

ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ :

Οι εξισώσεις του Maxwell για τα μαγνητοστατικά πεδία (χρονοσταθερά) είναι:

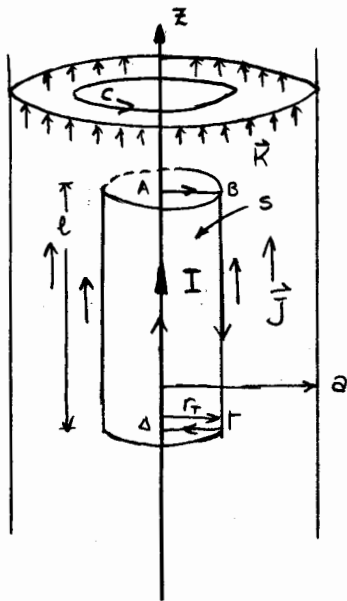
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{ή} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{ή} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Όπως και στην περίπτωση των ηλεκτροστατικών πεδίων οι σημειακές εξισώσεις χρησιμοποιούνται με τις οριακές συνθήκες. Επιπλέον ο ΝΔΦ θα πρέπει να ικανοποιείται ($\partial/\partial t = 0$). Δηλαδή είτε

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{ή} \quad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Μαγνητοστατικό Πεδίο Κυλινδρικά Συμμετρικών Χρονοσταθερών Ρευμάτων:



Έστω νηματοειδές ρεύμα I κατά μήκος του άξονα z κυλίνδρου απείρου μήκους ακτίνας a . Στο εσωτερικό του κυλίνδρου υπάρχει συμμετρική ως προς r_T χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J(r_T) \hat{z}$ ($0 < r_T < a$). Επίσης στην επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K \hat{z}$ όπου $K = \text{σταθερά}$. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι $\mu = \mu(r_T)$. Να βρεθεί η

έκταση του μαγνητικού πεδίου.

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell στην ολοκληρωτική μορφή:

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο είναι μόνο συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης r_T . Δηλαδή $\vec{H} = \vec{H}(r_T)$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο φ -συνιστώσα.

Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss στην επιφάνεια του κυλίνδρου ακτίνας

$$r_T. \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \left[B_\varphi(r_T) 2\pi l r_T + \int_0^{r_T} B_z(r_T') 2\pi r_T' dr_T' - \int_0^{r_T} B_z(r_T') 2\pi r_T' dr_T' \right] = 0 \Rightarrow$$

$B_{r_T}(r_T) 2\pi r_T = 0 \Rightarrow B_{r_T}(r_T) = 0 \Rightarrow H_{r_T}(r_T) = 0$. Επομένως το μαγνητι-
 τικό πεδίο δεν έχει r_T -συμμετρία.

Τώρα αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere στον βρόχο ΑΒΓΔ,

$$\oint_{C=AB\Gamma\Delta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_0^{r_T} H_{r_T}(r_T') dr_T' - H_z(r_T) l + \int_0^{r_T} H_{r_T}(r_T') (-1) dr_T' + H_z(0) l = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow H_z(r_T) = H_z(0) = C$. Αφού όμως στο άπειρο το πεδίο μηδενίζεται
 έχουμε $C=0 \sim H_z(r_T) = 0$. Επομένως το μαγνητικό πεδίο είναι της
 μορφής:

$$\vec{H} = H_\varphi(r_T) \hat{l}_\varphi$$

Για τον υπολογισμό του $H_\varphi(r_T)$ θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον νόμο
 του Ampere. Έστω C κυκλικός βρόχος ακτίνας r_T ($0 < r_T < a$). Από τον νόμο
 του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_C \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi(r_T) \hat{l}_\varphi \cdot \hat{l}_\varphi r_T d\varphi = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = \iint J(r_T') \hat{l}_z \cdot \hat{l}_z r_T' d\varphi dr_T' + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = 2\pi \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' + I \Rightarrow H_\varphi(r_T) = \frac{1}{r_T} \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' + \frac{I}{2\pi r_T}$$

Εάν $r_T > a$ τότε ο μόνος όρος που αλλάζει είναι το I_C . Σε αυτή την περι-
 πτωση $I_C = I + 2\pi \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + 2\pi a K$

Επομένως

$$\vec{H} = H_\varphi(r_T) \hat{l}_\varphi = \hat{l}_\varphi \begin{cases} \frac{I}{2\pi r_T} + \frac{1}{r_T} \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' & 0 < r_T < a \\ \frac{I}{2\pi r_T} + \frac{1}{r_T} \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + K \frac{a}{r_T} & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Το πεδίο είναι ασυνεχές στην επιφάνεια του ωαίνδρου λόγω της επιφανειακής
 πυκνότητας ρεύματος:

$$\hat{l}_n \times (\vec{H}(r=a+) - \vec{H}(r=a-)) = \vec{K} \Rightarrow \hat{l}_r \times [\hat{l}_\varphi (H_\varphi(r=a+) - H_\varphi(r=a-))] = \hat{l}_z \left[\frac{I}{2\pi a} + \frac{1}{a} \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + K - \frac{I}{2\pi a} - \frac{1}{a} \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' \right] = K \hat{l}_z = \vec{K}$$

B. Λύση με χρήση εξισώσεων Maxwell σε σημειακή μορφή:

Οι εξισώσεις του Maxwell σε σημειακή μορφή είναι :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες}$$

$$\hat{l}_n \times (\vec{H}(r_T=a+) - \vec{H}(r_T=a-)) = \vec{K}$$

$$\hat{l}_n \cdot (\vec{B}(r_T=a+) - \vec{B}(r_T=a-)) = 0$$

Και πάλι λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας $\vec{H} = \vec{H}(r_T)$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{ικανοποιείται ταυτογίμως}$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} = 0 \Rightarrow \frac{dH_z}{dr_T} = 0 \Rightarrow H_z(r_T) = C$$

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_\varphi) - \frac{1}{r_T} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_\varphi) = J(r_T)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T B_r) + \frac{1}{r_T} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} (r_T B_r) = 0$$

$$r_T B_r = d \Rightarrow B_r = d/r_T$$

Επομένως,

$$H_z(r_T) = \begin{cases} C_1 & 0 < r_T < a \\ C_2 & a < r_T < \infty \end{cases}$$

$$B_r(r_T) = \begin{cases} d_1/r_T & 0 < r_T < a \\ d_2/r_T & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Στο άπειρο $r_T \rightarrow \infty$, $\vec{H}(r_T \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \Rightarrow C_2 = 0$

Από την οριακή συνθήκη στο $r_T = a$ έχουμε :

$$\hat{l}_n \times (\vec{H}(a+) - \vec{H}(a-)) = \vec{K} = K \hat{l}_z$$

$$\hat{l}_{r_T} \times [\hat{l}_\varphi H_\varphi(a+) + \hat{l}_z H_z(a+) - \hat{l}_\varphi H_\varphi(a-) - \hat{l}_z H_z(a-)] = \hat{l}_z K$$

$$\hat{l}_z [H_\varphi(a+) - H_\varphi(a-)] - \hat{l}_\varphi [H_z(a+) - H_z(a-)] = \hat{l}_z K$$

Οπότε $H_z(a+) = H_z(a-) \Rightarrow C_2 = C_1 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow H_z = 0$

Όταν $r_T \rightarrow \infty$, $B_r \rightarrow 0$, και $B_r(a+) = B_r(a-) \Rightarrow d_1 = d_2$

Όταν $r_T \rightarrow 0 \rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{r_T}(r_T) 2\pi r_T l + \int_{S_+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$
 $2\pi r_T l B(r_T) = 0$ διότι $\int_{S_+} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_{S_-} \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Όταν $r_T \rightarrow 0 \rightarrow \lim_{r_T \rightarrow 0} \{ r_T B_{r_T}(r_T) \} = 0 \Rightarrow d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow$
 $B_{r_T} = 0 \Rightarrow H_{r_T} = 0$.

Επομένως το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο φ-συμμετρία.

$$\frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} (r_T H_\phi) = J(r_T) \Rightarrow r_T H_\phi(r_T) = \int_0^{r_T} r_T' J(r_T') dr_T' + A_1$$

$$\Rightarrow H_\phi(r_T) = \frac{1}{r_T} \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' + \frac{A_1}{r_T} \quad 0 < r_T < a$$

$$H_\phi(r_T) = \frac{A_2}{r_T} \quad a < r_T < \infty$$

Όταν $r_T \rightarrow 0$ $H_\phi \rightarrow I/2\pi r_T$. Όμως $\frac{1}{r_T} \int_0^{r_T} J(r_T') r_T' dr_T' \rightarrow \frac{1}{r_T} J(0) \frac{r_T^2}{2} \rightarrow 0$

Όποτε $\frac{I}{2\pi r_T} = \frac{A_1}{r_T}$ όταν $r_T \rightarrow 0 \Rightarrow A_1 = I/2\pi$.

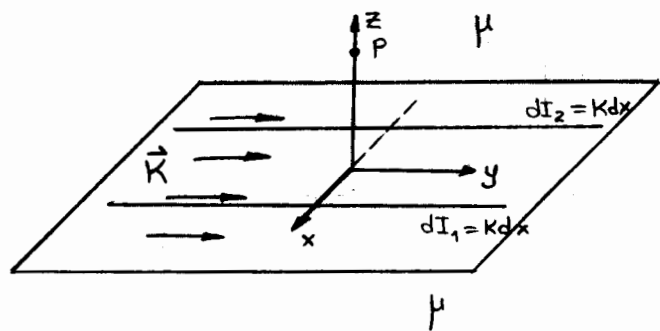
Από την οριακή συνθήκη $\hat{n} \times (\vec{H}(a+) - \vec{H}(a-)) = \vec{K} \Rightarrow$

$$H_\phi(a+) - H_\phi(a-) = K \Rightarrow \frac{A_2}{a} - \left\{ \frac{1}{a} \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + \frac{I}{2\pi a} \right\} = K$$

$$\rightarrow A_2 = \int_0^a J(r_T') r_T' dr_T' + K a + \frac{I}{2\pi}$$

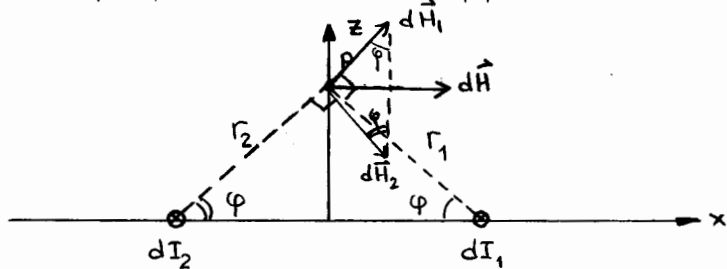
Οι τιμές αυτές των A_1, A_2 δίδουν ακριβώς τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο \vec{H} όπως και εμείς που υπολογίσθηκαν όταν έγινε χρήση των οριακών συνθηκών.

Μαγνητοστατικό Πεδίο Απεράντων Ρευματικών Κατανομών:



Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο λόγω επιφανειακής κατανομής ρεύματος ομοιομόρφου πυκνότητας $\vec{K} = K \hat{y}$.

Ο περιβάλλον χώρος έχει διαπερατότητα μ . Αφού το επιφανειακό ρεύμα είναι σταθερό για κάθε x, y . Επομένως το πεδίο είναι συνάρτηση μόνο του z . Δηλαδή $\vec{H} = \vec{H}(z)$. Χωρίς κανένα περιορισμό της γενιότητας επιδέχουμε το σημείο P του άξονα των z . Το πεδίο μπορεί να βρεθεί ως επαλλακτικά \vec{H} των ημιαιωδών ρευμάτων dI_1, dI_2 συμμετρικών ως προς τον άξονα των y .



$$dI_1 = dI_2 = K dx$$

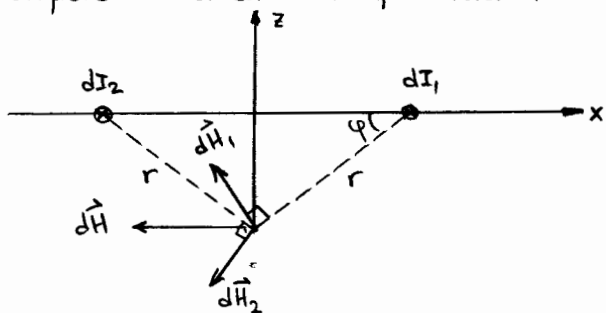
$$r_1 = r_2 = r$$

$$d\vec{H}_1 = \frac{dI_1}{2\pi r_1} (\hat{l}_x \sin\varphi + \hat{l}_z \cos\varphi) = \frac{K dx}{2\pi r} (\hat{l}_x \sin\varphi + \hat{l}_z \cos\varphi)$$

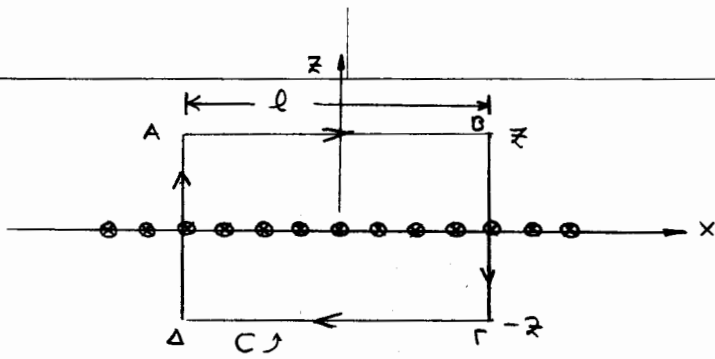
$$d\vec{H}_2 = \frac{dI_2}{2\pi r_2} (\hat{l}_x \sin\varphi - \hat{l}_z \cos\varphi) = \frac{K dx}{2\pi r} (\hat{l}_x \sin\varphi - \hat{l}_z \cos\varphi)$$

Επομένως $d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2 = \frac{K dx}{2\pi r} 2 \sin\varphi \hat{l}_x$

Αν το σημείο P είναι στα αρνητικά z τότε $d\vec{H} = -\frac{K dx}{2\pi r} 2 \sin\varphi \hat{l}_x$



δηλαδή $d\vec{H}(z) = -d\vec{H}(-z)$



Έστω ορθογώνιος βρόχος C στο επίπεδο xz όπως φαίνεται στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c \Rightarrow \int_{AB} H(z) \hat{l}_x \cdot \hat{l}_x dx + \int_{B\Gamma} H(z') \hat{l}_x \cdot (-\hat{l}_z) dz' +$$

$$\int_{\Gamma\Delta} H(-z) \hat{l}_x \cdot (-\hat{l}_x) dx + \int_{\Delta A} H(z') \hat{l}_x \cdot \hat{l}_z dz' = K\ell \Rightarrow$$

$$H(z)\ell - (-H(z))\ell = K\ell \Rightarrow 2H(z) = K \Rightarrow H(z) = \frac{K}{2}$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\vec{H} = \hat{l}_x \frac{K}{2} \operatorname{sgn}(z) = \frac{\vec{K} \times \hat{l}_z}{2} \operatorname{sgn}(z) \text{ που ισχύει για κάθε}$$

κατεύθυνση του \vec{K} πάνω στο επίπεδο xy .

Με χρήση αναλλοίσιμης:

$$d\vec{H} = \frac{K dx}{2\pi r} 2 \sin\phi \hat{l}_x$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\sin\phi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$

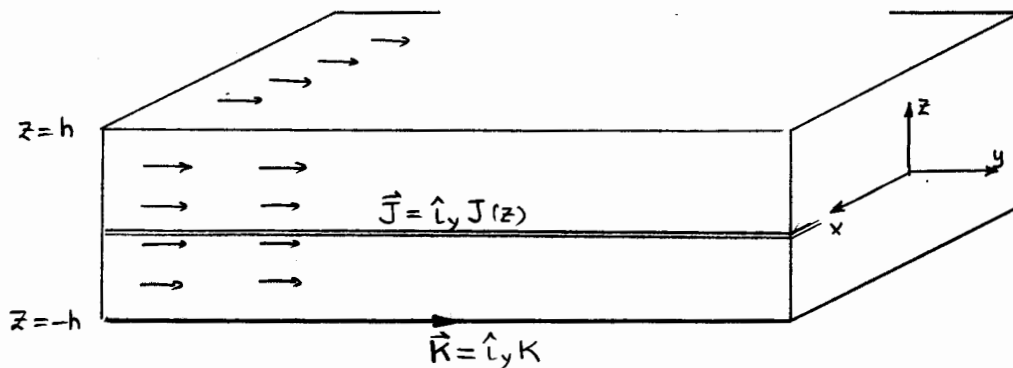
$$\vec{H} = \int_{x=0}^{\infty} d\vec{H} = \hat{l}_x \int_{x=0}^{\infty} \frac{K dx}{2\pi} 2 \frac{z}{x^2 + z^2} =$$

$$= \hat{l}_x \frac{Kz}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + z^2} dx = \hat{l}_x \frac{Kz}{\pi} \left\{ \frac{1}{z} \tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right) \right\}_0^{\infty}$$

$$z > 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \hat{l}_x \frac{Kz}{\pi} \frac{1}{z} \frac{\pi}{2} = \hat{l}_x \frac{K}{2}$$

$$z < 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \hat{l}_x \frac{Kz}{\pi} \left(-\frac{1}{z} \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{l}_x \frac{K}{2}$$

Μαγνητοστατικό πεδίο απεράτων ρευματοφόρων επιπέδων πλακών:



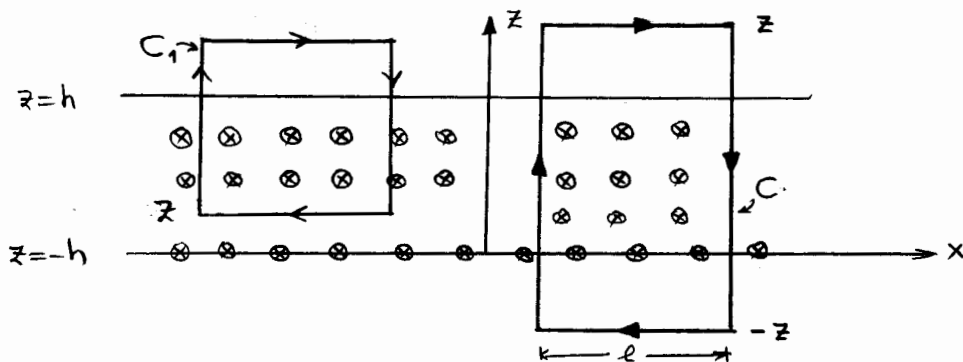
Έστω επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = \hat{y}K$ ($K = \text{σταθερά}$) και χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J(z)\hat{y}$ μεταξύ $-h < z < h$.

Λόγω της συμμετρίας της διατάξεως και των πηγών το πεδίο εξαρτάται μόνο από το z . $\vec{H} = \vec{H}(z)$.

A. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή:

Το πεδίο έχει μόνο x συνιστώσα. Αυτό είναι αποτέλεσμα που δείξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Η πλάκα μπορεί να χωριστεί σε επιφανειακές κατανομές

$d\vec{K} = [J(z')dz']\hat{y}$ για κάθε μία από τις οποίες το πεδίο είναι στην διεύθυνση των x . Επομένως $\vec{H} = H(z)\hat{x}$. Επιπλέον $H(z) = -H(-z)$ όταν $|z| > h$.



Ας βρούμε το πεδίο για $|z| > h$. Έστω C ορθογώνιος βρόχος μεταξύ $-z < z' < z$.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c = \iint J(z') dz' dx + Kl \Rightarrow$$

$$H(z)l - H(-z)l = Kl + l \int_{-h}^h J(z') dz' \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^h J(z') dz' \quad \text{και} \quad H(-z) = -H(z) \quad \text{όταν} \quad |z| > h.$$

Όταν θέλουμε να βρούμε το πεδίο μέσα στην πλάκα τότε διαλέγουμε τον βρόχο C_1 . Εφαρμόζοντας και πάλι το νόμο του Ampere έχουμε:

$$H(z_1)l - H(z)l = l \int_{z}^h J(z') dz' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} H(z) &= H(z_1) - \int_{z}^h J(z') dz' = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^h J(z') dz' - \int_{z}^h J(z') dz' = \\ &= \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^z J(z') dz' - \frac{1}{2} \int_{z}^h J(z') dz' \end{aligned}$$

Το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει ασυνέχεια στο $z = -h$ όπου βρίσκεται η επιφανειακή κατανομή ρεύματος. Δηλαδή $\hat{t}_n \times (\vec{H}(-h^+) - \vec{H}(-h^-)) = \vec{K}$ όπου $\hat{t}_n = \hat{t}_z$.

Εάν $H(z) = -H(-z)$ τότε οι πυκνότητες ρεύματος στο $\pm\infty$ είναι συμμετρικές, δηλαδή $K_y^{-\infty} = K_y^{+\infty}$.

Β. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε διηλεκτρική μορφή:

Αρχίζουμε από τις εξισώσεις

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{και} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

και τις οριακές συνθήκες: $\hat{t}_n \cdot (\vec{B}(z^+) - \vec{B}(z^-)) \Big|_{z=\pm h} = 0 \quad (\hat{t}_n = \hat{t}_z)$

$\hat{t}_n \times (\vec{H}(h^+) - \vec{H}(h^-)) = 0$, $\hat{t}_n \times (\vec{H}(-h^+) - \vec{H}(-h^-)) = \vec{K}$, που μπορούν

να γραφούν ως εξής:

$$\left[B_z(z^+) = B_z(z^-) \right]_{z=\pm h}$$

$$H_y(h^+) - H_y(h^-) = 0, \quad H_x(h^+) - H_x(h^-) = 0$$

$$H_y(-h^+) - H_y(-h^-) = 0, \quad H_x(-h^+) - H_x(-h^-) = K$$

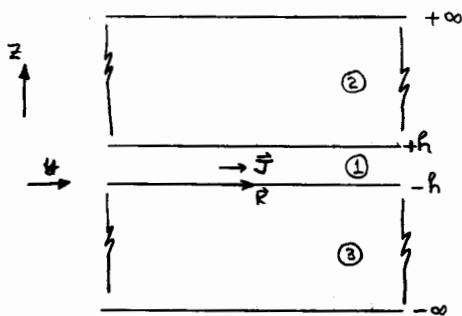
As αναπτύξουμε τις εξισώσεις του Maxwell στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{dH_y}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J \Rightarrow \frac{dH_x}{dz} = J(z)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{dB_z}{dz} = 0$$



$$H_y(z) = \begin{cases} c_2 & h < z < \infty \\ c_1 & -h < z < h \\ c_3 & -\infty < z < -h \end{cases}$$

$$B_z(z) = \begin{cases} d_2 & h < z < \infty \\ d_1 & -h < z < h \\ d_3 & -\infty < z < -h \end{cases}$$

Στο $\pm\infty$ υπάρχει συνέχεια των συνιστωσών B_z και H_y . Όμως

$$B_z(\pm\infty) = 0 \text{ και } H_y(\pm\infty) = 0. \text{ Άρα } d_2 = d_3 = 0 \text{ και } c_2 = c_3 = 0$$

Από την οριακή συνθήκη στο h έχουμε $B_z(h+) = B_z(h-) \Rightarrow$

$$d_2 = d_1 = d_3 = 0 \text{ και } H_y(h+) = H_y(h-) \Rightarrow c_2 = c_1 = c_3 = 0$$

Επομένως H_y και H_z είναι μηδενιστές συνιστώσες του πεδίου. Άρα το πε-

δίο είναι της μορφής $\vec{H} = H(z)\hat{i}_x$.

$$\frac{dH_x}{dz} = J(z) \Rightarrow H_x(z) = \int J(z')dz' + A$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία λύση στις περιοχές ①, ②, και ③ έχουμε:

$$H_x(z) = \begin{cases} A_2 & h < z < \infty \\ \int_{-h}^z J(z')dz' + A_1 & -h < z < h \\ A_3 & -\infty < z < -h \end{cases}$$

Από την οριακή συνθήκη $H_x(h+) = H_x(h-) \Rightarrow A_2 = A_1 + \int_{-h}^h J(z')dz'$

$$\text{Επίσης } H_x(-h+) - H_x(-h-) = K \Rightarrow A_1 - A_3 = K$$

Επίσης λόγω της συμμετρίας $H_x(z) = -H_x(-z)$ $z \rightarrow \infty$ οπότε $A_2 = -A_3$

Επιλύοντας ως προς A_1, A_2, A_3 βρίσκουμε :

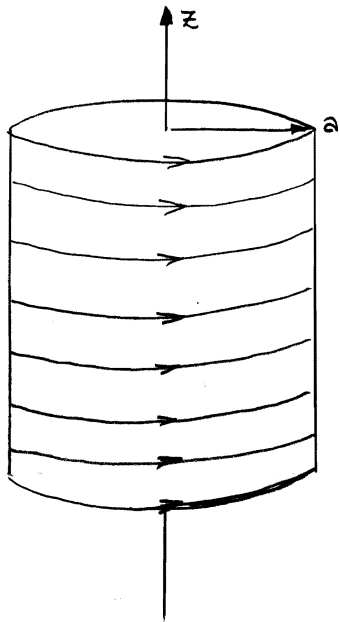
$$A_1 = \frac{K}{2} - \frac{1}{2} \int_{-h}^h J(z') dz'$$

$$A_2 = \frac{K}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^h J(z') dz'$$

$$A_3 = - \left[\frac{K}{2} + \frac{1}{2} \int_{-h}^h J(z') dz' \right]$$

Οι τιμές αυτές των A_1, A_2, A_3 δίδουν τις ίδιες εκφράσεις για το πεδίο όπως προηγουμένως με την χρήση των ολοκληρωτικών σχέσεων.

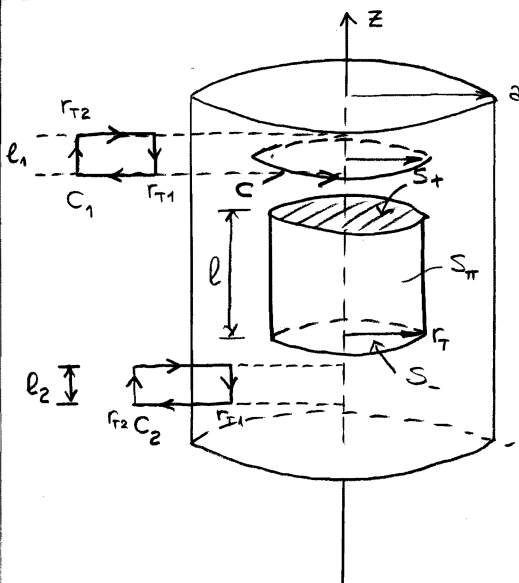
Σωληνοειδές Απείρου μήκους :



Ομοιόμορφο επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα $\vec{K} = K\hat{\phi}$ ρέει στην επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας a . Ο κύλινδρος θεωρείται απείρου μήκους. Ζητείται το μαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας και του απείρου μήκους το πεδίο είναι ανεξάρτητο των z, ϕ . Επομένως $\vec{H} = \vec{H}(r_T)$.

A. Λύση με τις εξισώσεις του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή :



Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για την επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας r_T και ύψους l .

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{S_+} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_-} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_T} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi \int_0^{r_T} B_z(r_T') dr_T' - 2\pi \int_0^{r_T} B_z(r_T') dr_T' + B_{r_T}(r_T) 2\pi r_T l = 0$$

$$\Rightarrow B_{r_T}(r_T) = 0 \rightarrow H_{r_T} = 0$$

Επομένως το πεδίο δεν έχει r_T συνιστώσα.

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere στην καμπύλη C έχουμε: ($r_T < a$)

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi(r_T) r_T d\varphi = 0 \Rightarrow 2\pi r_T H_\varphi(r_T) = 0$$

$\Rightarrow H_\varphi = 0 \sim$ Το πεδίο δεν έχει φ συνιστώσα. Επομένως το πεδίο

είναι της μορφής $\vec{H} = \hat{z} H(r_T)$. Για να βρούμε το πεδίο ως εφαρμόσουμε

και πάλι τον νόμο του Ampere στους βρόχους C_1 και C_2 .

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c = 0 \Rightarrow \ell_1 H(r_{T2}) - \ell_1 H(r_{T1}) = 0 \Rightarrow H(r_{T2}) = H(r_{T1})$$

Άρα $H(r_T) = c$ όταν $r_T > a$. Για τον βρόχο C_2 έχουμε:

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_c = -K\ell_2 \Rightarrow \ell_2 H(r_{T2}) - \ell_2 H(r_{T1}) = -\ell_2 K \Rightarrow$$

$$c - H(r_{T1}) = -K \Rightarrow H(r_{T1}) = c + K.$$

Όμως το πεδίο στο άπειρο είναι μηδενικό. Άρα $H(r_T \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow c = 0$

Επομένως,

$$\vec{H} = \hat{z} \begin{cases} -K & 0 < r_T < a \\ 0 & a < r_T < \infty \end{cases}$$

B. Λύση με τις εξισώσεις του Maxwell σε σημειακή μορφή:

Οι εξισώσεις του Maxwell και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες είναι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\hat{r}_T \cdot (\vec{B}(r_T = a+) - \vec{B}(r_T = a-)) = 0 \Rightarrow B_{r_T}(a+) = B_{r_T}(a-)$$

$$\hat{r}_T \times (\vec{H}(r_T = a+) - \vec{H}(r_T = a-)) = K \hat{\varphi} \Rightarrow$$

$$H_\varphi(a+) = H_\varphi(a-) \quad \text{και} \quad -[H_z(a+) - H_z(a-)] = K$$

Ας αναπτύξουμε τις εξισώσεις του Maxwell στο κυλινδρικό σύστημα:

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{υπανομοιότυπα ταυτοσημώς}$$

$$\frac{\partial H_{r_T}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} = 0 \Rightarrow \frac{dH_z}{dr_T} = 0$$

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_\varphi) - \frac{1}{r_T} \frac{\partial H_{r_T}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} (r_T H_\varphi) = 0$$

Επίσης,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T B_{r_T}) + \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr_T} (r_T B_{r_T}) = 0$$

$$\text{Από την } \frac{d}{dr_T} (r_T H_\varphi) = 0 \Rightarrow H_\varphi = b/r_T \Rightarrow H_\varphi = \begin{cases} b_1/r_T & 0 < r_T < a \\ b_2/r_T & a < r_T < \infty \end{cases}$$

$$\text{και από την } \frac{d}{dr_T} (r_T B_{r_T}) = 0 \Rightarrow B_{r_T} = d/r_T \Rightarrow B_{r_T} = \begin{cases} d_1/r_T & 0 < r_T < a \\ d_2/r_T & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Από τις οριακές συνθήκες έχουμε:

$$H_\varphi(a+) = H_\varphi(a-) \Rightarrow b_2/a = b_1/a \Rightarrow b_1 = b_2$$

Όμως το πεδίο στο άπειρο είναι μηδενικό $\rightarrow H_\varphi(r_T \rightarrow \infty) = 0$. Επίσης για

$$r_T \rightarrow 0 \rightarrow 2\pi r_T H_\varphi = 0 \Rightarrow \lim_{r_T \rightarrow 0} (r_T H_\varphi) = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = 0.$$

$$\text{Επίσης } B_{r_T}(a+) = B_{r_T}(a-) \Rightarrow d_2/a = d_1/a \Rightarrow d_1 = d_2 \text{ και επειδή}$$

$$r_T B_{r_T}(r_T \rightarrow 0) = 0 \rightarrow d_1 = 0 \rightarrow B_{r_T} = 0 \text{ και } H_{r_T} = 0. \text{ Επομένως το πεδίο}$$

έχει μόνο z συνιστώσα.

$$\text{Από την } \frac{dH_z}{dr_T} = 0 \Rightarrow H_z = \begin{cases} c_1 & 0 < r_T < a \\ c_2 & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Όμως $H_z(r_T \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Από την οριακή συνθήκη:

$$-[H_z(a+) - H_z(a-)] = K \Rightarrow -[0 - c_1] = K \Rightarrow c_1 = K$$

Άρα το πεδίο είναι το εξής:

$$\vec{H} = \hat{L}_z \begin{cases} K & 0 < r_T < a \\ 0 & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Γενικές Παρατηρήσεις:

Σε διατάξεις συμμετρίες ως προς $s = \{x, y, z, \varphi\}$ αν είναι παντού $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ και επίσης παντού $J_s = 0, K_s = 0, I_s = 0$ τότε είναι παντού $\vec{H}_{\perp s} = 0$ δηλαδή μόνο η H_s συνιστώσα είναι μη μηδενική.

Επίσης αν $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ και $J_{\perp s} = 0, K_{\perp s} = 0, I_{\perp s} = 0$ τότε $H_s = 0$.

Αυτές οι ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν εύκολα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell σε σφαιρική μορφή.

Παράδειγμα: Επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K\hat{y}$ πάνω σε απέραντο επίπεδο

$$z = 0,$$

Το πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο του x, y .

$$\text{Οπότε } \frac{\partial}{\partial x} = 0 \text{ και } J_x = 0 \Rightarrow H_{\perp x} = 0 \Rightarrow H_y = H_z = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \text{ όμως } J_y \neq 0 \text{ και } J_{\perp y} = 0 \Rightarrow H_y = 0$$

Επομένως το πεδίο είναι μόνο κατά την διεύθυνση x όπως και υπολογίστηκε.

Παράδειγμα: Σωληνοειδές απείρου μήκους με επιφανειακό ρεύμα $\vec{K} = K\hat{\varphi}$.

Το πεδίο είναι ανεξάρτητο του z και φ .

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, J_z = 0 \Rightarrow H_{\perp z} = 0 \Rightarrow H_{\varphi} = 0 \text{ και } H_{r\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, J_{\varphi} \neq 0 \text{ όμως } J_{\perp \varphi} = 0 \Rightarrow H_{\varphi} = 0$$

Παράδειγμα: Κυλινδρική συμμετρική κατανομή ρευμάτων $\vec{J} = J\hat{z}$.

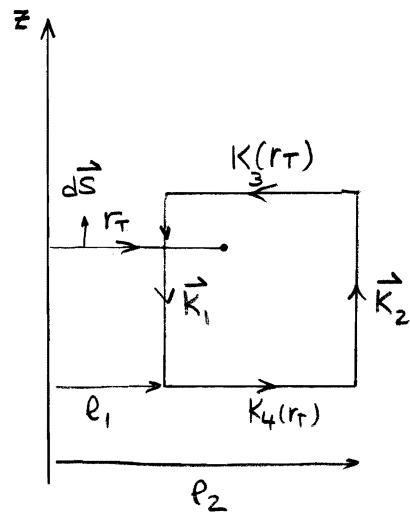
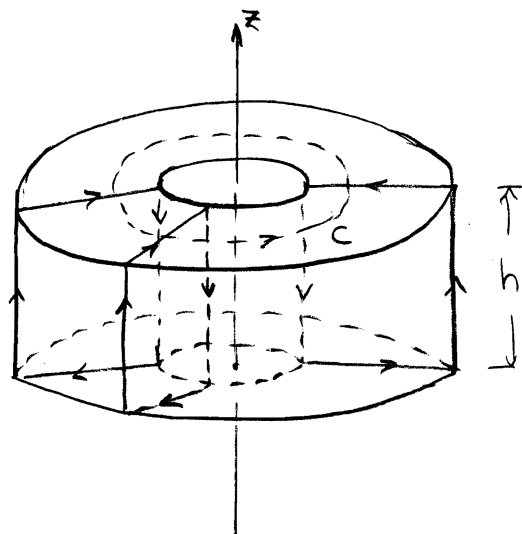
Το πεδίο είναι ανεξάρτητο του φ και z .

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, J_z \neq 0 \text{ όμως } J_{\perp z} = 0 \Rightarrow H_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, J_{\varphi} = 0 \Rightarrow H_{\perp \varphi} = 0 \Rightarrow H_z = 0, H_{r\varphi} = 0$$

Άρα το πεδίο έχει μόνο φ συνιστώσα.

Ορθογωνικός Τόπος:



Η διάταξη έχει ανεξαρτησία ως προς φ . $\varphi \in \{x, y, z, \varphi\}$ και $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ & $J_\varphi, K_\varphi, I_\varphi = 0 \sim \vec{H}_{\perp \varphi} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \hat{\varphi} H(r_T, z)$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο Ampère για τον βρόχο C έχουμε:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \left. \vphantom{\int_S} \right\} \Rightarrow 2\pi r_T H(r_T, z) = -2\pi l_1 K_1$$

$l_1 < r_T < l_2$

$$K_1 2\pi l_1 = K_2 2\pi l_2 = K_3(r_T) 2\pi r_T = K_4(r_T) 2\pi r_T$$

$$\vec{K}_1 = -\hat{z} K_1 2\pi l_1, \quad \vec{K}_2 = +\hat{z} K_2 2\pi l_2, \quad \vec{K}_3(r_T) = -\hat{r}_T K_3(r_T) 2\pi r_T$$

$$\vec{K}_4(r_T) = +\hat{r}_T K_4(r_T) 2\pi r_T$$

$$\text{Αν } K_1 2\pi l_1 = NI = K_2 2\pi l_2 = K_3(r_T) 2\pi r_T = K_4(r_T) 2\pi r_T$$

$$\vec{H} = \hat{\varphi} \begin{cases} -\frac{NI}{2\pi r_T} & r_T, z \in \text{τοποθεσίας } (0 < z < h, l_1 < r_T < l_2) \\ 0 & r_T, z \notin \text{ >> } \end{cases}$$

Παράδειγμα: Έστω διάταξη στην περιοχή $a < r_T < b$, $0 < \varphi < \pi/2$ για υάθε z .

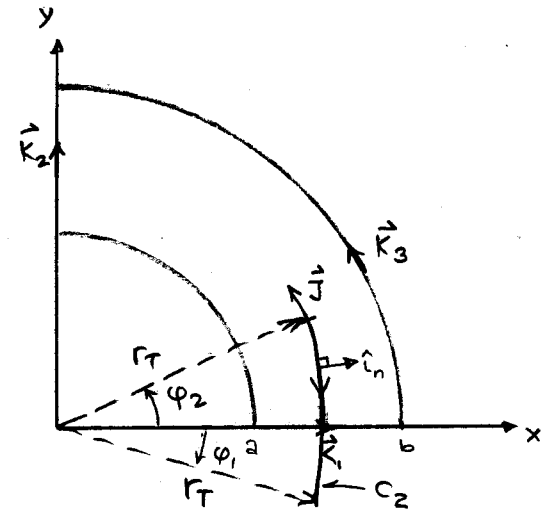
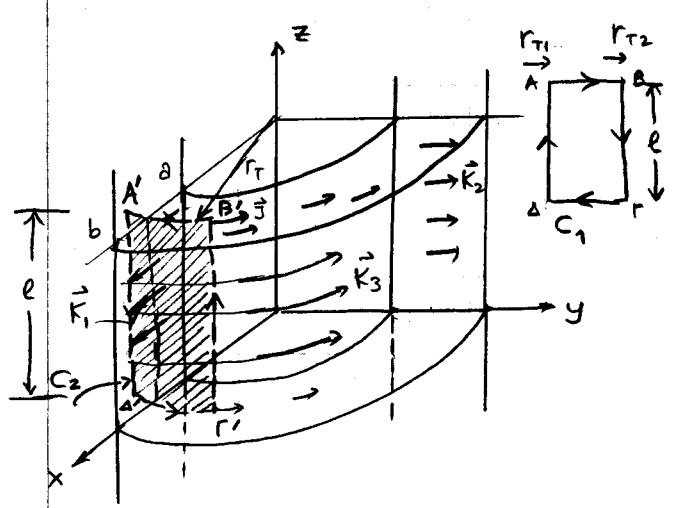
Μέσα στην περιοχή αυτή υπάρχει χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \hat{\varphi} J(r_T)$.

Επίσης από τα 4 πλευρικά όρια είναι δυνατόν να υπάρχουν επιφανειακές

πυκνότητες ρεύματος στα 3: $\vec{K}_1 = \hat{i}_x K_1(x)$ ($\varphi=0$), $\vec{K}_2 = \hat{i}_y K_2(y)$ ($\varphi=\pi/2$)

$\vec{K}_3 = \hat{i}_\varphi K_3(\varphi)$ ($r_T=b$). Είναι γνωστό μόνο ότι $K_1(x) = K_0 \ln(x/a)$. Σε όλο

το χώρο $\mu = \mu_0$. Να βρεθεί παντού η ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{H} .



Η διάταξη εκτείνεται από το $-\infty$ ως το $+\infty$ και επομένως το πεδίο είναι ανεξάρτητο του z , άρα $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Όμως $J_z, K_z, I_z = 0$ και επομένως $\frac{\partial}{\partial s} = 0, J_s = 0 \Rightarrow H_{\perp s} = 0$, άρα $H_\varphi = H_{r_T} = 0$ και $H_z \neq 0$. Άρα το πεδίο είναι της μορφής $\vec{H} = \hat{i}_z H_z(r_T, \varphi)$. Για να βρούμε το πεδίο πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλους βρόχους ώστε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία ότι μόνο η $K_1(x)$ κατανομή είναι γνωστή.

Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere στο βρόχο C_1 που βρίσκεται στο εξωτερικό της διάταξης τότε:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \oint_C H(r_T, \varphi) \hat{i}_z \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{AB} H(r_T, \varphi = \frac{\pi}{2}) \hat{i}_z \cdot \hat{i}_{r_T} dr_T + \int_{BF} H(r_T, \varphi) \hat{i}_z \cdot (-\hat{i}_z) dz + \int_{FA} H(r_T, \varphi) \hat{i}_z \cdot \hat{i}_{r_T} dr_T + \int_{DA} H(r_T, \varphi) \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z dz = 0 \Rightarrow -H(r_T, \varphi) l + H(r_T, \varphi) l = 0 \Rightarrow$$

$$H(r_{T1}, \varphi) = H(r_{T2}, \varphi) \Rightarrow H(r_T, \varphi) = c \quad b < r_T < \infty.$$

Όμως ο βρόχος μπορεί να δώσει τα ίδια αποτελέσματα $\forall \varphi$. Εφόσον

$$\text{το πεδίο στο } \infty \text{ μηδενίζεται } \lim_{r_T \rightarrow \infty} H(r_T, \varphi) = 0 \Rightarrow c = 0 \rightarrow H(r_T, \varphi) = 0$$

όταν $b < r_T < \infty$. Δηλαδή στο εξωτερικό της διάταξης το πεδίο είναι μη-

δενικό. Φυσικό το ίδιο συμβαίνει και για $0 < r_T < a$, καθώς και για

$a < r_T < b$ αλλά με $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi$. Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο

στο εσωτερικό της διάταξης δηλαδή για $a < r_T < b$ και $0 < \varphi < \pi/2$.

Αν διαλέξουμε τον βρόχο C_2 όπως φαίνεται στο σχήμα τότε εφαρμόζοντας

τον νόμο του Ampere έχουμε:

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα τον όρο $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$:

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{B'}^{A'} H(r_T, \varphi_1) \hat{i}_z \cdot (\hat{i}_\varphi) r_T d\varphi + \int_{A'}^{A'} H(r_T, \varphi_1) \hat{i}_z \cdot (-\hat{i}_z) dz + \\ &\int_{A'}^{A'} H(r_T, \varphi_1) \hat{i}_z \cdot \hat{i}_\varphi r_T d\varphi + \int_{B'}^{B'} H(r_T, \varphi_2) \hat{i}_z \cdot \hat{i}_z dz = \end{aligned}$$

$$= H(r_T, \varphi_2) \ell \quad \text{δίδει } H(r_T, \varphi_1) = 0 \quad (\varphi_1 < 0) \text{ και άρα αντικαθιστά}$$

σε ημεία εξωτερικά της διάταξης.

$$\text{Το ρεύμα } I = \int \vec{K}_1 \cdot \underline{L}_\perp \ell \, d\ell = \int_0^\ell K_0 \ln\left(\frac{x}{a}\right) \hat{i}_x \cdot \hat{i}_x \, dz = \ell K_0 \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

όπου $x = r_T$. Επομένως $I = \ell K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right)$ και

$$\ell H(r_T, \varphi) = \ell K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \Rightarrow$$

$$H(r_T, \varphi) = K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \quad a < r_T < b, \quad 0 < \varphi < \pi/2.$$

Συνοψίζοντας,

$$\vec{H} = \begin{cases} \hat{i}_z K_0 \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) & a < r_T < b \\ & 0 < \varphi < \pi/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τώρα που το μαγνητικό πεδίο έχει βρεθεί μπορούμε εύκολα να βρούμε τις άγνωστες κατανομές ρευμάτων.

οριακή συνθήκη $\varphi = \pi/2$; $a < r_T < b$: $\hat{n} = -\hat{x}$

$$\hat{n} \times [H(r_T, \varphi = \pi/2^+) - H(r_T, \varphi = \pi/2^-)] \hat{z} = \vec{K}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{K}_2 = -\hat{x} \times \hat{z} [0 - K_0 \ln(\frac{r_T}{a})] = -\hat{y} K_0 \ln(\frac{r_T}{a}) = -\hat{y} K_0 \ln(\frac{y}{a})$$

οριακή συνθήκη $r_T = b$ $0 < \varphi < \pi/2$: $\hat{n} = \hat{r}_T$

$$\hat{n} \times [H(r_T = b^+, \varphi) - H(r_T = b^-, \varphi)] \hat{z} = \vec{K}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{K}_3 = \hat{r}_T \times \hat{z} [0 - K_0 \ln(\frac{b}{a})] = -\hat{\varphi} (-K_0 \ln(\frac{b}{a})) = \hat{\varphi} K_0 \ln(\frac{b}{a})$$

Τέλος η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} μπορεί να βρεθεί από την εξί-

σωση του Ampere:
$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} = \left[\frac{1}{r_T} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right] \hat{r}_T + \left[\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r_T} \right] \hat{\varphi} + \left[\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_\varphi) - \frac{1}{r_T} \frac{\partial H_{r_T}}{\partial \varphi} \right] \hat{z}$$

Ομω,
$$\vec{H} = H_z \hat{z} = H_z(r_T, \varphi) \hat{z} = K_0 \ln(\frac{r_T}{a}) \hat{z} \quad \{a < r_T < b, 0 < \varphi < \pi/2\}$$

Οπότε
$$\vec{J} = \hat{\varphi} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial r_T} \right) = \hat{\varphi} (-1) K_0 \frac{1}{(r_T/a)} \frac{1}{a} = -K_0 \frac{1}{r_T} \hat{\varphi}$$

όταν $a < r_T < b$ και $0 < \varphi < \pi/2$.