25/03/2018

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ:

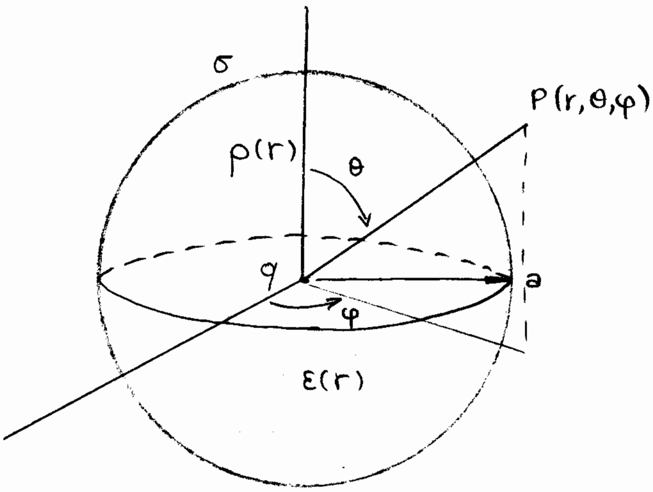
Οι εξισώσεις του Maxwell για τα ηλεκτροστατικά πεδία (χρονοσταθερά) είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \quad ή \quad \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l}=0 \qquad \vec{D}=\epsilon\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \quad ή \quad \oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_V \rho\, dV$$

Οι σημειακές εξισώσεις εφαρμόζονται μαζί με τις οριακές συνθήκες για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι και αυτές γενικές και δεν χρειάζονται οριακές συνθήκες. Παρόλα αυτά η χρήση τους γιά τον άμεσο υπολογισμό των πεδίων είναι εφικτή σε ορισμένες κατάλληλα συμμετρικές γεωμετρίες. Θα εξετάσουμε μερικές από τις συμμετρικές αυτές γεωμετρίες.

Πεδίο λόγω σφαιρικών συμμετρικών φορτίου:



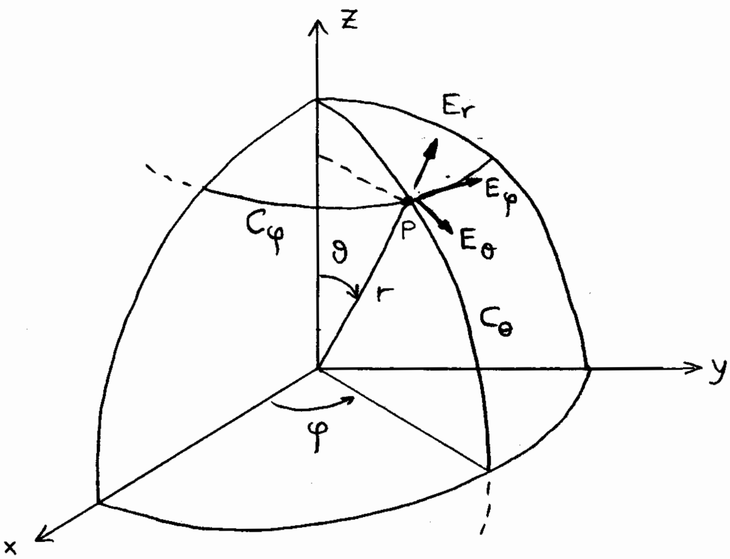
Έστω σημειακό φορτίο q στην αρχή των αξόνων ($r=0$). Επιφανειακό φορτίο ομοιόμορφης πυκνότητας σ πάνω σε σφαίρα ακτίνας a και χωρικό φορτίο με σφαιρικά συμμετρική χωρική πυκνότητα $\rho(r)$ $(0<r<a)$. Επίσης ο χώρος έχει επιτρεπτότητα $\epsilon=\epsilon(r)$.

Ζητείται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ παντού στο χώρο.

A. Λύση με χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων του Maxwell:

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας όλων των πηγών το επαγόμενο πεδίο θα είναι της μορφής $\vec{E}=\vec{E}(r)$ και επιπλέον το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Δηλαδή $\vec{E}=E(r)\,\hat{i}_r$.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ως εξής:



Εάν εφαρμόσουμε το αστρόβιλο του ηλεκτροστατικού πεδίου $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ στις κλειστές καμπύλες C_φ, C_θ έχουμε:

$$\oint_{C_\varphi} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{C_\varphi} E_\varphi(r)\,\hat{i}_\varphi \cdot \hat{i}_\varphi \underbrace{d\vec{l}}_{r\sin\theta d\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad E_\varphi(r)\, r\sin\theta\, 2\pi = 0 \Rightarrow$$

$$E_\varphi = 0$$

Παρόμοια $\displaystyle\oint_{C_\theta} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{\theta=0}^{2\pi} E_\theta(r)(\hat{i}_\theta\cdot\hat{i}_\theta)\underbrace{r\,d\theta}_{dl} = 0 \Rightarrow E_\theta\, r\pi 2 = 0 \Rightarrow E_\theta = 0$

Άρα η μόνη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι η $E_r(r)$. Για την εύρεση της E_r θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = Q(r)$$

Αν $0<r<a \sim \quad Q(r) = q + \int \rho\, dV = q + \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr'$

$\quad a<r<\infty \to \quad Q(r) = q + \int_0^a 4\pi\rho\, r'^2 dr' + 4\pi a^2\sigma$

Επιπλέον $\displaystyle\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_\varphi\int_\theta \epsilon(r)\, E_r(r)\, \hat{i}_r\cdot\hat{i}_r\, r\sin\theta d\varphi\, r d\theta \Rightarrow$

$$\epsilon(r) E_r(r)\, r^2 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 \epsilon(r) E_r(r)$$

Επομένως $\displaystyle E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon(r)\, r^2}$ με $Q(r)$ όπως ορίσθηκε παραπάνω.

<u>Ειδικές περιπτώσεις:</u>

(1) Μόνο σημειακό φορτίο q και $\epsilon(r) = \epsilon_0 \sim$

$$\vec{E} = E_r(r)\,\hat{i}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{i}_r$$

(2) Μόνο επιφανειακή κατανομή ηλεκτρικού φορτίου και $\epsilon(r) = \epsilon_0$.

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & 0<r<a \\ \hat{i}_r \dfrac{\sigma 4\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \hat{i}_r \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο μέσα στη σφαίρα είναι μηδενικό.

Οριακή συνθήκη $r=a$: $\hat{i}_n \cdot \left(\vec{D}(r=a+) - \vec{D}(r=a-)\right) =$

$$\hat{i}_r \cdot \left(\frac{Q(r=a+)}{4\pi a^2}\hat{i}_r - \frac{Q(r=a-)}{4\pi a^2}\hat{i}_r \right) = \frac{Q(r=a+) - Q(r=a-)}{4\pi a^2} = \frac{4\pi\sigma a^2}{4\pi a^2} = \sigma$$

(3) Μόνο χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho = \rho_0$ και $\epsilon(r) = \epsilon_0$

$$\vec{E} = \hat{i}_r E_r(r) = \hat{i}_r \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} & 0<r<a \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} & a<r<\infty \end{cases}$$

B. <u>Λύση με χρήση των διαφορικών (σημειακών) εξισώσεων Maxwell:</u>

Οι εξισώσεις σε σημειακή μορφή είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

Θα χρειασθούν και οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $r=a$.

$$(\hat{i}_n = \hat{i}_r) \times [\vec{E}(r=a+) - \vec{E}(r=a-)] = 0$$

$$(\hat{i}_n = \hat{i}_r) \cdot [\vec{D}(r=a+) - \vec{D}(r=a-)] = \sigma$$

Και πάλι λόγω της συμμετρίας των πηγών $\vec{E} = \vec{E}(r)$. Τώρα θα πρέπει και πάλι να αποδείξουμε ότι οι φ, θ συνιστώσες του πεδίου είναι μηδενικές.

Από την $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ έχουμε:

$$r: \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi} = 0$$

$$\theta: \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} = 0$$

$$\varphi: \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} = 0$$

Όμως $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0 \rightarrow$

$$r: \quad \frac{1}{r\sin\theta}\cos\theta\, E_\varphi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\cot\theta\, E_\varphi(r) = 0$$

$$\theta: \quad -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rE_\varphi(r)\right) = 0$$

$$\varphi: \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rE_\theta(r)\right) = 0$$

Επιπλέον $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho(r) \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, D_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi} = \rho(r)$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{\cot\theta}{r} D_\theta = \rho(r)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε σημείο (r,θ,φ). Έστω δύο σημεία (r, θ_1, φ) και (r, θ_2, φ) με $\theta_1 \neq \theta_2$.

Αφαιρώντας κατά μέλη την r-εξίσωση έχουμε:

$$\frac{1}{r}(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)\, E_\varphi(r) = 0 \Rightarrow E_\varphi(r) = 0$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση του Gauss έχουμε

$$\frac{1}{r}(\cot\theta_1 - \cot\theta_2)\, D_\theta = 0 \Rightarrow D_\theta(r) = 0 \Rightarrow E_\theta(r) = 0$$

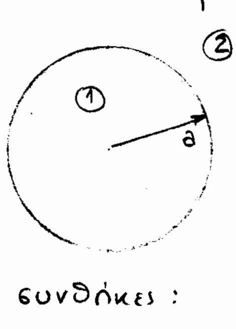
Επομένως το πεδίο έχει μόνο r συνιστώσα. Δηλαδή $\vec{E}(r) = \hat{i}_r E(r)$.

Από τον νόμο του Gauss έχουμε:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 D_r)}{dr} = \rho(r) \Rightarrow \frac{d(r^2 D_r)}{dr^2} = r^2\rho(r) \Rightarrow$$

$$(r^2 D_r(r)) = \int_0^r r'^2 \rho(r')\,dr' + c \Rightarrow D_r(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\rho(r')\,dr' + \frac{c}{r^2}$$

Όταν $a < r < \infty \rightarrow \rho(r) = 0 \Rightarrow D_r^{(2)} = \frac{c_2}{r^2}$



Όταν $0 < r < a \rightsquigarrow$

$$D_r^{(1)} = \frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2\rho(r')\,dr' + \frac{c_1}{r^2}$$

οριακές συνθήκες: $r \to 0 \rightsquigarrow D_r^{(1)} \to \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow c_1 = q/4\pi$

$$\hat{i}_r \cdot \left(\vec{D}(r=a+) - \vec{D}(r=a-)\right) = \sigma \Rightarrow$$

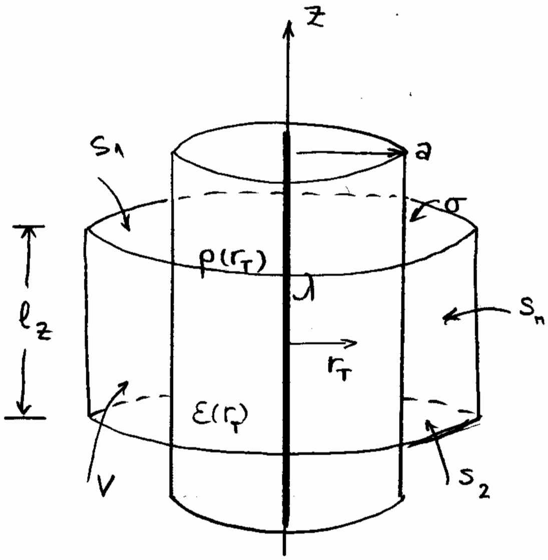
$$\frac{c_2}{a^2} - \frac{1}{a^2}\int_0^a r'^2\rho(r')\,dr' - \frac{c_1}{a^2} = \sigma \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{q}{4\pi} + \sigma a^2 + \int_0^a r'^2\rho(r')\,dr'$$

Επομένως όπως και με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\vec{D} = \hat{i}_r D(r) = \begin{cases} \dfrac{q + 4\pi a^2 + 4\pi \int_0^a \rho(r') r'^2 dr'}{4\pi r^2} & a < r < \infty \\ \dfrac{q + 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'}{4\pi r^2} & 0 < r < a \end{cases} = \hat{i}_r \epsilon_0 E(r)$$

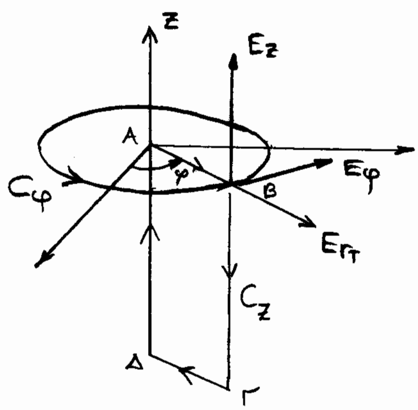
Πεδίο Λόγω Κυλινδρικών Συμμετριών Φορτίου:



Έστω γραμμικό φορτίο σταθερής γραμμικής πυκνότητας λ, επιφανειακό φορτίο πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ με σταθερή πυκνότητα σ, και χωρικό φορτίο με κυλινδρικά συμμετρική πυκνότητα $\rho(r_T)$ $(0 < r_T < a)$. Το υλικό έχει επιτρεπτότητα $\epsilon(r_T)$. Ζητείται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο.

A. Λύση με χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων του Maxwell:

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του ηλεκτρικό πεδίο εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα r_T. Δηλαδή $\vec{E} = \vec{E}(r_T)$. Επίσης μπορούμε να δείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα. Δηλαδή $\vec{E} = E(r_T)\,\hat{i}_{r_T}$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με εφαρμογή του νόμου του Faraday. Επιλέγοντας την καμπύλη



C_φ έχουμε: $\oint_{C_\varphi} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow$

$$\oint \vec{E}\cdot(r_T d\varphi)\hat{i}_\varphi = 0 \rightarrow 2\pi r_T E_\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\rightarrow E_\varphi = 0.$$

Για την z-συνιστώσα διαλέγουμε τον ορθογώνιο βρόχο ΑΒΓΔ: $\oint_{C_z} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow$

$A\Delta = B\Gamma = \ell$

$$\int_0^{r_T} E_{rT}(r_T)\,dr_T + \int_B^{\Gamma} E_z(r_T)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\,dz + \int_{r_T}^{0} E_{rT}(r_T)\,dr_T + \int_\Delta^{A} E_z(0)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$-E_z(r_T)\,\ell + E_z(0)\,\ell = 0 \Rightarrow \quad E_z(r_T) = E_z(0) = A = \text{σταθερά}.$$

Όμως $E_z(r_T\to\infty) \to 0 \Rightarrow A = 0$. Επομένως $E_z = 0$. Τελικώς λοιπόν μόνο η E_{rT} συνιστώσα του πεδίου είναι μή μηδενική.

Η $E_{rT}(r_T)$ μπορεί να υπολογισθεί εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss.

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$ όπου S: κυλινδρική επιφάνεια με άξονα τον z και ακτίνα r_T, και μήκος ℓ_z. Το φορτίο Q βρίσκεται μέσα στόν όγκο V η στήν επιφάνεια της S:

$$Q = \begin{cases} \lambda \ell_z + \iiint \rho(r_T')\, r_T' d\varphi\, dr_T' dz = \lambda \ell_z + 2\pi \ell_z \int_0^{r_T} \rho(r_T') r_T' dr_T' & 0 < r_T < a \\ \lambda \ell_z + 2\pi \ell_z \int_0^{a} \rho(r_T') r_T' dr_T + 2\pi a \ell_z \sigma & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Ο όρος $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{S_T} \vec{D}\cdot d\vec{S} =$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \epsilon(r_T)\, \cancel{E_{rT}(r_T)\,\hat{i}_{rT}\cdot\hat{i}_z}^{\,0}\; r_T dr_T d\varphi \;+$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \epsilon(r_T)\, \cancel{E_{rT}(r_T)\,\hat{i}_{rT}\cdot(-\hat{i}_z)}^{\,0}\; r_T dr_T d\varphi \;+$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell_z} \epsilon(r_T)\, E_{rT}(r_T)(\hat{i}_{rT}\cdot\hat{i}_{rT})\; r_T d\varphi\, dz = 2\pi r_T \ell_z E_{rT}(r_T)\epsilon(r_T)$$

Επομένως $\quad 2\pi r_T \ell_z E_{rT}(r_T)\epsilon(r_T) = Q \Rightarrow$

$$\vec{E}(r_T) = \hat{i}_{rT} \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\epsilon(r_T) r_T}\left[\lambda + 2\pi \int_0^{r_T} \rho(r_T') r_T' dr_T'\right] & 0 < r_T < a \\ \dfrac{1}{2\pi\epsilon(r_T) r_T}\left[\lambda + 2\pi a \sigma + 2\pi\int_0^{a} \rho(r_T') r_T' dr_T'\right] & a < r_T < \infty \end{cases}$$

Ειδικές Περιπτώσεις:

(1) Αν εφαρμόσουμε την συνοριακή συνθήκη: $\hat{\imath}_n \cdot (\vec{D}(r_T=a+) - \vec{D}(r_T=a-)) =$

$$= \hat{\imath}_{r_T} \cdot \hat{\imath}_{r_T} \left[\frac{1}{2\pi a} \left\{ \left(\lambda + 2\pi a\sigma + 2\pi \int_0^a \rho(r_T') r_T' dr_T \right) - \left(\lambda + 2\pi \int_0^a \rho(r_T') r_T' dr_T' \right) \right\} \right] = \sigma$$

όπως αναμένεται.

(2) Οταν $r_T \to 0 \leadsto D \to \infty$

Λύση με χρήση των διαφορικών (σημειακών) εξισώσεων Maxwell:

Θα στηριχθούμε και πάλι στις εξισώσεις του ηλεκτροστατικού πεδίου:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \hat{\imath}_n \times (\vec{E}(r_T=a+) - \vec{E}(r_T=a^-)) = 0$$

και

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \qquad \hat{\imath}_n \cdot (\vec{D}(r_T=a^+) - \vec{D}(r_T=a^-)) = \sigma$$

όπου $\hat{\imath}_n = \hat{\imath}_{r_T}$. Επίσης λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας $\vec{E} = \vec{E}(r_T)$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_T}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{αφού } E_\varphi(r_T) \text{ και } E_z(r_T).$$

$$\frac{\partial E_{r_T}}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r_T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial r_T} = 0$$

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial (r_T E_\varphi)}{\partial r_T} - \frac{1}{r_T}\frac{\partial E_{r_T}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d(r_T E_\varphi)}{dr_T} = 0$$

Από την $\frac{dE_z}{dr_T} = 0 \Rightarrow E_z(r_T) = \begin{cases} c_1 & 0 < r_T < a \\ c_2 & a < r_T < \infty \end{cases}$

Όμως $E_z(r_T \to \infty) \to 0 \Rightarrow c_2 = 0$. Επίσης $\hat{\imath}_{r_T} \times \left(\left(E_{r_T}\hat{\imath}_{r_T} + E_\varphi \hat{\imath}_\varphi + E_z \hat{\imath}_z\right)_{a-}^{a+} \right) = 0$

$$\Rightarrow [E_\varphi(a+) - E_\varphi(a-)]\hat{\imath}_z + [E_z(a+) - E_z(a-)](-\hat{\imath}_\varphi) = 0$$

Οπότε $c_1 = c_2 = 0 \leadsto E_z = 0$.

Όμοια από την $\frac{d(r_T E_\varphi)}{dr_T} = 0 \Rightarrow E_\varphi = \begin{cases} d_1/r_T & 0 < r_T < a \\ d_2/r_T & a < r_T < \infty \end{cases}$

Από την οριακή συνθήκη έχουμε $\frac{d_2}{a} - \frac{d_1}{a} = 0 \Rightarrow d_1 = d_2$.

Όταν $r_T \to 0 \leadsto \oint_{C_\varphi} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow 2\pi r_T E_\varphi(r_T) = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{r_T \to 0} \left(r_T E_\varphi(r_T)\right) = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 = 0 \leadsto E_\varphi = 0.$$

Άρα το πεδίο έχει μόνο ακτινική συνιστώσα.

Από τον νόμο του Gauss έχουμε :

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}(r_T D_{r_T}) + \cancel{\frac{1}{r_T}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}}^{0} + \cancel{\frac{\partial D_z}{\partial z}}^{0} = \rho \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r_T}\frac{d}{dr_T}(r_T D_{r_T}) = \rho(r_T) \Rightarrow r_T D_{r_T}(r_T) = \int \rho(r_T')r_T' dr_T' + c$$

$$\Rightarrow D_{r_T}(r_T) = \frac{c}{r_T} + \frac{1}{r_T}\int r_T' \rho(r_T') dr_T'$$

Όταν $a < r_T < \infty \sim \rho(r_T) = 0 \sim D_{r_{T_2}} = \frac{c_2}{r_T}$

Όταν $0 < r_T < a \sim D_{r_{T1}} = \frac{c_1}{r_T} + \frac{1}{r_T}\int_0^{r_T} r_T' \rho(r_T') dr_T'$

Οριακή συνθήκη $r_T \to 0 \sim D_{r_{T1}} 2\pi r_T \ell_z = \lambda \ell_z \Rightarrow D_{r_{T_1}} \to \frac{\lambda}{2\pi r_T}$

οπότε $\frac{c_1}{r_T} + \underbrace{\lim_{r_T\to 0}\frac{1}{r_T}\int_0^{r_T} r_T' \rho(r_T') dr_T'}_{0} \longrightarrow \frac{\lambda}{2\pi r_T} \Rightarrow c_1 = \lambda/2\pi$

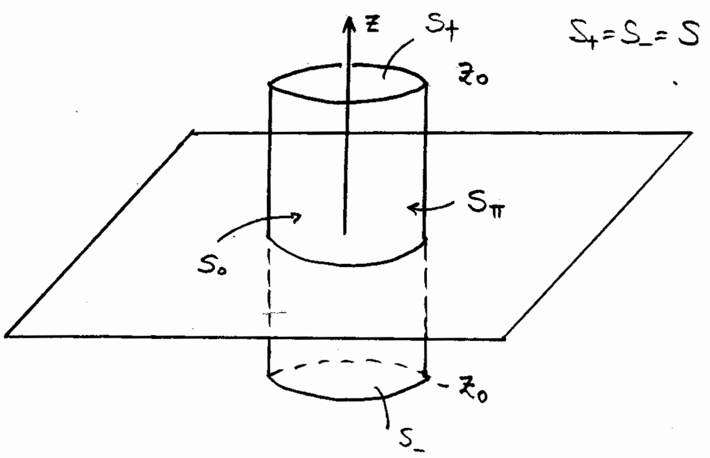
Επίσης $\hat{\imath}_{r_T}\cdot[\vec{D}(r_T = a+) - \vec{D}(r_T = a-)] = \sigma \Rightarrow$

$$\frac{c_2}{a} - \left(\frac{c_1}{a} + \frac{1}{a}\int_0^a r_T' \rho(r_T') dr_T'\right) = \sigma \Rightarrow$$

$$c_2 = \sigma a + c_1 + \int_0^a r_T' \rho(r_T') dr_T' = \frac{\lambda}{2\pi} + \sigma a + \int_0^a r_T' \rho(r_T') dr_T'$$

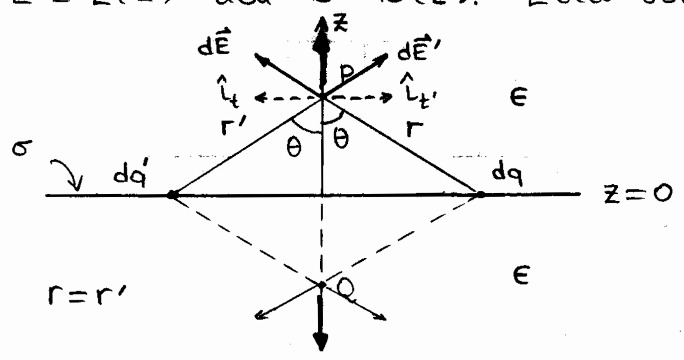
Οι άνω τιμές των c_1, c_2 δίδουν ταυτόσημες εκφράσεις με εκείνες που υπολογίσθηκαν με τις ολοκληρωτικές σχέσεις.

Απέραντες επίπεδες κατανομές φορτίων:



Έστω φορτισμένο απέραντο επίπεδο $z=0$ με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ (σταθερής). Λόγω της συμμετρίας στο επίπεδο xy τα πεδιακά μεγέθη θα είναι μόνο συναρτήσεις του z. Δηλαδή

$\vec{E} = \vec{E}(z)$ και $\vec{D} = \vec{D}(z)$. Έστω δύο τυχαία σημεία P, Q πάνω στον άξονα των z ο οποίος μπορεί αυθαίρετα να επιλεγεί. Έστω $d\vec{E}$ και $d\vec{E}'$ η συνεισφορά δύο συμμετρικών φορτίων $dq = \sigma dS$ και $dq' = \sigma dS$ στο σημείο P.



Λόγω επαλληλίας το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο P μπορεί να βρεθεί από επαλληλία απείρων φορτίων dq και dq'.

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\hat{r} = \frac{dq}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}(\cos\theta\,\hat{i}_z + \sin\theta\,\hat{i}_t)$$

$$d\vec{E}' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r'^2}\hat{r}' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}(\cos\theta\,\hat{i}_z - \sin\theta\,\hat{i}_t) \qquad (\hat{i}_{t'} = -\hat{i}_t)$$

Επομένως,

$$d\vec{E} + d\vec{E}' = \left(\frac{dq}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\,2\cos\theta\right)\hat{i}_z = dE\,\hat{i}_z = dE(z)\,\hat{i}_z.$$

Επομένως και το ολικό πεδίο λόγω επαλληλίας συμμετρικών φορτίων dq και dq' θα έχει μόνο z-συνιστώσα. Άρα

$$\vec{E} = E(z)\,\hat{i}_z \quad \text{και} \quad \vec{D} = D(z)\,\hat{i}_z \quad \text{και} \quad \begin{aligned}\vec{D}(-z) &= -D(z)\,\hat{i}_z\\ \vec{E}(-z) &= -E(z)\,\hat{i}_z\end{aligned}$$

Το πεδίο μπορεί να υπολογισθεί με εφαρμογή του νόμου του Gauss:

Έστω κύλινδρος ύψους $2z_0$ και διατομής S όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss έχουμε:

$$\oint_{S_0} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \int_{S_+} \vec{D}\cdot\hat{i}_z\, dS + \int_{S_-} \vec{D}\cdot(-\hat{i}_z)\, dS + \int_{S_\pi} \vec{D}\cdot\hat{i}_{r_T}\, dS = Q$$

όπου $\vec{D} = D(z)\,\hat{i}_z$. Άρα

$$\int_{S_+} D(z)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, dS + \int_{S_-} D(z)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\, dS + \int_{S_\pi} \underbrace{\cancel{D(z)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_{r_T}}}_{0}\, dS = Q \Rightarrow$$

$$D(z_0)\, S - D(-z_0)\, S = \sigma S \Rightarrow 2D(z_0) = \sigma$$

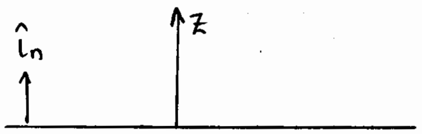
$$\vec{D} = D(z)\,\hat{i}_z = \frac{\sigma}{2}\,\hat{i}_z \quad (z>0) \quad \text{και} \quad -\frac{\sigma}{2}\,\hat{i}_z \quad (z<0)$$

Επομένως

$$\vec{D} = \hat{i}_z\, \mathrm{sgn}(z)\, \frac{\sigma}{2} \qquad \text{όπου} \quad \mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} +1 & z>0 \\ -1 & z<0 \end{cases}$$

Επιπλέον $\vec{E} = E(z)\,\hat{i}_z = \hat{i}_z\, \mathrm{sgn}(z)\, \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$

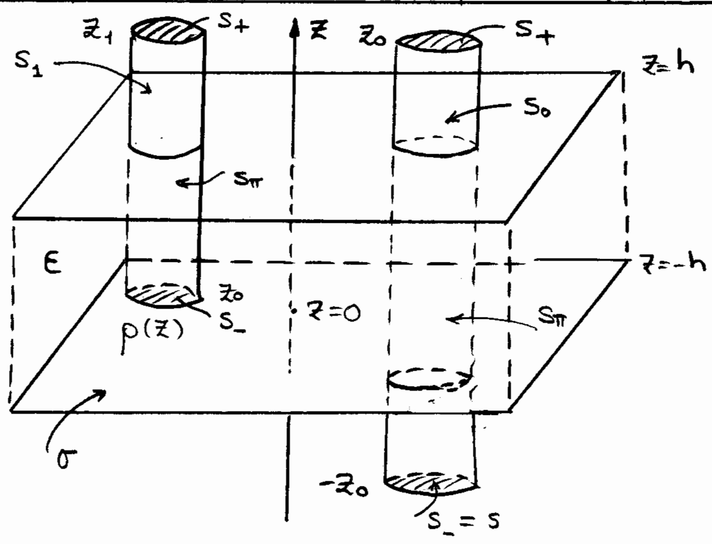
Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω λύση ικανοποιεί και την συνοριακή συνθήκη πάνω στο φορτισμένο επίπεδο:



$$\hat{i}_n \cdot \left(\vec{D}(z=0+) - \vec{D}(z=0-)\right) = \sigma \Rightarrow$$

$$\hat{i}_z \cdot \left(\hat{i}_z \frac{\sigma}{2} - \left(-\hat{i}_z \frac{\sigma}{2}\right)\right) = \sigma \quad \text{όπως αναμενόταν.}$$

Ηλεκτροστατικό Πεδίο απεράντων φορτισμένων επιπέδων πλακών:



Έστω επιφανειακό φορτίο σταθερής πυκνότητας σ πάνω στο επίπεδο $z=-h$ και χωρική κατανομή φορτίου $\rho(z)$ μεταξύ $-h<z<h$. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Α. Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή:

Λόγω της συμμετρίας ως προς x,y το πεδίο θα είναι μόνο συνάρτηση του z. Δηλαδή $\vec{E}=\vec{E}(z)$ και $\vec{D}=\vec{D}(z)$. Επίσης όπως και προηγουμένως μπορούμε πάλι να δείξουμε ότι το πεδίο έχει μόνο z-συνιστώσα. Δηλαδή

$$\vec{E} = E(z)\,\hat{i}_z \quad \text{και} \quad \vec{D} = D(z)\,\hat{i}_z$$

Το πεδίο μπορεί και πάλι να βρεθεί με εφαρμογή του νόμου του Gauss:
Έστω κύλινδρος ύψους $2z_0$ με $z_0>h$ μεταξύ $-z_0$ και z_0. Ας εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss στην επιφάνεια S_0 (ολική) του κυλίνδρου:

$$\oint_{S_0} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \;\Rightarrow\; \int_{S_+} D(z_0)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\,dS + \int_{S_-} D(-z_0)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\,dS +$$

$$\int_{S_\pi} D(z)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_{r_T}\,dS = \iint_{-h}^{h}\rho(z')\,dz'\,dS + \int_{S_+=S_-}\sigma\,dS \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; D(z_0)\,S - D(-z_0)\,S = \sigma S + S\int_{-h}^{h}\rho(z')\,dz' \;\Rightarrow$$

$$2D(z_0)\,S = \sigma S + S\int_{-h}^{h}\rho(z')\,dz' \;\Rightarrow$$

$$\vec{D} = D(z)\,\hat{i}_z = \hat{i}_z\,\mathrm{sgn}(z)\,\frac{1}{2}\left[\sigma + \int_{-h}^{h}\rho(z')\,dz'\right] \qquad |z|>h$$

Για την περιοχή $-h<z<h$ εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για τον κύλινδρο με ύψος μεταξύ $z_0<z<z_1$ $\quad (z_1>h,\ -h<z<h)$.

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \int_{S_+} D(z_1)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_z\, dS + \int_{S_-} D(z_0)\,\hat{i}_z\cdot(-\hat{i}_z)\, dS + \int_{S_\pi} D(z)\,\hat{i}_z\cdot\hat{i}_{r_T}\, dS =$$

$$= \int\int_{z_0}^{+h} \rho(z')\,dz'\,dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad D(z_1)\,\cancel{S} - D(z_0)\,\cancel{S} = \cancel{S}\int_{z_0}^{h} \rho(z')\,dz' \Rightarrow$$

$$D(z_0) = D(z_1) - \int_{z_0}^{h} \rho(z')\,dz' = \frac{1}{2}\left[\sigma + \int_{-h}^{h}\rho(z')\,dz'\right] - \int_{z_0}^{h}\rho(z')\,dz'$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sigma + \int_{-h}^{z_0}\rho(z')\,dz' - \int_{z_0}^{h}\rho(z')\,dz'\right] \qquad |z_0| < h$$

Το ηλεκτρικό πεδίο για $|z| > h$ παραμένει σταθερό. Αντιθέτως για $|z| < h$ εξαρτάται από το z.

B. <u>Λύση με χρήση των εξισώσεων του Maxwell σε σημειακή μορφή:</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$, και τις οριακές συνθήκες:

$$\hat{i}_n \times \left(\vec{E}(z+) - \vec{E}(z-)\right)\Big|_{z=\pm h} = 0 \Rightarrow \left\{E_x(z+) = E_x(z-)\right\}_{z=\pm h} \quad \text{και}$$

$$\left\{E_y(z+) = E_y(z-)\right\}_{z=\pm h}$$

και

$$\hat{i}_n\cdot\left(\vec{D}(z=h^+) - \vec{D}(z=h^-)\right) = 0, \quad \hat{i}_n\cdot\left(\vec{D}(z=-h^+) - \vec{D}(z=-h^-)\right) = \sigma$$

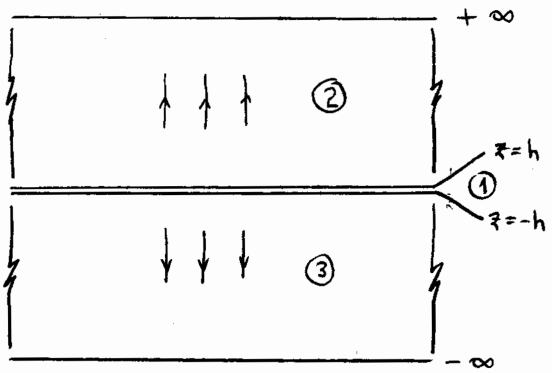
Εφόσον το πεδίο εξαρτάται μόνο από την z συντεταγμένη έχουμε:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow E_y(z) = c$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \rightsquigarrow E_x(z) = d$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{ικανοποιείται αυτομάτως}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(z) \Rightarrow \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(z)$$



Άρα ανά περιοχή ①, ②, ③ έχουμε

$z>h \quad E_x = d_2 \,,\; E_y = c_2$

$-h<z<h \quad E_x = d_1 \,,\; E_y = c_1$

$z<-h \quad E_x = d_3 \,,\; E_y = c_3$

Όμως

$$\left.\begin{aligned} E_x(h+) &= E_x(h-) \Rightarrow d_2 = d_1 \\ E_y(h+) &= E_y(h-) \Rightarrow c_2 = c_1 \\ E_x(-h+) &= E_x(-h-) \Rightarrow d_1 = d_3 \\ E_y(-h+) &= E_y(-h-) \Rightarrow c_1 = c_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = c_2 = c_3 \text{ και} \\ d_1 = d_2 = d_3 \end{array}$$

Αν πάρουμε την οριακή συνθήκη στο $\pm\infty \sim E_x(\infty-) = E_x(\infty+) = 0 \Rightarrow$ $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ και ομοίως $E_y(\infty-) = E_y(\infty+) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Επομένως $E_x = E_y = 0$, δηλαδή το πεδίο έχει μόνο z-συνιστώσα.

$$\frac{dD_z}{dz} = \rho(z) \Rightarrow \quad D_z = a_2 \qquad z>h$$

$$D_z = a_3 \qquad z<-h$$

$$D_z = \int_{-h}^{z} \rho(z')dz' + a_1 \qquad -h<z<h$$

Οριακές συνθήκες: $\hat{i}_z \cdot (D(h+)\hat{i}_z - D(h-)\hat{i}_z) = 0 \Rightarrow$

$$a_2 - \int_{-h}^{h} \rho(z')dz' - a_1 = 0$$

$$\hat{i}_z \cdot (D(-h+)\hat{i}_z - D(-h-)\hat{i}_z) = \sigma \Rightarrow -a_3 + a_1 = \sigma$$

Όμως η μορφή του πεδίου έχει την συμμετρία $D(z\to-\infty) = -D(z\to+\infty)$

$\Rightarrow a_3 = -a_2$. Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma + \int_{-h}^{h} \rho(z')dz'\right] = -a_3$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma - \int_{-h}^{h} \rho(z')dz'\right]$$ τα οποία μας δίδουν την ίδια ακριβώς λύση όπως και προηγουμένως.

Ανακεφαλαίωση Πεδίων σε συμμετρικές διατάξεις:

Διάταξη με σφαιρική συμμετρία: (σφαιρική επιφάνεια Gauss)

$$\vec{D} = D(r)\,\hat{i}_r = \hat{i}_r \frac{1}{4\pi r^2} \int_V dQ'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon(r)} \vec{D}(r) = \hat{i}_r \frac{1}{4\pi\epsilon(r) r^2} \int_V dQ'$$

Διάταξη με κυλινδρική συμμετρία: (κυλινδρική επιφάνεια Gauss μήκους L)

$$\vec{D} = D(r_T)\,\hat{i}_{r_T} = \hat{i}_{r_T} \frac{1}{2\pi r_T L} \int_V dQ'$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon(r_T)} \vec{D}(r_T) = \hat{i}_{r_T} \frac{1}{2\pi\epsilon(r_T) r_T L} \int_V dQ'$$

Διάταξη με καρτεσιανή xy συμμετρία: (κυλινδρική επιφάνεια Gauss)

$$\vec{D}(z) = \hat{i}_z \left[\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\int \rho(z')\,dz'\right] \mathrm{sgn}(z)$$

$$\vec{E}(z) = \hat{i}_z \frac{1}{\epsilon(z)} D(z)$$

Συμπερασματικά αν κάποια διάταξη φορτίων είναι ανεξάρτητη από τις συντεταγμένες x, y, ή z είτε από την γωνία φ (αζιμουθιακή) τότε η αντίστοιχη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι παντού μηδενική. Δηλαδή,

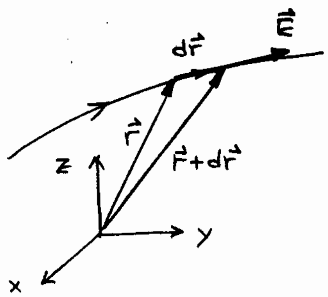
αν $\frac{\partial}{\partial s} = 0$ με $s = \{x, y, z, \phi\}$ $\Longrightarrow$ $E_s = 0$

Αυτό είναι αληθές μόνο στα ηλεκτροστατικά προβλήματα.

Παρόμοιο αποτέλεσμα <u>δεν</u> ισχύει για τις συντεταγμένες r_T, r, θ.

Δυναμικές Γραμμές:

Δυναμικές γραμμές είναι οι νοητές γραμμές που έχουν την ιδιότητα σε κάθε σημείο τους το $\vec{E}$ να είναι εφαπτομενικό προς την γραμμή.



Από τον ορισμό

$$\vec{E} \times d\vec{r} = 0 \Longrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}$$

και στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων ορίζονται από τις εξισώσεις:

Καρτεσιανό:

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)} \qquad d\vec{\ell} = d\vec{r} = dx\hat{i}_x + dy\hat{i}_y + dz\hat{i}_z$$

Κυλινδρικό:

$$\frac{dr_T}{E_T(r_T,\varphi,z)} = \frac{r_T d\varphi}{E_\varphi(r_T,\varphi,z)} = \frac{dz}{E_z(r_T,\varphi,z)} \qquad d\vec{\ell} = d\vec{r} = dr_T\hat{i}_{r_T} + r_T d\phi\hat{i}_\phi + dz\hat{i}_z$$

Σφαιρικό:

$$\frac{dr}{E_r(r,\theta,\varphi)} = \frac{r d\theta}{E_\theta(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi(r,\theta,\varphi)} \qquad d\vec{\ell} = d\vec{r} = dr\hat{i}_r + rd\theta\hat{i}_\theta + r\sin\theta\hat{i}_\phi$$

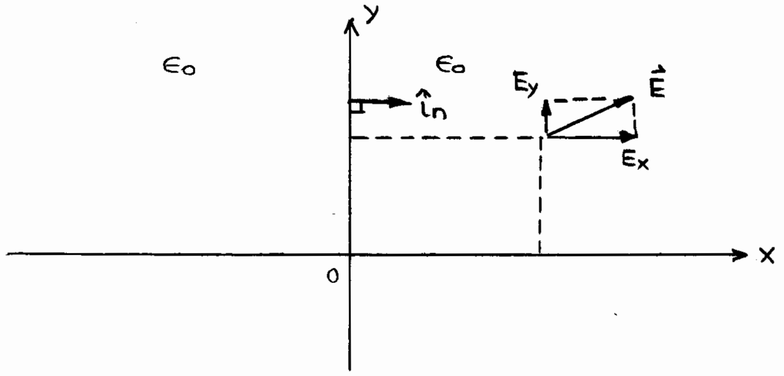
$$\begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i}_{r_T} & \hat{i}_\phi & \hat{i}_z \\ E_{r_T} & E_\phi & E_z \\ dr_T & r_T d\phi & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i}_r & \hat{i}_\theta & \hat{i}_\phi \\ E_r & E_\theta & E_\phi \\ dr & rd\theta & r\sin\theta d\phi \end{vmatrix} = 0$$

Παράδειγμα: Σε χώρο με επιτρεπτότητα ϵ_o υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = [E_o \, sgn(x) \cos(ky) \exp(-k|x|)]\hat{i}_x + [E_o \sin(ky)\exp(-k|x|)]\hat{i}_y + \emptyset \hat{i}_z.$$

(α) Να επιβεβαιωθεί ότι πρόκειται για ηλεκτροστατικό πεδίο, (β) να προσδιορισθούν οι πυκνότητες φορτίου ρ, σ, λ, q που επάγουν αυτό το πεδίο, (γ) να προσδιορισθούν οι δυναμικές γραμμές του $\vec{E}$.

(α)



Πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Maxwell και οι οριακές συνθήκες.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \text{και} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad \text{και} \quad \hat{i}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \;,\; \hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

για όπου υπάρχουν ασυνέχειες.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{i}_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{i}_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{i}_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$E_x = E_o \, sgn(x) \cos(ky) e^{-k|x|}$$

$$E_y = E_o \sin(ky) e^{-k|x|}$$

$$E_z = 0$$

Επομένως, $(\vec{\nabla}\times\vec{E})_x = 0$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_y = 0$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{E})_z = \left[\left(-k \, sgn(x) E_o \sin(ky) e^{-k|x|}\right) - \left(-k \, sgn(x) E_o \sin(ky) e^{-k|x|}\right)\right]$$

$$= 0$$

Άρα $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$. Ασυνέχειες υπάρχουν στο πεδίο λόγω του όρου

$sgn(x) = \begin{cases} +1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$. Επομένως το επίπεδο $x=0$ πρέπει να εξετασθεί ως προς τις οριακές συνθήκες.

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}(x=0+) - \vec{E}(x=0-)) = \hat{i}_x \times [E_y(x=0+) - E_y(x=0-)]\hat{i}_y =$$

$= \hat{i}_z \left[E_o \sin(ky)\, e^{-kx} - E_o \sin(ky)\, e^{kx} \right]_{x \to 0} = 0$ οπότε η

συνθήκη $\hat{i}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ ικανοποιείται.

Άρα το πεδίο πρέπει να είναι ηλεκτροστατικό.

(β) $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_o \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_o \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) =$

$$= \epsilon_o \left[-k\cos(ky) E_o e^{-k|x|} + k \cos ky\, E_o e^{-k|x|} \right] = 0$$

Άρα $\rho(x,y) = 0$ τόσο για $x<0$ όσο και για $x>0$. Ας εξετάσουμε αν υπάρχει φορτίο πάνω στην επιφάνεια ασυνέχειας $x=0$.

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}(x=0+) - \vec{D}(x=0-)) = \sigma \Rightarrow$$

$$\sigma = \hat{i}_x \cdot \left[\epsilon_o (E_x(x=0+)\hat{i}_x + E_y(x=0+)\hat{i}_y) - \epsilon_o (E_x(x=0-)\hat{i}_x + E_y(x=0-)\hat{i}_y) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma = \epsilon_o \left[E_x(x=0+) - E_x(x=0-) \right] = \epsilon_o\, 2 E_o \cos(ky)$$

Γραμμικά και σημειακά φορτία δεν υπάρχουν εφόσον το πεδίο δεν παρουσιάζει άπειρη τιμή πουθενά. Επομένως το πεδίο παράγεται από την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma(y) = 2\epsilon_o E_o \cos(ky)$ πάνω στο επίπεδο $x=0$.

(γ) Οι δυναμικές γραμμές βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Εφόσον $E_z = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow z = \text{σταθ.}$ Δηλαδή οι δυναμικές γραμμές βρίσκονται σε επίπεδα σταθερού z. Το πεδίο είναι ανεξάρτητο του z. Στο επίπεδο xy έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{E_o \sin(ky)\, e^{-k|x|}}{E_o\, \mathrm{sgn}(x) \cos(ky)\, e^{-k|x|}} = \mathrm{sgn}(x) \tan(ky)$$

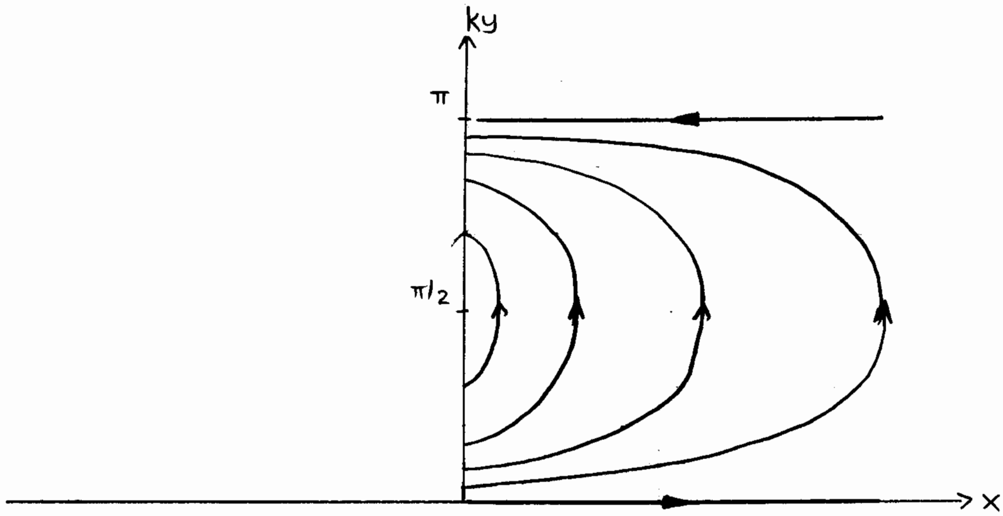
Για $x>0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan(ky) \Rightarrow \frac{dy}{\tan(ky)} = dx \Rightarrow$

$$\int_{y_o}^{y} \frac{dy}{\tan(ky)} = \int_{x_o}^{x} dx \Rightarrow \ln(\sin(ky))\Big|_{y_o}^{y} = k(x-x_o)$$

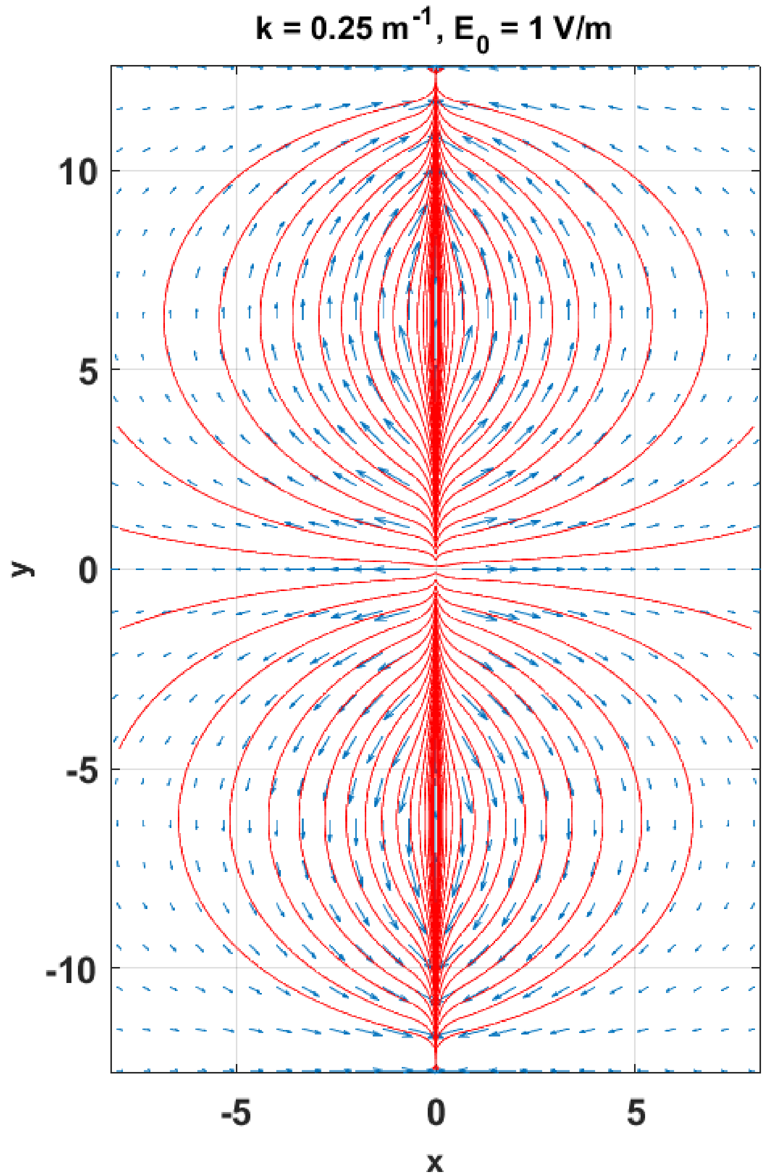
$$\ln \left| \frac{\sin(ky)}{\sin(ky_o)} \right| = k(x-x_o)$$

Έστω γιά $x_0=0 \sim y=y_0$. Αν $0<ky_0<\pi/2 \sim \sin(ky_0)>0$ και η μέγιστη τιμή του x δίδεται από την σχέση $kx_{max} = \ln\left(\frac{1}{\sin(ky_0)}\right) = -\ln(\sin(ky_0))$

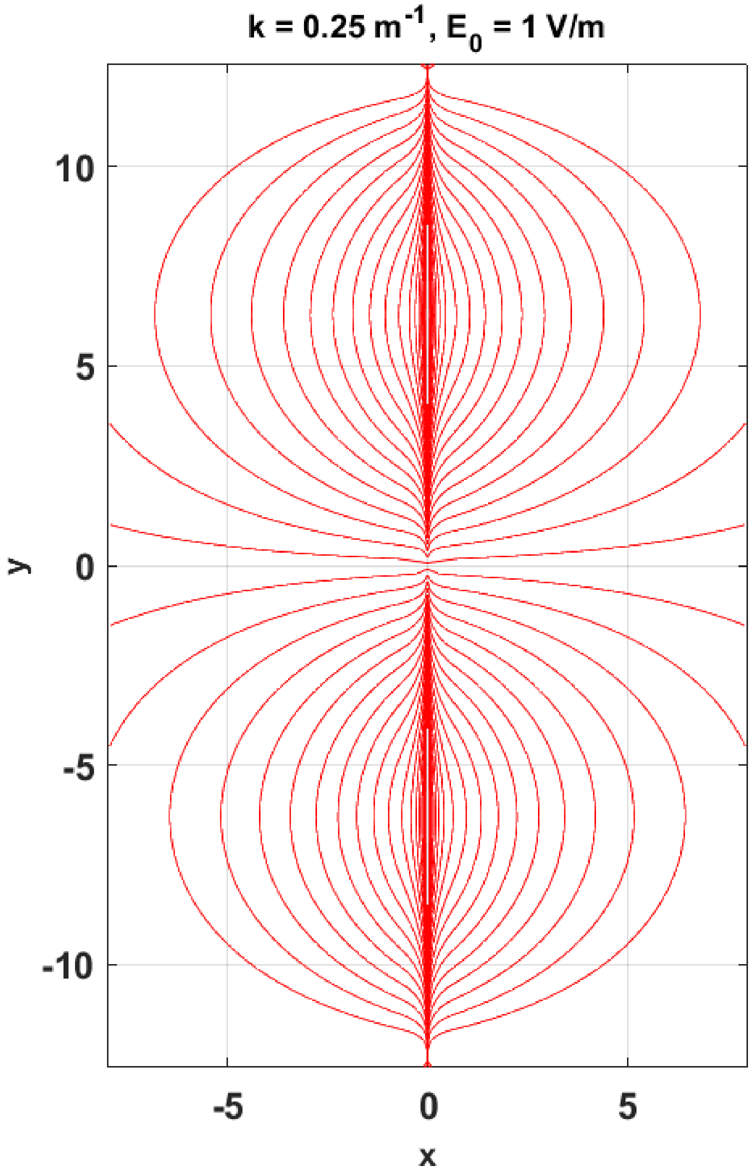
Μετά το x φθίνει ως ότου $ky \to \pi$. Επομένως οι δυναμικές γραμμές μεταξύ $0<ky<\pi$ και $x>0$ είναι ως εξής:



Για $x<0$ οι δυναμικές γραμμές είναι κατοπτρικά συμμετρικές ως προς το επίπεδο $x=0$.

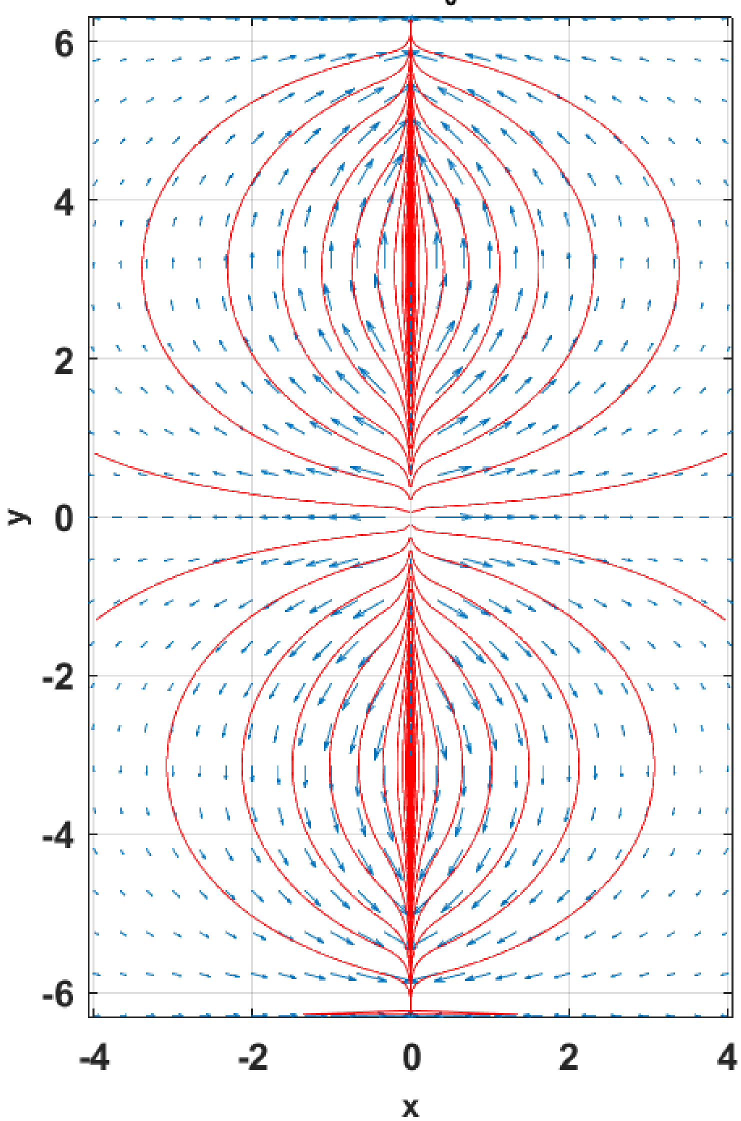


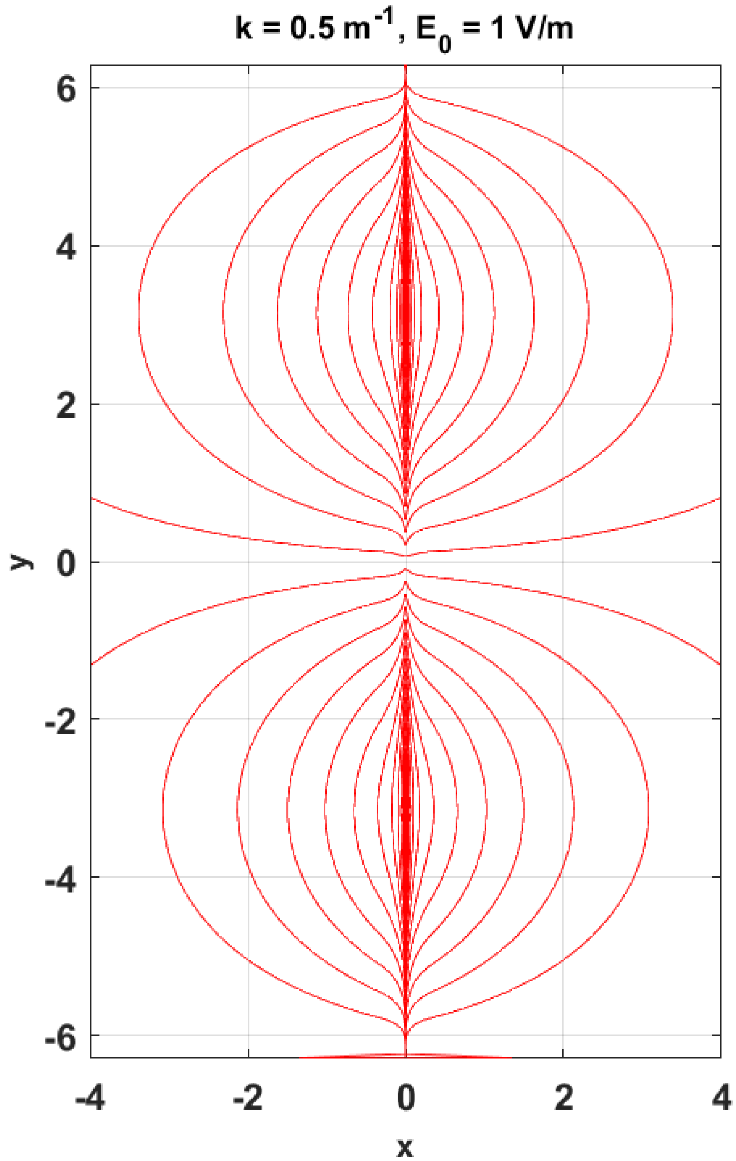
k = 0.25 m^{-1}, E$_0$ = 1 V/m
10
5
0
-5
-10
y
-5
0
5
x



k = 0.25 m^{-1}, E$_0$ = 1 V/m
10
5
0
-5
-10
y
-5
0
5
x

$k = 0.5\ m^{-1}$, $E_0 = 1$ V/m





k = 0.5 m^{-1}, E$_0$ = 1 V/m
y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4