ΧΡΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΕΔΙΑ:

Όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση των χρονομεταβλητών πεδίων έχουν την μορφή (σημειακή):

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

και ο ΝΔΦ: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες είναι:

$$\hat{i}_n\times(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \qquad \hat{i}_n\cdot(\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma$$

$$\hat{i}_n\times(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K} \qquad \hat{i}_n\cdot(\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$$

και $\hat{i}_n\cdot(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla}_2\cdot\vec{K} - \frac{\partial\sigma}{\partial t}$ (όπου $\vec{\nabla}_2\cdot\vec{K}$ = διδιάστατη απόκλιση του $\vec{K}$).

Επίσης τα πεδιακά μεγέθη $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ και $\vec{J}$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω των συνταυτικών σχέσεων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εξετάζουμε πιθανές λύσεις των εξισώσεων του Maxwell στην περίπτωση του κενού και χωρίς πηγές ρ και $\vec{J}$. Χρησιμοποιώντας τις συνταυτικές σχέσεις $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ και $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

Από τις ανωτέρω εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε ένα από τα δύο πεδιακά μεγέθη ως εξής. (απαλοιφή του $\vec{H}$):

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\,\cancel{(\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{0})} - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Παρομοίως θα μπορούσαμε να απαλείψουμε το $\vec{E}$ και να καταλήξουμε στην εξίσωση $\nabla^2\vec{H} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0$.

Οι ανωτέρω εξισώσεις ως προς $\vec{E}$ ή $\vec{H}$ είναι ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις κύματος.

Οι ανωτέρω κυματικές εξισώσεις ανάγονται στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης της μορφής

$$\nabla^2 f - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{όπου} \quad f = E_x, E_y, E_z \,;\, H_x, H_y, H_z .$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f = f(z,t)$ οπότε η κυματική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Τώρα ας ορίσουμε $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 1 / \left[4\pi \cdot 10^{-7}\, H/m \cdot 8.854187\; 10^{-12} F/m \right]^{1/2}$

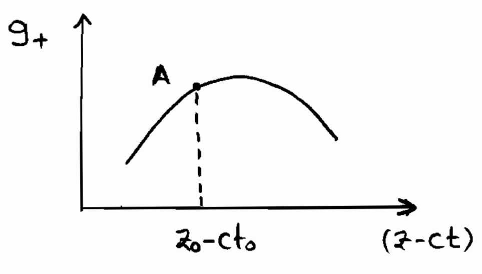
$= 2.99792458\; 10^8\; m/s$ = ταχύτητα του φωτός στο κενό. Συνήθως $c \simeq 300{,}000\; km/sec$. Η λύση της παραπάνω κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής $f(z,t) = g(z \pm ct)$ όπου g μιά συνάρτηση τουλάχιστον διαφορίσιμη δύο φορές. Τότε

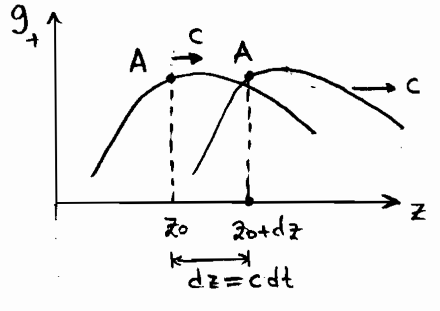
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= g' \frac{\partial(z \pm ct)}{\partial z} = g' \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = g'' \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= g' \frac{\partial(z \pm ct)}{\partial t} = g'(\pm c) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g'' c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \sim$ ικανοποιείται η κυματική εξίσωση. Η γενική λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$f(z,t) = a_+ g_+(z - ct) + a_- g_-(z + ct)$$

Τώρα ας εξετάσουμε τους 2 όρους $g_+(z-ct)$ και $g_-(z+ct)$.





Έστω σημείο A της $g_+(z-ct)$ που ορίζεται για $z_0 - ct_0 =$ σταθερό $= K$

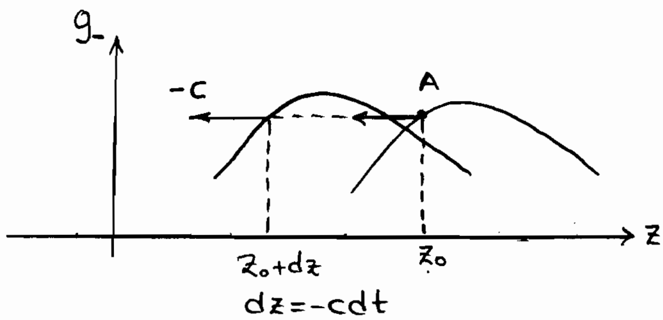
Έστω μετά από χρόνο dt το σημείο A μετακινείται κατά dz. Τότε

$(z_0 + dz) - c\,(t_0 + dt) = K \Rightarrow$

$dz - c\,dt = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = c > 0$

Επομένως το σημείο A μετατοπίζεται

προς τα θετικά z με ταχύτητα c. Παρόμοια η συνάρτηση $g_-(z+ct)$ μετατοπίζεται με ταχύτητα $-c$.



$$z_0 + c t_0 = K \rightsquigarrow$$

$$(z_0 + dz) + c(t_0 + dt) = K \rightsquigarrow$$

$$dz + c\,dt = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -c < 0$$

Εάν $f = E_x$ σαν παράδειγμα και $g_+ = \cos[k_0(z-ct)]$, $g_- = \cos[k_0(z+ct)]$ τότε

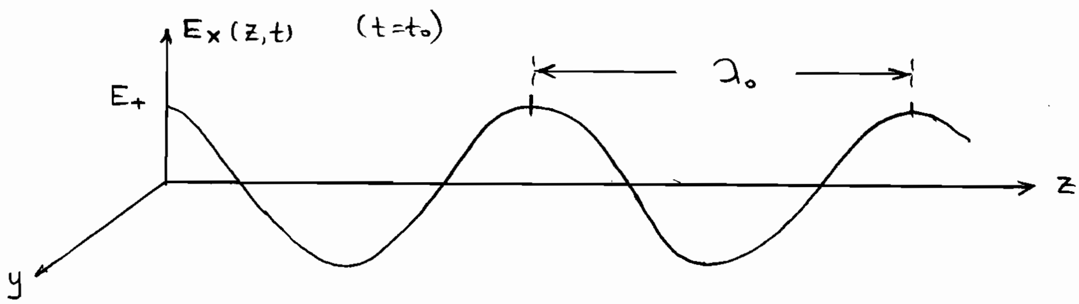
$$E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - k_0 c t) + E_- \cos(k_0 z + k_0 c t) \quad \text{όπου}$$

$k_0 c = \omega \Rightarrow k_0 = \omega/c$ = κυματαριθμός του κύματος, και επομένως

$E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - \omega t) + E_- \cos(k_0 z + \omega t)$. Τώρα για απλούστευση ας θεωρήσουμε ότι $E_- = 0$ και $E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - \omega t)$.

Για σταθερό χρόνο μπορούμε να βρούμε την χωρική περίοδο του κύματος που ορίζεται σαν μήκος κύματος. δηλαδή $k_0 \Delta z = 2\pi \Rightarrow$

$$\lambda_0 \equiv \Delta z = \frac{2\pi}{k_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega/c} \Rightarrow \lambda_0 \omega = 2\pi c \Rightarrow \lambda_0 \cancel{2\pi} \nu = \cancel{2\pi} c \Rightarrow \lambda_0 \nu = c$$



Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που τα κύματα διαδίδονται μέσα σε ισότροπα υλικά με επιτρεπτότητα ϵ και διαπερατότητα μ αλλά χωρίς απώλειες. Τότε η ταχύτητα του κύματος ορίζεται και πάλι

$$\text{σαν} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad \text{όπου}$$

$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ = δείκτης διάθλασης του υλικού. Τότε το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega/u} = \frac{2\pi}{\omega} c \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{k_0}\frac{1}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$

και ισχύει και πάλι $\lambda f = u$.

Αν $E_x(z,t) = E_+ \cos(kz-\omega t) + E_- \cos(kz+\omega t)$ τότε ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$. Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -\hat{i}_y\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) = -\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{\mu}\left[E_+(-k)\sin(kz-\omega t) + E_-(-k)\sin(kz+\omega t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial t} = E_+\frac{k}{\mu}\sin(kz-\omega t) + E_-\frac{k}{\mu}\sin(kz+\omega t) \Rightarrow$$

$$H_y(z,t) = E_+\frac{k}{\mu}\frac{-\cos(kz-\omega t)}{-\omega} + E_-\frac{k}{\mu}\frac{-\cos(kz+\omega t)}{+\omega} \Rightarrow$$

$$H_y(z,t) = E_+\frac{k}{\omega\mu}\cos(kz-\omega t) - E_-\frac{k}{\omega\mu}\cos(kz+\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_y(z,t) = H_+\cos(kz-\omega t) - H_-\cos(kz+\omega t).$$

Οι σταθερές της ολοκλήρωσης θέτονται ίσες με το μηδέν διότι εφόσον δεν υπάρχουν πηγές δεν μπορούν να υπάρχουν και στατικά μαγνητικά πεδία.

Οι συντελεστές του μαγνητικού πεδίου σχετίζονται με τους συντελεστές του ηλεκτρικού πεδίου ως εξής:

$$H_+ = E_+\frac{k}{\omega\mu} = E_+\frac{\omega/u}{\omega\mu} = E_+\frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\mu} = E_+\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad \text{και}$$

$$H_- = -E_-\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

Ορίζουμε ως $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ = χαρακτηριστική αντίσταση του κύματος μέσα στο υλικό. Αν $\mu = \mu_0$ και $\epsilon = \epsilon_0$ τότε $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 120\pi \simeq 377\,\Omega$

και είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του κύματος στο κενό. Επιπλέον

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\epsilon_0\epsilon_r}} = Z_0\left(\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}\right).$$

Η ανωτέρω μορφή κύματος καλείται και επίπεδο κύμα διότι η φάση του όρου $\cos(kz-\omega t)$ [ή αντίστοιχα του $\cos(kz+\omega t)$] παραμένει σταθερή (για σταθερό χρόνο) όταν z = σταθερό. Όμως z = σταθερό αντιστοιχεί σε επίπεδα παράλληλα στο xy. Η σταθερή φάση (για t=σταθερό) ορίζει το μέτωπο κύματος. Επομένως τα επίπεδα κύματα έχουν επίπεδα μέτωπα κύματος κάθετα προς την κατεύθυνση της διάδοσης τους.

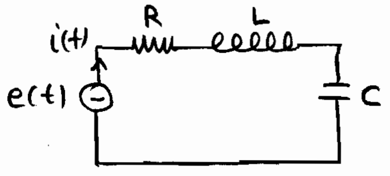
Τα ανωτέρω αποτελέσματα θα γενικευθούν με την εισαγωγή των phasors για επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε κάποια τυχαία διεύθυνση.

Η χρήση των φασιθετών (phasors) [παραστατικών μιγαδικών]

Ένας απλός τρόπος για την παράσταση των πεδιακών μεγεθών στην περίπτωση ημιτονοειδούς μόνιμης κατάστασης είναι η χρήση των φασιθετών (phasors). Γιά παράδειγμα ένα ημιτονοειδές ρεύμα $i(t)$ ορίζεται από την μέγιστη τιμή του, την συχνότητα, και την φάση του. Δηλαδή

$$i(t) = I\cos(\omega t+\varphi)$$

Παρόμοια θα μπορούσε να γραφεί και σαν $i(t) = I\sin(\omega t+\varphi')$ όπου $\varphi' = \varphi + \pi/2$. Γι' αυτό είναι σημαντικό να καθορίσουμε αν χρησιμοποιούμε cos( ) ή sin( ) για τον ορισμό του ρεύματος. Το να χρησιμοποιούμε ευθέως το στιγμιαίο ρεύμα $i(t)$ δέν είναι τόσο εύχρηστο όταν απαιτούνται παραγωγίσεις ή ολοκληρώσεις. Π.χ. το ρεύμα σε ένα RLC βρόχο με πηγή $e(t) = E\cos(\omega t)$ δίδεται από την επίλυση της εξίσωσης:



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e(t)$$

Χρησιμοποιώντας φασιθέτες έχουμε:

$$\tilde{I} = Ie^{j\varphi} \iff i(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{I}e^{j\omega t}\}$$

$$\tilde{E} = Ee^{j0^\circ} \iff e(t) = \mathrm{Re}\{\tilde{E}e^{j\omega t}\}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{ Re\{\tilde{I}e^{j\omega t}\}\right\} = Re\{\tilde{I}j\omega e^{j\omega t}\}$$

$$\int i dt = \int Re\{\tilde{I}e^{j\omega t}\} dt = Re\left\{ \tilde{I}\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\right\}$$

και η προηγούμε εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$L\, Re\{\tilde{I}j\omega e^{j\omega t}\} + R\, Re\{\tilde{I}e^{j\omega t}\} + \frac{1}{C} Re\{\tilde{I}\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}\} = Re\{\tilde{E}e^{j\omega t}\}$$

και εφόσον $L, R, C \in \mathbb{R}$

$$Re\left\{\left(Lj\omega \tilde{I} + R\tilde{I} + \frac{1}{Cj\omega}\tilde{I} - \tilde{E}\right)e^{j\omega t}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}\right)\tilde{I} - \tilde{E} = 0 \Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Γνωρίζοντας τον φασιθέτη $\tilde{I}$ το ρεύμα μπορεί να βρεθεί από την σχέση

$i(t) = Re\{\tilde{I}e^{j\omega t}\}$.

Παρόμοιοι φασιθέτες (phasors) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Π.χ. για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathcal{E}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = Re\{\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\}$$

όπου $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ είναι το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{E}(\vec{r})$ είναι ο διανυσματικός φασιθέτης (phasor) της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Συνήθως για απλότητα θα συμβολίζουμε με $\vec{E}(\vec{r}, t)$ το στιγμιαίο διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{E}(\vec{r})$ τον αντίστοιχο φασιθέτη.

Χρησιμοποιώντας φασιθέτες για όλα τα πεδιακά μεγέθη μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση που περιγράφει το νόμο του Faraday ως εξής:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times Re\{\vec{E}e^{j\omega t}\} = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{Re\{\vec{B}e^{j\omega t}\}\right\} \Rightarrow$$

$$Re\{\vec{\nabla}\times\vec{E}\, e^{j\omega t}\} = -Re\{j\omega\vec{B}e^{j\omega t}\} \Rightarrow$$

$$Re\{(\vec{\nabla}\times\vec{E} + j\omega\vec{B})e^{j\omega t}\} = 0 \quad (\forall t) \rightsquigarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

Εφαρμόζοντας την ίδια λογική για όλες τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να τις γράψουμε στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση (time harmonic form) ως εξής: (όπου όλα τα πεδιακά μεγέθη ορίζονται με phasors).

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Στην περίπτωση ομογενών, ισοτροπικών, γραμμικών υλικών (χωρίς πηγές) $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$, $\vec{J} = 0$, $\rho = 0$, και οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

Ας δοκιμάσουμε λύση της μορφής $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$.

Απαλοίφοντας το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -j\omega\mu(\vec{\nabla}\times\vec{H}) = -j\omega\mu(j\omega\epsilon)\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}}_{0}) - \nabla^2\vec{E} = \omega^2\mu\epsilon\vec{E} \Rightarrow \nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = 0$$

Παρόμοια αποαλοίφοντας το $\vec{E}$ καταλήγουμε στην εξίσωση $\nabla^2\vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = 0$.

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αντιστοιχούν στην διανυσματική κυματική εξίσωση με φασιθέτες και ονομάζονται Helmholtz εξισώσεις.

$$\nabla^2(\ ) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(\ )$$

$$\vec{\nabla}(e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -jk_x\hat{i}_x e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} - jk_y\hat{i}_y e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} - jk_z\hat{i}_z e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} =$$

$$= -j\vec{k}\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \vec{\nabla}\cdot(-j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j(-j)\,\vec{k}\cdot\vec{k}\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\vec{k}\cdot\vec{k}\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Επομένως αναζητώντας λύση της μορφής $\vec{E} = E_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ έχουμε

$$\nabla^2 \left(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) + \omega^2 \mu \epsilon \, \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(-\vec{k}\cdot\vec{k} + \omega^2 \mu \epsilon \right) \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0) \mu_r \epsilon_r = k_0^2 \mu_r \epsilon_r \rightarrow |\vec{k}| = k = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

όπου $k_0 = \omega / c$ = ο κυματαριθμός του κενού. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ και $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ στις εξισώσεις Maxwell στην μόνιμη ημιτονοειδή μορφή έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu \vec{H}$$

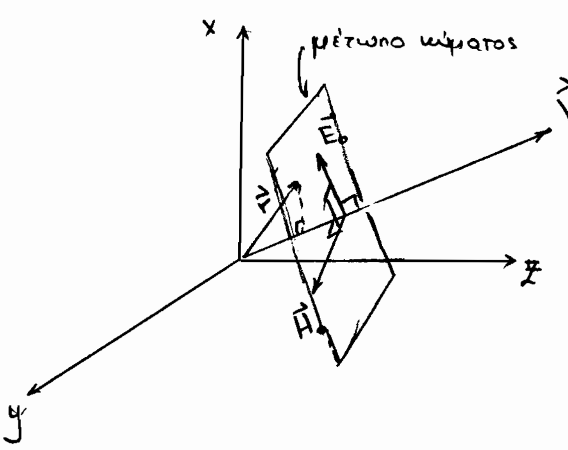
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E} \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega\epsilon \vec{E}$$

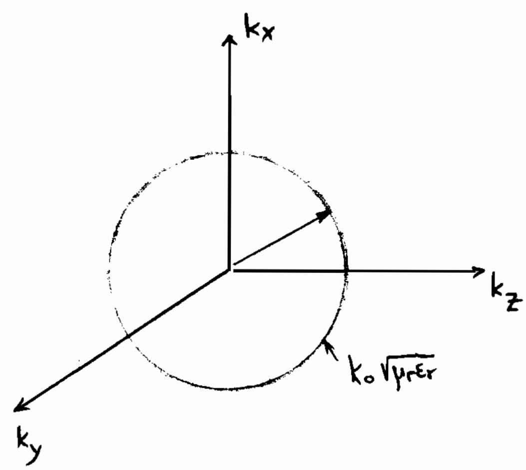
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \qquad (*)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

Επομένως οι συναρτήσεις $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ και $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ για να είναι λύσεις των εξισώσεων του Maxwell πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις (*).

Οι λύσεις αυτής της μορφής ονομάζονται επίπεδα κύματα γιατί το μέτωπο κύματος (οριζόμενο σαν $\vec{k}\cdot\vec{r}$ = σταθερό) είναι επίπεδο. Το διάνυσμα $\vec{k}$ ονομάζεται κυματοδιάνυσμα.





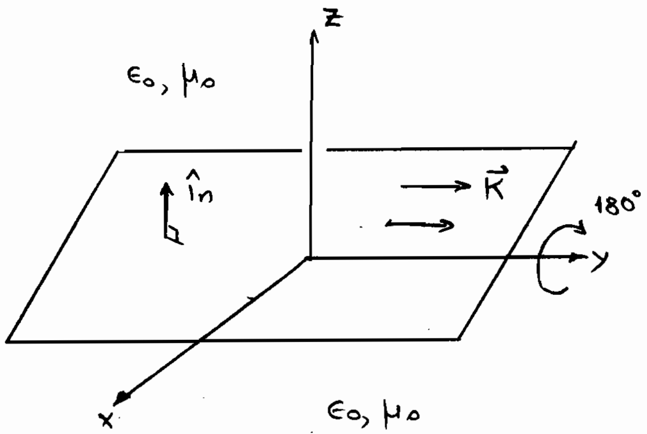
Τα στιγμιαία πεδία μπορούν να βρεθούν από την σχέση:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{ \vec{E} e^{j\omega t} \right\} = Re\left\{ \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t} \right\} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$ αν

υποθέσουμε ότι $\vec{E}_0$ είναι πραγματικό διάνυσμα.

Απέραντο Επιφανειακό Ημιτονοειδές Ρεύμα:

Να υπολογισθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον αέρα (μόνιμη κατάσταση) που οφείλεται στη ροή ρεύματος με επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = K_o \cos(\omega t)\,\hat{1}_y$ στο επίπεδο $z=0$.



Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο του z εφόσον το επίπεδο xy είναι άπειρο και η πυκνότητα $\vec{K}$ δεν εξαρτάται από τα x, y. Δηλαδή $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$ και $\vec{H} = \vec{H}(z,t)$.

Αν περιστρέψουμε το επίπεδο $z=0$ κατά 180° το πρόβλημα παραμένει το ίδιο εκτός του ότι $x \to -x$ και $z \to -z$. Επομένως οι συνιστώσες E_x, E_z, H_x, H_z πρέπει να είναι αντισυμμετρικές. Δηλαδή

$$E_x(-z,t) = -E_x(z,t) \qquad H_x(-z,t) = -H_x(z,t)$$

$$E_z(-z,t) = -E_z(z,t) \qquad H_z(-z,t) = -H_z(z,t)$$

Τώρα ας χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην σημειακή τους μορφή και τις οριακές συνθήκες στο επίπεδο $z=0$,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_o \vec{H}) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_o \dfrac{\partial H_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_o \dfrac{\partial H_y}{\partial t} \\ 0 = \mu_o \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_o \vec{E}) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_o \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} = +\epsilon_o \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ 0 = \epsilon_o \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\epsilon_0\vec{E})=0 \Rightarrow \epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$ (δεν υπάρχουν φορτία)

$$\vec{\nabla}\cdot(\mu_0\vec{H})=0 \Rightarrow \mu_0\frac{\partial H_z}{\partial z}=0$$

Οριακές συνθήκες $(z=0)$:

$$\hat{i}_n\times(\vec{E}(z=0+,t)-\vec{E}(z=0-,t)]=0 \Rightarrow \hat{i}_y\left[E_x(z=0+,t)-E_x(z=0-,t)\right]+$$

$$-\hat{i}_x\left[E_y(z=0+,t)-E_y(z=0-,t)\right]=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x(z=0+,t)=E_x(z=0-,t)\\ E_y(z=0+,t)=E_y(z=0-,t)\end{cases}$$

$$\hat{i}_n\times(\vec{H}(z=0+,t)-\vec{H}(z=0-,t))=\vec{K} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_x(z=0+,t)-H_x(z=0-,t)=K_0\cos(\omega t)\\ H_y(z=0+,t)=H_y(z=0-,t)\end{cases}$$

$$\hat{i}_n\cdot(\vec{D}(z=0+,t)-\vec{D}(z=0-,t))=\sigma \Rightarrow$$

$$E_z(z=0+,t)-E_z(z=0-,t)=\sigma/\epsilon_0$$

$$\hat{i}_n\cdot(\vec{B}(z=0+,t)-\vec{B}(z=0-,t))=0 \Rightarrow$$

$$H_z(z=0+,t)=H_z(z=0-,t)$$

Επιπλέον από ΝΔΦ:

$$i_n\cdot(\vec{J}(z=0+,t)-\vec{J}(z=0-,t))=-\vec{\nabla}\cdot\vec{K}-\frac{\partial\sigma}{\partial t} \Rightarrow$$

$$0=\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

Εφόσον $\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0 \Rightarrow \sigma=\sigma_0$ ανεξάρτητο του χρόνου. Όμως αφού τόσο το $\vec{K}$ όσο και τα $\vec{E},\vec{H}$ είναι συναρτήσεις του χρόνου το σ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Άρα $\sigma=\sigma_0=0$.

Από την εξίσωση $\epsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}=0 \Rightarrow E_z=C \Rightarrow$

$$E_z=\begin{cases} C_1 & z>0\\ C_2 & z<0\end{cases}$$ όμως $E_z(0+,t)=E_z(0-,t)\Rightarrow C_1=C_2$

Όμως το πεδίο δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητο του χρόνου και επομένως $C_1 = C_2 = 0 \rightsquigarrow \underline{E_z(z,t) = 0}$. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και με χρήση της αντισυμμετρίας. $E_z(-z,t) = -E(z,t) \Rightarrow C_2 = -C_1$ και $C_2 = C_1 \rightsquigarrow C_1 = C_2 = 0$.

Από την εξίσωση $\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow H_z = C \Rightarrow$

$$H_z = \begin{cases} D_1 & z>0 \\ D_2 & z<0 \end{cases}$$

. Όμως $H_z(0+,t) = H_z(0-,t) \Rightarrow D_1 = D_2$

και από την αντισυμμετρία $D_2 = -D_1$. Οπότε $D_1 = D_2 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{H_z(z,t) = 0}$$

Επίσης μπορούμε να σχηματίσουμε την ακόλουθη κυματική εξίσωση :

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0$$ (κυματική εξίσωση για $H_x(z,t)$).

Από την οριακή συνθήκη $H_x(z=0+,t) - H_x(z=0-,t) = K_0 \cos(\omega t)$

Όμως $H_x(-z,t) = -H_x(z,t)$ και επομένως

$$H_x(z=0+,t) = -H_x(z=0-,t) = \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t)$$

Η κυματική εξίσωση για το $H_x(z,t)$ περιγράφει κύματα που διαδίδονται στις $\pm z$ διευθύνσεις με ταχύτητα $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Το κύμα στην θέση $z_0 (>0)$ κατά τον χρόνο t θα έχει χαρακτηριστικά που είχε στην θέση $z=0+$ κατά τον χρόνο $t - \frac{z_0}{c}$ αφού χρειάζεται χρονικό διάστημα z_0/c (>0) για να φθάσει από το $z=0+$, ως το z_0. Συνεπώς

$$H_x(z_0,t) = H_x\left(z=0+, t-\frac{z_0}{c}\right) = \frac{1}{2} K_0 \cos\left(\omega\left(t-\frac{z_0}{c}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t - k_0 z_0) \quad \text{όπου} \quad k_0 = \omega/c \qquad (z_0>0)$$

Παρομοίως για $z_0<0 \rightsquigarrow H_x(z_0,t) = -\frac{1}{2} K_0 \cos\left(\omega\left(t+\frac{z_0}{c}\right)\right) =$

$$= -\frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t + k_0 z_0)$$

Η E_y συνιστώσα του πεδίου μπορεί να βρεθεί από τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \omega \sin(\omega t - k_0 z) & z>0 \\ +\frac{1}{2} K_0 \omega \sin(\omega t + k_0 z) & z<0 \end{cases}$$

$$E_y = \mu_0 \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \omega \frac{1}{k_0} \cos(\omega t - k_0 z) & z>0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \frac{\omega}{k_0} \cos(\omega t + k_0 z) & z<0 \end{cases}$$

$$E_y = \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos(\omega t - k_0 z) & z>0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos(\omega t + k_0 z) & z<0 \end{cases}$$

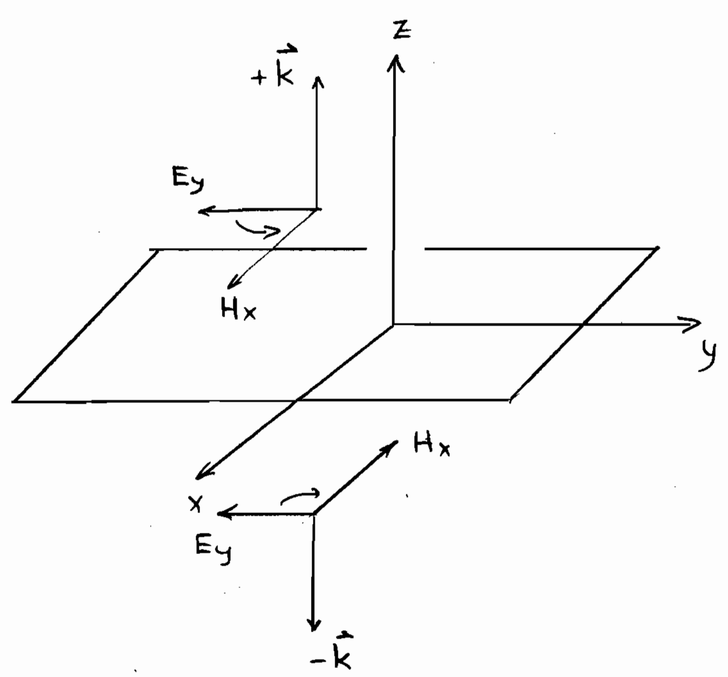
Από τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να εξάγουμε την ακόλουθη κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Όμως $E_x(z=0+,t) = -E_x(z=0-,t)$ και $E_x(z=0+,t) = E_x(z=0-,t)$

επομένως $E_x(z=0+,t) = E_x(z=0-,t) = 0$ και δεν διεγείρονται

κύματα με $E_x \neq 0$. Εφόσον $\underline{E_x = 0 \sim H_y = 0}$



Τώρα ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας φασιθέτες.

Ας γράφουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην μονίμη ημιτονοειδή κατάσταση χρησιμοποιώντας phasors. Τώρα τα πεδία $\vec{E}$, $\vec{H}$ και η πυκνότητα $\vec{K}$ αντιπροσωπεύουν φασιθέτες. Και πάλι $\vec{E}=\vec{E}(z,t)$, $\vec{H}=\vec{H}(z,t)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dE_y}{dz} = +j\omega\mu_0 H_x \\ \dfrac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu_0 H_y \\ 0 = -j\omega\mu_0 H_z \quad \Rightarrow \quad \underline{H_z = 0} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = j\omega\epsilon_0\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon_0 E_x \\ \dfrac{dH_x}{dz} = +j\omega\epsilon_0 E_y \\ 0 = j\omega\epsilon_0 E_z \quad \Rightarrow \quad \underline{E_z = 0} \end{cases}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$ ικανοποιούνται αυτομάτως εφόσον $E_z = H_z = 0$

Επιπλέον η ιδιότητα της αντισυμμετρίας ισχύει:

Απο τις πάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\frac{d^2H_x}{dz^2} = j\omega\epsilon_0\frac{dE_y}{dz} = j\omega\epsilon_0(j\omega\mu_0)H_x = -\omega^2\mu_0\epsilon_0 H_x \Rightarrow$$

$$\frac{d^2H_x}{dz^2} + \omega^2\mu_0\epsilon_0 H_x = 0 \sim H_x = H_{x+}e^{-jk_0z} + H_{x-}e^{+jk_0z} \qquad (k_0 = \omega/c)$$

όπου το $H_{x+}e^{-jk_0z}$ είναι το οδεύον κύμα στην διεύθυνση $+z$ και $H_{x-}e^{+jk_0z}$ είναι το οδεύον κύμα στην διεύθυνση $-z$.

Εφόσον στο $+\infty$ υπάρχει μόνο κύμα πρός την $+z$ διεύθυνση $H_{x-}=0$ για $z>0$. Παρομοίως, $H_{x+}=0$ για $z<0$. Επομένως η λύση για το H_x είναι η εξής

$$H_x = \begin{cases} H_{x+}e^{-jk_0z} & z>0 \\ H_{x-}e^{+jk_0z} & z<0 \end{cases}$$

Από την οριακή συνθήκη

$$\left.\begin{aligned} &H_x(z=0+) - H_x(z=0-) = K_o \\ &\text{Επίσης}\quad H_x(z) = -H_x(-z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad H_{x+} = -H_{x-} = \frac{1}{2}K_o$$

Επομένως,

$$H_x = \begin{cases} \frac{1}{2}K_o e^{-jk_o z} & z>0 \\ -\frac{1}{2}K_o e^{+jk_o z} & z<0 \end{cases}$$

Τώρα είναι εύκολο να βρούμε την E_y συνιστώσα:

$$j\omega\epsilon_o E_y = \frac{dH_x}{dz} \Rightarrow \quad E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_o}\frac{dH_x}{dz} \Rightarrow$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_o}\begin{cases} \frac{1}{2}K_o(-jk_o)e^{-jk_o z} & z>0 \\ -\frac{1}{2}K_o(jk_o)e^{+jk_o z} & z<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_y = \begin{cases} -\frac{1}{2}K_o\sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}\,e^{-jk_o z} & z>0 \\ -\frac{1}{2}K_o\sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}}\,e^{+jk_o z} & z<0 \end{cases}$$

Επίσης, $\frac{d^2E_x}{dz^2} = -j\omega\mu_o\frac{dH_y}{dz} = -j\omega\mu_o(-j\omega\epsilon_o)E_x = -\omega^2\mu_o\epsilon_o E_x \Rightarrow$

$$E_x = E_{x+}e^{-jk_o z} + E_{x-}e^{+jk_o z}$$

και για τους ίδιους λόγους όπως προηγουμένως $E_x = \begin{cases} E_{x+}e^{-jk_o z} & z>0 \\ E_{x-}e^{+jk_o z} & z<0 \end{cases}$

Όμως
$$\left.\begin{aligned} &E_x(z=0+) = E_x(z=0-) \quad \text{και} \\ &E_x(z) = -E_x(-z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E_{x+} = E_{x-} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{E_x = 0 \quad \rightarrow \quad H_y = 0}$$

Τα χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$E_y(z,t) = \mathrm{Re}\{E_y(z)e^{j\omega t}\} \Rightarrow$$

$$E_y(z,t) = -\frac{1}{2}K_o\sqrt{\frac{\mu_o}{z_o}}\begin{cases} \cos(\omega t - k_o z) & z>0 \\ \cos(\omega t + k_o z) & z<0 \end{cases}$$

και

$$H_x(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_o\cos(\omega t - k_o z) & z>0 \\ -\frac{1}{2}K_o\cos(\omega t + k_o z) & z<0 \end{cases}$$ όπως και προηγουμένως.

ΠΟΛΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Έστω επίπεδο κύμα διαδιδόμενο κατά την θετική διεύθυνση του z,

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jkz}$: ο φασιθέτης του ηλεκτρικού πεδίου.

$\vec{\mathcal{E}} = Re\{\vec{E} e^{j\omega t}\}$: το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο.

Το διάνυσμα $\vec{E}_0$ καθορίζει την πόλωση του επιπέδου κύματος. Ως γνωστόν $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}_0 = E_x \hat{i}_x + E_y \hat{i}_y$ και E_x, E_y είναι μιγαδικά μεγέθη. Έστω $E_x = E_{xo} e^{j\phi_x}$ και $E_y = E_{yo} e^{j\phi_y}$. Το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathcal{E}}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{\mathcal{E}} = E_{ox} \cos(\omega t - kz + \phi_x)\, \hat{i}_x + E_{oy} \cos(\omega t - kz + \phi_y)\, \hat{i}_y$$
$$= \mathcal{E}_x(z,t)\, \hat{i}_x + \mathcal{E}_y(z,t)\, \hat{i}_y$$

Η πόλωση του κύματος καθορίζεται από τον γεωμετρικό τόπο του διανύσματος $\vec{\mathcal{E}}$ σαν συνάρτηση του χρόνου για καθορισμένο z. Για να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος θα απαλείψουμε τον χρόνο t.

$$\mathcal{E}_x = E_{ox} \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$
$$\mathcal{E}_y = E_{oy} \cos(\omega t - kz + \phi_y) = E_{oy} \cos(\omega t - kz + \phi_x + \overbrace{(\phi_y - \phi_x)}^{\phi})$$

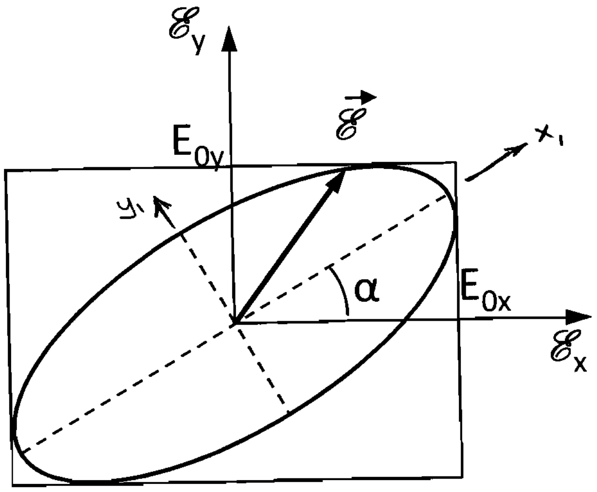
Θέτουμε $\omega t - kz + \phi_x = A$ και $\phi = \phi_y - \phi_x$. Επομένως,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}} &= \cos A \\ \frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}} &= \cos(A+\phi) = \cos A \cos\phi - \sin A \sin\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}} - \frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}} \cos\phi\right)^2 = \sin^2 A \sin^2\phi = \left(1 - \frac{\mathcal{E}_x^2}{E_{ox}^2}\right) \sin^2\phi \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\,\frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos\phi = \sin^2\phi$$

Η τελευταία εξίσωση παριστάνει μιά έλλειψη στο επίπεδο xy.



Η γωνία α μπορεί εύκολα να βρεθεί μετασχηματίζοντας την έλλειψη στο σύστημα των αξόνων της x_1, y_1.

$$\mathcal{E}_x = \cos\alpha\, \mathcal{E}_{x_1} - \sin\alpha\, \mathcal{E}_{y_1}$$

$$\mathcal{E}_y = \sin\alpha\, \mathcal{E}_{x_1} + \cos\alpha\, \mathcal{E}_{y_1}$$

Κάνοντας τον μετασχηματισμό η γωνία α μπορεί να βρεθεί μηδενίζοντας τον συντελεστή του όρου $\mathcal{E}_{x_1}\mathcal{E}_{y_1}$:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 E_{ox} E_{oy}}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \cos\phi$$

Οι ημιάξονες της έλλειψης δίδονται από τις σχέσεις:

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{ox_1}^2} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{E_{ox}^2} + \frac{\sin^2\alpha}{E_{oy}^2} - \frac{\sin 2\alpha}{E_{ox} E_{oy}} \cos\phi \right) \frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{oy_1}^2} = \left(\frac{\sin^2\alpha}{E_{ox}^2} + \frac{\cos^2\alpha}{E_{oy}^2} + \frac{\sin 2\alpha}{E_{ox} E_{oy}} \cos\phi \right) \frac{1}{\sin^2\phi}$$

Η πόλωση αυτή είναι εν γένει ελλειπτική πόλωση.

Αν $\mathcal{E}_{max} = \max\{\mathcal{E}_{ox_1}, \mathcal{E}_{oy_1}\}$ και $\mathcal{E}_{min} = \min\{\mathcal{E}_{ox_1}, \mathcal{E}_{oy_1}\}$

τότε ο λόγος $\dfrac{\mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max}} = e$ = ελλειπτικότητα.

Ειδικές Περιπτώσεις

1) Γραμμική Πόλωση (Linear Polarization) : $\phi = 0$ ή $\pm\pi$

$\cos\phi = \pm 1$ και $\sin\phi = 0$ οπότε :

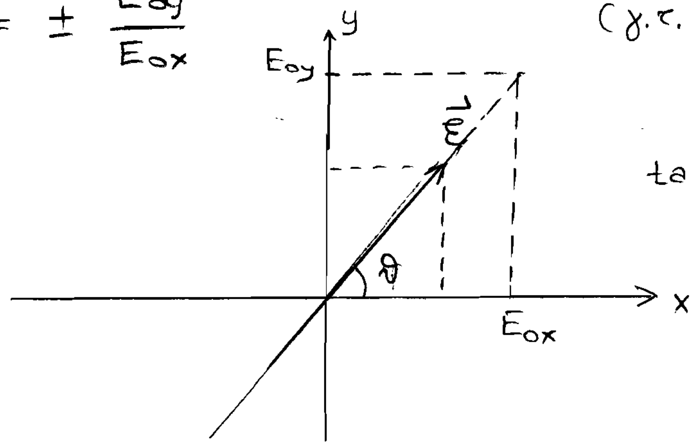
$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}}\right)^2 \mp 2\frac{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y}{E_{ox} E_{oy}} = 0$$

("−" όταν $\phi = 0$ και "+" όταν $\phi = \pm\pi$)

$$\sim \left(\frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}} \mp \frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}} = \pm \frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}}$$

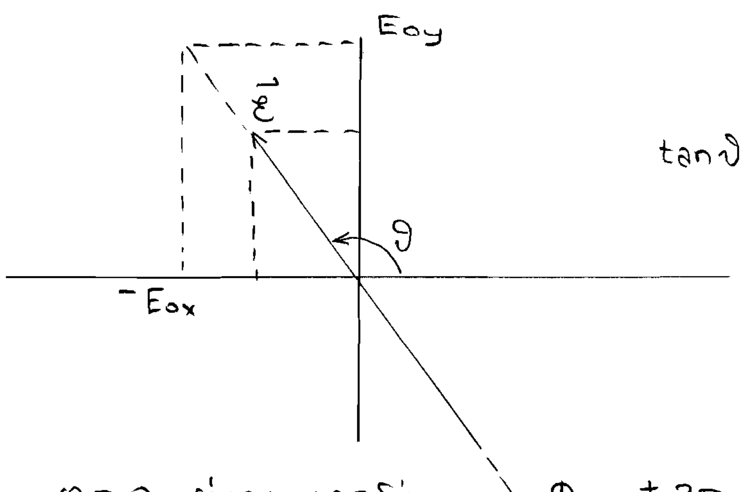
$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \pm \frac{E_{oy}}{E_{ox}}$$

(γ.τ. είναι ευθύγραμμο τμήμα)



$$\tan\vartheta = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = \frac{E_{oy}}{E_{ox}}$$

$$\phi = 0$$



$$\tan\vartheta = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x} = -\frac{E_{oy}}{E_{ox}}$$

$$\phi = \pm\pi$$

Αντί για $\phi = 0$ είναι ισοδύναμο $\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, ..$

Αντί για $\phi = \pm\pi$ είναι ισοδύναμο $\phi = \pm 3\pi, \pm 5\pi, ..$

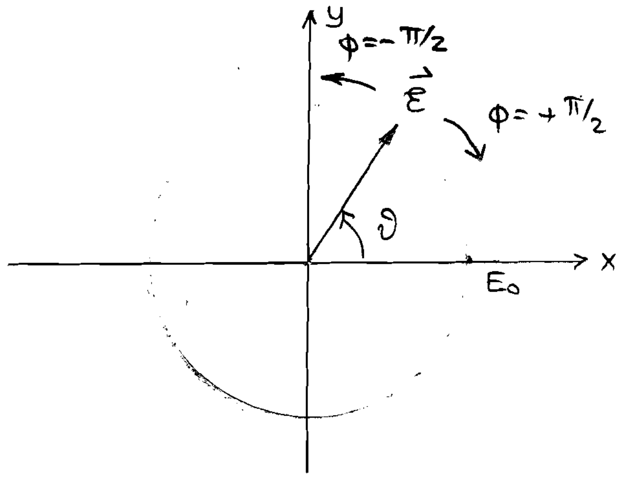
2) Κυκλική Πόλωση (Circular Polarization)

$E_{ox} = E_{oy} = E_o$ και $\phi = \pm \pi/2$

$\cos\phi = 0$ και $\sin\phi = \pm 1$

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{E_o}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{E_o}\right)^2 = 1 \Rightarrow \quad \mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 = E_o^2$$

(γ.τ. είναι κύκλος)



$$\tan\vartheta = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x}$$

$$\mathcal{E}_y = E_o \cos(\omega t - kz + \phi)$$

$$\mathcal{E}_x = E_o \cos(\omega t - kz)$$

(Θέτουμε $\phi_x = 0$ για ευκολία)

α) Αν $\phi = -\pi/2 \sim \tan\vartheta = \dfrac{\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})}{\cos(\omega t - kz)} = +\tan(\omega t - kz)$

οπότε για σταθερό z η γωνία ϑ αυξάνεται με τον χρόνο. Άρα το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται αντίστροφα των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται δεξιόχειρη κυκλική πόλωση. (right hand circularly polarization)

β) Αν $\phi = +\pi/2 \sim \tan\vartheta = \dfrac{\cos(\omega t - kz + \pi/2)}{\cos(\omega t - kz)} = -\tan(\omega t - kz)$

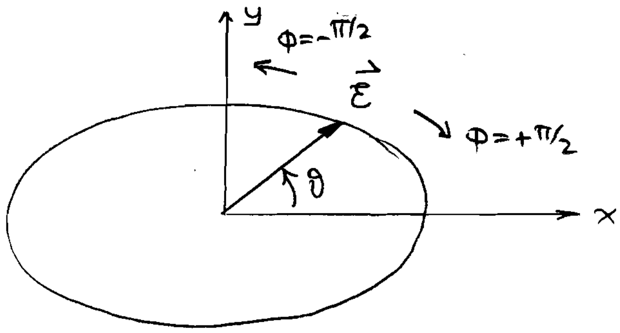
οπότε για σταθερό z η γωνία ϑ μειώνεται με τον χρόνο. Άρα το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται αριστερόχειρη κυκλική πόλωση (Left hand circularly polarization)

Αντί για $\phi = \pm \pi/2$ είναι ισοδύναμο $\phi = \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \ldots$

3) $E_{ox} \neq E_{oy}$ και $\phi = \pm \pi/2$ (ειδική περίπτωση ελλειπτικής πόλωσης)

$\cos\phi = 0$ και $\sin\phi = \pm 1$, οπότε

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{E_{oy}}\right)^2 = 1$$ (γ.τ. είναι έλλειψη με άξονες x, y).



$$\tan\theta = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{E}_x}$$

$$\mathcal{E}_y = E_{oy}\cos(\omega t - kz + \phi)$$

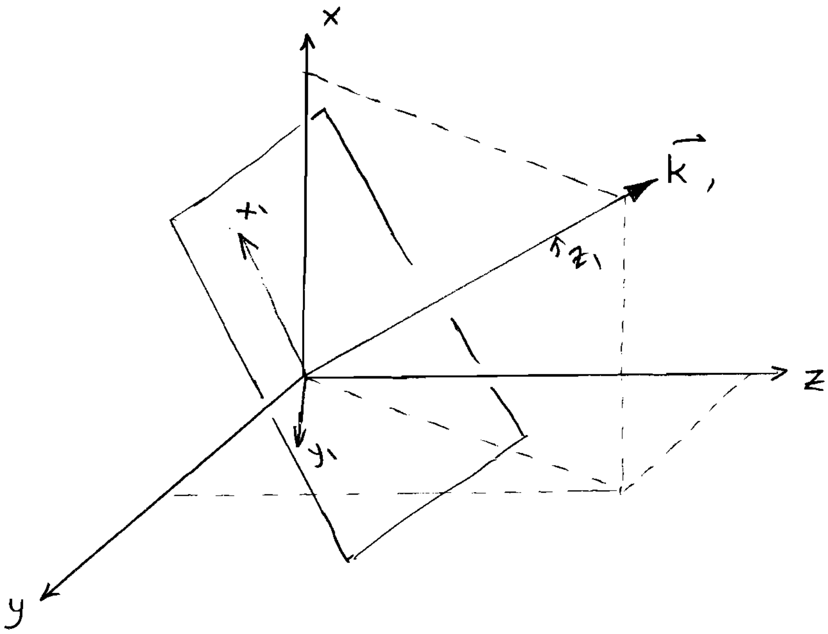
$$\mathcal{E}_x = E_{ox}\cos(\omega t - kz)$$

α) Αν $\phi = -\pi/2 \rightarrow \tan\theta = \frac{E_{yo}}{E_{xo}}\tan(\omega t - kz)$ οπότε όπως προηγουμένως το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται αντίστροφα των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται δεξιόχειρη ελλειπτική πόλωση (right hand elliptical polarization).

β) Αν $\phi = +\pi/2 \rightarrow \tan\theta = -\frac{E_{yo}}{E_{xo}}\tan(\omega t - kz)$ οπότε το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται αριστερόστροφη ελλειπτική πόλωση (left hand elliptical polarization).

Αντί για $\phi = \pm\pi/2$ είναι ισοδύναμο με $\phi = \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν και για τυχαία στον χώρο διάδοση επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Σε αυτή την περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο αναλύεται στο επίπεδο x'y' που είναι κάθετο στο $\vec{k}$ (z') και ισχύουν όλα τα προηγούμενα.

Επίπεδα Κύματα σε Υλικά με Απώλειες:

Έστω υλικό με επιτρεπτότητα $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, διαπερατότητα $\mu = \mu_0 \mu_r$, και ειδική αγωγιμότητα σ. Θα εξετάσουμε λύσεις επιπέδων κυμάτων μέσα σε ομογενές και ισότροπο υλικό (γραμμικό). Οι εξισώσεις του Maxwell στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση γράφονται ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\vec{J} = \sigma \vec{E}) + j\omega\epsilon \vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε είτε το μαγνητικό πεδίο $\vec{H}$ είτε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times (-j\omega\mu \vec{H}) = -j\omega\mu(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} = 0 \qquad \text{(εξίσωση Helmholtz)}$$

Ορίζουμε $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) = (\alpha + j\beta)^2$

$\gamma = (\alpha + j\beta) \equiv j k_c$ όπου k_c είναι ένας μιγαδικός πλέον κυματαριθμός.

Επομένως η εξίσωση Helmholtz γράφεται σαν

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \qquad [k_c^2 = -\gamma^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)]$$

Όπως και στην περίπτωση των υλικών χωρίς απώλειες οι λύσεις επιπέδων κυμάτων είναι της μορφής:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \quad \text{με} \quad k_c^2 = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon), \quad \vec{k}_c = k_c \hat{k}_c$$

και $\hat{k}_c$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Εφόσον $jk_c = \alpha + j\beta \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-(\alpha + j\beta)(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} =$

$$= \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{-j\beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r})}$$

Η σταθερά α = συντελεστής απόσβεσης (attenuation coefficient) και η σταθερά β = συντελεστής διάδοσης ή φασική σταθερά, εφόσον σχετίζεται με την φάση του κύματος.

Οι συντελεστές α, β μπορούν να βρεθούν σαν συναρτήσεις των ε, μ, σ και ω ως εξής:

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) + j\,2\alpha\beta = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon \\ 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \end{cases}$$

και $$\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[-1 + \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/2}\right]\right\}^{1/2} \quad (\alpha > 0)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/2}\right]\right\}^{1/2} \quad (\beta > 0)$$

Στην περίπτωση των υλικών δίχως απώλειες $\sigma = 0$. Οπότε,

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \qquad \text{και } jk_c = \gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow k_c = \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

όπως έχουμε ήδη βρεί για τα επίπεδα κύματα σε υλικά χωρίς απώλειες.

Τώρα για απλούστευση ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο κύμα διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό με απώλειες κατά την διεύθυνση του άξονος των z.

$$\hat{k}_c = \hat{\imath}_z \quad \text{και} \quad \hat{k}_c \cdot \vec{r} = \hat{\imath}_z \cdot [x\hat{\imath}_x + y\hat{\imath}_y + z\hat{\imath}_z] = z \qquad (\vec{E}_o \cdot \hat{\imath}_z = 0)$$

Επομένως $\vec{E} = \vec{E}_o\, e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ με α, β προσδιοριστέα από τις προηγούμενες εξισώσεις. Αφού $\alpha > 0$, (απώλειες) παρατηρούμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται εκθετικά όσο το κύμα διαδίδεται κατά την διεύθυνση των z. Εδώ μπορούμε να ορίσουμε το βάθος διεισδύσεως (skin depth) σαν την απόσταση δ που διανύει το κύμα ώστε το πλάτος του να μειωθεί στο $1/e$ της τιμής του στο σημείο εκκίνησης. Με αυτόν τον ορισμό $e^{-\alpha\delta} = e^{-1} \Rightarrow \delta = 1/\alpha$

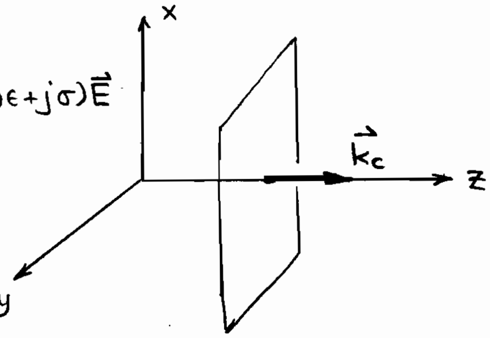
Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι το επίπεδο κύμα σε υλικά με απώλειες πρέπει και πάλι να ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση για επίπεδο κύμα, δηλαδή:

$$\vec{k}_c \times \vec{E} = \omega\mu \vec{H}$$

$$\vec{k}_c \times \vec{H} = j(\sigma\vec{E} + j\omega\epsilon\vec{E}) = (-\omega\epsilon + j\sigma)\vec{E}$$

$$\vec{k}_c \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k}_c \cdot \vec{H} = 0$$



Επίσης $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \Rightarrow \gamma = [j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)]^{1/2}$. Εάν γνωρίζουμε τον φασιθέτη του ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να βρούμε τον φασιθέτη του μαγνητικού πεδίου ως εξής:

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}(\vec{k}_c \times \vec{E}) = \frac{k_c}{\omega\mu}(\hat{k}_c \times \vec{E})$$

$$jk_c = \gamma \Rightarrow k_c = \frac{1}{j}\gamma = \frac{1}{j}\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)}$$

Επομένως, $\vec{H} = \dfrac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)}}{j\omega\mu}(\hat{k}_c \times \vec{E}) = \dfrac{1}{Z}(\hat{k}_c \times \vec{E})$

όπου Z είναι η χαρακτηριστική (κυματική) αντίσταση του υλικού (intrinsic impedance).

$$Z = \left\{\frac{j^2\omega^2\mu^2}{j\omega\mu(\sigma+j\omega\epsilon)}\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\epsilon}} = |Z|e^{j\Phi}$$

Το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = Re\left\{\vec{E}_o e^{-\alpha(\hat{k}_c\cdot\vec{r})} e^{-j\beta(\hat{k}_c\cdot\vec{r})} e^{j\omega t}\right\}$$ (αν υποθέσουμε ότι $\vec{E}_o$ είναι πραγματικό διάνυσμα) $\rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o e^{-\alpha(\hat{k}_c\cdot\vec{r})}\cos(\omega t - \beta(\hat{k}_c\cdot\vec{r}))$$

Για το επίπεδο κύμα που διαδίδεται κατά την διεύθυνση z με $\vec{E}_o = \hat{i}_x E_o$ έχουμε: $\vec{E}(z,t) = \hat{i}_x E_o e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$

Το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο βρίσκεται ως εξής:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{Z}\, \hat{k}_c \times \vec{E}_0\, e^{-\alpha(\hat{k}_c\cdot\vec{r})}\, e^{-j\beta(\hat{k}_c\cdot\vec{r})}\, e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|Z|}\, \hat{k}_c \times \vec{E}_0\, e^{-\alpha(\hat{k}_c\cdot\vec{r})}\, \mathrm{Re}\left\{ e^{-j\Phi}\, e^{-j\beta(\hat{k}_c\cdot\vec{r})}\, e^{j\omega t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{|Z|}\, \hat{k}_c \times \vec{E}_0\, e^{-\alpha(\hat{k}_c\cdot\vec{r})} \cos\left[\omega t - \beta(\hat{k}_c\cdot\vec{r}) - \Phi\right]$$

Στην ειδική περίπτωση που $\hat{k}_c = \hat{\imath}_z$ και $\vec{E}_0 = \hat{\imath}_x E_0$ έχουμε:

$$\vec{H}(z,t) = \frac{1}{|Z|} E_0 (\hat{\imath}_z \times \hat{\imath}_x)\, e^{-\alpha z} \cos\left[\omega t - \beta z - \Phi\right] =$$

$$= \frac{1}{|Z|} E_0\, \hat{\imath}_y\, e^{-\alpha z} \cos\left[\omega t - \beta z - \Phi\right]$$

Από την εξίσωση του Maxwell $\vec{\nabla}\times\vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} = j\omega\left[\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right]\vec{E}$ $= j\omega\left[\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right]\vec{E} = j\omega\epsilon_c\vec{E}$ όπου $\epsilon_c = \epsilon + \sigma/j\omega = \epsilon - j\sigma/\omega =$ $=$ μιγαδική επιτρεπτότητα του υλικού. Χρησιμοποιώντας την μιγαδική επιτρεπτότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λύσεις των εξισώσεων Maxwell που βρέθηκαν για υλικά χωρίς απώλειες και στην περίπτωση των υλικών με απώλειες με την αντικατάσταση της $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$.

Πολλές φορές συμβολίζουμε την μιγαδική επιτρεπτότητα ως εξής:

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad \text{με} \quad \epsilon' = \epsilon \quad \text{και} \quad \epsilon'' = \sigma/\omega$$

Τώρα ας εξετάσουμε τις εξής δύο ειδικές κατηγορίες υλικών:

(α) Καλά διηλεκτρικά (μονωτές) [low-loss dielectrics] και

(β) Καλοί αγωγοί (good conductors).

Καλά Διηλεκτρικά:

Ένα καλό διηλεκτρικό υλικό είναι καλός μονωτής, όχι όμως τέλειος. Στην περίπτωση αυτή $\epsilon'' \ll \epsilon'$ ή $\frac{\sigma}{\omega} \ll \epsilon' \Rightarrow \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \ll 1$ ή $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

Σε αυτή την περίπτωση $\gamma = (\alpha + j\beta) = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right]^{1/2}$

Όμως $(1+x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$ Για $|x| = \left|-j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right| \ll 1$

έχουμε: $\gamma=\alpha+j\beta \simeq j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1-\frac{j}{2}\frac{\epsilon''}{\epsilon'}-\frac{j^2}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$

$$\alpha \simeq \frac{1}{2}\omega\epsilon''\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$$

$$\beta \simeq \omega\sqrt{\mu\epsilon'}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]$$

και η κυματική αντίσταση είναι:

$$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1-j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}\left(1+j\frac{\epsilon''}{2\epsilon'}\right)$$

Η φασική ταχύτητα είναι $u_p=\frac{\omega}{\beta}\simeq\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}}\left(1-\frac{1}{8}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right)$

<u>Καλοί Αγωγοί:</u>

Για τους καλούς αγωγούς $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\gg 1$

$$\gamma=(\alpha+j\beta)=j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right]^{1/2}\simeq j\omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^{1/2}=$$

$$=\sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}=(1+j)\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}\quad(\omega=2\pi\nu)$$

και επομένως $\alpha\simeq\beta\simeq\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}$

Η κυματική αντίσταση είναι:

$$Z=\sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma+j\omega\epsilon}}=\left\{\frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon\left[1+\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right]}\right\}^{1/2}\simeq\left\{\frac{j\omega\mu}{\sigma}\right\}^{1/2}=$$

$$=\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}=(1+j)\sqrt{\frac{\pi\nu\mu}{\sigma}}$$

Η φασική ταχύτητα είναι: $u_p=\frac{\omega}{\beta}\simeq\frac{2\pi\nu}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}=\sqrt{\frac{4\pi^2\nu^2}{\pi\nu\mu\sigma}}=2\sqrt{\frac{\pi\nu}{\mu\sigma}}$

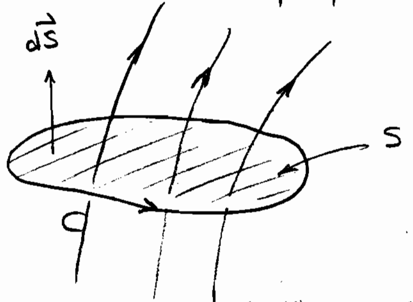
Εφόσον το πεδίο αποσβένει όταν διαδίδεται στον αγωγό το βάθος διείσδυσης $\delta=\frac{1}{\alpha}\simeq\frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}$ που μειώνεται είτε με αύξηση της συχνότητας, είτε με αύξηση της ειδικής αγωγιμότητας σ. Για τέλειους αγωγούς $\sigma=\infty$ οπότε $\delta=0$, δηλαδή το πεδίο στο εσωτερικό του τέλειου αγωγού είναι μηδενικό.

Νόμος Faraday για χρονομεταβλητά Πεδία

Ο νόμος του Faraday στην ολοκληρωτική του μορφή για χρονομεταβλητά πεδία γράφεται ως εξής

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{όπου} \quad \Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \text{ είναι η}$$

μαγνητική ροή. Ο Faraday παρατήρησε πρώτος ότι αν θεωρήσουμε ένα κλειστό αγώγιμο βρόχο C που βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο (με μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$) τότε αν $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ επάγεται ένα ρεύμα στον αγώγιμο βρόχο. Επειδή το ρεύμα εξαρτάται από την αντίσταση του βρόχου είναι καλύτερο

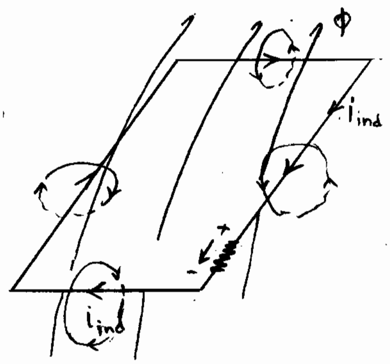


να εκφράσουμε το αποτέλεσμα αυτού του πειράματος εισάγοντας τον όρο ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ (emf) ως εξής:

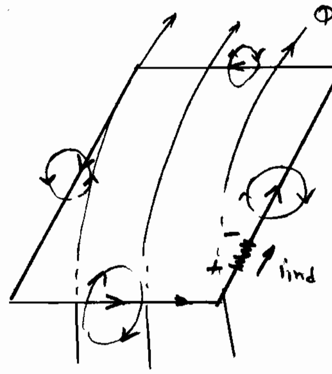
$$emf = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Η μαγνητική ροή Φ μπορεί να αλλάζει σαν συνάρτηση του χρόνου για πολλούς λόγους. Π.χ. (α) μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο η μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$, (β) ο βρόχος μπορεί να μεταβάλλεται σε σχήμα και μέγεθος, (γ) ο βρόχος μπορεί να κινείται ή κάποιος συνδυασμός από όλες αυτές τις περιπτώσεις.

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον κανόνα του Lenz. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται είναι τέτοια ώστε να αντιτίθεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής.

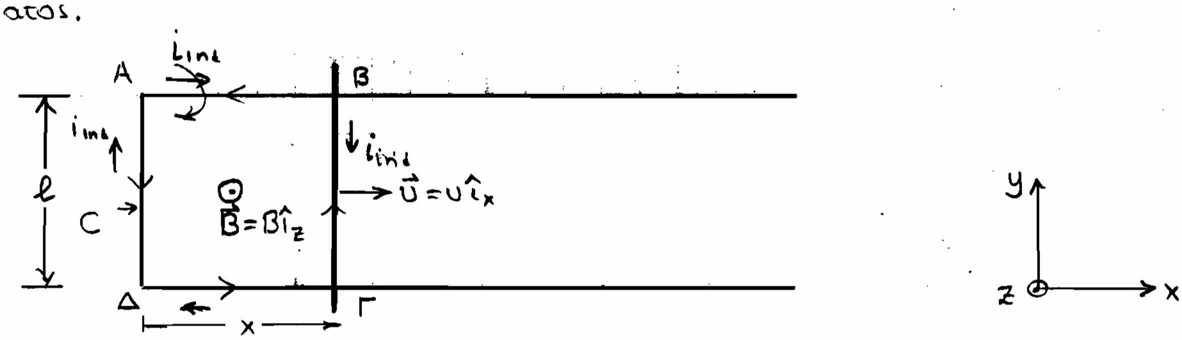


Έστω Φ(t) αυξανόμενη με τον χρόνο, δηλαδή $d\Phi/dt > 0$. Το επαγόμενο ρεύμα i_{ind} θα πρέπει να προκαλεί μαγνητική ροή που να αντιτίθεται στην μεταβολή της ροής Φ.



Εάν $d\Phi/dt < 0$, δηλαδή αν η μαγνητική ροή ελαττώνεται με τον χρόνο τότε το επαγόμενο ρεύμα παράγει μαγνητική ροή που τείνει να διατηρήσει (να αυξήσει) την ελαττωμένη μαγνητική ροή.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω αγώγιμη ράβδος που κυλίεται πάνω σε ένα γηματοειδή αγωγό σχήματος U όπως στο σχήμα. Η αγώγιμη ράβδος κινείται πρός τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα υ. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερό μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή $\vec{B}$ κάθετη στο κύκλωμα και με διεύθυνση έξω από την σελίδα. Να βρεθεί η επαγόμενη emf και η φορά του επαγομένου ρεύματος.



$$emf = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, dy\, dx = B\ell x$$

Επομένως $\quad emf = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\upsilon$

Εφόσον η ράβδος κινείται προς τα δεξιά αυξάνεται η περιοχή του βρόχου που τέμνει την μαγνητική ροή και επομένως αυξάνεται η μαγνητική ροή. Άρα το επαγόμενο ρεύμα είναι τέτοιο ώστε να αντιτίθεται στην αύξηση της ροής.