ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - *e-mail:* eglytsis@central.ntua.gr - *www:* http://users.ntua.gr/eglytsis/

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Α (Τμήμα Μ-Π)
ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 1

Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5,6

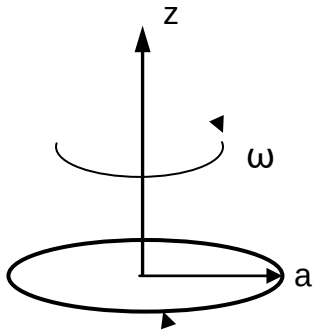
Ασκήσεις για παράδοση: No. 7, 8, 9

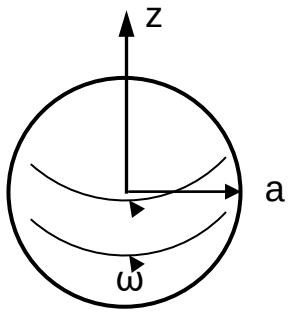
Ημερομηνία Παράδοσης: 6 Μαρτίου 2025

Άσκηση 1:

(α) Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q διανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο σφαίρας ακτίνας a. Η σφαίρα αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κάποια διάμετρό της. Υποθέσατε ότι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δεν επηρεάζεται από την περιστροφή. Να βρεθεί η χωρική πυκνότητα ρεύματος παντού μέσα στην σφαίρα. Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από ημικύκλιο ακτίνας a σταθερό στο χώρο και με την βάση του πάνω στον άξονα περιστροφής.

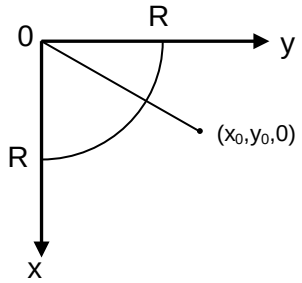
(β) Συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q διανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια δίσκου ακτίνας a. Ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονά του (άξονας των z). Υποθέσατε ότι η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου δεν επηρεάζεται από την περιστροφή. Να βρεθεί η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος παντού πάνω στον δίσκο. Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από τμήμα του δίσκου ακτίνας a σταθερό στο χώρο και με την αρχή του πάνω στον άξονα περιστροφής.





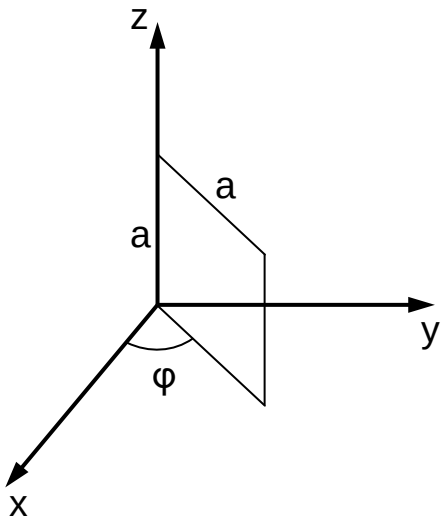
Άσκηση 2:

Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = ax\hat{\imath}_x + bxy\hat{\imath}_y$ διαρρέει το επίπεδο xy ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. (α) Να βρεθούν οι μονάδες των σταθερών a και b. (β) Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή των αξόνων (0,0,0) με το σημείο $(x_0, y_0, 0)$ όπου $x_0, y_0 > 0$. (γ) Να υπολογισθεί το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από το τμήμα κύκλου του επιπέδου xy με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R με $x,y > 0$.



Άσκηση 3:

Σε κάποια χρονική στιγμή η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος ενός συστήματος δίδεται από την σχέση $\vec{J} = A(x^3\hat{\imath}_x + y^3\hat{\imath}_y + z^3\hat{\imath}_z)$ όπου A είναι μιά θετική σταθερά. (α) Ποιά είναι η μονάδα μέτρησης της σταθεράς A; (β) Σε αυτή την χρονική στιγμή ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου στο σημείο (a, a, a); (γ) Θεωρήστε το συνολικό φορτίο Q που περιέχεται μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων. Κατά την δεδομένη χρονική στιγμή ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής του Q ως πρός τον χρόνο; Το Q αυξάνεται ή μειώνεται σαν συνάρτηση του χρόνου; (δ) Κατά την δεδομένη χρονική στιγμή ποιό είναι το συνολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από το τετράγωνο πλευράς a που φαίνεται στο κάτωθι σχήμα;

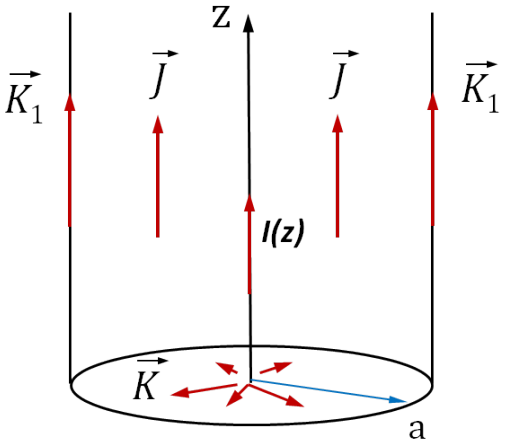


Άσκηση 4:

Έστω χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J} = [400 \sin\theta/(r^2 + 4)\,]\,\hat{\imath}_r$ (A/m^2).
(α) Να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από μέρος σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r_0 = 0.8m περιορι-σμένης από τις πολικές γωνίες $\theta_1 = 0.1\pi$ και $\theta_2 = 0.3\pi$ και $0 < \varphi \leq 2\pi$. (β) Να βρεθεί η μέση τιμή της πυκνότητας ρεύματος πάνω σε αυτή την επιφάνεια. (γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής (ως προς τον χρόνο) του ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκεται στον όγκο που περικλείεται από την προηγούμενη επιφάνεια και περιορίζεται ως προς την διεύθυνση z από επίπεδα κάθετα στο z στις γωνίες θ_1 και θ_2.

Άσκηση 5:

Στον επίπεδο δίσκο ακτίνας a (στο επίπεδο z = 0) υπάρχει γνωστό επιφανειακό ρεύμα επιφανειακής πυκνότητας $\vec{K} = \hat{\imath}_{r_T} K_0 \left(\frac{a}{r_T}\right) cos(\frac{2\pi r_T}{a})$. Τα μόνα άλλα ρεύματα που υπάρχουν αλλά δεν είναι γνωστή η τιμή τους είναι: (1) στον ημιάξονα $z > 0$ υπάρχει νηματοειδές ρεύμα *I(z)*, (2) στην κυλινδρική επιφάνεια r_T = a, z > 0, υπάρχει επιφανειακό ρεύμα $\overrightarrow{K_1} = \hat{\imath}_z K_1(z)$, και (3) στον ημίχωρο r_T < a, z > 0, υπάρχει ρεύμα με χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \hat{\imath}_z J(r_T, z)$. Ρεύματα μπορεί να υπάρχουν στο. +H μαγνητική διαπερατότητα είναι παντού μ_0. Να προσδιορισθούν τα άγνωστα ρεύματα **<u>χρησιμοποιώντας τον νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου</u>.**



Άσκηση 6:

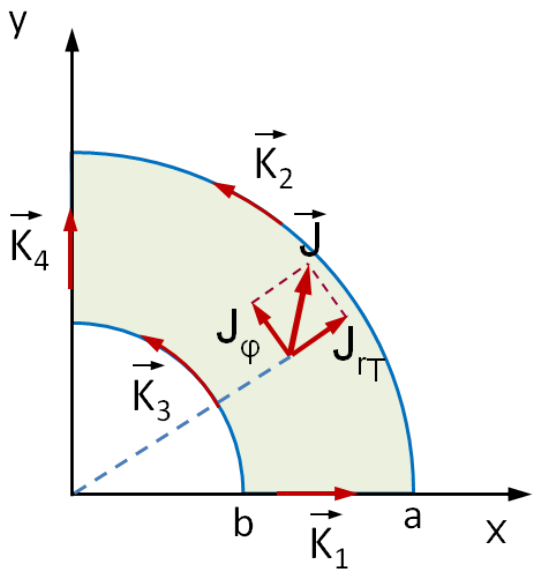
Το κάτωθι σχήμα δείχνει τη διατομή μιας διάταξης με άπειρο μήκος κατά τον άξονα z. Όλος ο χώρος είναι μη μαγνητικός δηλαδή υπάρχει παντού διαπερατότητα μ_0. Στη διάταξη αυτή, σε μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) ροή ρεύματος είναι δυνατό να υπάρχει μόνο: (1) Στην περιοχή $b < r_T < a$, $0 < \varphi < \pi/2$, ως χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{\imath}_{rT} J_T(r_T, \varphi) + \hat{\imath}_\varphi J_0(a/r_T)\sin^2\varphi$, όπου J_0 είναι σταθερή ποσότητα, (2) στα επίπεδα όρια $b < r_T < a$, $\varphi = 0$ και $b < r_T < a$, $\varphi = \pi/2$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_1 = \hat{\imath}_{rT} K_1(r_T)$ και $\vec{K}_4 = \hat{\imath}_{rT} K_4(r_T)$, αντίστοιχα, και (3) στις κυλινδρικές επιφάνειες $r_T = a$ και $r_T = b$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_2 = \hat{\imath}_\varphi K_2(\varphi)$ και $\vec{K}_3 = \hat{\imath}_\varphi K_0 \sin^2\varphi$ για $0 < \varphi < \pi/2$ αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $K_1(r_T)$, $K_2(\varphi)$, $K_4(r_T)$ και την χωρική συνιστώσα $J_T(r_T, \varphi)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον **νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου**.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):
Θεωρήστε a = 2m (όλες οι αποστάσεις σε m), b = 1m, J_0 = 1 A/m^2, και K_0 = 1 A/m.

(β) Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδυνάμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση του μέτρου της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{J}|$ στον καρτεσιανό χώρο $0m \le x,y \le 2m$ (στο επίπεδο *xy*). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J), shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{J}|$ στο επίπεδο *xy*. Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της $|\vec{J}|$ στο επίπεδο *xy* με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές J_{max}[0:0.05:1] A/m^2 (J_{max} είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου $|\vec{J}|$ και [0:0.05:1] σημαίνει βήματα 0.05 από 0 έως 1).

(γ) Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}$ στο επίπεδο *xy* στον καρτεσιανό χώρο $0m \le x,y \le 2m$. Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. **Επίσης** να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο *xy* **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline (**ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο *MatLab Exchange* (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines.



Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [25%]

Το κάτωθι σχήμα δείχνει τη διατομή μιας διάταξης με άπειρο μήκος κατά τον άξονα z. Όλος ο χώρος είναι μη μαγνητικός δηλαδή υπάρχει παντού διαπερατότητα μ_0. Στη διάταξη αυτή, σε μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$) ροή ρεύματος είναι δυνατό να υπάρχει μόνο:

(1) Στην περιοχή $r_T < a$, $0 < \varphi < 2\pi/3$, ως χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{\imath}_{rT} J_T(r_T, \varphi) + \hat{\imath}_\varphi J_0 \cos\varphi$, όπου J_0 είναι σταθερή ποσότητα, και

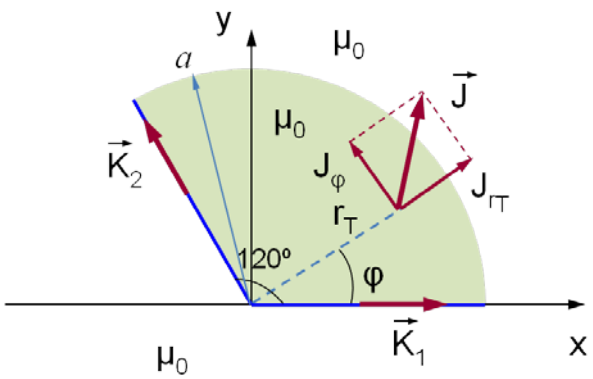
(2) Στα επίπεδα όρια $r_T < a$, $\varphi = 0$ και $r_T < a$, $\varphi = 2\pi/3$, ως επιφανειακές πυκνότητες $\vec{K}_1 = \hat{\imath}_{rT} K_1(r_T)$ και $\vec{K}_2 = \hat{\imath}_{rT} K_2(r_T)$, αντίστοιχα.

(α) **[10%]** Υπολογίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος $K_1(r_T)$ και $K_2(r_T)$ και την χωρική συνιστώσα $J_T(r_T, \varphi)$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα τον **νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου**.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο): Θεωρήστε a = 1m (όλες οι αποστάσεις σε m), J_0 = 1 A/m^2.

(β) **[10%]** Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδυνάμου υπολογιστικού πακέτου όπως *Python*, *Octave*, *Mathematica*, κλπ.) γραφική απεικόνιση του μέτρου της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{J}|$ στον καρτεσιανό χώρο $-0.5\text{m} \le x \le 1\text{m}$, $0\text{m} \le y \le 1\text{m}$ (στο επίπεδο xy). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J), shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy. Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της $|\vec{J}|$ στο επίπεδο xy με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές [0.25:0.25:5] A/m^2 ([0.25:0.25:5] σημαίνει βήματα 0.25 από 0.25 έως 5).

(γ) **[5%]** Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}$ στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $-0.5\text{m} \le x \le 1\text{m}$, $0\text{m} \le y \le 1\text{m}$ (στο επίπεδο xy). Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. **Επίσης** να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο xy **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline** (ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines.

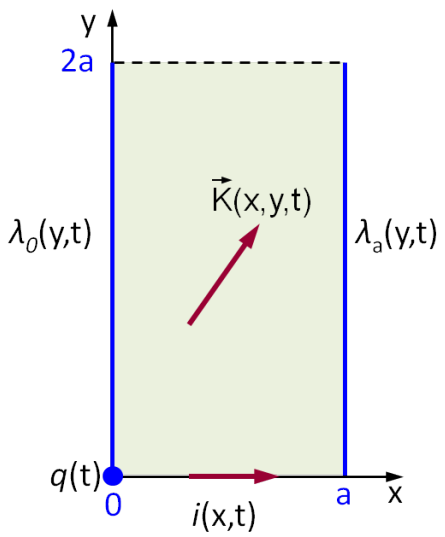


Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [35%]

Η διάταξη του σχήματος **είναι διδιάστατη** (**βρίσκεται στο επίπεδο** $z = 0$). Στην διάταξη αυτή είναι δυνατό να υπάρχουν **το πολύ** οι εξής κατανομές ηλεκτρικού φορτίου και ρεύματος:
Στην ημιάπειρη ταινία $0 < x < a$, $y > 0$: Επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = \hat{\imath}_x K_x + \hat{\imath}_y K_y$, με $K_x(x, y, t) = K_0 \sin(\pi x/2a)\exp(-\pi y/2a)\sin(\omega t)$ και $K_y(x, y = \infty, t) = 0$.
Στο ευθύγραμμο τμήμα $0 < x < a$, $y = 0$: Νηματοειδές ρεύμα $i(x, t)$ [χωρίς νηματοειδές φορτίο].
Στις ημιευθείες $y > 0$, $x = 0$ και $x = a$: Νηματοειδή (γραμμικά) φορτία $\lambda_0(y, t)$ και $\lambda_a(y, t)$, αντίστοιχα [χωρίς νηματοειδή ρεύματα].
Στην αρχή των αξόνων $x = 0$, $y = 0$: Σημειακό φορτίο $q(t)$.
Είναι γνωστό, ότι αρχικά είναι $\lambda_0(y, t = 0) = \lambda_a(y, t = 0) = 0$ και $q(t = 0) = 0$.
(α) **[20%]** Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $K_y(x, y, t)$, $i(x, t)$, $\lambda_0(y, t)$, $\lambda_a(y, t)$ και $q(t)$.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο): Θεωρήστε a = 1m (όλες οι αποστάσεις σε m), K_0 = 1 A/m, ω = 2π (rad/sec), και t =1/4 sec.

(β) **[7%]** Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδυνάμου υπολογιστικού πακέτου όπως *Python*, *Octave*, *Mathematica*, κλπ.) γραφική απεικόνιση του μέτρου της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{K}|$ στον καρτεσιανό χώρο $0 \le x \le a$, $0 \le y \le 2a$ (στο επίπεδο xy). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,K), shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{K}|$ στο επίπεδο xy. Επίσης να βρεθούν οι γραμμές σταθερού μέτρου της $|\vec{K}|$ στο επίπεδο xy με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι γραμμές σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές K_{max}[0:0.05:1]A/m ([0:0.05:1] σημαίνει βήματα 0.05 από 0 έως 1) και K_{max} είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος.
(γ) **[8%]** Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{K}$ στο επίπεδο xy στον καρτεσιανό χώρο $0 \le x \le a$, $0 \le y \le 2a$ (στο επίπεδο xy). Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. **Επίσης** να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της επιφανειακής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο xy **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline** (ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines



Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

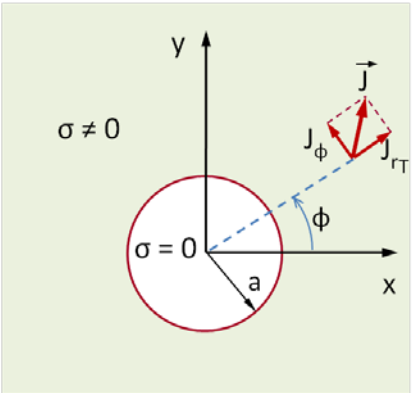
Σε άπειρο αγώγιμο χώρο με ειδική αγωγιμότητα σ, υπάρχει μια κυλινδρική περιοχή ακτίνας a με κέντρο στην αρχή των αξόνων όπου υπάρχει κενό. Η διάταξη είναι ομοιόμορφη ως προς τον άξονα z και χρονοσταθερή. Στον αγώγιμο χώρο υπάρχει μια πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J} = \hat{\imath}_{rT} J_T(r_T, \varphi) + \hat{\imath}_\varphi J_0(1 + a^2/r_T^2)\cos\varphi$, όπου J_0 γνωστή σταθερά. Σε όλο τον χώρο υπάρχει η διαπερατότητα του κενού μ_0.

(α) **[15%]** Υπολογίστε την χωρική συνιστώσα $J_T(r_T, \varphi)$ με χρήση του ΝΔΦ (νόμου διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου) τόσο στην σημειακή όσο και στην ολοκληρωτική του μορφή.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο): Θεωρήστε a = 1m (όλες οι αποστάσεις σε m), J_0 = 1 A/m^2.

(β) **[10%]** Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδυνάμου υπολογιστικού πακέτου όπως *Python*, *Octave*, *Mathematica*, κλπ.) γραφική απεικόνιση του μέτρου της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $|\vec{J}|$ στον καρτεσιανό χώρο $-2a \le x \le 2a$, $-2a \le y \le 2a$ (στο επίπεδο *xy*). Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,J), shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του μέτρου $|\vec{J}|$ στο επίπεδο *xy*. Επίσης να βρεθούν οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου της $|\vec{J}|$ στο επίπεδο *xy* με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι επιφάνειες (γραμμές) σταθερού μέτρου να βρεθούν για τιμές J_{max}[0:0.05:1]A/m^2 ([0:0.05:1] σημαίνει βήματα 0.05 από 0 έως 1) και J_{max} είναι η μέγιστη τιμή του μέτρου της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος.

(γ) **[15%]** Να γίνει μια γραφική απεικόνιση της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}$ στο επίπεδο *xy* στον καρτεσιανό χώρο $-2a \le x \le 2a$, $-2a \le y \le 2a$ (στο επίπεδο *xy*). Προτείνω την χρήση των **quiver** ΚΑΙ **streamslice** (Matlab) ή ισοδυνάμων. **Επίσης** να υπολογιστούν οι δυναμικές γραμμές της χωρικής πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος στο επίπεδο *xy* **κάνοντας χρήση** της συνάρτησης **streamline** (ή ισοδύναμης). Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines.



Σημείωση: Σε όσες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει **υποχρεωτικά** (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.