Παράδειγμα:

Ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου ενός επιπέδου κύματος που διαδίδεται σε μη μαγνητικό, ομογενές, ισοτροπικό υλικό χωρίς απώλειες δίδεται ως εξής:

$$\vec{H} = H_o [2\hat{\imath}_x + b\hat{\imath}_y + \hat{\imath}_z] \exp [-j \frac{3\omega}{c} (x+y-3z)]$$

όπου H_o πραγματική σταθερά (σε A/m), $\omega = 2\pi f$, f = συχνότητα του επιπέδου κύματος, και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Να προσδιοριστούν:

(α) Η σταθερά b ώστε ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου να αντιπροσωπεύει επίπεδο κύμα.

(β) Η σχετική επιτρεπτότητα του μέσου που διαδίδεται το κύμα.

(γ) Το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$.

(δ) Η κυματική αντίσταση του μέσου διάδοσης.

(ε) Ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$.

(στ) Το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο.

(ζ) Η πόλωση του επιπέδου κύματος.

(α) $\vec{H} = H_o \left[2\hat{i}_x + b\hat{i}_y + \hat{i}_z \right] \exp\left[-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z) \right]$

Απο τις εξισώσεις του Maxwell, $\vec{H}\cdot\vec{k} = 0 \Rightarrow \hat{k}\cdot\vec{H} = 0$

$\hat{k} = \dfrac{\hat{i}_x + \hat{i}_y - 3\hat{i}_z}{\sqrt{11}}$ αφού $\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{3\omega}{c}(x+y-3z)$

$\vec{r} = x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + z\hat{i}_z$

Επομένως $\hat{k}\cdot\vec{H} = 0 \Rightarrow \dfrac{\hat{i}_x + \hat{i}_y - 3\hat{i}_z}{\sqrt{11}} \cdot H_o(2\hat{i}_x + b\hat{i}_y + \hat{i}_z)\exp(-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{H_o}{\sqrt{11}}(2+b-3)\exp(-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)) = 0 \Rightarrow b = 3-2 = 1 \Rightarrow \underline{b=1}$

(β) $k = |\vec{k}| = \dfrac{3\omega}{c}\sqrt{11} \Rightarrow \omega\sqrt{\mu_o\varepsilon} = \dfrac{3\omega}{c}\sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{\mu_o\varepsilon_o}\sqrt{\varepsilon_r} = \dfrac{3\sqrt{11}}{c} \Rightarrow$

$\dfrac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \dfrac{3\sqrt{11}}{c} \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{99} \Rightarrow \underline{\varepsilon_r = 99}$

(γ) $\vec{k} = \dfrac{3\omega}{c}\sqrt{11}\underbrace{\left(\dfrac{\hat{i}_x + \hat{i}_y - 3\hat{i}_z}{\sqrt{11}}\right)}_{\hat{k}} = \dfrac{3\omega}{c}(\hat{i}_x + \hat{i}_y - 3\hat{i}_z)$

(δ) $Z = \sqrt{\dfrac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_o}{\epsilon_o\varepsilon_r}} = \sqrt{\dfrac{\mu_o}{\epsilon_o}}\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{Z_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \dfrac{377}{\sqrt{99}} \simeq 37.9\,\Omega$

(ε) $\vec{k}\times\vec{H} = -\omega\epsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\dfrac{k}{\omega\epsilon}(\hat{k}\times\vec{H}) = -\dfrac{\cancel{\omega}\sqrt{\mu_o\epsilon}}{\cancel{\omega}\epsilon}(\hat{k}\times\vec{H})$

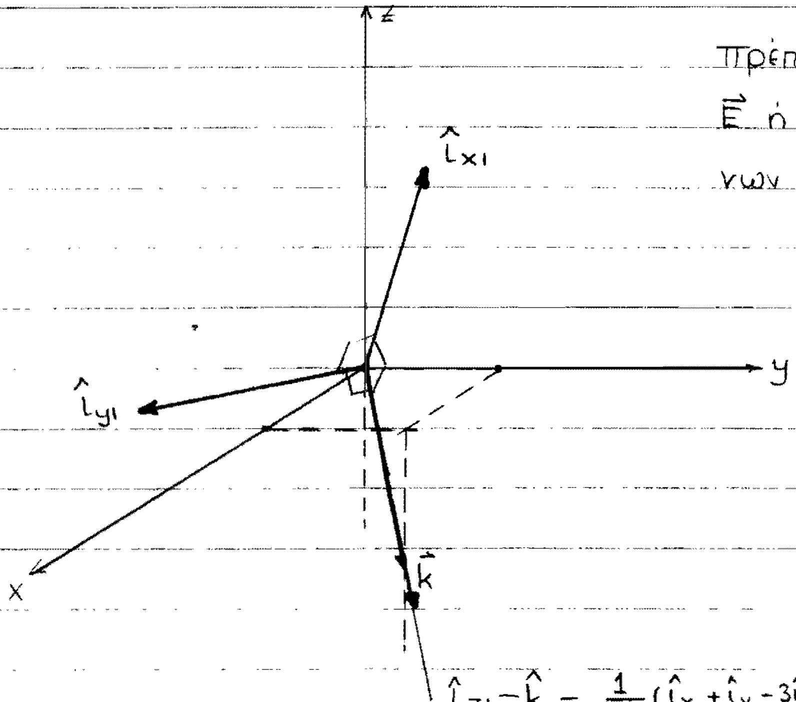
$= -\sqrt{\dfrac{\mu_o}{\epsilon}}(\hat{k}\times\vec{H}) = -Z(\hat{k}\times\vec{H})$

$$\vec{E} = -Z\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}H_o e^{-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)} =$$

$$= -\frac{37.9H_o}{\sqrt{11}}e^{-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)}\left[4\hat{i}_x - 7\hat{i}_y - \hat{i}_z\right]$$

(στ) $\vec{\mathcal{E}} = \mathrm{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\} = -11.4H_o(4\hat{i}_x - 7\hat{i}_y - \hat{i}_z)\cos\left[\omega t - \frac{3\omega}{c}(x+y-3z)\right]$

(J)



Πρέπει να εκφράσουμε το $\vec{E}$ ή $\vec{H}$ στο σύστημα συντεταγμένων $x_1 y_1 z_1$

$$\hat{i}_{z1} = \hat{k} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\hat{i}_x + \hat{i}_y - 3\hat{i}_z)$$

$$\hat{i}_{y1} = \frac{\hat{i}_{z1} \times \hat{i}_z}{|\hat{i}_{z1} \times \hat{i}_z|} = \frac{1}{|\hat{i}_{z1} \times \hat{i}_z|} \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{|\hat{i}_{z1} \times \hat{i}_z|}(\hat{i}_x - \hat{i}_y)\frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow$$

$$\hat{i}_{y1} = \frac{1}{\sqrt{2}/\sqrt{11}}(\hat{i}_x - \hat{i}_y)\frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}_x - \hat{i}_y)$$

Τέλος $\hat{i}_{x1} = \hat{i}_{y1} \times \hat{i}_{z1} = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{22}}(3\hat{i}_x + 3\hat{i}_y + 2\hat{i}_z)$

Τα μοναδιαία διανύσματα των συστημάτων xyz & $x_1 y_1 z_1$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{x1} \\ \hat{i}_{y1} \\ \hat{i}_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 3/\sqrt{22} & 2/\sqrt{22} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} & -3/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{x1} \\ \hat{i}_{y1} \\ \hat{i}_{z1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{H} = [H_x \hat{i}_x + H_y \hat{i}_y + H_z \hat{i}_z] = [H_x \ H_y \ H_z] \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} =$$

$$= [H_x \;\; H_y \;\; H_z] \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{x_1} \\ \hat{i}_{y_1} \\ \hat{i}_{z_1} \end{bmatrix} =$$

$$= H_o [2 \;\; 1 \;\; 1] \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{x_1} \\ \hat{i}_{y_1} \\ \hat{i}_{z_1} \end{bmatrix} e^{-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)} \Rightarrow$$

$$\vec{H} = H_o [\, 11/\sqrt{22} \;\; 1/\sqrt{2} \;\; 0 \,] \begin{bmatrix} \hat{i}_{x_1} \\ \hat{i}_{y_1} \\ \hat{i}_{z_1} \end{bmatrix} e^{-j\frac{3\omega}{c}(x+y-3z)}$$

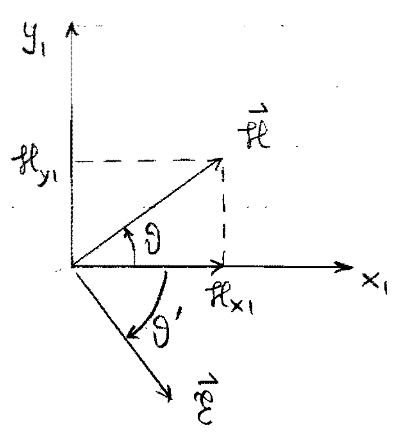
Το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$ στο σύστημα αναφοράς $x_1 y_1 z_1$ πρέπει να είναι στην διεύθυνση z_1 εκ κατασκευής του $x_1 y_1 z_1$. Αυτό επαληθεύεται εύκολα

$$\vec{k} = \frac{3\omega}{c} [1 \;\; 1 \;\; -3] \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = \frac{3\omega}{c} [1 \;\; 1 \;\; -3] \begin{bmatrix} 3/\sqrt{22} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{22} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{22} & 0 & -3/\sqrt{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{x_1} \\ \hat{i}_{y_1} \\ \hat{i}_{z_1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3\omega}{c} [\, 0 \;\; 0 \;\; \sqrt{11} \,] \begin{bmatrix} \hat{i}_{x_1} \\ \hat{i}_{y_1} \\ \hat{i}_{z_1} \end{bmatrix} = \frac{3\omega\sqrt{11}}{c} \hat{i}_{z_1}$$

Επομένως $\vec{k}\cdot\vec{r}_1 = \frac{3\omega\sqrt{11}}{c} z_1$ και το μαγνητικό πεδίο στο $x_1 y_1 z_1$ σύστημα γράφεται ως εξής:

$$\vec{H} = \left[H_o \frac{11}{\sqrt{22}} \hat{i}_{x_1} + H_o \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i}_{y_1} \right] e^{-j\frac{3\omega\sqrt{11}}{c} z_1}$$



$$\tan\vartheta = \frac{\mathcal{H}_{y_1}}{\mathcal{H}_{x_1}} = \frac{1/\sqrt{2}}{11/\sqrt{22}} \Rightarrow$$

$$\vartheta = 16.7787^\circ$$

γραμμική πόλωση

Ως προς το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ η γωνία $\vartheta' = 90 - \vartheta = 73.2213^\circ$

Παράδειγμα: Επίπεδο κύμα διαδίδεται σε μη μαγνητικό, ομογενές, και ισοτροπικό μέσο με συχνότητα $f = 1\,GHz$. Το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο δίδεται από την σχέση (y in meters)

$$\vec{\mathcal{E}} = e^{-10y}\left[5\cos[2\pi 10^9 t - 75y]\,\hat{i}_x + 8\sin[2\pi 10^9 t - 75y]\,\hat{i}_z \right] \quad (V/m)$$

(α) Να βρεθεί ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$.

(β) Να βρεθεί ο φασιθέτης του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$.

(γ) Να βρεθεί η στιγμιαία τιμή του μαγνητικού πεδίου $\vec{\mathcal{H}}$.

(δ) Να βρεθεί η σχετική επιτρεπτότητα ε_r του μέσου.

(ε) Να βρεθεί η ειδική αγωγιμότητα σ του μέσου.

(στ) Μπορεί το μέσο να χαρακτηριστεί σαν "καλός αγωγός" ή "χαμηλής απώλειας" διηλεκτρικό; Εξηγήστε.

(ζ) Να βρεθεί η πόλωση του επιπέδου κύματος.

Από τον όρο $e^{-10y} = e^{-\alpha y}$ καταλαβαίνουμε ότι το μέσο έχει απώλειες. Επίσης από τον όρο $-75y = -\beta y$ καταλαβαίνουμε ότι το κύμα διαδίδεται στην θετική διεύθυνση του y-άξονα. Επίσης $\alpha = 10\, m^{-1}$ και $\beta = 75 m^{-1}$.

(α) $\vec{\mathcal{E}} = Re\{\vec{E} e^{j\omega t}\}$ $\qquad 1\,GHz = 10^9\,Hz$

$$\vec{\mathcal{E}} = e^{-10y}\left[5\cos(\underbrace{2\pi 10^9}_{\omega} t - \underbrace{75y}_{\beta y})\,\hat{i}_x + 8\cos(2\pi 10^9 t - 75y - \tfrac{\pi}{2})\,\hat{i}_z\right]$$

αφού $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$. Επομένως

$$\vec{E} = e^{-10y}\left[5\hat{i}_x + 8e^{-j\pi/2}\hat{i}_z\right]e^{-j75y} \quad (V/m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = e^{-10y}e^{-j75y}\left[5\hat{i}_x - j8\hat{i}_z\right]} \quad (V/m)$$

(β) $\vec{k}_c \times \vec{E} = \omega\mu_0 \vec{H}$ $\qquad$ (μη μαγνητικό μέσο $\rightsquigarrow$ $\mu = \mu_0$)

$$\vec{H} = \frac{k_c}{\omega\mu_0}(\hat{k}_c \times \vec{E}) = \frac{jk_c}{j\omega\mu_0}(\hat{k}_c \times \vec{E}) = \frac{\gamma}{j\omega\mu_0}(\hat{k}_c \times \vec{E}) =$$

$$= \frac{\alpha + j\beta}{j\omega\mu_0}(\hat{k}_c \times \vec{E}) \Rightarrow$$

$$\vec{H} = \frac{10 + j75}{j\,2\pi 10^9\, 4\pi . 10^{-7}}\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -j8 \end{vmatrix} e^{-10y}e^{-j75y} =$$

$$= 9.58 \cdot 10^{-3} e^{-j7.6^\circ} e^{-10y} e^{-j75y}\left[\hat{i}_x(\underbrace{-j}_{e^{j\pi/2}}8) + \hat{i}_z(-5)\right] \Rightarrow$$

$$\underline{\vec{H} = -9.58 . 10^{-3} e^{-j7.6^\circ} e^{-10y} e^{-j75y}\left[j8\hat{i}_x + 5\hat{i}_z\right]} \quad (A/m)$$

(γ) $\vec{\mathcal{H}} = Re\{\vec{H}e^{j\omega t}\} = -9.58 . 10^{-3} e^{-10y}\left[8\cos[2\pi 10^9 t - 75y - 7.6^\circ + \frac{\pi}{2}]\hat{i}_x + 5\cos[2\pi 10^9 t - 75y - 7.6^\circ]\hat{i}_z\right]$

$$\underline{\vec{\mathcal{H}} = -9.58 . 10^{-3} e^{-10y}\left[8\cos(2\pi 10^9 t - 75y + 82.4^\circ)\hat{i}_x + 5\cos(2\pi 10^9 t - 75y - 7.6^\circ)\hat{i}_z\right]}$$

(δ) $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_o(\sigma + j\omega\epsilon)} \Rightarrow$

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu_o\epsilon = -\omega^2\mu_o\epsilon_o\varepsilon_r$$

και $2\alpha\beta = \omega\mu_o\sigma$

Όμως $\alpha = 10m^{-1}$ & $\beta = 75m^{-1}$, $\omega = 2\pi 10^9$ rad/sec $\mu_o\epsilon_o = 1/c^2$

οπότε

$$\alpha^2 - \beta^2 = -(\omega^2/c^2)\varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\omega^2/c^2)} = \frac{c^2}{\omega^2}(\beta^2 - \alpha^2) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{3 \cdot 10^8}{2\pi \cdot 10^9}\right)^2 (75^2 - 10^2) = 12.595 \sim \underline{\varepsilon_r = 12.595}$$

(ε) $2\alpha\beta = \omega\mu_o\sigma \Rightarrow \sigma = \dfrac{2\alpha\beta}{\omega\mu_o} \Rightarrow$

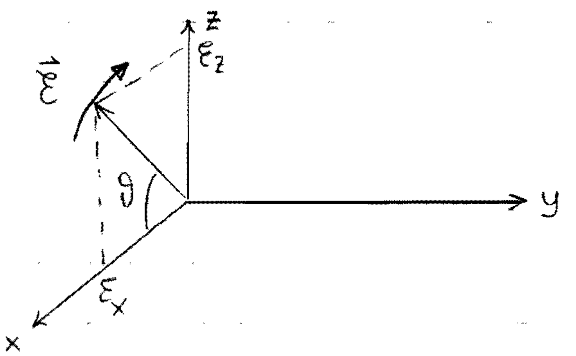
$$\sigma = \frac{2 \cdot 10 \cdot 75}{2\pi 10^9 4\pi 10^{-7}} = 0.19\ 1/\Omega m \sim \underline{\sigma = 0.19\ 1/\Omega m}$$

(στ) $\dfrac{\sigma}{\omega\epsilon} = \dfrac{0.19}{2\pi \cdot 10^9\ 8.854 \cdot 10^{-12}} = 0.271$

Εφόσον $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ δεν είναι ούτε μεγαλύτερο του ένα ούτε πολύ μικρότερο του 1 το μέσο δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ούτε σαν "καλός αγωγός" ούτε "χαμηλής απώλειας" δηλαδή "καλό διηλεκτρικό".

(ζ) $\mathcal{E}_x = 5e^{-10y}\cos(2\pi 10^9 t - 75y)$ και

$\mathcal{E}_z = 8e^{-10y}\sin(2\pi 10^9 t - 75y)$



$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{5e^{-10y}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_z}{8e^{-10y}}\right)^2 = 1$$

Επομένως η πόλωση είναι ελλειπτική (βέβαια λόγω της απορρόφησης ισχύος στο μέσο οι άξονες της έλλειψης φθίνουν εκθετικά όπως το κύμα διαδίδεται μέσα στο υλικό (μέσο) με απώλειες. Μένει να βρούμε αν είναι δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη.

$$\tan\vartheta = \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_x} = \frac{8}{5}\tan(2\pi 10^9 t - 75y)$$

(στο $y=0$) ~ $t \to 0$ $\vartheta \nearrow$ και επομένως η πόλωση είναι αριστερόστροφη ελλειπτική πόλωση.