

ΧΡΟΝΟΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΠΕΔΙΑ:

Όπως είχε αναφερθεί προηγουμένως οι εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση των χρονομεταβλητών πεδίων έχουν την μορφή (σημειωτή):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

και ο ΝΔΦ: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες είναι:

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \quad \hat{i}_n \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma$$

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K} \quad \hat{i}_n \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$$

και $\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ (όπου $\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{K} =$ διδιδάστη απόκλιση του \vec{K})

Επίσης τα πεδία μέγεθ $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ και \vec{J} συνδέονται μεταξύ τους μέσω των συστατικών σχέσεων.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι εξετάσουμε πιθανές λύσεις των εξισώσεων του Maxwell στην περίπτωση του κενού, και χωρίς πηγές ρ και \vec{J} . Χρησιμοποιώντας τις συστατικές σχέσεις $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ και $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

Από τις ανωτέρω εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε ένα από τα δύο πεδία μέγεθ ως εξής. (απαλοιφή του \vec{H}):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Παρομοίως θα μπορούσαμε να απαλείψουμε το \vec{E} και να καταλήξουμε στην εξίσωση $\nabla^2 \vec{H} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$.

Οι ανωτέρω εξισώσεις ως προς \vec{E} ή \vec{H} είναι ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις κύματος.

Οι ανωτέρω υφαντιές εξισώσεις ανάγονται στην επίλυση της υφαντιής εξισώ-
σης της μορφής

$$\nabla^2 \vec{f} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{όπου } f = E_x, E_y, E_z; H_x, H_y, H_z.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f = f(z, t)$ οπότε η υφαντιή εξίσωση παίρνει
την μορφή:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \leadsto \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Τώρα ας ορίσουμε $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 1/[4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}]^{1/2}$

$= 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} = \text{ταχύτητα του φωτός στο κενό. Συνήθως}$

$c \approx 300,000 \text{ km/sec}$. Η λύση της παραπάνω υφαντιής εξίσωσης είναι της

μορφής $f(z, t) = g(z \pm ct)$ όπου g μία συνάρτηση τουλάχιστον δια-

φορισίμη δύο φορές. Τότε

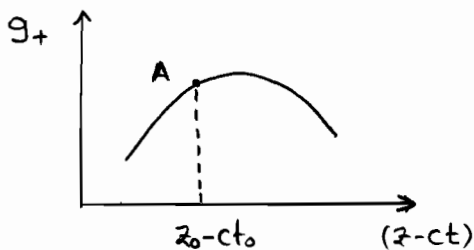
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= g' \frac{\partial(z \pm ct)}{\partial z} = g' \leadsto \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = g'' \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= g' \frac{\partial(z \pm ct)}{\partial t} = g'(\pm c) \leadsto \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = g'' c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ να ικανοποιείται η υφαντιή εξίσωση. Η γενική λύση

της μονοδιάστατης υφαντιής εξίσωσης είναι της μορφής:

$$f(z, t) = a_+ g_+(z - ct) + a_- g_-(z + ct)$$

Τώρα ας εξετάσουμε τους 2 όρους $g_+(z - ct)$ και $g_-(z + ct)$.



Έστω σημείο A της $g_+(z - ct)$ που φρι-

ζεται για $z_0 - ct_0 = \text{σταθερό} = K$

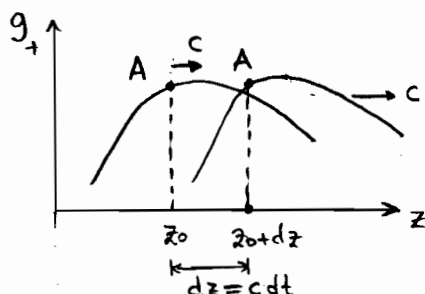
Έστω μετά από χρόνο dt το σημείο A

μετακινείται κατά dz . Τότε

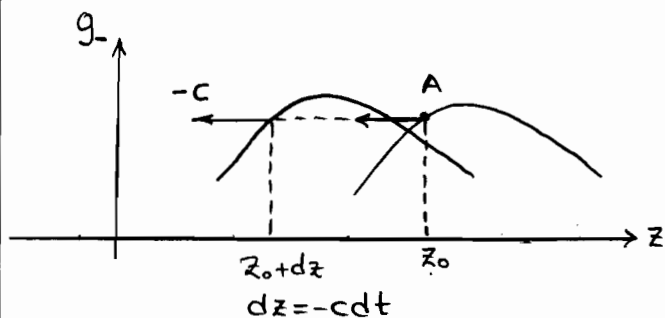
$$(z_0 + dz) - c(t_0 + dt) = K \Rightarrow$$

$$dz - c dt = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = c > 0$$

Επομένως το σημείο A μετακινείται



προς τα δεξιά z με ταχύτητα c . Παρόμοια η συνάρτηση $g_-(z+ct)$ μετατοπίζεται με ταχύτητα $-c$.



$$z_0 + ct_0 = K \rightarrow$$

$$(z_0 + dz) + c(t_0 + dt) = K \rightarrow$$

$$dz + c dt = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -c < 0$$

Εάν $f = E_x$ σαν παράδειγμα και $g_+ = \cos[k_0(z-ct)]$, $g_- = \cos[k_0(z+ct)]$

τότε

$$E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - k_0 c t) + E_- \cos(k_0 z + k_0 c t) \text{ όπου}$$

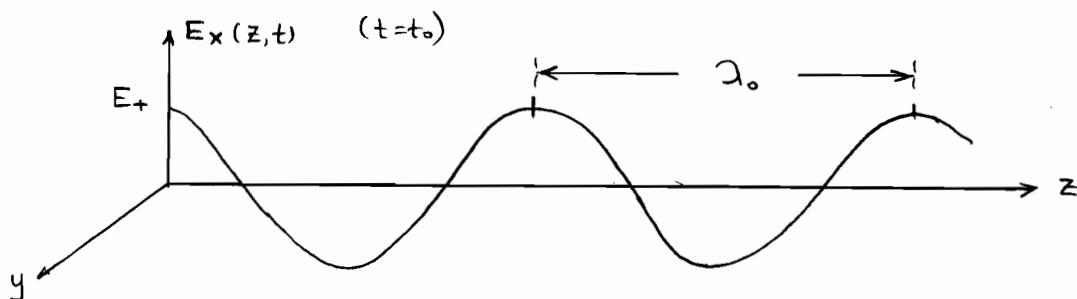
$k_0 c = \omega \Rightarrow k_0 = \omega/c = \text{κυματαριθμός του κύματος}$, και επομένως

$$E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - \omega t) + E_- \cos(k_0 z + \omega t). \text{ Τώρα για απλούστευση}$$

ας θεωρήσουμε ότι $E_- = 0$ και $E_x(z,t) = E_+ \cos(k_0 z - \omega t)$.

Για σταθερό χρόνο μπορούμε να βρούμε την χωρική περίοδο του κύματος που ορίζεται σαν μήκος κύματος. Δηλαδή $k_0 \Delta z = 2\pi \Rightarrow$

$$\lambda_0 \equiv \Delta z = \frac{2\pi}{k_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega/c} \Rightarrow \lambda_0 \omega = 2\pi c \Rightarrow \lambda_0 2\pi \nu = 2\pi c \Rightarrow \lambda_0 \nu = c$$



Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που τα κύματα διαδίδονται μέσα σε υλικά με επιτρεπτικότητα ϵ και διευθετητικότητα μ αλλά χωρίς απώλειες. Τότε η ταχύτητα του κύματος ορίζεται και πάλι

$$\text{σαν } u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \text{ όπου}$$

$n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} =$ δείκτης διάθλασης του υλίου. Τότε το αντίστοιχο μήκος κύματος είναι $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega/u} = \frac{2\pi}{\omega} c \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{k_0} \frac{1}{n} = \frac{\lambda_0}{n}$ και ισχύει και πάλι $\partial f = u$.

Αν $E_x(z,t) = E_+ \cos(kz - \omega t) + E_- \cos(kz + \omega t)$ τότε ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο \vec{H} . Από τις εξισώσεις του Maxwell

έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow -\hat{i}_y \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \left[E_+ (-k) \sin(kz - \omega t) + E_- (-k) \sin(kz + \omega t) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial t} = E_+ \frac{k}{\mu} \sin(kz - \omega t) + E_- \frac{k}{\mu} \sin(kz + \omega t) \Rightarrow$$

$$H_y(z,t) = E_+ \frac{k}{\mu} \frac{-\cos(kz - \omega t)}{-\omega} + E_- \frac{k}{\mu} \frac{-\cos(kz + \omega t)}{+\omega} \Rightarrow$$

$$H_y(z,t) = E_+ \frac{k}{\omega\mu} \cos(kz - \omega t) - E_- \frac{k}{\omega\mu} \cos(kz + \omega t) \Rightarrow$$

$$= H_y(z,t) = H_+ \cos(kz - \omega t) - H_- \cos(kz + \omega t).$$

Οι σταθερές της ολοκλήρωσης θέτονται ίσες με το μηδέν διότι εφόσον δεν υπάρχουν πηγές δεν μπορούν να υπάρχουν και στατικά μαγνητικά πεδία.

Οι συντελεστές του μαγνητικού πεδίου σχετίζονται με τους συντελεστές του ηλεκτρικού πεδίου ως εξής:

$$H_+ = E_+ \frac{k}{\omega\mu} = E_+ \frac{\omega/u}{\omega\mu} = E_+ \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\mu} = E_+ \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \text{ και}$$

$$H_- = -E_- \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$$

Ορίζουμε ως $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ = χαρακτηριστική αντίσταση του κύματος μέσα στο υλικό. Αν $\mu = \mu_0$ και $\epsilon = \epsilon_0$ τότε $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377 \Omega$ και είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του κύματος στο κενό. Επιπλέον

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \left(\sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \right).$$

Η ανωτέρω μορφή κύματος υαλείται και επίπεδα κύμα διότι η φάση του όρου $\cos(kz - \omega t)$ [ή αντίστοιχα του $\cos(kz + \omega t)$] παραμένει σταθερή (για σταθερό χρόνο) όταν $z = \text{σταθερό}$. Όμως $z = \text{σταθερό}$ ακριβώς κεί σε επίπεδα παράλληλα στο xy . Η σταθερή φάση (για $t = \text{σταθερό}$) ορίζει το μέγιστο κύματος. Επομένως τα επίπεδα κύματα έχουν επίπεδα μέγιστα κύματος κινούνται προς την κατεύθυνση της διάδοσης τους.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα θα γενικευθούν με την εισαγωγή των phasors για επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε κάποια τυχαία διεύθυνση.

Η χρήση των φασιδετών (phasors) [παραστατικών μιγαδικών]

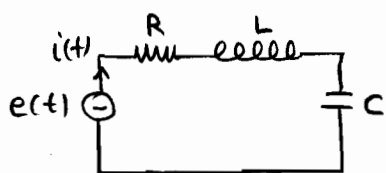
Ένας απλός τρόπος για την παράσταση των πεδίων μεγεθών στην περίπτωση ημιτονικού μόνιμης κατάστασης είναι η χρήση των φασιδετών (phasors).

Για παράδειγμα ένα ημιτονοειδές ρεύμα $i(t)$ ορίζεται από την μέγιστη τιμή του, την συχνότητα, και την φάση του. Ήδηλαδή

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

Παρόμοια θα μπορούσε να γραφεί και σαν $i(t) = I \sin(\omega t + \varphi')$

όπου $\varphi' = \varphi + \pi/2$. Γι' αυτό είναι σημαντικό να καθορίσουμε αν χρησιμοποιούμε $\cos()$ ή $\sin()$ για τον ορισμό του ρεύματος. Το να χρησιμοποιούμε ευθέως το ετιγμαίο ρεύμα $i(t)$ δεν είναι τόσο εύχρηστο όταν απαιτούνται παραγωγίσεις ή ολοκληρώσεις. Π.χ. το ρεύμα σε ένα RLC βρόχο με πηγή $e(t) = E \cos(\omega t)$ δίδεται από την επίλυση της εξίσωσης:



$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t)$$

Χρησιμοποιώντας φασιδετές έχουμε:

$$\tilde{I} = I e^{j\varphi} \Leftrightarrow i(t) = \text{Re} \{ \tilde{I} e^{j\omega t} \}$$

$$\tilde{E} = E e^{j0} \Leftrightarrow e(t) = \text{Re} \{ \tilde{E} e^{j\omega t} \}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \text{Re} \{ \tilde{I} e^{j\omega t} \} \right\} = \text{Re} \{ \tilde{I} j\omega e^{j\omega t} \}$$

$$\int i dt = \int \text{Re} \{ \tilde{I} e^{j\omega t} \} dt = \text{Re} \left\{ \tilde{I} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right\}$$

και η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$L \text{Re} \{ \tilde{I} j\omega e^{j\omega t} \} + R \text{Re} \{ \tilde{I} e^{j\omega t} \} + \frac{1}{C} \text{Re} \left\{ \tilde{I} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \{ \tilde{E} e^{j\omega t} \}$$

και εφόσον $L, R, C \in \mathbb{R}$

$$\text{Re} \left\{ \left(Lj\omega \tilde{I} + R \tilde{I} + \frac{1}{Cj\omega} \tilde{I} - \tilde{E} \right) e^{j\omega t} \right\} = 0 \Rightarrow$$

$$(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}) \tilde{I} - \tilde{E} = 0 \Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Γνωρίζοντας τον φασιδέτη \tilde{I} το ρεύμα μπορεί να βρεθεί από την σχέση

$$i(t) = \text{Re} \{ \tilde{I} e^{j\omega t} \}.$$

Παρόμοιοι φασιδέτες (phasors) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Π.χ. για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(\vec{r}, t)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}$$

όπου $\vec{E}(\vec{r}, t)$ είναι το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{E}(\vec{r})$ είναι ο διανυσματικός φασιδέτης (phasor) της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου. Συνήθως για ανδότητα θα συμβολίζουμε με $\vec{E}(\vec{r}, t)$ το στιγμιαίο διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και $\vec{E}(\vec{r})$ τον αντίστοιχο φασιδέτη.

Χρησιμοποιώντας φασιδέτες για όλα τα πεδία μέγεθη μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση που περιγράφει το νόμο του Faraday ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \text{Re} \{ \vec{E} e^{j\omega t} \} = - \frac{\partial}{\partial t} \{ \text{Re} \{ \vec{B} e^{j\omega t} \} \} \Rightarrow$$

$$\text{Re} \{ \vec{\nabla} \times \vec{E} e^{j\omega t} \} = - \text{Re} \{ j\omega \vec{B} e^{j\omega t} \} \Rightarrow$$

$$\text{Re} \{ (\vec{\nabla} \times \vec{E} + j\omega \vec{B}) e^{j\omega t} \} = 0 \quad (\forall t) \sim \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

Εφαρμόζοντας την ίδια δοκιμή για όλες τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να τις γράψουμε στην ημιτονουδή μόνιμη κατάσταση (time harmonic form) ως εξής: (όπου όλα τα πεδία με γέση ορίζονται με ρηθούς).

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Στην περίπτωση ομογενών, ισοτροπικών, γραμμικών υλικών (χωρίς πηγές)

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = 0, \quad \rho = 0, \quad \text{και οι ανωτέρω εξισώσεις γράφονται}$$

ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

Αν δοκιμάσουμε λύση της μορφής $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$, $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$.

Αποδοίφοντας το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -j\omega\mu (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -j\omega\mu (j\omega\epsilon) \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$$

Παρόμοια αποδοίφοντας το \vec{H} καταλήγουμε στην εξίσωση $\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0$.

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις αντιστοιχούν στην διανυσματική κυματική εξίσωση με φασιθέτες και ονομάζονται Helmholtz εξισώσεις.

$$\nabla^2 () = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} ()$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} (e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) &= -j k_x \hat{i}_x e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} - j k_y \hat{i}_y e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} - j k_z \hat{i}_z e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \\ &= -j \vec{k} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} (e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = \vec{\nabla} \cdot (-j \vec{k} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -j(-j) \vec{k} \cdot \vec{k} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = -\vec{k} \cdot \vec{k} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Επομένως αναζητώντας λύση της μορφής $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ έχουμε

$$\nabla^2 (\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \Rightarrow$$

$$(-\vec{k}\cdot\vec{k} + \omega^2 \mu \epsilon) \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{k} = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0) \mu_r \epsilon_r = k_0^2 \mu_r \epsilon_r \rightarrow |\vec{k}| = k = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

όπου $k_0 = \omega/c = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ο υπεραριθμός του κενού. Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ και $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ στις εξισώσεις Maxwell στην μόνιμη

ημιτονοειδή μορφή έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \epsilon \vec{E}$$

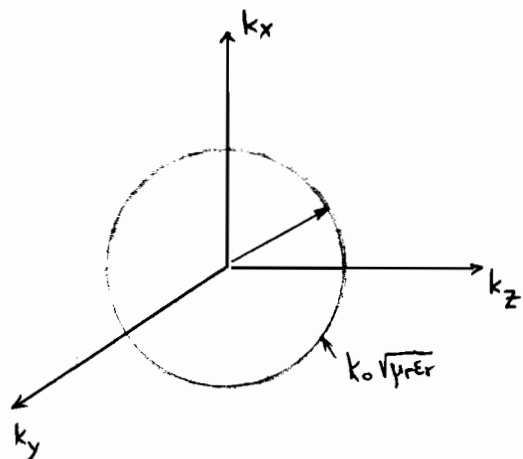
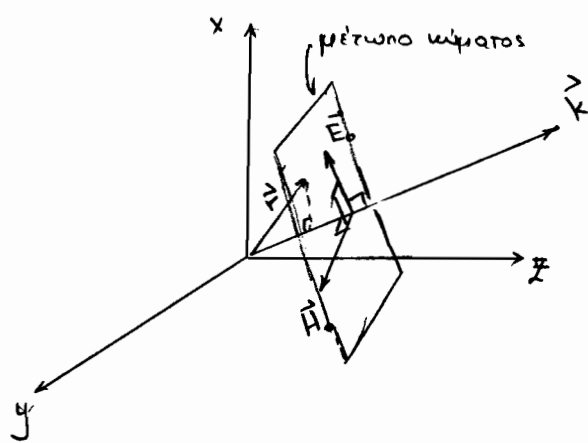
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

(*)

Επομένως οι συναρτήσεις $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ και $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ για να είναι λύσεις των εξισώσεων του Maxwell πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις (*).

Οι λύσεις αυτής της μορφής ονομάζονται επιπεδα κύματα γιατί το μέγιστο κύμα (οριζόμενο σαν $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{σταθερό}$) είναι επιπεδο. Το διάνυσμα \vec{k} ονομάζεται υπεραδιάνυσμα.



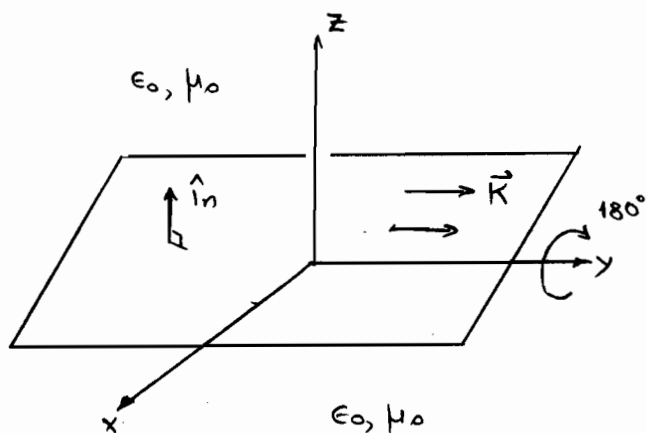
Τα στιγμιαία πεδία μπορούν να βρεθούν από την σχέση:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E} e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{j\omega t} \} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \text{ αν}$$

υποθέσουμε ότι \vec{E}_0 είναι πραγματικό διάνυσμα.

Απέραντο Επιφανειακό Ημιτονοειδές Ρεύμα:

Να υπολογισθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον αέρα (μόνιμη κατάσταση) που οφείλεται στη ροή ρεύματος με επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = K_0 \cos(\omega t) \hat{y}$ στο επίπεδο $z=0$.



Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο του z . Εφόσον το επίπεδο xy είναι άπειρο και η πυκνότητα \vec{K} δεν εξαρτάται από τα x, y . Ώνταδή $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$ και $\vec{H} = \vec{H}(z, t)$.

Αν περιστρέψουμε το επίπεδο $z=0$ κατά 180° το πρόβλημα παραμένει το ίδιο εκτός του ότι $x \rightarrow -x$ και $z \rightarrow -z$. Επομένως οι συνιστώσες E_x, E_z, H_x, H_z πρέπει να είναι αντισυμμετρικές. Ώνταδή

$$E_x(-z, t) = -E_x(z, t) \quad H_x(-z, t) = -H_x(z, t)$$

$$E_z(-z, t) = -E_z(z, t) \quad H_z(-z, t) = -H_z(z, t)$$

Τώρα ας χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην σημασιμή τους μορφή και τις οριακές συνθήκες στο επίπεδο $z=0$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ 0 = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = +\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ 0 = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = 0 \Rightarrow \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{δεν υπάρχουν φορτία})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{H}) = 0 \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Οριακές συνθήκες ($z=0$):

$$\hat{n} \times (\vec{E}(z=0+, t) - \vec{E}(z=0-, t)) = 0 \Rightarrow \hat{y} [E_x(z=0+, t) - E_x(z=0-, t)] +$$

$$-\hat{x} [E_y(z=0+, t) - E_y(z=0-, t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_x(z=0+, t) = E_x(z=0-, t) \\ E_y(z=0+, t) = E_y(z=0-, t) \end{cases}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}(z=0+, t) - \vec{H}(z=0-, t)) = \vec{K} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H_x(z=0+, t) - H_x(z=0-, t) = K_0 \cos(\omega t) \\ H_y(z=0+, t) = H_y(z=0-, t) \end{cases}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}(z=0+, t) - \vec{D}(z=0-, t)) = \sigma \Rightarrow$$

$$E_z(z=0+, t) - E_z(z=0-, t) = \sigma / \epsilon_0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}(z=0+, t) - \vec{B}(z=0-, t)) = 0 \Rightarrow$$

$$H_z(z=0+, t) = H_z(z=0-, t)$$

Επιπλέον από ΝΔΦ:

$$\hat{n} \cdot (\vec{J}(z=0+, t) - \vec{J}(z=0-, t)) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Εφόσον $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_0$ ανεξάρτητο του χρόνου. Όμως αφού τόσο το R όσο και τα \vec{E} , \vec{H} είναι συναρτήσεις του χρόνου το σ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Άρα $\sigma = \sigma_0 = 0$.

$$\text{Από την εξίσωση } \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = C \Rightarrow$$

$$E_z = \begin{cases} C_1 & z > 0 \\ C_2 & z < 0 \end{cases} \quad \text{όμως } E_z(0+, t) = E_z(0-, t) \Rightarrow C_1 = C_2$$

Όμως το πεδίο δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητο του χρόνου και επομένως

$C_1 = C_2 = 0 \sim \underline{E_z(z, t) = 0}$. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί
και με χρήση της ασυμμετρίας. $E_z(-z, t) = -E(z, t) \Rightarrow C_2 = -C_1$ και
 $C_2 = C_1 \sim C_1 = C_2 = 0$.

Από την εξίσωση $\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \Rightarrow H_z = C \Rightarrow$

$$H_z = \begin{cases} D_1 & z > 0 \\ D_2 & z < 0 \end{cases} \quad \text{Όμως } H_z(0+, t) = H_z(0-, t) \Rightarrow D_1 = D_2$$

και από την ασυμμετρία $D_2 = -D_1$. Οπότε $D_1 = D_2 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{H_z(z, t) = 0}$$

Επίσης μπορούμε να εκφραζόμαστε την αμόλυθη κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{κυματική εξίσωση για } H_x(z, t)).$$

Από την οριακή συνθήκη $H_x(z=0+, t) - H_x(z=0-, t) = K_0 \cos(\omega t)$

Όμως $H_x(-z, t) = -H_x(z, t)$ και επομένως

$$H_x(z=0+, t) = -H_x(z=0-, t) = \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t)$$

Η κυματική εξίσωση για το $H_x(z, t)$ περιγράφει κύματα που διασίδονται

στην $\pm z$ διευθύνσεις με ταχύτητα $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Το κύμα στην θέση

$z_0 (> 0)$ κατά τον χρόνο t θα έχει χαρακτηριστικά που είχε στην θέση

$z=0+$ κατά τον χρόνο $t - \frac{z_0}{c}$ αφού χρειάζεται χρονικό διάστημα

$z_0/c (> 0)$ για να φθάσει από το $z=0+$, ως το z_0 . Συνεπώς

$$H_x(z_0, t) = H_x(z=0+, t - \frac{z_0}{c}) = \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega(t - \frac{z_0}{c}))$$

$$= \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t - k_0 z_0) \quad \text{όπου } k_0 = \omega/c \quad (z_0 > 0)$$

Παρομοίως για $z_0 < 0 \Rightarrow H_x(z_0, t) = -\frac{1}{2} K_0 \cos(\omega(t + \frac{z_0}{c})) =$

$$= -\frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t + k_0 z_0)$$

Η E_y συνιστώσα του πεδίου μπορεί να βρεθεί από τις εξισώσεις του Maxwell:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \omega \sin(\omega t - k_0 z) & z > 0 \\ +\frac{1}{2} K_0 \omega \sin(\omega t + k_0 z) & z < 0 \end{cases}$$

$$E_y = \mu_0 \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \omega \frac{1}{k_0} \cos(\omega t - k_0 z) & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \omega \frac{1}{k_0} \cos(\omega t + k_0 z) & z < 0 \end{cases}$$

$$E_y = \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos(\omega t - k_0 z) & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cos(\omega t + k_0 z) & z < 0 \end{cases}$$

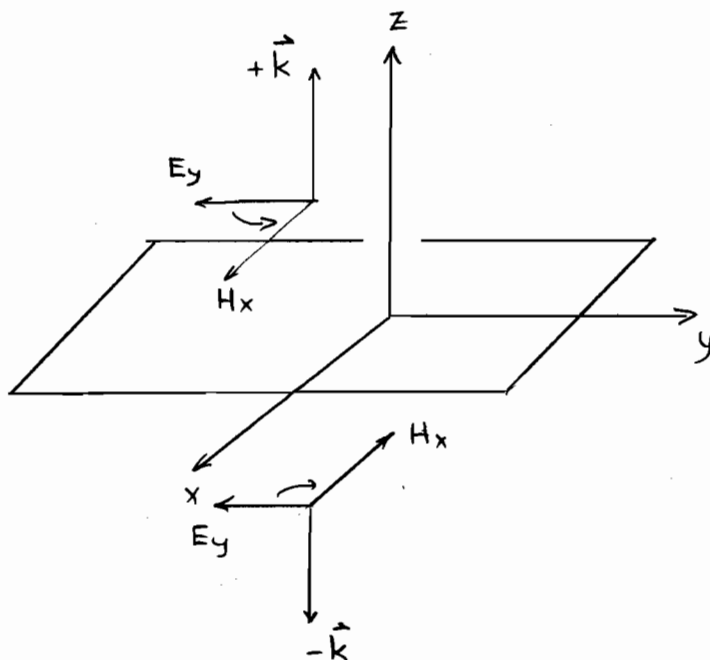
Από τις εξισώσεις του Maxwell μπορούμε να εξαγάγουμε την ακόλουθη υφαντική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Ομωσ $E_x(z=0+, t) = -E(z=0-, t)$ και $E_x(z=0+, t) = E(z=0-, t)$

επομένως $E_x(z=0+, t) = E_x(z=0-, t) = 0$ και δεν διεγείρονται

υόματα με $E_x \neq 0$. Εφόσον $E_x = 0 \sim H_y = 0$.



Τώρα ας προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας φασιδέτες.

Ας γράψουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην μονίμη ημιτονοειδή κατάσταση χρησιμοποιώντας phasors. Τώρα τα πεδία \vec{E} , \vec{H} και η πυκνότητα \vec{K} αντιπροσωπεύουν φασιθέτες. Και πάλι $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$, $\vec{H} = \vec{H}(z,t)$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = +j\omega\mu_0 H_x \\ \frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu_0 H_y \\ 0 = -j\omega\mu_0 H_z \Rightarrow \underline{H_z = 0} \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon_0 E_x \\ \frac{dH_x}{dz} = +j\omega\epsilon_0 E_y \\ 0 = j\omega\epsilon_0 E_z \Rightarrow \underline{E_z = 0} \end{cases}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ και $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ ικανοποιούνται αυτομάτως εφόσον $E_z = H_z = 0$

Επιπλέον η ιδιότητα της αντισυμμετρίας ισχύει:

Απο τις πάνω εξισώσεις έχουμε:

$$\frac{d^2 H_x}{dz^2} = j\omega\epsilon_0 \frac{dE_y}{dz} = j\omega\epsilon_0 (j\omega\mu_0) H_x = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_x \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 H_x}{dz^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 H_x = 0 \quad \vee \quad H_x = H_{x+} e^{-jk_0 z} + H_{x-} e^{+jk_0 z} \quad (k_0 = \omega/c)$$

όπου το $H_{x+} e^{-jk_0 z}$ είναι το οδεύον κύμα στην διεύθυνση $+z$ και

$H_{x-} e^{+jk_0 z}$ είναι το οδεύον κύμα στην διεύθυνση $-z$.

Εφόσον στο $+\infty$ υπάρχει μόνο κύμα πρός την $+z$ διεύθυνση $H_{x-} = 0$

για $z > 0$. Παρομοίως, $H_{x+} = 0$ για $z < 0$. Επομένως η λύση για

το H_x είναι η εξής

$$H_x = \begin{cases} H_{x+} e^{-jk_0 z} & z > 0 \\ H_{x-} e^{+jk_0 z} & z < 0 \end{cases}$$

Από την ορισμένη συνθήκη

$$\left. \begin{aligned} H_x(z=0+) - H_x(z=0-) &= K_0 \\ \text{Επίσης } H_x(z) &= -H_x(-z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{x+} = -H_{x-} = \frac{1}{2} K_0$$

Επομένως,

$$H_x = \begin{cases} \frac{1}{2} K_0 e^{-jk_0 z} & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 e^{+jk_0 z} & z < 0 \end{cases}$$

Τώρα είναι εύκολο να βρούμε την E_y συνιστώσα:

$$j\omega\epsilon_0 E_y = \frac{dH_x}{dz} \Rightarrow E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \frac{dH_x}{dz} \Rightarrow$$

$$E_y = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{2} K_0 (-jk_0) e^{-jk_0 z} & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 (jk_0) e^{+jk_0 z} & z < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_y = \begin{cases} -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{-jk_0 z} & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{+jk_0 z} & z < 0 \end{cases}$$

$$\text{Επίσης, } \frac{d^2 E_x}{dz^2} = -j\omega\mu_0 \frac{dH_y}{dz} = -j\omega\mu_0 (-j\omega\epsilon_0) E_x = -\omega^2\mu_0\epsilon_0 E_x \Rightarrow$$

$$E_x = E_{x+} e^{-jk_0 z} + E_{x-} e^{+jk_0 z}$$

$$\text{και για τους ίδιους λόγους όπως προηγουμένως } E_x = \begin{cases} E_{x+} e^{-jk_0 z} & z > 0 \\ E_{x-} e^{+jk_0 z} & z < 0 \end{cases}$$

$$\text{Ομως } \left. \begin{aligned} E_x(z=0+) &= E_x(z=0-) \text{ και} \\ E_x(z) &= -E_x(-z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{x+} = E_{x-} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{E_x = 0 \sim H_y = 0}$$

Τα χρονικώς μεταβαλλόμενα πεδία μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις

$$E_y(z,t) = \text{Re} \{ E_y(z) e^{j\omega t} \} \Rightarrow$$

$$E_y(z,t) = -\frac{1}{2} K_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \begin{cases} \cos(\omega t - k_0 z) & z > 0 \\ \cos(\omega t + k_0 z) & z < 0 \end{cases}$$

και

$$H_x(z,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t - k_0 z) & z > 0 \\ -\frac{1}{2} K_0 \cos(\omega t + k_0 z) & z < 0 \end{cases} \text{ όπως και προηγουμένως.}$$

ΠΟΛΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Έστω επίπεδο κύμα διαδιδόμενο κατά την θετική διεύθυνση του z ,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jkz} \quad ; \quad \text{ο φασιδέτης του ηδευτριού πεδίου.}$$

$$\vec{E} = \text{Re} \{ \vec{E} e^{j\omega t} \} \quad ; \quad \text{το πραγματικό ηδευτριό πεδίο.}$$

Το διάνυσμα \vec{E}_0 καθορίζει την πόλωση του επιπέδου κύματος, ως γνωστόν $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E}_0 = E_x \hat{i}_x + E_y \hat{i}_y$ και E_x, E_y είναι μιγαδικά μεγέθη. Έστω $E_x = E_{x0} e^{j\phi_x}$ και $E_y = E_{y0} e^{j\phi_y}$.

Το πραγματικό ηδευτριό πεδίο \vec{E} μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \hat{i}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \hat{i}_y \\ &= E_x(z, t) \hat{i}_x + E_y(z, t) \hat{i}_y \end{aligned}$$

Η πόλωση του κύματος καθορίζεται από τον γεωμετρικό τόπο του διανύσματος \vec{E} σαν συνάρτηση του χρόνου για καθορισμένο z . Για να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος θα αναδείψουμε τον χρόνο t .

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \phi_x + \underbrace{(\phi_y - \phi_x)}_{\phi})$$

Θέτουμε $\omega t - kz + \phi_x = A$ και $\phi = \phi_y - \phi_x$. Επομένως,

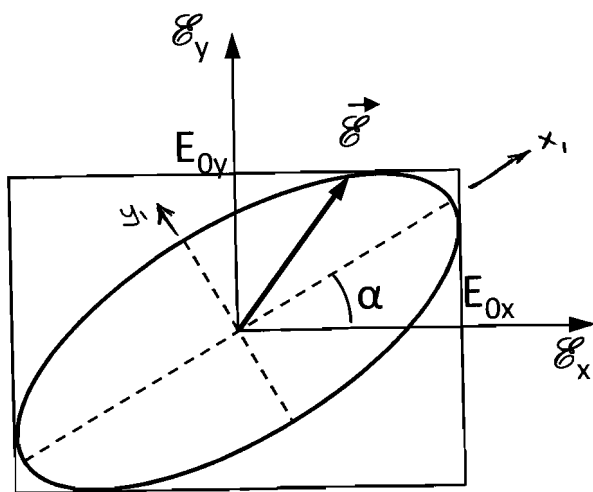
$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos A$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(A + \phi) = \cos A \cos \phi - \sin A \sin \phi$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos \phi \right)^2 = \sin^2 A \sin^2 \phi = \left(1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \right) \sin^2 \phi \Rightarrow$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \phi = \sin^2 \phi$$

Η τελευταία εξίσωση παριστάνει μία έλλειψη στο επίπεδο xy .



Η γωνία α μπορεί εύκολα να βρεθεί μετασχηματίζοντας την έλλειψη στο σύστημα των αξόνων της x_1, y_1 .

$$E_x = \cos\alpha E_{x_1} - \sin\alpha E_{y_1}$$

$$E_y = \sin\alpha E_{x_1} + \cos\alpha E_{y_1}$$

Κάνοντας τον μετασχηματισμό η γωνία α μπορεί να βρεθεί μηδενίζοντας τον συντελεστή του όρου $E_{x_1} E_{y_1}$:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos\phi$$

Οι ημιάξονες της έλλειψης δίδονται από τις σχέσεις:

$$\frac{1}{E_{0x_1}^2} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{E_{0x}^2} + \frac{\sin^2\alpha}{E_{0y}^2} - \frac{\sin 2\alpha}{E_{0x} E_{0y}} \cos\phi \right) \frac{1}{\sin^2\phi}$$

$$\frac{1}{E_{0y_1}^2} = \left(\frac{\sin^2\alpha}{E_{0x}^2} + \frac{\cos^2\alpha}{E_{0y}^2} + \frac{\sin 2\alpha}{E_{0x} E_{0y}} \cos\phi \right) \frac{1}{\sin^2\phi}$$

Η πόλωση αυτή είναι εν γένει ελλειπτική πόλωση.

Αν $E_{\max} = \max\{E_{0x_1}, E_{0y_1}\}$ και $E_{\min} = \min\{E_{0x_1}, E_{0y_1}\}$

τότε ο λόγος $\frac{E_{\min}}{E_{\max}} = e = \text{ελλαμπτικότητα}$.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1) Γραμμική Πόλωση (Linear Polarization) : $\phi = 0$ ή $\pm\pi$

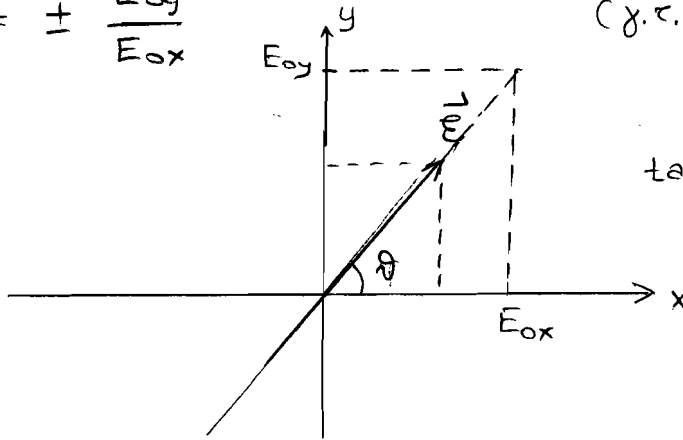
$\cos\phi = \pm 1$ και $\sin\phi = 0$ οπότε :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \mp 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = 0 \quad (\text{"-"} \text{ όταν } \phi = 0 \text{ και} \\ \text{"+" όταν } \phi = \pm\pi)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \mp \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} = \pm \frac{E_y}{E_{0y}}$$

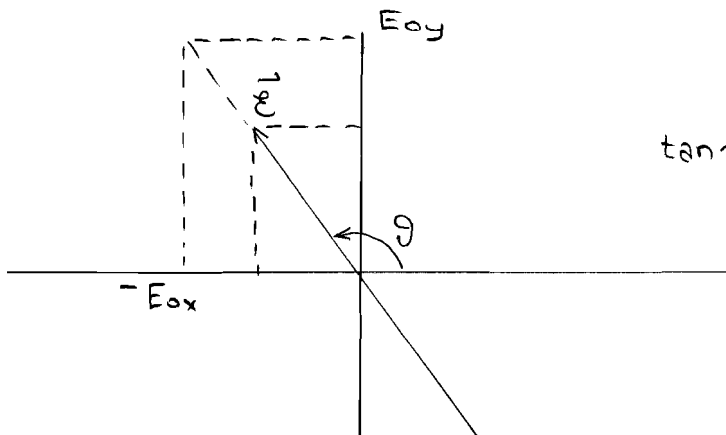
$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

(χ.τ. είναι ευθύγραμμοι κηίροι)



$$\tan\vartheta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

$$\phi = 0$$



$$\tan\vartheta = \frac{E_y}{E_x} = - \frac{E_{0y}}{E_{0x}}$$

$$\phi = \pm\pi$$

Αντί για $\phi = 0$ είναι ισοδύναμο $\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

Αντί για $\phi = \pm\pi$ είναι ισοδύναμο $\phi = \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$

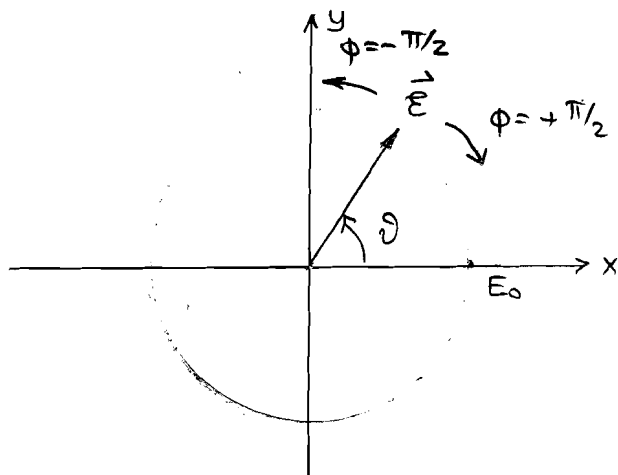
2) Κυκλική Πόλωση (Circular Polarization)

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0 \quad \text{και} \quad \phi = \pm \pi/2$$

$$\cos \phi = 0 \quad \text{και} \quad \sin \phi = \pm 1$$

$$\left(\frac{E_x}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

(γ.τ. είναι κύκλος)



$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x}$$

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi)$$

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

(Θέτουμε $\phi_x = 0$ για ευκολία)

α) Αν $\phi = -\pi/2 \quad \sim \quad \tan \theta = \frac{\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})}{\cos(\omega t - kz)} = +\tan(\omega t - kz)$

οπότε για σταθερό z η γωνία θ αυξάνεται με τον χρόνο. Άρα το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται αντίστροφα των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται δεξιόχειρη κυκλική πόλωση. (right hand circularly polarization)

β) Αν $\phi = +\pi/2 \quad \sim \quad \tan \theta = \frac{\cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})}{\cos(\omega t - kz)} = -\tan(\omega t - kz)$

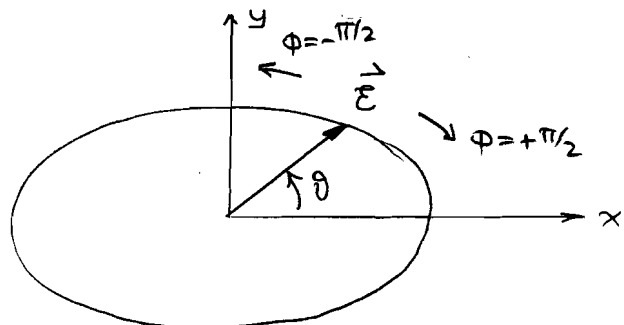
οπότε για σταθερό z η γωνία θ μειώνεται με τον χρόνο. Άρα το άκρο του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου κινείται κατά την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται αριστερόχειρη κυκλική πόλωση (Left hand circularly polarization)

Αντί για $\phi = \pm \pi/2$ είναι ισόδυναμο $\phi = \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}, \dots$

3) $E_{0x} \neq E_{0y}$ και $\phi = \pm \pi/2$ (ειδική περίπτωση ελλειπτικής πόλωσης)

$\cos \phi = 0$ και $\sin \phi = \pm 1$, οπότε

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \quad (\text{χ.τ. είναι έλλειψη με άξονες } x, y).$$



$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x}$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi)$$

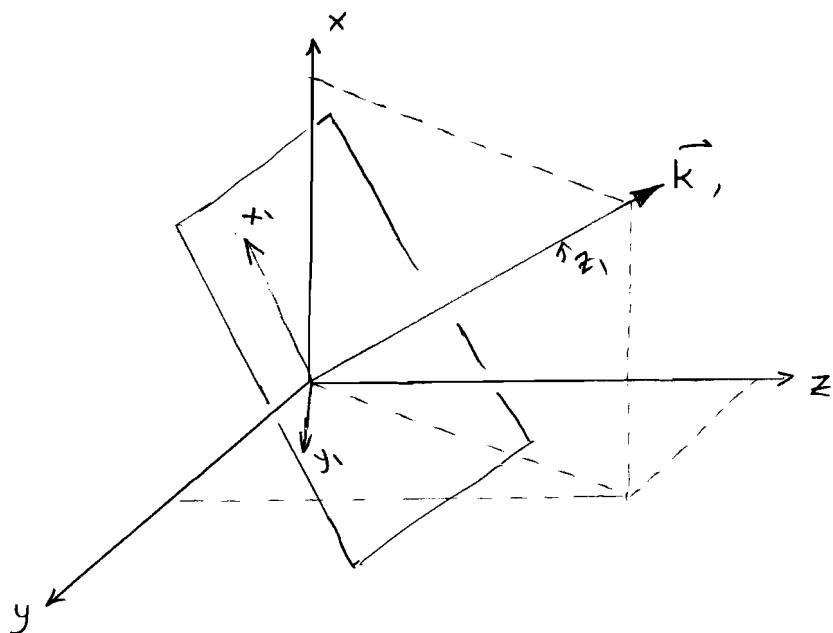
$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz)$$

α) Αν $\phi = -\pi/2 \rightarrow \tan \theta = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} \tan(\omega t - kz)$ οπότε όπως προηγουμένως το άκρο του διανύσματος του ηδευτρίου πεδίου κινείται αντίστροφα των δευτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται δεξιόχειρη ελλειπτική πόλωση (right hand elliptical polarization).

β) Αν $\phi = +\pi/2 \rightarrow \tan \theta = -\frac{E_{y0}}{E_{x0}} \tan(\omega t - kz)$ οπότε το άκρο του διανύσματος του ηδευτρίου πεδίου κινείται κατά την φορά των δευτών του ωρολογίου. Αυτή η πόλωση ονομάζεται αριστερόχειρη ελλειπτική πόλωση (left hand elliptical polarization).

Αντι για $\phi = \pm \pi/2$ είναι ισοδύναμο με $\phi = \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν και για τυχαία στον χώρο διάδοση επιπέδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Σε αυτή την περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο αναλύεται στο επίπεδο x_1, y_1 που είναι κάθετο στο \vec{k} (z_1) και ισχύουν όλα τα προηγούμενα.

Επίπεδα κύματα σε Υλικά με Απώλειες:

Έστω υλικό με επιτρεπτότητα $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, διαπερατότητα $\mu = \mu_0 \mu_r$, και ειδική αγωγιμότητα σ . Θα εξετάσουμε λύσεις επιπέδων κυμάτων μέσα σε ομογενές και ισότροπο υλικό (γραμμικό). Οι εξισώσεις του Maxwell στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση γράφονται ως εξής:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\vec{J} = \sigma \vec{E}) + j\omega\epsilon \vec{E} = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε είτε το μαγνητικό πεδίο \vec{H} είτε το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E} :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla} \times (-j\omega\mu \vec{H}) = -j\omega\mu (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} \Rightarrow \\ \nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} &= 0 \quad (\text{εξίσωση Helmholtz}) \end{aligned}$$

Ορίσουμε $\gamma^2 = j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon) = (\alpha + j\beta)^2$

$$\gamma = (\alpha + j\beta) \equiv jk_c \quad \text{όπου } k_c \text{ είναι ένας μιγαδικός πλέον υφανταριθμός.}$$

Επομένως η εξίσωση Helmholtz γράφεται σαν

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \quad [k_c^2 = -\gamma^2 = -j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon)]$$

Όπως και στην περίπτωση των υλικών χωρίς απώλειες οι λύσεις επιπέδων κυμάτων είναι της μορφής:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}_c \cdot \vec{r}} \quad \text{με } k_c^2 = -j\omega\mu (\sigma + j\omega\epsilon), \quad \vec{k}_c = k_c \hat{k}_c$$

και \hat{k}_c είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Εφόσον $j k_c = \alpha + j\beta \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-(\alpha + j\beta)(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} = \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{-j\beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r})}$

Η σταθερά α = συντελεστής απόσβεσης (attenuation coefficient) και η σταθερά β = συντελεστής διάδοσης ή φασική σταθερά, εφόσον σχετίζεται με την φάση του κύματος.

Οι συντελεστές α, β μπορούν να βρεθούν σαν συναρτήσεις των ϵ, μ, σ και ω ως εξής:

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \Rightarrow$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) + j2\alpha\beta = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon \\ 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \end{cases}$$

$$\text{και } \alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[-1 + \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (\alpha > 0)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (\beta > 0)$$

Στην περίπτωση των υλικών δίχως απώλειες $\sigma = 0$. Οπότε,

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad \text{και } jk_c = \gamma = \alpha + j\beta \Rightarrow k_c = \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

όπως έχουμε ήδη βρεί για τα επίπεδα κύματα σε υλικά χωρίς απώλειες.

Τώρα για απλούστευση ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο κύμα διαδίδεται μέσα σε ένα υλικό με απώλειες κατά την διεύθυνση του άξονος των z .

$$\hat{k}_c = \hat{z} \quad \text{και} \quad \hat{k}_c \cdot \vec{r} = \hat{z} \cdot [x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}] = z \quad (\vec{E}_0 \cdot \hat{z} = 0)$$

$$\text{Επομένως } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad \text{με } \alpha, \beta \text{ προσδιοριζόμενα από τις}$$

προηγούμενες εξισώσεις. Αφού $\alpha > 0$, (απώλειες) παρατηρούμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται εκθετικά όσο το κύμα διαδίδεται κατά την διεύθυνση των z . Εδώ μπορούμε να ορίσουμε το βάθος διεισδύσεως (skin depth) σαν την απόσταση δ που διανύει το κύμα ώστε το πλάτος του να μειωθεί στο $1/e$ της τιμής του στο σημείο εκκίνησης. Με αυτόν τον ορισμό $e^{-\alpha\delta} = e^{-1} \Rightarrow \delta = 1/\alpha$

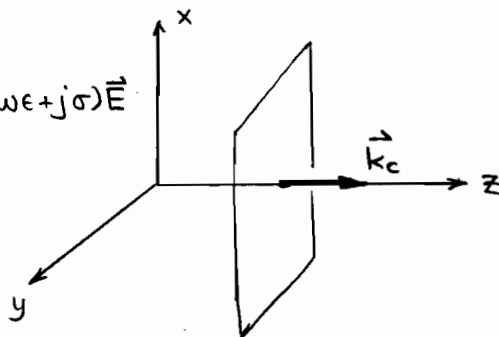
Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι το επίπεδο κύμα σε υλικά με απώλειες πρέπει και πάλι να ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell στην ημιτονοειδή μορφή κατάσταση για επίπεδο κύμα, δηλαδή:

$$\vec{k}_c \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}$$

$$\vec{k}_c \times \vec{H} = j(\sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E}) = (-\omega \epsilon + j\sigma) \vec{E}$$

$$\vec{k}_c \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{k}_c \cdot \vec{H} = 0$$



Επίσης $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \Rightarrow \gamma = [j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)]^{1/2}$. Εάν γνωρίζουμε τον φασιδέκτη του ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να βρούμε τον φασιδέκτη του μαγνητικού πεδίου ως εξής:

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu} (\vec{k}_c \times \vec{E}) = \frac{k_c}{\omega\mu} (\hat{k}_c \times \vec{E})$$

$$jk_c = \gamma \Rightarrow k_c = \frac{1}{j} \gamma = \frac{1}{j} \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

Επομένως,
$$\vec{H} = \frac{\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}}{j\omega\mu} (\hat{k}_c \times \vec{E}) = \frac{1}{Z} (\hat{k}_c \times \vec{E})$$

όπου Z είναι η χαρακτηριστική (υυματινή) αντίσταση του υλικού (intrinsic impedance).

$$Z = \left\{ \frac{j^2 \omega^2 \mu^2}{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} = |Z| e^{j\Phi}$$

Το πραγματικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{-j\beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{j\omega t} \right\} \quad (\text{αν υποθέσουμε}$$

ότι \vec{E}_0 είναι πραγματικό διάνυσμα) \rightarrow

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} \cos(\omega t - \beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r}))$$

Για το επίπεδο κύμα που διαδίδεται κατά την διεύθυνση z με $\vec{E}_0 = \hat{x} E_0$ έχουμε:
$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \frac{1}{|\vec{z}|} \hat{k}_c \times \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{-j\beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{1}{|\vec{z}|} \hat{k}_c \times \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} \text{Re} \left\{ e^{-j\Phi} e^{-j\beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{1}{|\vec{z}|} \hat{k}_c \times \vec{E}_0 e^{-\alpha(\hat{k}_c \cdot \vec{r})} \cos[\omega t - \beta(\hat{k}_c \cdot \vec{r}) - \Phi]\end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση που $\hat{k}_c = \hat{z}$ και $\vec{E}_0 = \hat{x} E_0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{H}(z, t) &= \frac{1}{|z|} E_0 (\hat{z} \times \hat{x}) e^{-\alpha z} \cos[\omega t - \beta z - \Phi] = \\ &= \frac{1}{|z|} E_0 \hat{y} e^{-\alpha z} \cos[\omega t - \beta z - \Phi]\end{aligned}$$

Από την εξίσωση του Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E} = j\omega \left[\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right] \vec{E}$
 $= j\omega \left[\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \right] \vec{E} = j\omega \epsilon_c \vec{E}$ όπου $\epsilon_c = \epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} =$
 $=$ μιγαδική επιτρεπτότητα του υλικού. Χρησιμοποιώντας την μιγαδική επιτρεπτότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λύσεις των εξισώσεων Maxwell που βρέθηκαν για υλικά χωρίς απώλειες και στην περίπτωση των υλικών με απώλειες με την αντικατάσταση της $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$.

Πολλές φορές συμβολίζουμε την μιγαδική επιτρεπτότητα ως εξής:

$$\epsilon_c = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad \text{με } \epsilon' = \epsilon \text{ και } \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

Τώρα ας εξετάσουμε ως εξής δύο ειδικές κατηγορίες υλικών:

- (α) Καλά διηλεκτρικά (μονωτές) [low-loss dielectrics] και
- (β) Καλοί αγωγοί (good conductors).

Καλά Διηλεκτρικά:

Ένα καλό διηλεκτρικό υλικό είναι καλός μονωτής, όχι όμως τέλειος. Στην

περίπτωση αυτή $\epsilon'' \ll \epsilon'$ ή $\frac{\sigma}{\omega} \ll \epsilon' \Rightarrow \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \ll 1$ ή $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

Σε αυτή την περίπτωση $\gamma = (\alpha + j\beta) = j\omega \sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right]^{1/2}$

Όμως $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$ Για $|x| = \left| j\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right| \ll 1$

έχουμε: $\gamma = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 - \frac{j}{2} \frac{\epsilon''}{\epsilon'} - \frac{j^2}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \omega \epsilon'' \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

και η κυματινή αντίσταση είναι:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} (1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'})^{-1/2} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} (1 + j \frac{\epsilon''}{2\epsilon'})$$

Η φασική ταχύτητα είναι $u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right)$

Καλοί Αγωγοί:

Για τους καλούς αγωγούς $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$

$$\begin{aligned} \gamma = (\alpha + j\beta) &= j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right]^{1/2} \approx j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right)^{1/2} = \\ &= \sqrt{j} \sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j) \sqrt{\pi\nu\mu\sigma} \quad (\omega = 2\pi\nu) \end{aligned}$$

και επομένως $\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi\nu\mu\sigma}$

Η κυματινή αντίσταση είναι:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma + j\omega\epsilon}} = \left\{ \frac{j\omega\mu}{j\omega\epsilon \left[1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon} \right]} \right\}^{1/2} \approx \left\{ \frac{j\omega\mu}{\sigma} \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi\nu\mu}{\sigma}} \end{aligned}$$

Η φασική ταχύτητα είναι: $u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{2\pi\nu}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{4\pi^2\nu^2}{\pi\nu\mu\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\pi\nu}{\mu\sigma}}$

Εφόσον το πεδίο αποσβένει όταν διαδίδεται στον αγωγό το βάθος

διείσδυσης $\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}$ που μειώνεται είτε με αύξηση της συχνότητας, είτε με αύξηση της ειδικής αγωγιμότητας σ . Για τέλειους αγωγούς

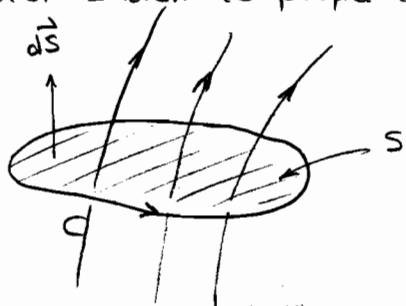
$\sigma = \infty$ οπότε $\delta = 0$, δηλαδή το πεδίο στο εσωτερικό του τέλειου αγωγού είναι μηδενικό.

Νόμος Faraday για Χρονομεταβλητά Πεδία

Ο νόμος του Faraday στην ολοκληρωτική του μορφή για χρονομεταβλητά πεδία γράφεται ως εξής

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{όπου } \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ είναι η}$$

μαγνητική ροή. Ο Faraday παρατήρησε πρώτος ότι αν θεωρήσουμε ένα κλειστό αγωγικό βρόχο C που βρίσκεται μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο (με μαγνητική επαγωγή \vec{B}) τότε αν $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$ επαγεται ένα ρεύμα στον αγωγικό βρόχο. Επειδή το ρεύμα εξαρτάται από την αντίσταση του βρόχου είναι καλύτερο

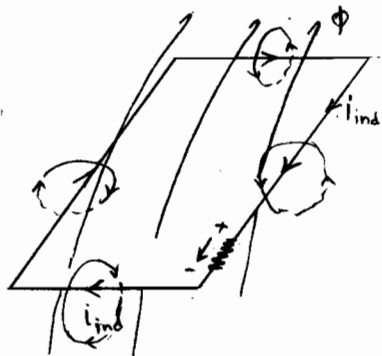


να εκφράσουμε το αποτέλεσμα αυτού του περιπτώματος εισάγοντας τον όρο ηλεκτρεγερτική δύναμη ΗΕΔ (emf) ως εξής:

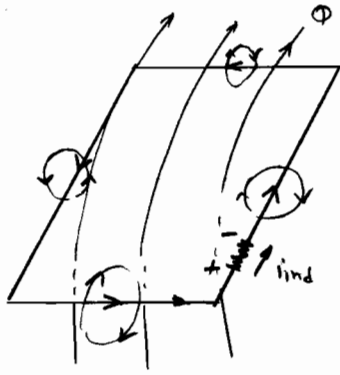
$$emf = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Η μαγνητική ροή Φ μπορεί να αλλάξει σαν συνάρτηση του χρόνου για πολλούς λόγους. Π.χ. (α) μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο η μαγνητική επαγωγή \vec{B} , (β) ο βρόχος μπορεί να μεταβάλλεται σε σχήμα και μέγεθος, (γ) ο βρόχος μπορεί να κινείται ή κάποιοι συνδιασμός από όλες αυτές τις περιπτώσεις.

Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον κανόνα του Lenz. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επαγεται είναι τέτοια ώστε να αντιστέκεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής.

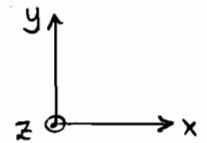
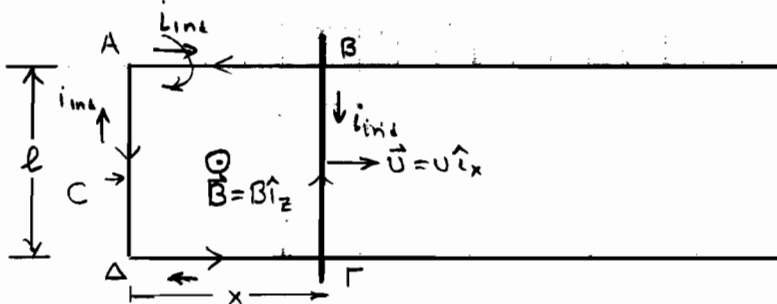


Έστω $\Phi(t)$ αυξανόμενη με τον χρόνο. Δηλαδή $d\Phi/dt > 0$. Το επαγόμενο ρεύμα i_{ind} θα πρέπει να προκαλεί μαγνητική ροή που να αντιστέκεται στην μεταβολή της ροής Φ .



Εάν $d\Phi/dt < 0$, δηλαδή αν η μαγνητική ροή ελαττώνεται με τον χρόνο τότε το επαγόμενο ρεύμα παράγει μαγνητική ροή που τείνει να διατηρήσει (να αυξηθεί) την ελαττωμένη μαγνητική ροή.

Παράδειγμα: Έστω αγώγιμη ράβδος που κινείται πάνω σε ένα γηματοειδή αγωγό σχήματος Γ όπως στο σχήμα. Η αγώγιμη ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα v . Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σταθερό μαγνητικό πεδίο με μαγνητική επαγωγή \vec{B} κάθετη στο επίπεδο και με διεύθυνση έξω από την σελίδα. Να βρεθεί η επαγόμενη emf και η φορά του επαγόμενου ρεύματος.



$$emf = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z dy dx = B \ell x$$

$$\text{Επομένως } emf = - \frac{d}{dt} (B \ell x) = - B \ell v$$

Εφόσον η ράβδος κινείται προς τα δεξιά αυξάνεται η περιοχή του βρόχου που τέμνει την μαγνητική ροή και επομένως αυξάνεται η μαγνητική ροή. Άρα το επαγόμενο ρεύμα είναι τέτοιο ώστε να αντιστέκεται στην αύξηση της ροής.