορτίου και ρεύματος υπάρχουν σε όλο τον χώρο.

(β) [15%] Να δείξετε (χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell) ότι το μαγνητικό πεδίο παραμένει πάντα μηδενικό για κάθε χρονική στιγμή.

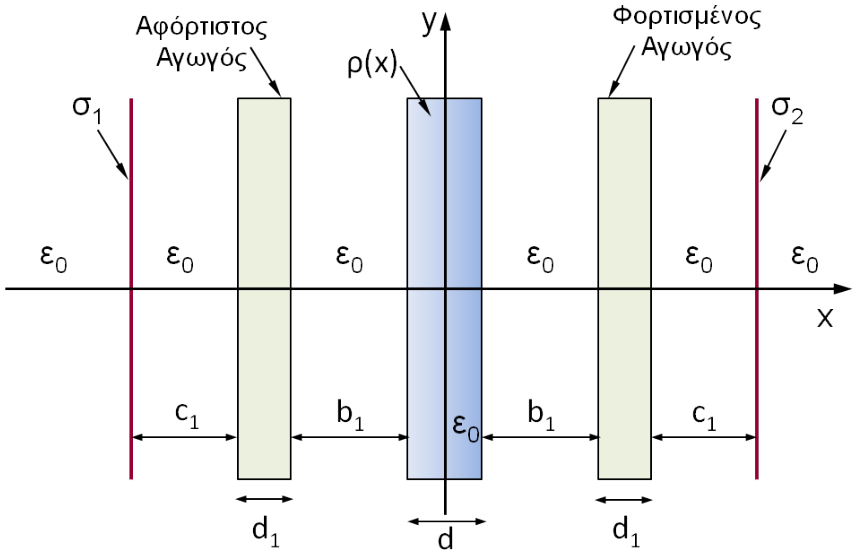


Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Δίδεται το κάτωθι σύστημα απέραντων κατανομών (ως προς το επίπεδο *yz*). Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ε_0. Η αριστερή αγώγιμη πλάκα είναι αφόρτιστη ενώ η δεξιά αγώγιμη πλάκα είναι φορτισμένη με φορτίο ανά επιφάνεια q (σε C/m^2). Η κεντρική πλάκα έχει χωρικό φορτίο $\rho(x) = \rho_0 \cos(\pi x/d)$ (όπου ρ_0 γνωστή σταθερά). Επίσης υπάρχουν αριστερά και δεξιά οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα.

(α) [20%] Να βρεθούν οι επαγόμενες επιφανειακές πυκνότητες φορτίου πάνω στις επιφάνειες των αγώγιμων πλακών.

(β) [10%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο *x* μέσα στην κεντρική χωρικά-φορτισμένη πλάκα. Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι μηδενικό στο $\pm\infty$;



Άσκηση 10: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

Στην ημικυλινδρική περιοχή $r_T < a$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ (με άπειρο μήκος στην z διεύθυνση), υπάρχει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J} = +\mathbf{i}_x J_0$, όπου J_0 είναι γνωστή σταθερά. Επίσης υπάρχουν και τα ακόλουθα (άγνωστα) επιφανειακά ηλεκτρικά ρεύματα: (1) $\vec{K}_1 = \mathbf{i}_\varphi K_1(\varphi)$, στην ημικυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, με $K_1(\varphi = 0) = J_0 a$ και (2) $\vec{K}_2 = \mathbf{i}_y K_2(y)$, στην επίπεδη επιφάνεια $|y| \leq a$. Άλλα ρεύματα δεν υπάρχουν, ούτε υπάρχουν πουθενά ηλεκτρικά φορτία. Όλος ο χώρος έχει διαπερατότητα μ_0.

(α) [20%] Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $K_1(\varphi)$ και $K_2(y)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον <u>νόμο διατήρησης φορτίου</u>**.**

(β) [20%] Να υπολογιστεί παντού το μαγνητικό πεδίο. Μετά να υπολογιστούν και πάλι οι άγνωστες ρευματικές κατανομές χρησιμοποιώντας μόνο το μαγνητικό πεδίο.