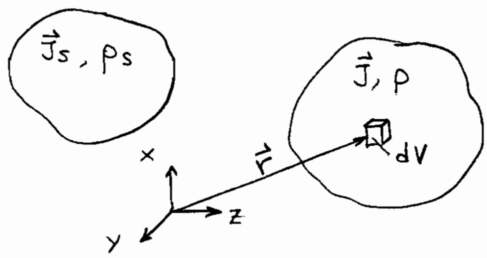
Δυνάμεις και Ροπές:

Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις εκφράζονται με την δύναμη Lorentz: Αν $\vec{E},\vec{B}$ οφείλονται σε κάποια κατανομή ρευμάτων και φορτίων J_s και ρ_s και q κάποιο φορτίο κινούμενο με ταχύτητα $\vec{u}$ τότε η δύναμη Lorentz δίδεται από την εξίσωση:

$$\vec{F} = q\,[\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{u}\times\vec{B}(\vec{r})\,]$$

όπου τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ οφείλονται σε όλες τις πηγές πλην του q.



Αν γενικεύσουμε την προηγούμενη σχέση γιά την δύναμη Lorentz που ασκείται στο σημειακό φορτίο $\rho dV = dq$ τότε

$$d\vec{F} = dq\,[\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{u}\times\vec{B}(\vec{r})\,] = \rho\, dV\,[\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{u}\times\vec{B}\,]$$

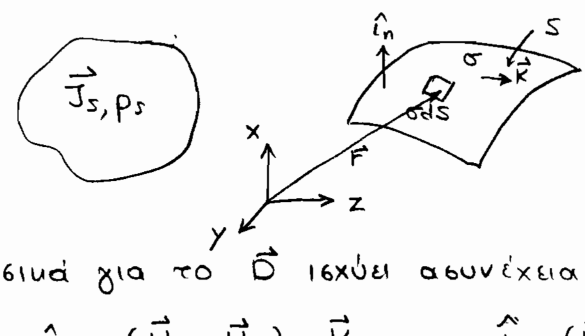
'Ομως $\vec{J} = \dfrac{1}{V}\sum_{j\in V} q_j \vec{u}_j = \rho\,\vec{u}$ και επομένως

$d\vec{F} = dV\,[\,\rho\, E(\vec{r}) + \vec{J}\times\vec{B}(\vec{r})\,]$ όπου η συμβολή του $\rho dV = dq$ και πιθανού $d\vec{J}$ θεωρείται αμελητέα όταν $dV\to 0$ από μακροσκοπικής πλευράς.

Επομένως η χωρική πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης ορίζεται ως εξής:

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho\,\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B}$$

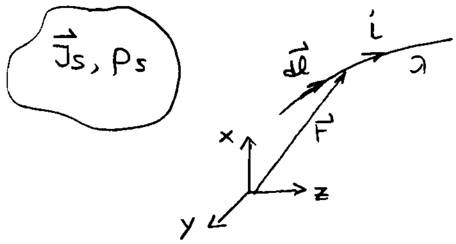
Παρόμοια μπορούμε να ορίσουμε την δύναμη σε επιφανειακές κατανομές φορτίων και ρευμάτων σ και $\vec{K}$:



$$d\vec{F} = \sigma\, dS\,[\,\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\,] = $$
$$= dS\,[\,\sigma\vec{E} + \vec{K}\times\vec{B}\,] \Rightarrow$$
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma\vec{E} + \vec{K}\times\vec{B}$$

Φυσικά για το $\vec{D}$ ισχύει ασυνέχεια πάνω στην S: $\hat{i}_n\cdot(\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma$ και $\hat{i}_n\times(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K}$ ενώ $\hat{i}_n\cdot(\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$ και $\hat{i}_n\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0$.

Τέλος για νηματοειδή ρεύματα και γραμμικά φορτία έχουμε

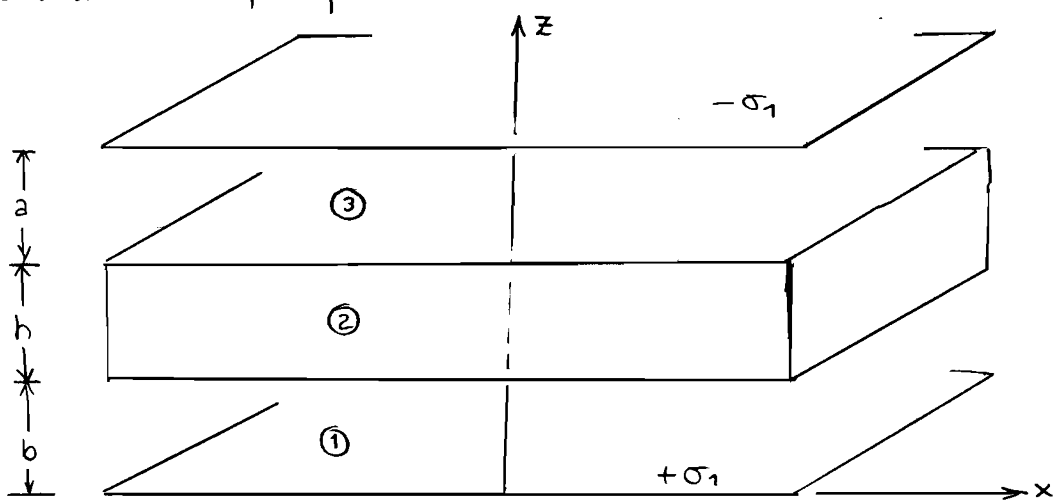


$$d\vec{F} = \lambda\, dl\, [\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}] \Rightarrow$$

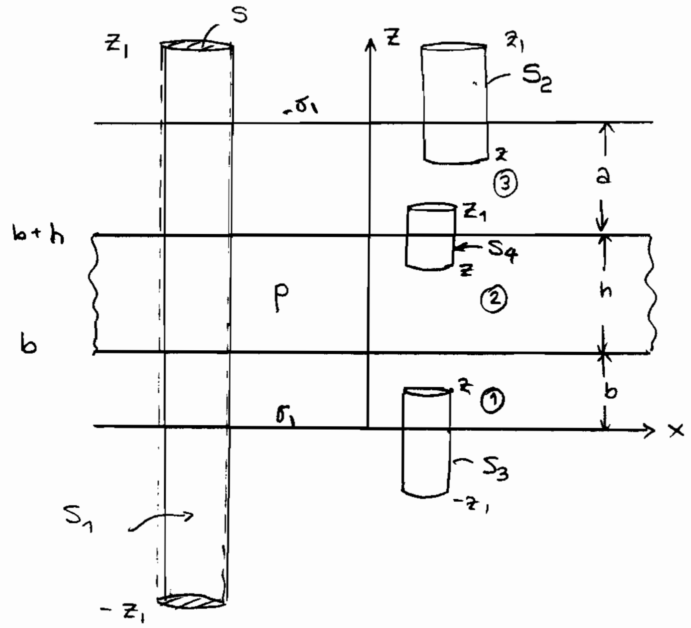
$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dl} = \lambda \vec{E} + \lambda \vec{u} \times \vec{B} = $$

$$= \lambda \vec{E} + i(\hat{l} \times \vec{B})$$

<u>Παράδειγμα:</u> Πλάκα πάχους h φέρει χρονοσταθερό χωρικό φορτίο $\rho(z)$ μεταξύ των οπλισμών πυκνωτού παραλλήλων πλακών. Οι οπλισμοί του πυκνωτού φέρουν επιφανειακά φορτία πυκνοτήτων $\pm\sigma_1$. Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ. Να βρεθεί η ανά μονάδα επιφανείας ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στα σημεία της κατανομής $\rho(z)$.



Αφού το σύστημα έχει άπειρη έκταση στο xy επίπεδο τό ηλεκτρικό πεδίο εξαρτάται μόνο από το z, δηλαδή $\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0 \sim E_x = E_y = 0$ και επομένως $\vec{E} = E(z)\,\hat{i}_z$ όπως έχουμε ήδη βρει σε προηγούμενα παραδείγματα. Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το πεδίο στις περιοχές 1, 2, 3 καθώς εξωτερικά της διάταξης. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον νόμο του Gauss.



Έστω ο κύλινδρος S_1. Λόγω της συμμετρίας των απεράντων επιπέδων πλακών $E(z_1) = -E(-z_1)$ όταν $z_1 > a+b+h$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss στον κύλινδρο S_1 έχουμε:

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = -\sigma_1 S + \sigma_1 S + S\int_b^{b+h} \rho(z')\,dz'$$

Όμως $\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S+} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S-} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S\pi} \vec{D}\cdot d\vec{S} =$

$$= \epsilon E(z_1)\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z S + \epsilon E(-z_1)\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z) S =$$

$$= 2\epsilon S E(z_1)$$

Οπότε $E(z_1) = \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h} \rho(z')\,dz' \qquad z_1 > a+b+h$

$$E(z_1) = -\frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h} \rho(z')\,dz' \qquad z_1 < 0$$

Γιά την περιοχή ③ χρησιμοποιούμε τον κύλινδρο S_2:

$$\epsilon \cancel{S}\, E(z_1)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z + \epsilon \cancel{S}\, E(z)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z) = -\sigma_1 \cancel{S} \Rightarrow$$

$$\epsilon E(z_1) - \epsilon E(z) = -\sigma_1 \Rightarrow \quad E(z) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} + E(z_1) \Rightarrow$$

$$E(z) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h} \rho(z')\,dz' \qquad b+h < z < b+h+a$$

Γιά την περιοχή ① χρησιμοποιούμε τον κύλινδρο S_3:

$$\epsilon E(z)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z \cancel{S} + \epsilon E(-z_1)\,(-\hat{i}_z)\cdot\hat{i}_z \cancel{S} = \sigma_1 \cancel{S} \Rightarrow$$

$$E(z) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h} \rho(z')\,dz'$$

Γιά την περιοχή ② χρησιμοποιούμε τον κύλινδρο S_4.

$$\epsilon E(z_1)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z \cancel{S} + \epsilon E(z)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\cancel{S} = \cancel{S}\int_z^{b+h} \rho(z')\,dz' \Rightarrow$$

$$E(z) = -\frac{1}{\epsilon}\int_z^{b+h}\rho(z')\,dz' + \frac{\sigma_1}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h}\rho(z')\,dz' \Rightarrow$$

$$E(z) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{z}\rho(z')\,dz' - \frac{1}{2\epsilon}\int_z^{b+h}\rho(z')\,dz' \qquad b<z<b+h$$

Ας θεωρήσουμε τώρα και πάλι κύλινδρο διατομής S με τις βάσεις του στις επιφάνειες $z=b$ και $z=b+h$.

Η στοιχειώδης δύναμη στον όγκο dV είναι

$$d\vec{F} = \rho(z)\,dV\,\vec{E}(z) = \hat{i}_z\,\rho(z)\,dV\,E(z) \sim$$

$$\vec{F} = \hat{i}_z\int_V \rho(z)E(z)\,dV = S\,\hat{i}_z\int_b^{b+h}\rho(z)\,E(z)\,dz$$

Όμως για την περιοχή ② $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \rho = \epsilon\frac{dE}{dz}$ εφόσον $E_x = E_y = 0$.

Άρα $\vec{F} = S\,\hat{i}_z\int_b^{b+h} E(z)\,\frac{dE}{dz}\,dz = S\,\hat{i}_z\,[E^2(b+h) - E^2(b)]\,\frac{1}{2}\epsilon$

Επομένως η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι:

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{S} = \hat{i}_z\,\frac{1}{2}\epsilon\,[E(b+h) - E(b)]\,[E(b+h) + E(b)]$$

Όλα τα πεδία στην παραπάνω εξίσωση είναι για την περιοχή ②.

$$E(b+h) = E^{(3)}(b+h) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} + \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h}\rho(z')\,dz'$$

$$E(b) = E^{(1)}(b) = \frac{\sigma_1}{\epsilon} - \frac{1}{2\epsilon}\int_b^{b+h}\rho(z')\,dz'$$

Λόγω της συνέχειας του D_n για $z=b$ και $z=b+h$. Επομένως

$$\vec{f} = \hat{i}_z\,\frac{1}{2}\epsilon\,\frac{1}{\epsilon}\int_b^{b+h}\rho(z')\,dz'\,[E(b+h) + E(b)] =$$

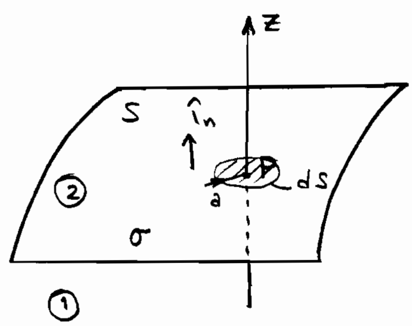
$$= \hat{i}_z\,\sigma\,\frac{1}{2}\,[E(b+h) + E(b)] \quad \text{όπου } \sigma = \int_b^{b+h}\rho(z')\,dz' \text{ είναι}$$

το ανά μονάδα επιφανείας φορτίο της πλάκας.

<u>Ειδική περίπτωση:</u> Αν $\rho(z)=\rho_o$ και $h\to 0$ με $\rho_o\to\infty$ ωστε $\rho_o h\to\sigma=$σταθερό τότε η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας είναι

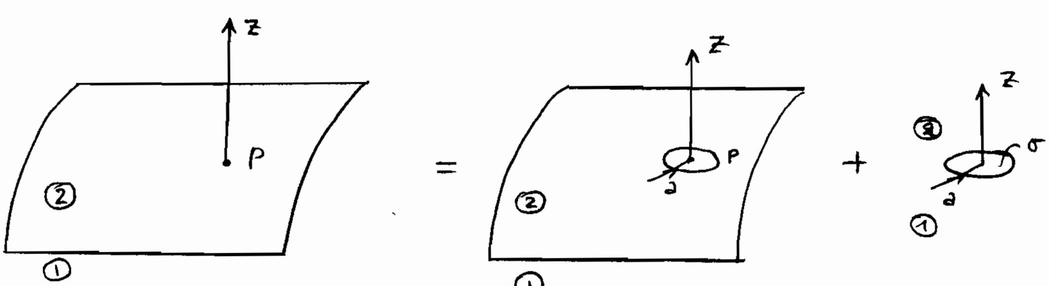
$$\vec{f}=\frac{1}{2}\sigma\left[E(b+)+E(b-)\right]$$ και ασκείται σε επίπεδο πλάκα με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ στη θέση $z=b$ λόγω του ολικού πεδίου $\vec{E}=E_z(z)\hat{i}_z$.

<u>Παράδειγμα:</u> Επιφανειακό φορτίο πυκνότητας σ βρίσκεται σε λεία καμπύλη επιφάνεια S. Όλος ο χώρος έχει επιτρεπτότητα ϵ. Δεν υπάρχουν άλλες πηγές. Να βρεθεί η ανά μονάδα επιφάνειας ηλεκτρική δύναμη.



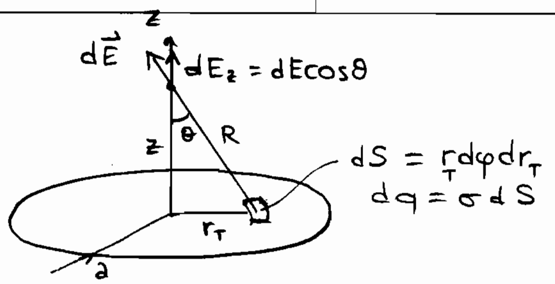
Έστω $\vec{E}$ το πεδίο λόγω της επιφανειακής κατανομής σ. Η οριακή συνθήκη στο P: $\hat{i}_n\cdot(\vec{D}_2(P)-\vec{D}_1(P))=\sigma$, δηλαδή $\hat{i}_n\cdot\epsilon\left[\vec{E}_2(P)-\vec{E}_1(P)\right]=\sigma$ και το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασυνεχές στο P λόγω της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου. Η ηλεκτρική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$\vec{f}=\sigma\vec{E}'$ όπου το $\vec{E}'$ δεν περιλαμβάνει το φορτίο σds γύρω από το σημείο P. $(a\to 0)$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας



πεδίο ασυνεχές $\hat{i}_n\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=\sigma/\epsilon$ | πεδίο συνεχές $\vec{E}'(P)$ | πεδίο ασυνεχές $\hat{i}_n\cdot(\vec{E}''_2-\vec{E}''_1)=\sigma/\epsilon$

Μας χρειάζεται να εκφράσουμε το $\vec{E}'$ συναρτήσει των $\vec{E}$ και $\vec{E}''$. Το ηλεκτρικό πεδίο για κυκλικό δακτύλιο (επίπεδο εφόσον $a\to 0$) μπορεί εύκολα να βρεθεί ως εξής:



Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z-συνιστώσα λόγω της συμμετρίας (οι r_T-συνιστώσες του $\vec{E}''$ αλληλοαναιρούνται για αντιδιαμετρικά dq). Επομένως,

$$E_z'' = \int dE_z'' = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon R^2} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = z/[z^2+r_T^2]^{1/2} \quad , \quad R = \sqrt{r_T^2+z^2}$$

$dq = dS\,\sigma = \sigma r_T\, d\varphi\, dr_T$ και επομένως,

$$E_z'' = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r_T=0}^{a} \frac{\sigma r_T dr_T d\varphi}{4\pi\epsilon\,[z^2+r_T^2]} \frac{z}{[z^2+r_T^2]^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon} z \int_0^a \frac{r_T dr_T}{[z^2+r_T^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon} z \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+r_T^2}} \right]_0^a = \frac{\sigma}{2\epsilon}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \qquad z>0$$

Όμοια $\quad E_z'' = -\frac{\sigma}{2\epsilon}\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \qquad z<0$

$E_2''(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ και $E_1''(P) = -\frac{\sigma}{2\epsilon}$ όταν $z \to 0$.

Επομένως

$$\vec{E}_2(P) = \vec{E}'(P) + \vec{E}_2''(P) = \vec{E}'(P) + \frac{\sigma}{2\epsilon}\hat{\imath}_z$$

$$\vec{E}_1(P) = \vec{E}'(P) + \vec{E}_1''(P) = \vec{E}'(P) - \frac{\sigma}{2\epsilon}\hat{\imath}_z$$

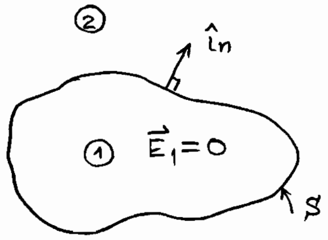
και επιλύοντας ως προς $\vec{E}'(P) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_2(P)+\vec{E}_1(P)\right]$.

Συνοψίζοντας,

$$\vec{F} = \sigma\,\frac{1}{2}\left[\vec{E}_2(P)+\vec{E}_1(P)\right]$$

που αποτελεί γενίκευση της ειδικής περίπτωσης της απέραντης επιπέδου κατανομής σ.

Παράδειγμα: Δύναμη σε φορτισμένο αγωγό



Το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδενικό.

Επομένως

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\big|_S = 0$$

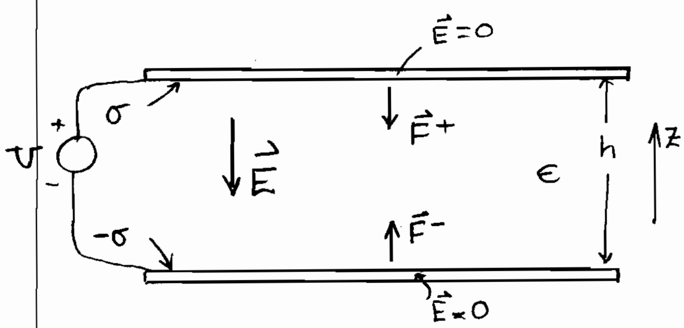
$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\big|_S = \sigma$$

Αφού $\vec{E}_1 = 0 \rightsquigarrow \vec{D}_1 = 0$. Άρα $E_{t2} = 0$ και $D_{2n} = \sigma \Rightarrow E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ για σημεία πάνω στην επιφάνεια S. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε:

$$\vec{f} = \sigma \, \frac{\vec{E}(P+) + \vec{E}(P-)}{2} \quad \text{για κάθε σημείο } P \text{ της } S \rightsquigarrow$$

$$\vec{f} = \sigma \, \frac{\sigma/\epsilon \, \hat{i}_n + 0}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} \hat{i}_n$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται σε καθένα από τους οπλισμούς ενός πυκνωτού παραλλήλων πλακών:



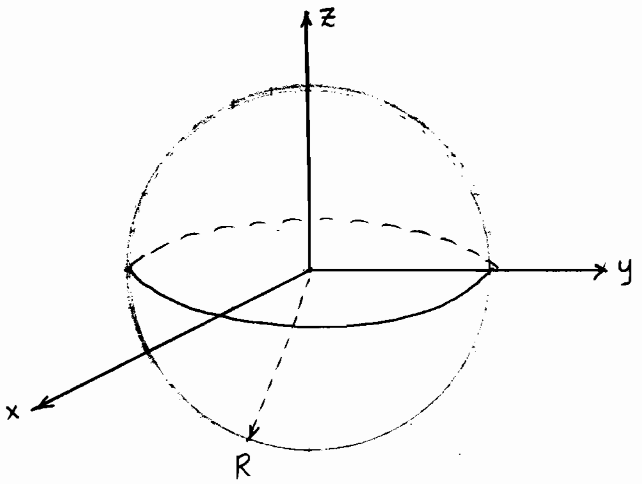
Αμελώντας το φαινόμενο των άκρων (διαστάσεις των ηλεκτροδίων >> από την μεταξύ τους απόσταση)

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα $F^+ = f^+ S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} S(-\hat{i}_z)$ όπου S το εμβαδόν του οπλισμού. Ομοίως για τον οπλισμό με $-\sigma$ έχουμε $\vec{F}^- = \vec{f}^- S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon} \hat{i}_z S$. Επομένως οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες. Αν U η τάση μεταξύ των ηλεκτροδίων $\vec{E} = -\frac{U}{h}\hat{i}_z$

Άρα $\sigma_+ = \hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \underset{0}{\underset{\parallel}{\vec{D}_1}})\big|_{S_+} = (-\hat{i}_z) \cdot \left[\epsilon(-\hat{i}_z) \frac{U}{h} \right] = \epsilon \frac{U}{h}$

Όμοια $\sigma_- = -\epsilon \frac{U}{h}$. Άρα $\vec{F}^+ = \cancel{\epsilon}^{\,2} \frac{U^2}{h^2} \frac{1}{2\cancel{\epsilon}} S(-\hat{i}_z) = \epsilon \frac{U^2}{2h^2} S(-\hat{i}_z)$

Παράδειγμα: Σφαίρα ακτίνας R φέρει φορτίο Q στο εσωτερικό της ομοιόμορφα κατανεμημένο. Ολόκληρος ο χώρος έχει επιτρεπτότητα ε. Ποιά είναι η συνολική δύναμη στο πάνω ημισφαίριο ?



Η δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι $\frac{d\vec{F}}{dV} = \rho \vec{E}$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss για μιά σφαίρα ακτίνας $0<r<R$ έχουμε

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_s = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon E(r)\,\hat{i}_r\cdot\hat{i}_r\, r\,d\theta\, r\sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \to \epsilon E(r)\, r^2 4\pi = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon}\,\hat{i}_r$$

δηλαδή $\vec{E} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{r}{3\epsilon}\,\hat{i}_r = \frac{Qr}{4\pi R^3\epsilon}\,\hat{i}_r$

Η συνολική δύναμη (ηλεκτρική) στο πάνω ημισφαίριο είναι:

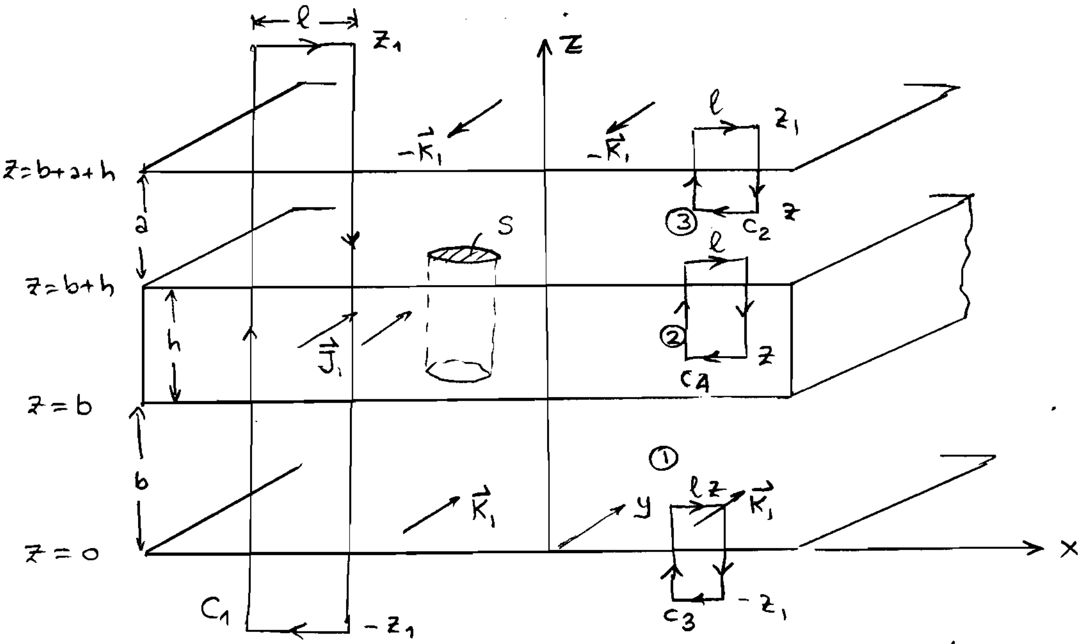
$$\vec{F} = \int_{V_+} d\vec{F} = \int_{V_+}\rho\vec{E}\,dV = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \rho\left(\frac{\rho r}{3\epsilon}\,\hat{i}_r\right) r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

Όμως $\hat{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{i}_y + \cos\theta\,\hat{i}_z$, Άρα

$$\vec{F} = \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\frac{\rho^2 r}{3\epsilon}\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr\left[\sin\theta\underbrace{\cancel{\cos\varphi}}_{0}\,\hat{i}_x + \sin\theta\underbrace{\cancel{\sin\varphi}}_{0}\,\hat{i}_y + \cos\theta\,\hat{i}_z\right]$$

$$\to \vec{F} = \hat{i}_z\,\frac{\rho^2}{3\epsilon}\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \hat{i}_z\,\frac{\rho^2}{3\epsilon}\,\frac{R^4}{4}\,2\pi\,\frac{1}{2} = \hat{i}_z\,\frac{3Q^2}{64\pi\epsilon R^2}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Πλάκα (απεράντου έκτασης) πάχους h φέρει χρονοσταθερό χωρικό ρεύμα πυκνότητας $\vec{J} = \hat{i}_y J_y(z)$ και βρίσκεται μεταξύ δύο ρευματοφόρων επιπέδων $z=0$ και $z=b+h+a$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα ρευματοφόρα επίπεδα φέρουν ομοιόμορφο επιφανειακό ρεύμα πυκνότητος $\vec{K}_1 = \hat{i}_y K$ και $-\vec{K}_1$ αντίστοιχα. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι παντού μ. Να βρεθεί η ανά μονάδα επιφάνειας μαγνητική δύναμη που ασκείται στα σημεία της κατανομής $\vec{J}$.



Εφόσον τόσο η πλάκα όσο και τα επίπεδα είναι απείρου έκτασης δεν έχουμε εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου από x, y. Δηλαδή $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Όμως

$$J_{\perp y} = K_{\perp y} = I_{\perp y} = 0 \rightarrow H_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad J_x = K_x = I_x = 0 \rightarrow H_{\perp x} = 0 \rightarrow \vec{H} = \hat{i}_x H(z)$$

Επίσης $H(z) = -H(-z) \quad z > a+b+h$.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere στο βρόχο C_1 έχουμε

$$\oint_{C_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} = \cancel{K_1} l - \cancel{K_1} l + l \int_b^{b+h} J_y(z')\,dz'$$

$$l\,H(z_1) - l\,H(-z_1) = l \int_b^{b+h} J_y(z')\,dz' \Rightarrow H(z_1) = \frac{1}{2}\int_b^{b+h} J_y(z')\,dz'$$

$z_1 > a+b+h$

$$H(z_1) = -\frac{1}{2}\int_b^{b+h} J_y(z')\,dz' \quad \text{για} \quad z<0$$

Για τόν βρόχο C_2:

$$\oint_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = -K_1 l \Rightarrow \cancel{l} H(z_1) - \cancel{l} H^{(3)}(z) = -K_1 \cancel{l} \Rightarrow$$

$$H^{(3)}(z) = H(z_1) + K_1 = K_1 + \frac{1}{2}\int_b^{b+h} J_y(z')\,dz' \qquad b<z<b+h$$

Για τόν βρόχο C_3:

$$\oint_{C_3} \vec{H}\cdot d\vec{l} = K_1 l \Rightarrow H^{(1)}(z)\cancel{l} - H(-z_1)\cancel{l} = K_1 \cancel{l} \Rightarrow$$

$$H^{(1)}(z) = K_1 - H(z_1) = K_1 - \frac{1}{2}\int_b^{b+h} J_y(z')\,dz' \qquad 0<z<b$$

Τέλος για τον βρόχο C_4 έχουμε:

$$\oint_{C_4} \vec{H}\cdot d\vec{l} = l\int_z^{b+h} J_y(z')\,dz' \Rightarrow$$

$$\cancel{l} H^{(3)}(z) - \cancel{l} H^{(2)}(z) = \cancel{l}\int_z^{b+h} J_y(z')\,dz' \Rightarrow$$

$$H^{(2)}(z) = H^{(3)}(z) - \int_z^{b+h} J_y(z')\,dz' = K_1 + \frac{1}{2}\int_b^{z} J_y(z')dz' - \frac{1}{2}\int_z^{b+h} J_y(z')dz'$$

για $b<z<b+h$.

Ας θεωρήσουμε κύλινδρο διατομής S με τις δύο βάσεις του στις επιφάνειες $z=b$, $z=b+h$. Η συνολική μαγνητική δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος είναι:

$$\vec{F} = \int \vec{J}\times\vec{B}\,dV = S\int_b^{b+h} \vec{J}\times\vec{B}^{(2)}dz' = S\int \hat{i}_y J_y(z')\times\hat{i}_x \mu H^{(2)}(z')\,dz'$$

$$= S(-\hat{i}_z)\mu\int_b^{b+h} J_y(z')\,H^{(2)}(z')\,dz'$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας το υπολογισμένο $H^{(2)}$ είναι πιό εύκολο για βρούμε το $H^{(2)}$ από τον σημειακό νόμο του Ampere:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}^{(2)} = \vec{J} \rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ H^{(2)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}_y J_y \rightarrow -\hat{i}_y\left(-\frac{\partial H^{(2)}}{\partial z}\right) = \hat{i}_y J_y(z)$$

$$\rightarrow \frac{dH^{(2)}}{dz} = J_y$$

Οπότε,

$$\vec{F} = (-\hat{i}_z)\, S\mu \int_b^{b+h} H^{(2)}(z')\, \frac{dH^{(2)}}{dz'}\, dz' =$$

$$= (-\hat{i}_z)\, \mu S \left[\left[H^{(2)}(b+h)\right]^2 - \left[H^{(2)}(b)\right]^2 \right] \frac{1}{2}$$

και η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας είναι:

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{S} = (-\hat{i}_z)\, \mu\, \frac{1}{2} \left[H^{(2)}(b+h) + H^{(2)}(b) \right] \left[H^{(2)}(b+h) - H^{(2)}(b) \right]$$

Όμως από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε:

$$\hat{i}_z \times \left(\vec{H}^{(3)}(b+h) - H^{(2)}(b+h) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad H^{(3)}(b+h) = H^{(2)}(b+h)$$

$$(-\hat{i}_z) \times \left(\vec{H}^{(1)}(b) - \vec{H}^{(2)}(b) \right) = 0 \rightarrow \quad H^{(1)}(b) = H^{(2)}(b)$$

$$\vec{f} = (-\hat{i}_z)\, \mu\, \frac{1}{2} \left[H^{(3)}(b+h) - H^{(1)}(b) \right] \left[H^{(2)}(b+h) + H^{(2)}(b) \right] =$$

$$= (-\hat{i}_z)\, \mu\, \frac{1}{2} \left[\int_b^{b+h} J_y(z')\, dz' \right] \left[H^{(2)}(b+h) + H^{(2)}(b) \right]$$

$-\hat{i}_z = \hat{i}_y \times \hat{i}_x$ οπότε

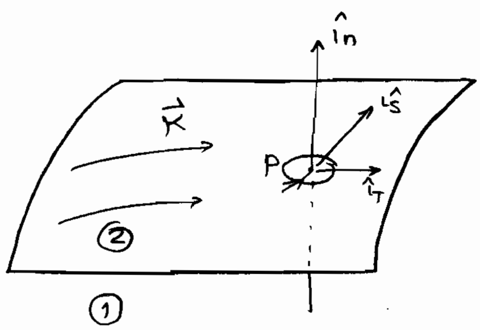
$$\vec{f} = \underbrace{\left[\hat{i}_y \int_b^{b+h} J_y(z')\, dz' \right]}_{\vec{K}} \times \frac{1}{2} \left[\vec{B}^{(2)}(b+h) + \vec{B}^{(2)}(b) \right] = \vec{K} \times \frac{1}{2} \left[\vec{B}^{(2)}(b+h) + \vec{B}^{(2)}(b) \right]$$

<u>Ειδική Περίπτωση:</u> $h \to 0$, $J_y(z) = J_0 \to \infty$ ώστε $J_0 h \to K =$ σταθερό.

Δηλαδή η χωρική κατανομή εκφυλίζεται σε επιφανειακή. Τότε

$$\vec{f} = \vec{K} \times \frac{1}{2} \left[\vec{B}(b+) + \vec{B}(b-) \right]$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε επιφανειακή κατανομή ρεύματος $\vec{K}$ πάνω σε λεία επιφάνεια S. Ολόκληρος ο χώρος έχει μαγνητική διαπερατότητα μ. Να βρεθεί η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στο τυχαίο σημείο P.



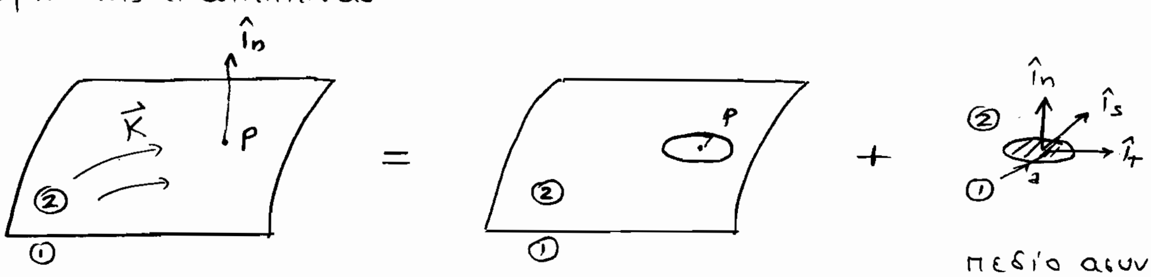
Υποθέτουμε ότι το ρεύμα στο σημείο P ρέει στην κατεύθυνση $\hat{i}_T$, δηλαδή $\vec{K} = K\,\hat{i}_T = \vec{K}(P)$

Από την οριακή συνθήκη

$\hat{i}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\big|_P = \vec{K}(P)$ δηλαδή το πεδίο είναι ασυνεχές. Η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα επιφανείας είναι:

$$\vec{f} = \vec{K} \times \vec{B}'(P)$$

όπου $\vec{B}'(P)$ είναι το πεδίο που δημιουργείται στο P αν εξαιρέσουμε ένα μικρό κυκλικό δίσκο γύρω από το P, (μ $a \to 0$). Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας



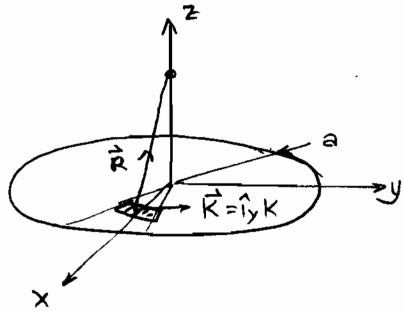
πεδίο ασυνεχές
$\hat{i}_n \times (\vec{H}_2(P) - \vec{H}_1(P)) = \vec{K}(P)$

πεδίο συνεχές
$\vec{H}'(P)$

πεδίο ασυνεχές
$\hat{i}_n \times (H_2''(P) - H_1''(P)) = \vec{K}(P)$

Το πεδίο $\vec{H}'(P)$ μπορεί να βρεθεί συναρτήσει των $\vec{H}$ και $\vec{H}''$.

Το πεδίο λόγω του δίσκου ακτίνας a με επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = \hat{i}_T K$ μπορεί να βρεθεί με εφαρμογή του νόμου Biot-Savart. Εφόσον αυτός θα καλυφθεί εκτενώς στα ΠΕΔΙΑ Β εδώ απλώς θα αναφέρουμε το αποτέλεσμα.



Αν $\vec K = K\hat i_y$ για τα σημεία του άξονος των z έχουμε

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\vec K \times \hat i_R}{R^2}\, dS =$$

$$= \hat i_x K \frac{\mu_0}{2}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right] \qquad (z>0)$$

Επομένως για $z=0+$ $\quad \vec H(0+) = \hat i_x \dfrac{K}{2} = \dfrac{\vec K \times \hat i_z}{2}$

Παρόμοια για $z=0-$ $\quad \vec H(0-) = -\hat i_x \dfrac{K}{2} = -\dfrac{\vec K \times \hat i_z}{2}$

Εφόσον η επιφάνεια είναι λεία ο δίσκος με ακτίνα a μπορεί να θεωρηθεί επίπεδος για αρκετά μικρή ακτίνα a.

Το ανωτέρω αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με αυτό από απέραντη επιφανειακή ρευματική κατανομή.

Άρα

$$\left.\begin{aligned} \vec H_2(P) &= \vec H'(P) + \vec H_2''(P) \\ \vec H_1(P) &= \vec H'(P) + \vec H_1'(P) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec H_2(P) + \vec H_1(P) = 2\vec H'(P) + \frac{K}{2}\hat i_x - \frac{K}{2}\hat i_x \Rightarrow$$

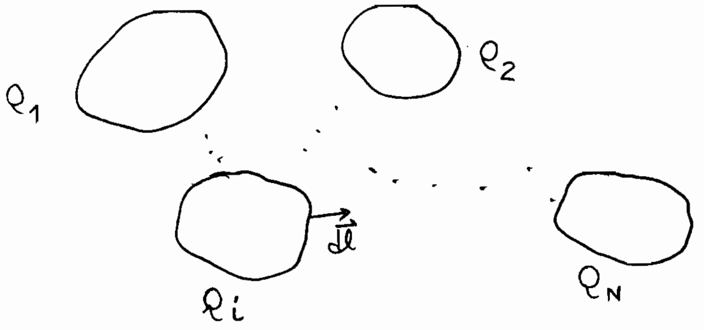
$$\vec H'(P) = \frac{1}{2}\left[\vec H_2(P) + \vec H_1(P)\right] \Rightarrow \vec B'(P) = \frac{1}{2}\left[\vec B_2(P) + \vec B_1(P)\right]$$

Επομένως,

$$\vec F = \vec K(P) \times \frac{1}{2}\left[\vec B_2(P) + \vec B_1(P)\right]$$

Υπολογισμός Ηλεκτροστατικών Δυνάμεων με Χρήση Ενέργειας

Διατάξεις με σταθερά φορτία:



Έστω σύστημα N αγωγών με φορτία $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$. Οι αγωγοί είναι απομονωμένοι μεταξύ τους και έτσι δεν είναι δυνατή καμία μετακίνηση φορτίου. Οι αγωγοί βρίσκονται σε ισορροπία μέσω μηχανικών δυνάμεων. Έστω ότι ο i-th αγωγός μετακινείται κατά $\vec{dl} = \hat{\ell}\, dl$ υπό την επίδραση της ηλεκτρικής δύναμης $\vec{F}_e$. Το μηχανικό έργο $\vec{F}_e \cdot \vec{dl}$ θα παραχθεί από την αποθηκευμένη ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος. Επομένως η μείωση της ηλεκτροστατικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$dW_e = -\vec{F}_e \cdot \vec{dl} = -\vec{F}_e \cdot \hat{\ell}\, dl \to \frac{dW_e}{dl} = -\vec{F}_e \cdot \hat{\ell}$$

Όμως $\dfrac{\partial W}{\partial n} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} W$ οπότε

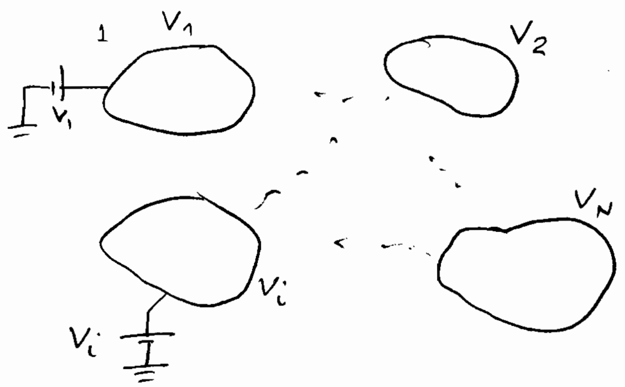
$$\frac{dW_e}{dl} = \hat{\ell} \cdot \vec{\nabla} W_e \sim \vec{F}_e = -\vec{\nabla} W_e \Big|_{Q_n = \sigma\tau\alpha\vartheta.\ (n=1,2,\ldots,N)}$$

Αν η απειροστή μετακίνηση του αγωγού αντί για ολίσθηση είναι περιστροφή κατά γωνία $d\varphi$ ως προς κάποιο άξονα τότε αντί για δύναμη βρίσκουμε την ροπή (ως προς τον συγκεκριμένο άξονα):

$$T = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi}\Big|_{Q_n = \sigma\tau\alpha\vartheta\ (n=1,2,\ldots,N)}$$

Διατάξεις με σταθερά Δυναμικά:

Αν οι αγωγοί είναι συνδεδεμένοι με πηγές τότε το φορτίο τους δεν μένει σταθερό εφόσον μπορεί να υπάρχει μετακίνηση φορτίου από τις πηγές στους αγωγούς και αντίστροφα, σε κάποια μετακίνησή τους ώστε να διατηρηθούν σταθερά τα δυναμικά τους. Έστω $V_1, V_2, \ldots, V_N$ τα δυναμικά των αγωγών.



Η στοιχειώδης μετακίνηση του αγωγού i κατά $d\vec{l}$ συνοδεύεται από μεταβολή του ηλεκτροστατικού πεδίου και των φορτίων των αγωγών.

Κάθε πηγή θα προσδώσει φορτίο dQ_n στον αγωγό n που συνδέεται.
Η συνολική ενέργεια που θα αποδοθεί από τις πηγές στη διάταξη είναι:

$$dW_{source} = \sum_{n=1}^{N} V_n \, dQ_n = \sum_{n=1}^{N} V_n i_n \, dt$$

Όμως η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι $W_e = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} Q_n V_n \rightsquigarrow$

$$dW_e = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} V_n \, dQ_n \rightsquigarrow dW_e = \frac{1}{2} dW_{source}$$

Όμως

$$dW_{source} = \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + dW_e$$

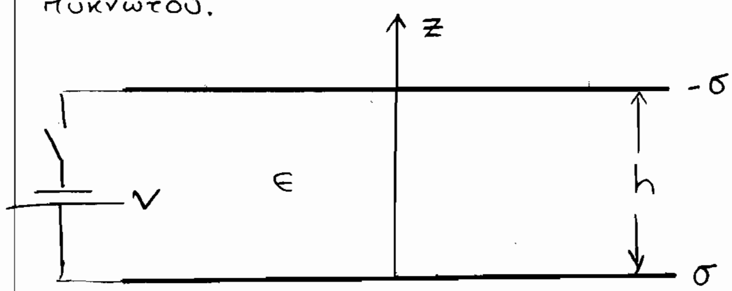
δηλαδή η ενέργεια των πηγών δόθηκε είτε σε μηχανικό έργο είτε σε ηλεκτροστατική ενέργεια.

Επομένως $\quad \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = dW_e \rightsquigarrow \quad \vec{F}_e = \vec{\nabla} W_e \Big|_{V_n = σταθ \; (n=1,2,\ldots,N)}$

Όπως και προηγουμένως αν αντί για δύναμη έχουμε εμφάνιση ροπής ως προς κάποιο άξονα τότε

$$T = \frac{\partial W_e}{\partial \varphi}\Bigg|_{V_n = σταθ. \; (n=1,2,\ldots,N)}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η δύναμη μεταξύ των οπλισμών ενός επιπέδου πυκνωτού.



(α) Διακόπτης ανοικτός ($Q=$ σταθερό):

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\hat{i}_z = \hat{i}_z \frac{Q}{\epsilon S}$$

Πυκνότητα ενέργειας: $w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{Q}{\epsilon S}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon S^2}$

$$W_e = \int_V w_e \, dV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon S^2} S z = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon S} z\Big|_{z=h}$$

$$\vec{F}_e = -\vec{\nabla} W_e = -\hat{i}_z \frac{dW_e}{dz} = -\hat{i}_z \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon S} = -\hat{i}_z \frac{\sigma^2}{2\epsilon} S$$

(β) Διακόπτης κλειστός ($V=$ σταθερό).

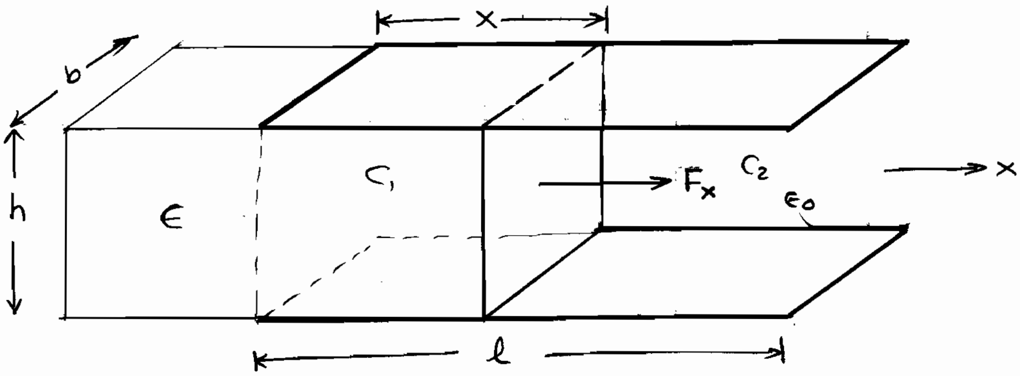
$$C = \epsilon \frac{S}{h} \quad \text{και} \quad W_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\epsilon \frac{S}{z}\Big|_{z=h} V^2$$

$$\vec{F}_e = \vec{\nabla} W_e\Big|_V = \hat{i}_z \frac{1}{2}\epsilon\left(-\frac{1}{z^2} S V^2\right) = -\hat{i}_z \frac{\epsilon S}{2h^2} V^2$$

Με $Q=\sigma S \rightsquigarrow \frac{\sigma \cancel{S}}{V} = \epsilon \frac{\cancel{S}}{h} \Rightarrow V = \frac{\sigma h}{\epsilon}$ οπότε

$$\vec{F}_e = -\hat{i}_z \frac{\epsilon S}{2\cancel{h^2}} \frac{\sigma^2 \cancel{h^2}}{\epsilon^2} = -\hat{i}_z \frac{\sigma^2}{2\epsilon} S$$

Παράδειγμα: Διηλεκτρική ράβδος επιτρεπτότητας ϵ πληροί μερικώς τον χώρο μεταξύ των οπλισμών πυκνωτού παραλλήλων πλακών. Να βρεθεί η δύναμη που ωθεί την ράβδο.



Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon \frac{bx}{h} + \epsilon_o \frac{b(\ell - x)}{h} =$$

$$= \frac{b}{h}\left[\epsilon x + \epsilon_o(\ell - x)\right]$$

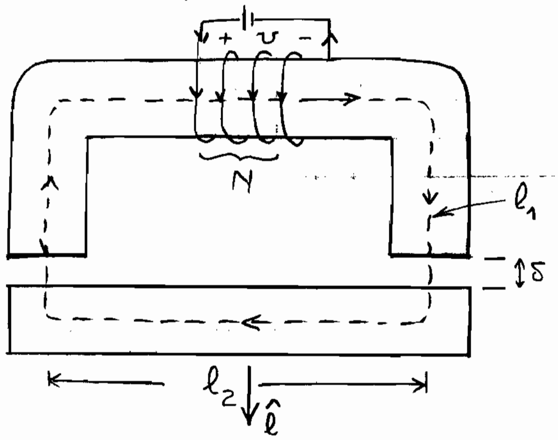
$$W_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\frac{b}{h}\left[\epsilon x + \epsilon_o(\ell - x)\right] V^2$$

$$F_x = \frac{dW_e}{dx}\hat{i}_x = \frac{1}{2}(\epsilon - \epsilon_o)\frac{b}{h} V^2 \hat{i}_x$$

Υπολογισμός Μαγνητοστατικών Δυνάμεων με Χρήση Ενέργειας:

Όπως και στην περίπτωση των ηλεκτροστατικών δυνάμεων έτσι και στην περίπτωση των μαγνητοστατικών θα εφαρμόσουμε την αρχή των απειροστών μετατοπίσεων. Θα διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις:

Η πεπλεγμένη μαγνητική ροή παραμένει σταθερή:



Έστω το παράπλευρο μαγνητικό κύκλωμα ενός ηλεκτρομαγνήτη, με διάκενο δ, μήκος οπλισμού ℓ_2 και μήκος υπολοίπου μαγνητικού κυκλώματος ℓ_1.

Αν η μαγνητική ροή ψ είναι σταθερή $\sim \upsilon = N\dfrac{d\psi}{dt} = 0$ οπότε η ισχύς που δίδει η πηγή υi είναι μηδενική. Επομένως δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του μαγνητικού κυκλώματος και της πηγής.

Έστω ότι αναιρούμε την μηχανική δύναμη που συγκρατεί τον οπλισμό και τον αφήνουμε να κινηθεί κατά $d\ell$ κατά την διεύθυνση $\hat{\ell}$ λόγω της ασκούμενης μαγνητικής δύναμης $\vec{F}_m$. Κατά την μετατόπιση ψ = σταθερό. Επομένως το μηχανικό έργο θα παραχθεί από την αποθηκευμένη μαγνητική ενέργεια.

$$dW_m = -\vec{F}_m \cdot \vec{d\ell} = -\vec{F}_m \cdot \hat{\ell}\, d\ell \rightarrow \frac{dW_m}{d\ell} = -\vec{F}_m \cdot \hat{\ell} \leadsto$$

$$\vec{\nabla} W_m \cdot \hat{\ell} = -\vec{F}_m \cdot \hat{\ell} \Rightarrow \vec{F}_m = -\vec{\nabla} W_m \Big|_{\psi = \text{σταθ.}}$$

Αν αντί για μετατόπιση έχουμε περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα c τότε

$$T_c = -\frac{\partial W_m}{\partial \varphi}\Big|_{\psi = \text{σταθ.}}$$

Μετατόπιση υπό σταθερό ρεύμα:

Γιά το προηγούμενο κύκλωμα υποθέτουμε ότι το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα I, Τώρα κατά την μετατόπιση dl το ρεύμα παραμένει σταθερό. Στήν περίπτωση αυτή η μαγνητική ροή του κυκλώματος μεταβάλλεται χρονικά. Αν $\Psi=$ σταθερή $\sim B=\Psi/S=$ σταθ. $\sim H=B/\mu=$ σταθερό ανάλογα με την περιοχή του κυκλώματος. Τότε όμως από τον νόμο του Ampere $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=NI \sim H_1 l_1 + H_\delta 2\delta + H_2 l_2 = NI$. Όταν όμως μετακινείται ο οπλισμός ο όρος $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}$ μεταβάλλεται ενώ θα έπρεπε να ήταν σταθερός. Επομένως η μαγνητική ροή μεταβάλλεται χρονικά κατά την διάρκεια της μετατόπισης dl. Επομένως $v=N\frac{d\Psi}{dt}=\frac{d\Lambda}{dt}\neq 0 \sim$ η πηγή θα παρέχει ενέργεια με ρυθμό $p=\frac{dW_{source}}{dt}=vI \sim$ ($\Lambda=$ πεπλεγμένη ροή)

$$dW_{source}=vI\,dt=I\,d\Lambda$$

Όμως η αποθηκευμένη μαγνητική ενέργεια σε ένα γραμμικό μαγνητικό κύκλωμα είναι

$$W_m=\frac{1}{2}I\Lambda \sim dW_m=\frac{1}{2}I\,d\Lambda=\frac{1}{2}dW_{source}$$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$dW_{source}=\vec{F}_m\cdot d\vec{l}+dW_m \Rightarrow dW_m=\vec{F}_m\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

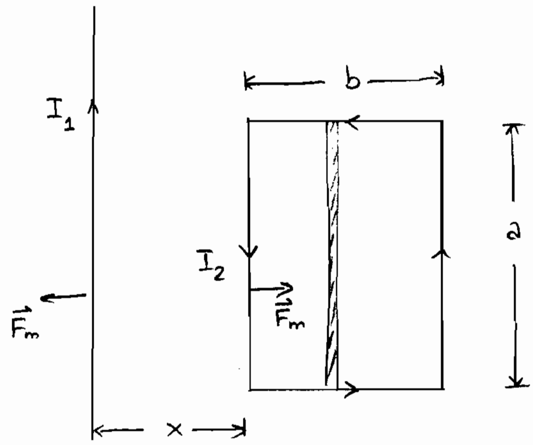
$$\vec{F}_m=\vec{\nabla}W_m\Big|_{I=\text{σταθ.}}$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί γία N μαγνητικά κυκλώματα

$$\vec{F}_m=\vec{\nabla}W_m\Big|_{I_1,I_2,\ldots,I_N=\text{σταθ.}}$$

Άν έχουμε περιστροφή ως πρός κάποιο άξονα c τότε η ροπή T_c δίδεται από την σχέση $T_c=\frac{\partial W_m}{\partial\varphi}\Big|_{I_1,I_2,\ldots,I_N=\text{σταθ.}}$

ΑΣΚΗΣΗ Ε3: Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο βρόχο ρεύματος I_2.



Ας βρούμε τον συντελεστή αλληλεπαγωγής $L_{21} = \dfrac{\Psi_{m2,1}}{I_1}$

$$\Psi_{m2,1} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \int_{x'=r_T=x}^{x+b} \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_T}\, \hat{i}_\varphi \cdot (-\hat{i}_\varphi)\, dx' a =$$

$$= \mu_0 \frac{I_1}{2\pi} (-1) a \int_{x}^{b+x} \frac{1}{x'}\, dx' = -\mu_0 \frac{I_1}{2\pi} a \ln\left(\frac{b+x}{x}\right)$$

Επομένως $L_{21}(x) = \dfrac{\Psi_{m21}}{I_1} = -\dfrac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(\dfrac{b+x}{x}\right)$

Όμως η μαγνητική ενέργεια είναι $W_m = L_{21} I_1 I_2 + A \sim$

$$\vec{F}_m = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{I_1, I_2 = \text{σταθ}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} a \frac{1}{\left(\frac{b+x}{x}\right)} \left(\frac{x-(b+x)}{x^2}\right) \hat{i}_x I_1 I_2 =$$

$$= \hat{i}_x \frac{\mu_0}{2\pi} a \frac{x}{b+x} \cdot \frac{b}{x^2} I_1 I_2 = \hat{i}_x \frac{\mu_0 a b}{2\pi} \frac{1}{x(b+x)} I_1 I_2$$