ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ:

Οι εξισώσεις του Maxwell για τα μαγνητοστατικά πεδία (χρονοσταθερά) είναι:

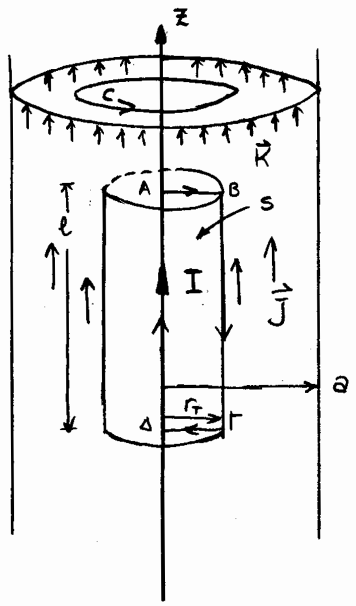
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \quad \text{ή} \quad \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \qquad \vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \text{ή} \quad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

Όπως και στην περίπτωση των ηλεκτροστατικών πεδίων οι σημαντικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται με τις οριακές συνθήκες. Επιπλέον ο ΝΔΦ θα πρέπει να ικανοποιείται $(\partial/\partial t=0)$. Δηλαδή είτε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \quad \text{ή} \quad \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=0$$

Μαγνητοστατικό Πεδίο Κυλινδρικά Συμμετρικών Χρονοσταθερών Ρευμάτων:



Έστω νηματοειδές ρεύμα I κατά μήκος του άξονα z κυλίνδρου απείρου μήκους ακτίνας a. Στο εσωτερικό του κυλίνδρου υπάρχει συμμετρική ως προς r_T χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}=J(r_T)\hat{i}_z$ $(0<r_T<a)$. Επίσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει επιφανειακό ρεύμα $\vec{K}=K\hat{i}_z$ όπου $K=$σταθερά. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu=\mu(r_T)$. Να βρεθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Α. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell στην ολοκληρωτική μορφή:

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο είναι μόνο συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης r_T. Δηλαδή $\vec{H}=\vec{H}(r_T)$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο φ-συνιστώσα.

Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss στην επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας r_T.

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \Rightarrow B_{r_T}(r_T)\,2\pi\ell r_T+\int_0^{r_T} B_z(r_T')\,2\pi r_T'\,dr_T' - \int_0^{r_T} B_z(r_T')\,2\pi r_T'\,dr_T'=0 \Rightarrow$$

$B_{r_T}(r_T)\, 2\pi \ell r_T = 0 \Rightarrow B_{r_T}(r_T) = 0 \Rightarrow H_{r_T}(r_T) = 0$. Επομένως το μαγνητικό πεδίο δεν έχει r_T-συνιστώσα.

Τώρα ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere στον βρόχο ΑΒΓΔ.

$$\oint_{C=ΑΒΓΔΑ} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_0^{r_T} H_{r_T}(r_T')\,dr_T' - H_z(r_T)\,\ell + \int_0^{r_T} H_{r_T}(r_T')(-1)\,dr_T' + H_z(0)\,\ell = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad H_z(r_T) = H_z(0) = c$. Αφού όμως στο άπειρο το πεδίο μηδενίζεται έχουμε $c = 0 \rightarrow H_z(r_T) = 0$. Επομένως το μαγνητικό πεδίο είναι της μορφής:

$$\vec{H} = H_\varphi(r_T)\,\hat{i}_\varphi$$

Γιά τον υπολογισμό του $H_\varphi(r_T)$ θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον νόμο του Ampere. Έστω C κυκλικός βρόχος ακτίνας r_T $(0<r_T<a)$. Από τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_c \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi(r_T)\,\hat{i}_\varphi\cdot\hat{i}_\varphi\, r_T\, d\varphi = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = \iint J(r_T')\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, r_T'\,d\varphi\, dr_T' + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = 2\pi\int_0^{r_T} J(r_T')\,r_T'\,dr_T' + I \Rightarrow H_\varphi(r_T) = \frac{1}{r_T}\int_0^{r_T} J(r_T')\,r_T'\,dr_T' + \frac{I}{2\pi r_T}$$

Εάν $r_T > a$ τότε ο μόνος όρος που αλλάζει είναι το I_c. Σε αυτή την περίπτωση $I_c = I + 2\pi\int_0^a J(r_T')\,r_T'\,dr_T' + 2\pi a K$

Επομένως

$$\vec{H} = H_\varphi(r_T)\,\hat{i}_\varphi = \hat{i}_\varphi \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r_T} + \dfrac{1}{r_T}\displaystyle\int_0^{r_T} J(r_T')\,r_T'\,dr_T' & 0<r_T<a \\[2ex] \dfrac{I}{2\pi r_T} + \dfrac{1}{r_T}\displaystyle\int_0^{a} J(r_T')\,r_T'\,dr_T' + K\dfrac{a}{r_T} & a<r_T<\infty \end{cases}$$

Το πεδίο είναι ασυνεχές στην επιφάνεια του κυλίνδρου λόγω της επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος:

$$\hat{i}_n \times \left(\vec{H}(r=a+) - \vec{H}(r=a-)\right) = \vec{K} \Rightarrow \hat{i}_r \times \left[\hat{i}_\varphi\left(H_\varphi(r=a+) - H_\varphi(r=a-)\right)\right] =$$

$$\hat{i}_z\left[\frac{I}{2\pi a} + \frac{1}{a}\int_0^a J(r_T')\,r_T'\,dr_T' + K - \frac{I}{2\pi a} - \frac{1}{a}\int_0^a J(r_T')\,r_T'\,dr_T'\right] = K\,\hat{i}_z = \vec{K}$$

Β. Λύση με χρήση εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή:

Οι εξισώσεις του Maxwell σε σημειακή μορφή είναι :

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}(r_T=a+) - \vec{H}(r_T=a-)) = \vec{K}$$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{B}(r_T=a+) - \vec{B}(r_T=a-)) = 0$$

Και πάλι λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας $\vec{H} = \vec{H}(r_T)$.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}}^{0} - \cancel{\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}}^{0} = 0 \Rightarrow 0=0 \quad \text{ικανοποιείται ταυτοσίμως}$$

$$\cancel{\frac{\partial H_{r_T}}{\partial z}}^{0} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} = 0 \Rightarrow \frac{dH_z}{dr_T} = 0 \Rightarrow H_z(r_T) = c$$

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T H_\varphi) - \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial H_{r_T}}{\partial \varphi}}^{0} = J \Rightarrow \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T H_\varphi) = J(r_T)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T B_{r_T}) + \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}}^{0} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}}^{0} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{1}{r_T}}\frac{d}{dr_T}(r_T B_{r_T}) = 0$$

$$r_T B_{r_T} = d \Rightarrow B_{r_T} = d/r_T$$

Επομένως,

$$H_z(r_T) = \begin{cases} c_1 & 0<r_T<a \\ c_2 & a<r_T<\infty \end{cases}$$

$$B_{r_T}(r_T) = \begin{cases} d_1/r_T & 0<r_T<a \\ d_2/r_T & a<r_T<\infty \end{cases}$$

Στό άπειρο $r_T\to\infty$, $\vec{H}(r_T\to\infty)\to 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Από την οριακή συνθήκη στο $r_T=a$ έχουμε :

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}(a+) - \vec{H}(a-)) = \vec{K} = K\hat{i}_z$$

$$\hat{i}_{r_T} \times [\hat{i}_\varphi H_\varphi(a+) + \hat{i}_z H_z(a+) - \hat{i}_\varphi H_\varphi(a-) - \hat{i}_z H_z(a-)] = \hat{i}_z K$$

$$\hat{i}_z [H_\varphi(a+) - H_\varphi(a-)] - \hat{i}_\varphi [H_z(a+) - H_z(a-)] = \hat{i}_z K$$

Οπότε $H_z(a+) = H_z(a-) \Rightarrow c_2 = c_1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow H_z = 0$

Όταν $r_T\to\infty$, $B_{r_T}\to 0$, και $B_{r_T}(a+) = B_{r_T}(a-) \Rightarrow d_1 = d_2$

Όταν $r_T \to 0 \to \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \quad B_{r_T}(r_T)\, 2\pi r_T \ell + \int_{S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{B}\cdot dS = 0 \Rightarrow$

$2\pi r_T \ell\, B(r_T) = 0$ διότι $\int_{S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_{S_-} \vec{B}\, d\vec{S}$.

Όταν $r_T \to 0 \to \quad \lim_{r_T \to 0} \{ r_T B_{r_T}(r_T) \} = 0 \Rightarrow d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow$

$B_{r_T} = 0 \Rightarrow H_{r_T} = 0.$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο φ-συνιστώσα.

$$\frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T}(r_T H\varphi) = J(r_T) \Rightarrow \quad r_T H\varphi(r_T) = \int_0^{r_T} r_T' J(r_T') dr_T' + A_1$$

$$\Rightarrow \quad H\varphi(r_T) = \frac{1}{r_T} \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T + \frac{A_1}{r_T} \qquad 0 < r_T < a$$

$$H\varphi(r_T) = \frac{A_2}{r_T} \qquad a < r_T < \infty$$

Όταν $r_T \to 0 \quad H\varphi \to I/2\pi r_T$. Όμως $\frac{1}{r_T}\int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' \to \frac{1}{r_T} J(0) \frac{r_T^2}{2} \to 0$

Όποτε $\frac{I}{2\pi r_T} = \frac{A_1}{r_T}$ όταν $r_T \to 0 \Rightarrow A_1 = I/2\pi$.

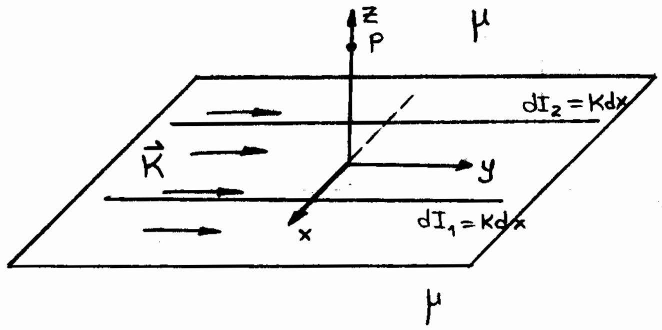
Από την οριακή συνθήκη $\hat{i}_n \times (\vec{H}(a+) - \vec{H}(a-)) = \vec{K} \Rightarrow$

$$H\varphi(a+) - H\varphi(a-) = K \Rightarrow \quad \frac{A_2}{a} - \left\{ \frac{1}{a}\int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + \frac{I}{2\pi a} \right\} = K$$

$$\to \quad A_2 = \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + Ka + \frac{I}{2\pi}$$

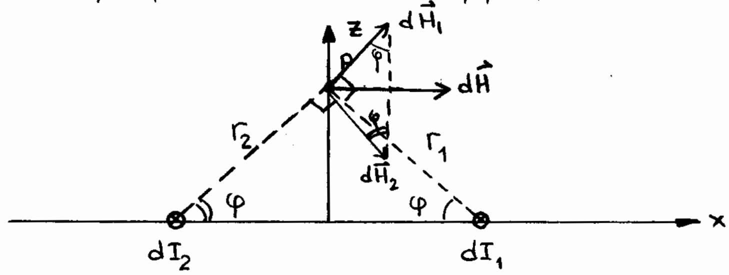
Οι τιμές αυτές των A_1, A_2 δίδουν ακριβώς τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο $\vec{H}$ όπως και εκείνες που υπολογίσθηκαν όταν έγινε χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Μαγνητοστατικό Πεδίο Απεράντων Ρευματικών Κατανομών:



Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο λόγω επιφανειακής κατανομής ρεύματος ομοιομόρφου πυκνότητας $\vec{K} = K\,\hat{i}_y$.

Ο περιβάλλων χώρος έχει διαπερατότητα μ. Αφού το επιφανειακό ρεύμα είναι σταθερό γιά κάθε x,y. Επομένως το πεδίο είναι συνάρτηση μόνο του z. Δηλαδή $\vec{H} = \vec{H}(z)$. Χωρίς κανένα περιορισμό της γενικότητας επιλέγουμε το σημείο P του άξονα των z. Το πεδίο μπορεί να βρεθεί ως επαλληλία ζευγών νηματοειδών ρευμάτων dI_1, dI_2 συμμετρικών ως προς τόν άξονα των y.



$dI_1 = dI_2 = K\,dx$
$r_1 = r_2 = r$

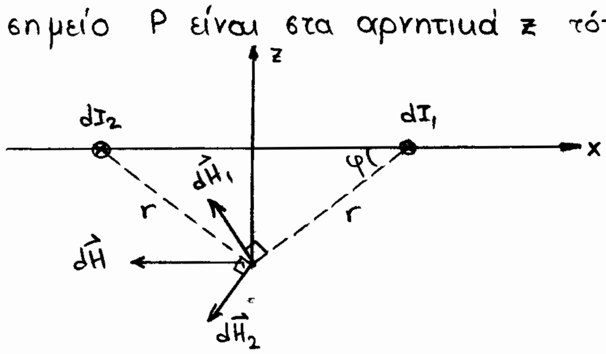
$$d\vec{H}_1 = \frac{dI_1}{2\pi r_1}\left(\hat{i}_x \sin\varphi + \hat{i}_z \cos\varphi\right) = \frac{K\,dx}{2\pi r}\left(\hat{i}_x \sin\varphi + \hat{i}_z \cos\varphi\right)$$

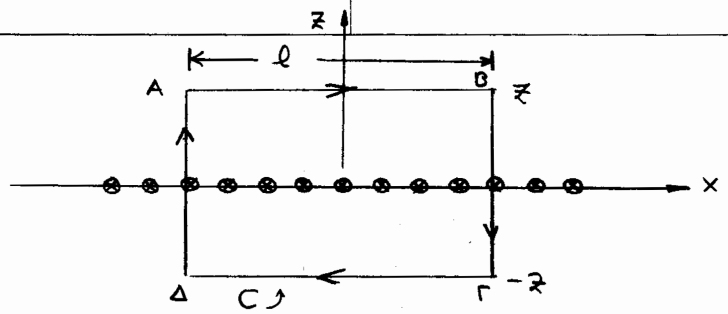
$$d\vec{H}_2 = \frac{dI_2}{2\pi r_2}\left(\hat{i}_x \sin\varphi - \hat{i}_z \cos\varphi\right) = \frac{K\,dx}{2\pi r}\left(\hat{i}_x \sin\varphi - \hat{i}_z \cos\varphi\right)$$

Επομένως $d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2 = \dfrac{K\,dx}{2\pi r}\, 2\sin\varphi\, \hat{i}_x$

Αν το σημείο P είναι στα αρνητικά z τότε $d\vec{H} = -\dfrac{K\,dx}{2\pi r}\, 2\sin\varphi\, \hat{i}_x$

δηλαδη $d\vec{H}(z) = -d\vec{H}(-z)$





'Εστω ορθογώνιος βρόχος C στο επίπεδο xz όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c \Rightarrow \int_{AB} H(z)\,\hat{i}_x\cdot\hat{i}_x\,dx + \int_{B\Gamma} H(z')\,\cancelto{0}{\hat{i}_x\cdot(-\hat{i}_z)}\,dz' +$$

$$\int_{\Gamma\Delta} H(-z)\,\hat{i}_x\cdot(-\hat{i}_x)\,dx + \int_{\Delta A} H(z')\,\cancelto{0}{\hat{i}_x\cdot\hat{i}_z}\,dz' = K l \Rightarrow$$

$$H(z)\,l - \big(-H(z)\big)\,l = K l \Rightarrow 2H(z) = K \Rightarrow H(z) = \frac{K}{2}$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\vec{H} = \hat{i}_x \frac{K}{2}\,\mathrm{sgn}(z) = \frac{\vec{K}\times\hat{i}_z}{2}\,\mathrm{sgn}(z)$$ που ισχύει γιά κάθε κατεύθυνση του $\vec{K}$ πάνω στο επίπεδο xy.

Με χρήση επαλληλίας:

$$d\vec{H} = \frac{K\,dx}{2\pi r}\, 2 \sin\phi \;\hat{\imath}_x$$

όπου $r=\sqrt{x^2+z^2}$, $\sin\phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$

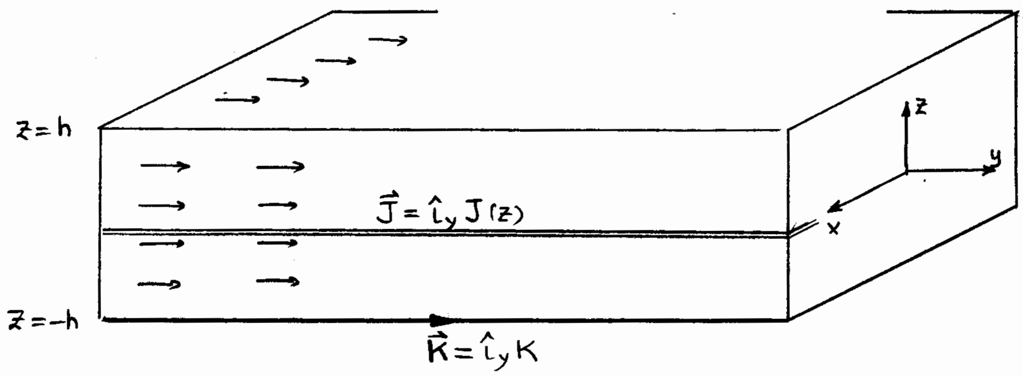
$$\vec{H} = \int_{x=0}^{\infty} d\vec{H} = \hat{\imath}_x \int_{x=0}^{\infty} \frac{K\,dx}{2\pi}\, 2\, \frac{z}{x^2+z^2} =$$

$$= \hat{\imath}_x \frac{Kz}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+z^2}\, dx = \hat{\imath}_x \frac{Kz}{\pi} \left\{ \frac{1}{z} \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) \right\}_0^{\infty}$$

$z>0 \rightsquigarrow \vec{H} = \hat{\imath}_x \frac{Kz}{\pi} \frac{1}{z} \frac{\pi}{2} = \hat{\imath}_x \frac{K}{2}$

$z<0 \rightsquigarrow \vec{H} = \hat{\imath}_x \frac{Kz}{\pi} \left(-\frac{1}{z} \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{\imath}_x \frac{K}{2}$

Μαγνητοστατικό πεδίο απεράντων ρευματοφόρων επιπέδων πλακών:

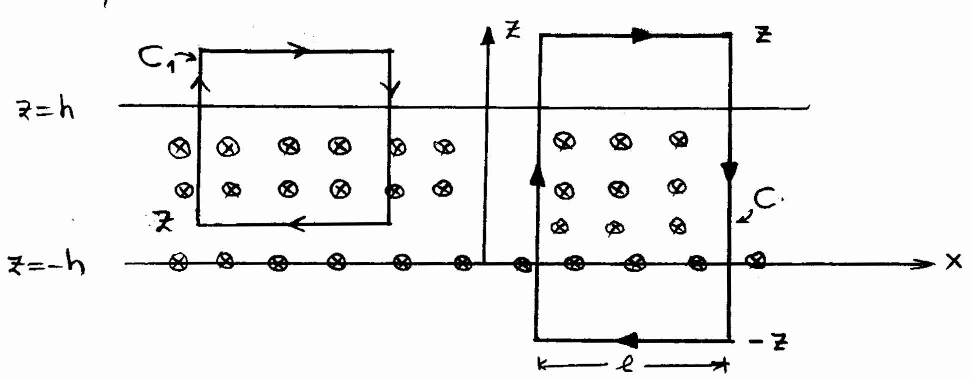


Έστω επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = \hat{\imath}_y K$ (K=σταθερά) και χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J(z)\,\hat{\imath}_y$ μεταξύ $-h<z<h$.

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών το πεδίο εξαρτάται μόνο από το z. $\vec{H} = \vec{H}(z)$.

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή:

Το πεδίο έχει μόνο x συνιστώσα. Αυτό είναι αποτέλεσμα που δείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Η πλάκα μπορεί να χωρισθεί σε επιφανειακές κατανομές $d\vec{K} = [J(z')dz']\,\hat{\imath}_y$ για κάθε μιά από τις οποίες το πεδίο είναι στην διεύθυνση των x. Επομένως $\vec{H} = H(z)\,\hat{\imath}_x$. Επιπλέον $H(z) = -H(-z)$ όταν $|z|>h$.



Ας βρούμε το πεδίο για $|z|>h$. Έστω C ορθογώνιος βρόχος μεταξύ $-z<z'<z$.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_c = \iint J(z')\,dz'\,dx + K\ell \quad\Rightarrow$$

$$H(z)\,\ell - H(-z)\,\ell = K\ell + \ell\int_{-h}^{h} J(z')\,dz' \quad\Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} J(z')dz' \quad \text{και} \quad H(-z) = -H(z) \quad \text{όταν} \quad |z|>h.$$

Όταν θέλουμε να βρούμε το πεδίο μέσα στην πλάκα τότε διαλέγουμε τον βρόχο C_1. Εφαρμόζοντας και πάλι το νόμο του Ampere έχουμε:

$$H(z_1)\ell - H(z)\ell = \ell\int_{z}^{h} J(z')dz' \Rightarrow$$

$$H(z) = H(z_1) - \int_{z}^{h} J(z')dz' = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} J(z')dz' - \int_{z}^{h} J(z')dz' =$$

$$= \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\int_{-h}^{z} J(z')dz' - \frac{1}{2}\int_{z}^{h} J(z')dz'$$

Το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει ασυνέχεια στο $z=-h$ όπου βρίσκεται η επιφανειακή κατανομή ρεύματος. Δηλαδή $\hat{i}_n \times (\vec{H}(-h^+) - \vec{H}(-h^-)) = \vec{K}$ όπου $\hat{i}_n = \hat{i}_z$.

Εάν $H(z) = -H(-z)$ τότε οι πυκνότητες ρεύματος στο $\pm\infty$ είναι συμμετρικές, δηλαδή $K_y^{-\infty} = K_y^{+\infty}$.

Β. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε σημειακή μορφή:

Αρχίζουμε από τις εξισώσεις

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

και τις οριακές συνθήκες: $\hat{i}_n \cdot (\vec{B}(z+) - \vec{B}(z-))\big|_{z=\pm h} = 0 \quad (\hat{i}_n = \hat{i}_z)$

$\hat{i}_n \times (\vec{H}(h+) - \vec{H}(h-)) = 0$, $\hat{i}_n \times (\vec{H}(-h^+) - \vec{H}(-h^-)) = \vec{K}$, που μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\left[B_z(z+) = B_z(z-)\right]_{z=\pm h}$$

$$H_y(h+) - H_y(h-) = 0 \quad , \quad H_x(h+) - H_x(h-) = 0$$

$$H_y(-h^+) - H_y(-h^-) = 0 \quad , \quad H_x(-h^+) - H_x(-h^-) = K$$

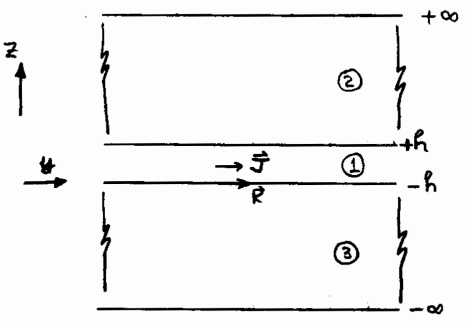
Ας αναπτύξουμε τις εξισώσεις του Maxwell στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{dH_y}{dz}=0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=J \Rightarrow \frac{dH_x}{dz}=J(z)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0 \Rightarrow 0=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \Rightarrow \frac{dB_z}{dz}=0$$



$$H_y(z)=\begin{cases} c_2 & h<z<\infty \\ c_1 & -h<z<h \\ c_3 & -\infty<z<-h \end{cases}$$

$$B_z(z)=\begin{cases} d_2 & h<z<\infty \\ d_1 & -h<z<h \\ d_3 & -\infty<z<-h \end{cases}$$

Στο $\pm\infty$ υπάρχει συνέχεια των συνιστωσών B_z και H_y. Όμως

$B_z(\pm\infty)=0$ και $H_y(\pm\infty)=0$. Άρα $d_2=d_3=0$ και $c_2=c_3=0$

Από την οριακή συνθήκη στο h έχουμε $B_z(h+)=B_z(h-) \Rightarrow$

$d_2=d_1=d_3=0$ και $H_y(h+)=H_y(h-) \Rightarrow c_2=c_1=c_3=0$

Επομένως H_y και H_z είναι μηδενικές συνιστώσες του πεδίου. Άρα το πεδίο είναι της μορφής $\vec{H}=H(z)\hat{i}_x$.

$$\frac{dH_x}{dz}=J(z) \Rightarrow H_x(z)=\int J(z')\,dz'+A$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία λύση στις περιοχές ①, ②, και ③ έχουμε:

$$H_x(z)=\begin{cases} A_2 & h<z<\infty \\ \int_{-h}^{z} J(z')\,dz'+A_1 & -h<z<h \\ A_3 & -\infty<z<-h \end{cases}$$

Από την οριακή συνθήκη $H_x(h+)=H_x(h-) \Rightarrow A_2=A_1+\int_{-h}^{h}J(z')\,dz'$

Επίσης $H_x(-h^+)-H_x(-h^-)=K \Rightarrow A_1-A_3=K$

Επίσης λόγω της συμμετρίας $H_x(z)=-H_x(-z)$ $z\to\infty$ οπότε $A_2=-A_3$

Επιλύοντας ως προς A_1, A_2, A_3 βρίσκουμε:

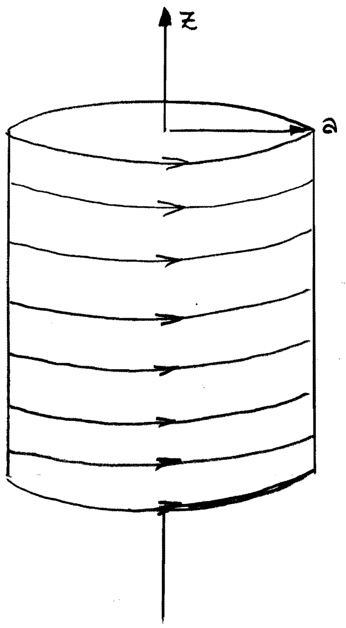
$$A_1 = \frac{K}{2} - \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} J(z')\,dz'$$

$$A_2 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} J(z')\,dz'$$

$$A_3 = -\left[\frac{K}{2} + \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} J(z')\,dz'\right]$$

Οι τιμές αυτές των A_1, A_2, A_3 δίδουν τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο όπως προηγουμένως με την χρήση των ολοκληρωτικών σχέσεων.

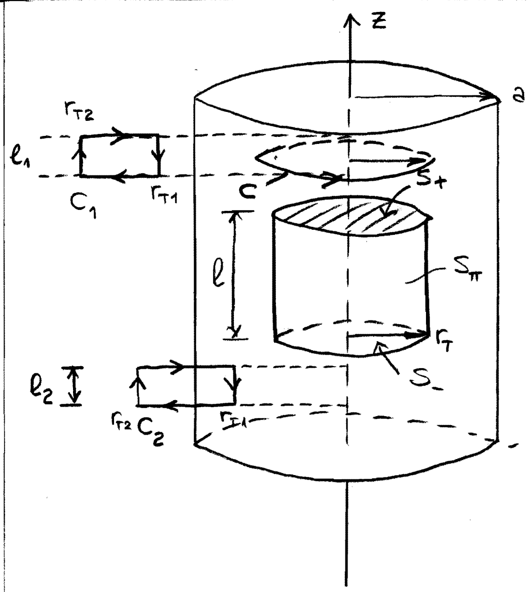
Σωληνοειδές Απείρου Μήκους:



Ομοιόμορφο επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα $\vec{K} = K\hat{i}_\varphi$ ρέει στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας a. Ο κύλινδρος θεωρείται απείρου μήκους. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας και του απείρου μήκους το πεδίο είναι ανεξάρτητο των z, φ. Επομένως $\vec{H} = \vec{H}(r_T)$.

Α. Λύση με τις εξισώσεις του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή:



Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για την επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνος r_T και ύψους ℓ.

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_+} \vec{B}\cdot d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{B}\cdot d\vec{S} + \int_{S_\pi} \vec{B}\cdot dS = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2\pi\int_0^{r_T} B_z(r_T')\,dr_T'} - \cancel{2\pi\int_0^{r_T} B_z(r_T')\,dr_T'} + B_{r_T}(r_T)\,2\pi r_T \ell = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_{r_T}(r_T) = 0 \rightarrow H_{r_T} = 0$$

Επομένως το πεδίο δεν έχει r_T συνιστώσα.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere στην καμπύλη C έχουμε: ($r_T < a$)

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi(r_T)\, r_T\, d\varphi = 0 \Rightarrow 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = 0$$

$\Rightarrow H_\varphi = 0 \sim$ Το πεδίο δεν έχει φ συνιστώσα. Επομένως το πεδίο είναι της μορφής $\vec{H} = \hat{\imath}_z H(r_T)$. Για να βρούμε το πεδίο ας εφαρμόσουμε και πάλι τον νόμο του Ampere στους βρόχους C_1 και C_2.

$$\oint_{C_1} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c = 0 \Rightarrow l_1 H(r_{T2}) - l_1 H(r_{T1}) = 0 \Rightarrow H(r_{T2}) = H(r_{T1})$$

Άρα $H(r_T) = c$ όταν $r_T > a$. Για τον βρόχο C_2 έχουμε:

$$\oint_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c = -K l_2 \Rightarrow l_2 H(r_{T2}) - l_2 H(r_{T1}) = -l_2 K \Rightarrow$$

$$c - H(r_{T1}) = -K \Rightarrow H(r_{T1}) = c + K$$

Όμως το πεδίο στο άπειρο είναι μηδενικό. Άρα $H(r_T \to \infty) = 0 \Rightarrow c = 0$

Επομένως,

$$\vec{H} = \hat{\imath}_z \begin{cases} K & 0 < r_T < a \\ 0 & a < r_T < \infty \end{cases}$$

B. Λύση με τις εξισώσεις του Maxwell σε σημειακή μορφή:

Οι εξισώσεις του Maxwell και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\hat{\imath}_{r_T}\cdot\left(\vec{B}(r_T = a+) - \vec{B}(r_T = a-)\right) = 0 \Rightarrow B_{r_T}(a+) = B_{r_T}(a-)$$

$$\hat{\imath}_{r_T}\times\left(\vec{H}(r_T = a+) - \vec{H}(r_T = a-)\right) = K\hat{\imath}_\varphi \Rightarrow$$

$$H_\varphi(a+) = H_\varphi(a-) \quad \text{και} \quad -\left[H_z(a+) - H_z(a-)\right] = K$$

Ας αναπτύξουμε τις εξισώσεις του Maxwell στο κυλινδρικό σύστημα:

$$\frac{1}{r_T}\cancel{\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}} - \cancel{\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{ικανοποιείται ταυτοσήμως}$$

$$\cancel{\frac{\partial H_{r_T}}{\partial z}} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} = 0 \Rightarrow \frac{dH_z}{dr_T} = 0$$

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T H_\varphi) - \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial H_{r_T}}{\partial \varphi}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T}\frac{d}{dr_T}(r_T H_\varphi) = 0$$

Επίσης ,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T B_{r_T}) + \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial\varphi}B_\varphi} + \cancel{\frac{\partial B_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr_T}(r_T B_{r_T}) = 0$$

Από την $\frac{d}{dr_T}(r_T H_\varphi) = 0 \Rightarrow H_\varphi = b/r_T \Rightarrow H_\varphi = \begin{cases} b_1/r_T & 0<r_T<a \\ b_2/r_T & a<r_T<\infty \end{cases}$

και από την $\frac{d}{dr_T}(r_T B_{r_T}) = 0 \Rightarrow B_{r_T} = d/r_T \Rightarrow B_{r_T} = \begin{cases} d_1/r_T & 0<r_T<a \\ d_2/r_T & a<r_T<\infty \end{cases}$

Από τις οριακές συνθήκες έχουμε:

$$H_\varphi(a+) = H_\varphi(a-) \Rightarrow b_2/a = b_1/a \Rightarrow b_1 = b_2$$

Όμως το πεδίο στο άπειρο είναι μηδενικό → $H_\varphi(r_T\to\infty)=0$. Επίσης για $r_T\to 0$ → $2\pi r_T H_\varphi = 0 \Rightarrow \lim_{r_T\to 0}(r_T H_\varphi) = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = 0$.

Επίσης $B_{r_T}(a+) = B_{r_T}(a-) \Rightarrow d_2/a = d_1/a \Rightarrow d_1 = d_2$ και επειδή $r_T B_{r_T}(r_T\to 0) = 0$ → $d_1 = 0$ → $B_{r_T} = 0$ και $H_{r_T} = 0$. Επομένως το πεδίο έχει μόνο z συνιστώσα.

Από την $\frac{dH_z}{dr_T} = 0 \Rightarrow H_z = \begin{cases} c_1 & 0<r_T<a \\ c_2 & a<r_T<\infty \end{cases}$

Όμως $H_z(r_T\to\infty) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Από την οριακή συνθήκη:

$$-[H_z(a+) - H_z(a-)] = K \Rightarrow -[0 - c_1] = K \Rightarrow c_1 = K$$

Άρα το πεδίο είναι το εξής:

$$\vec{H} = \hat{i}_z \begin{cases} K & 0<r_T<a \\ 0 & a<r_T<\infty \end{cases}$$

Γενικές Παρατηρήσεις:

Σε διατάξεις συμμετρικές ως πρός $s = \{x, y, z, \varphi\}$ αν είναι παντού $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ και επίσης παντού $J_s = 0$, $K_s = 0$, $I_s = 0$ τότε είναι παντού $\vec{H}_{\perp s} = 0$ δηλαδή μόνο η H_s συνιστώσα είναι μή μηδενική.

Επίσης αν $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ και $J_{\perp s} = 0$, $K_{\perp s} = 0$, $I_{\perp s} = 0$ τότε $H_s = 0$.

Αυτές οι ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν εύκολα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell σε σημειακή μορφή.

Παράδειγμα: Επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K\hat{i}_y$ πάνω σε απέραντο επίπεδο $z = 0$.

Το πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο του x, y.

Οπότε $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ και $J_x = 0 \Rightarrow H_{\perp x} = 0 \Rightarrow H_y = H_z = 0$.

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$ όμως $J_y \neq 0$ και $J_{\perp y} = 0 \Rightarrow H_y = 0$

Επομένως το πεδίο είναι μόνο κατά την διεύθυνση x όπως και υπολογίσθηκε.

Παράδειγμα: Σωληνοειδές απείρου μήκους με επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K\hat{i}_\varphi$.

Το πεδίο είναι ανεξάρτητο του z και φ.

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $J_z = 0 \Rightarrow H_{\perp z} = 0 \Rightarrow H_\varphi = 0$ και $H_{r_T} = 0$

$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $J_\varphi \neq 0$ όμως $J_{\perp \varphi} = 0 \Rightarrow H_\varphi = 0$

Παράδειγμα: Κυλινδρικά συμμετρική κατανομή ρευμάτων $\vec{J} = J\hat{i}_z$.

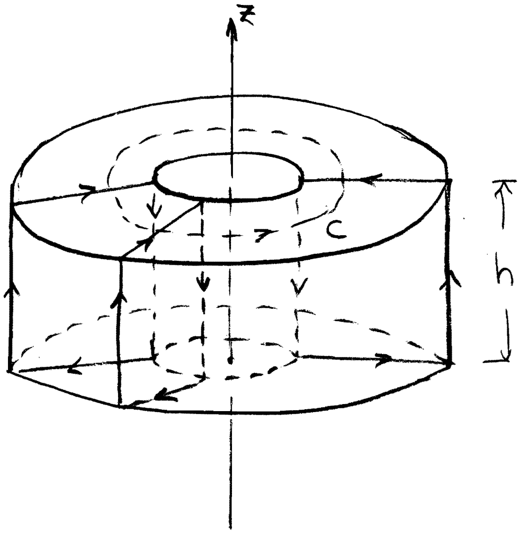
Το πεδίο είναι ανεξάρτητο του φ και z.

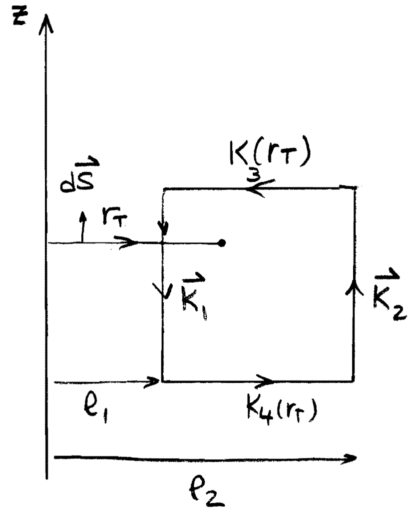
$\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $J_z \neq 0$ όμως $J_{\perp z} = 0 \Rightarrow H_z = 0$

$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $J_\varphi = 0 \Rightarrow H_{\perp \varphi} = 0 \Rightarrow H_z = 0$, $H_{r_T} = 0$

Άρα το πεδίο έχει μόνο φ συνιστώσα.

Ορθογωνικός Τόρος:





Η διάταξη έχει ανεξαρτησία ως προς φ . $\varphi \in \{x, y, z, \varphi\}$ και

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad \& \quad J_\varphi, K_\varphi, I_\varphi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{H}_{\perp \varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{H} = \hat{\imath}_\varphi H(r_T, z)$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο Ampére για τον βρόχο C έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ &\ell_1 < r_T < \ell_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad 2\pi r_T \, H(r_T, z) = -2\pi \ell_1 K_1$$

$$K_1 2\pi \ell_1 = K_2 2\pi \ell_2 = K_3(r_T) 2\pi r_T = K_4(r_T) 2\pi r_T$$

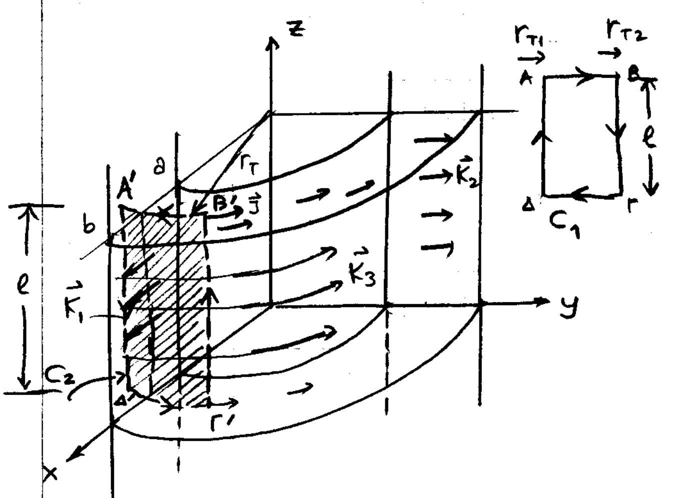
$$\vec{K}_1 = -\hat{\imath}_z K_1 \quad , \quad \vec{K}_2 = +\hat{\imath}_z K_2 \quad , \quad \vec{K}_3(r_T) = -\hat{\imath}_{r_T} K_3(r_T)$$

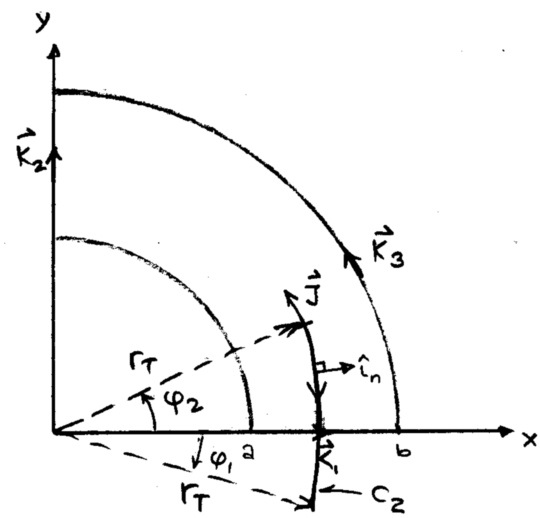
$$\vec{K}_4(r_T) = +\hat{\imath}_{r_T} K_4(r_T)$$

Αν $K_1 2\pi \ell_1 = NI = K_2 2\pi \ell_2 = K_3(r_T) 2\pi r_T = K_4(r_T) 2\pi r_T$

$$\vec{H} = \hat{\imath}_\varphi \begin{cases} -\dfrac{NI}{2\pi r_T} & r_T, z \in \text{τοροειδές } (0<z<h, \ \ell_1<r_T<\ell_2) \\ 0 & r_T, z \notin \quad \text{»} \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω διάταξη στην περιοχή $a<r_T<b$, $0<\varphi<\pi/2$ για κάθε z. Μέσα στην περιοχή αυτή υπάρχει χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}=\hat{i}_\varphi J(r_T)$. Επίσης από τα 4 πλευρικά όρια είναι δυνατόν να υπάρχουν επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος στα 3: $\vec{K}_1=\hat{i}_x K_1(x)$ $(\varphi=0)$, $\vec{K}_2=\hat{i}_y K_2(y)$ $(\varphi=\pi/2)$ $\vec{K}_3=\hat{i}_\varphi K_3(\varphi)$ $(r_T=b)$. Είναι γνωστό μόνο ότι $K_1(x)=K_0\ln(x/a)$. Σε όλο το χώρο $\mu=\mu_0$. Να βρεθεί παντού η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$.





Η διάταξη εκτείνεται από το $-\infty$ ως το $+\infty$ και επομένως το πεδίο είναι ανεξάρτητο του z, δηλαδή $\frac{\partial}{\partial z}=0$. Όμως $J_z, K_z, I_z=0$ και επομένως $\frac{\partial}{\partial s}=0$, $J_s=0 \rightarrow H_{\perp s}=0$, δηλαδή $H_\varphi=H_{r_T}=0$ και $H_z\neq 0$. Άρα το πεδίο είναι της μορφής $\vec{H}=\hat{i}_z H_z(r_T,\varphi)$. Για να βρούμε το πεδίο πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλους βρόχους ώστε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία ότι μόνο η $K_1(x)$ κατανομή είναι γνωστή.

Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere στο βρόχο C_1 που βρίσκεται στο εξωτερικό της διάταξης τότε:

$$\oint_{C_1}\vec{H}\cdot d\vec{\ell}=0 \Rightarrow \oint_{C} H(r_T,\varphi)\,\hat{i}_z\cdot d\vec{\ell}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{AB} H(r_T,\varphi=\tfrac{\pi}{2})\,\underbrace{\cancel{\hat{i}_z\cdot\hat{i}_{r_T}}}_{0}\,dr_T+\int_{B\Gamma} H(r_{T2},\varphi)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\,dz+\int_{\Gamma\Delta} H(r_T,\varphi)\,\overbrace{\cancel{\hat{i}_z\cdot(\hat{i}_{r_T})}}^{0}\,dr_T$$

$$+\int_{\Delta A} H(r_{T1},\varphi)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\,dz=0 \Rightarrow -H(r_{T2},\varphi)\,\ell+H(r_{T1},\varphi)\,\ell=0 \Rightarrow$$

$$H(r_{T1},\varphi) = H(r_{T2},\varphi) \Rightarrow \qquad H(r_T,\varphi) = c \qquad b<r_T<\infty .$$

Όμως ο βρόχος μπορεί να δώσει τα ίδια αποτελέσματα $\forall \varphi$. Εφόσον το πεδίο στο ∞ μηδενίζεται $\lim_{r_T\to\infty} H(r_T,\varphi) = 0 \Rightarrow c=0 \sim H(r_T,\varphi)=0$ όταν $b<r_T<\infty$. Δηλαδή στο εξωτερικό της διάταξης το πεδίο είναι μηδενικό. Φυσικό το ίδιο συμβαίνει και για $0<r_T<a$, καθώς και για $a<r_T<b$ αλλά με $\frac{\pi}{2}<\varphi<2\pi$. Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο στο εσωτερικό της διάταξης δηλαδή για $a<r_T<b$ και $0<\varphi<\pi/2$.

Αν διαλέξουμε τον βρόχο C_2 όπως φαίνεται στο σχήμα τότε εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα τον όρο $\oint_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{\ell}$:

$$\oint_{C_2} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int_{B'}^{A'} H(r_T,\varphi')\,\overbrace{\cancel{\hat{i}_z\cdot\hat{i}_\varphi}}^{0}\, r_T\, d\varphi' + \int_{A'}^{\Delta'} H(r_T,\varphi_1)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\, dz \;+$$

$$\int_{\Delta'}^{\Gamma'} H(r_T,\varphi')\,\overbrace{\cancel{\hat{i}_z\cdot\hat{i}_\varphi}}^{0}\, r_T\, d\varphi' + \int_{\Gamma'}^{B'} H(r_T,\varphi_2)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, dz \;=$$

$= H(r_T,\varphi_2)\,\ell$ διότι $H(r_T,\varphi_1)=0$ $(\varphi_1<0)$ και άρα αντιστοιχεί σε σημεία εξωτερικά της διάταξης.

Το ρεύμα $I = \int \vec{K}_1\cdot L_{\perp\ell}\, d\ell = \int_0^{\ell} K_0 \ln\left(\frac{x}{a}\right)\hat{i}_x\cdot\hat{i}_x\, dz = \ell K_0 \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

όπου $x=r_T$. Επομένως $I = \ell K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right)$ και

$$\cancel{\ell}\, H(r_T,\varphi) = \cancel{\ell}\, K_0 \ln\left(r_T/a\right) \Rightarrow$$

$$H(r_T,\varphi) = K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \qquad a<r_T<b,\quad 0<\varphi<\pi/2 .$$

Συνοψίζοντας,

$$\vec{H} = \begin{cases} \hat{i}_z K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) & a<r_T<b,\; 0<\varphi<\pi/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τώρα που το μαγνητικό πεδίο έχει βρεθεί μπορούμε εύκολα να βρούμε τις άγνωστες κατανομές ρευμάτων.

οριακή συνθήκη $\varphi = \pi/2$; $a < r_T < b$: $\hat{\imath}_n = -\hat{\imath}_x$

$$\hat{\imath}_n \times [\, H(r_T, \varphi = \pi/2 +) - H(r_T, \varphi = \pi/2 -) \,]\, \hat{\imath}_z = \vec{K}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{K}_2 = -\hat{\imath}_x \times \hat{\imath}_z \left[0 - K_o \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \right] = -\hat{\imath}_y K_o \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) = -\hat{\imath}_y K_o \ln\left(\frac{y}{a}\right)$$

Οριακή συνθήκη $r_T = b$ $\quad 0 < \varphi < \pi/2$: $\hat{\imath}_n = \hat{\imath}_{r_T}$

$$\hat{\imath}_n \times [\, H(r_T = b+, \varphi) - H(r_T = b-, \varphi) \,]\, \hat{\imath}_z = \vec{K}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K}_3 = \hat{\imath}_{r_T} \times \hat{\imath}_z \left[0 - K_o \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = -\hat{\imath}_\varphi \left(-K_o \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \hat{\imath}_\varphi K_o \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Τέλος η χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση του Ampere: $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \left[\frac{1}{r_T} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right] \hat{\imath}_{r_T} + \left[\frac{\partial H_{r_T}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} \right] \hat{\imath}_\varphi$
$+ \left[\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T}(r_T H_\varphi) - \frac{1}{r_T} \frac{\partial H_{r_T}}{\partial \varphi} \right] \hat{\imath}_z$

Όμως $\vec{H} = H_z \hat{\imath}_z = H_z(r_T, \varphi)\, \hat{\imath}_z = K_o \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \hat{\imath}_z \quad \{a < r_T < b,\ 0 < \varphi < \pi/2\}$

Οπότε $\vec{J} = \hat{\imath}_\varphi \left(-\frac{\partial H_z}{\partial r_T}\right) = \hat{\imath}_\varphi (-1) K_o \frac{1}{(r_a/a)} \frac{1}{a} = -K_o \frac{1}{r_T} \hat{\imath}_\varphi$

όταν $a < r_T < b$ και $0 < \varphi < \pi/2$.