Δύναμη Lorentz και Εξισώσεις Maxwell:

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκαλούνται από ηλεκτρικά φορτία και ρεύματα. Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία μπορούν να περιγραφούν από τις ακόλουθες διανυσματικές συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου:

$\vec{E}(\vec{r},t)$ = Ένταση ηλεκτρικού πεδίου με μονάδα V/m

$\vec{D}(\vec{r},t)$ = Διηλεκτρική μετατόπιση ή πυκνότητα ηλεκτρικής ροής με μονάδα C/m^2

$\vec{B}(\vec{r},t)$ = Μαγνητική επαγωγή ή πυκνότητα μαγνητικής ροής με μονάδα Tesla = T = $Weber/m^2$ = $V \cdot s/m^2$

$\vec{H}(\vec{r},t)$ = Ένταση μαγνητικού πεδίου με μονάδα A/m.

Δύναμη Lorentz:

Όταν ένα φορτίο q κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο τότε υφίσταται την δύναμη Lorentz (που έχει βρεθεί πειραματικά). Η δύναμη Lorentz εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B})$$

όπου $\vec{E}$, $\vec{B}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η μαγνητική επαγωγή αντίστοιχα.

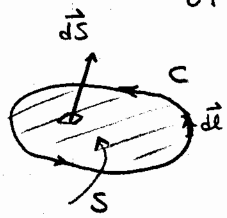
Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ θεωρούνται τα θεμελιώδη μεγέθη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διότι μπορούν μαζί με τις ποσότητες ρ και $\vec{J}$ να περιγράψουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο κενό. Όταν όμως το πεδίο βρίσκεται μέσα σε διάφορα υλικά τότε είναι πλεονεκτική η χρησιμοποίηση των πεδιακών μεγεθών $\vec{D}$ και $\vec{H}$.

Τα διανυσματικά μεγέθη $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ και $\vec{H}$ συνδέονται μεταξύ τους και με τις κατανομές ρ και $\vec{J}$ μέσω των εξισώσεων του Maxwell. Ο Maxwell το 1873 στην εργασία του "Electricity & Magnetism" συνέδεσε όλα τα πειραματικά στοιχεία της εποχής του σε 4 απλές εξισώσεις. Με αυτές τις εξισώσεις όχι μόνο ερμήνευσε όλα τα πειραματικά δεδομένα της εποχής του αλλά πρόβλεψε την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, υπολόγισε την ταχύτητα του φωτός, και ερμήνευσε την διάδοση του φωτός σαν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Οι εξισώσεις του Maxwell στην ολοκληρωτική τους μορφή είναι:

(1) $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right)$$ (νόμος Faraday)

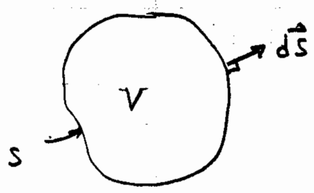
όπου emf (ΗΕΔ) $= \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$ = ηλεκτρεγερτική δύναμη



(2) $$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S}\right)$$ (νόμος Ampere)

όπου mmf (ΜΕΔ) $= \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}$ = μαγνητεγερτική δύναμη

(3) $$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$ (νόμος Gauss)



(4) $$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$ (δεν έχουν παρατηρηθεί μαγνητικά μονόπολα)

Η εξίσωση συνεχείας συμπληρώνει τις παραπάνω εξισώσεις:

(5) $$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = 0$$ (Νόμος διατήρησης φορτίου)

Χρονοσταθερά Πεδία

Όταν τόσο οι πηγές $\rho, \vec{J}$ όσον και όλα τα πεδιακά μεγέθη είναι ανεξάρτητα από τον χρόνο τότε όλες οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται και οι εξισώσεις Maxwell και συνεχείας γράφονται ως εξής:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{(αστρόβιλο ηλεκτρικό πεδίο)} \\ (3) & \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{array}\right\} \text{ηλεκτροστατικά πεδία}$$

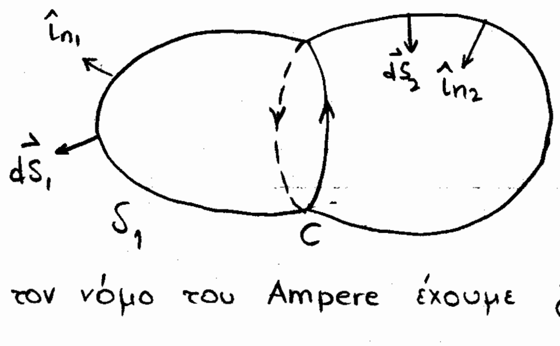
$$\left.\begin{array}{ll} (2) & \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \\ (4) & \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ (5) & \oint \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \end{array}\right\} \text{μαγνητοστατικά πεδία}$$

Παρατηρούμε ότι σε χρονοσταθερά πεδία ηλεκτρικά μεγέθη $\vec{E}, \vec{D}, \rho$ και μαγνητικά μεγέθη $\vec{H}, \vec{B}, \vec{J}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Χρονομεταβλητά Πεδία

Όταν οι πηγές $\rho, \vec{J}$ εξαρτώνται από τον χρόνο τότε και η απόκριση $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ εξαρτώνται από τον χρόνο. Οι εξισώσεις (1)–(5) είναι συμβιβαστές αλλά όχι ανεξάρτητες. Για παράδειγμα ο νόμος του Gauss μπορεί να βρεθεί από τους νόμους Faraday, Ampere και την εξίσωση συνεχείας.

Έστω για παράδειγμα η επιφάνεια $S = S_1 + S_2$ και η καμπύλη C.



Από τον νόμο του Ampere έχουμε για την καμπύλη C και τις επιφάνειες S_1 και S_2:

$$\left.\begin{aligned}\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} &= \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S}_1 + \frac{d}{dt}\int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S}_1 \\ \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} &= \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S}_2 + \frac{d}{dt}\int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S}_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{S}_2 + \frac{d}{dt}\left(\int_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S}_1 - \int_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S}_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$$

Από την εξίσωση συνεχείας (ΝΔΦ) έχουμε $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}Q$

Επομένως $\frac{d}{dt}\left[-Q + \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}\right] = 0 \Rightarrow$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} - Q = c = \text{σταθερά}$$

Αφού το πεδίο δημιουργήθηκε κάποια χρονική στιγμή t_0 η σταθερά $c = 0$. Επομένως $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = \int_V \rho\, dV$ (νόμος Gauss).

Παρόμοια μπορεί να αποδειχθεί ότι η απουσία μαγνητικών μονοπόλων μπορεί να βρεθεί από τον νόμο του Faraday και την εξίσωση συνεχείας.

Διαφορική Μορφή των Εξισώσεων του Maxwell

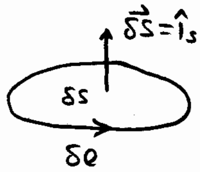
Όταν η επιφάνεια $\delta S \to 0$ και ο αντίστοιχος όγκος $\delta V \to 0$ τότε ο νόμος του Gauss μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\oint_{\delta S} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = \rho\,\delta V \Rightarrow \frac{1}{\delta V}\oint_{\delta S} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \rho \Rightarrow$$

$$\lim_{\delta V,\delta S\to 0}\left\{\frac{1}{\delta V}\oint_{\delta S} \vec{D}\cdot d\vec{S}\right\} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός της απόκλισης. Παρόμοια μπορεί να δειχθεί ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

Οι εξισώσεις του Faraday και του Ampere θα χρειασθούν τον ορισμό της περιστροφής. Έστω δl η περιφέρεια κλειστού βρόχου που περικλείει επιφάγια δS. Το όριο $\lim_{\delta S, \delta\ell \to 0} \left\{ \frac{1}{\delta S} \oint_{\delta\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right\} = \hat{\imath}_s \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$.



Εφαρμόζοντας τον νόμο του Faraday στο βρόχο $\delta\ell$ έχουμε:

$$\oint_{\delta\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{\delta S} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \hat{\imath}_s)\,\delta S \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\delta S} \oint_{\delta\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) \cdot \hat{\imath}_s \Rightarrow \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} - \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\right] \cdot \hat{\imath}_s = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Παρόμοια από την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Ampere έχουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Συνοψίζοντας οι εξισώσεις του Maxwell και η εξίσωση συνέχειας στην διαφορική τους μορφή είναι οι ακόλουθες:

(1α) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$ (νόμος Faraday)

(2α) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$ (νόμος Ampere)

(3α) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$ (νόμος Gauss)

(4α) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (ανυπαρξία μαγνητικών μονοπόλων)

(5α) $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (εξίσωση συνέχειας)

Για χρονοσταθερά πεδία $\partial/\partial t = 0$ και οι εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \end{array}\right\} \text{ηλεκτροστατικά πεδία} \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \end{array}\right\} \text{μαγνητοστατικά πεδία}$$

Και πάλι στην χρονομεταβλητή περίπτωση οι νόμοι που περιέχουν τις αποκλίσεις $\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, μπορούν να βρεθούν από τους νόμους με τις περιστροφές και τον ΝΔΦ.

Συνταυτικές Σχέσεις:

Οι συνταυτικές σχέσεις συσχετίζουν τα πεδία $\vec{D}, \vec{H}$ με τα θεμελιώδη πεδία $\vec{E}, \vec{B}$ και δίδουν τις απαραίτητες επιπλέον εξισώσεις ώστε μαζί με τις εξισώσεις Maxwell να αποτελούν ένα επιλύσιμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Γενικά οι συνταυτικές σχέσεις είναι της μορφής

$\vec{D} = f(\vec{E}, \vec{B})$ και $\vec{H} = g(\vec{E}, \vec{B})$ και εξαρτώνται από τα υλικά μέσα στα οποία ορίζονται τα πεδία.

Για τον κενό χώρο $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ και $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ όπου

$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m = επιτρεπτότητα του κενού

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m = διαπερατότητα του κενού

$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2.997925 \cdot 10^{8}$ m/s = ταχύτητα φωτός στο κενό.

Ισοτροπικά Υλικα:

Ισοτροπικά Υλικά είναι εκείνα που έχουν τις ίδιες ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες προς κάθε κατεύθυνση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για κάθε σημείο τους. Τότε

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

όπου ϵ, μ είναι η επιτρεπτότητα, διαπερατότητα του υλικού. Οι σχετική επιτρεπτότητα ορίζεται σαν $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ και η σχετική μαγνητική διαπερατότητα $\mu_r = \mu/\mu_0$. Οι σχέσεις $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ και $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ισχύουν κυρίως για στατικά πεδία. Στην περίπτωση των χρονομεταβλητών πεδίων τα $\vec{D}$ και $\vec{B}$ εξαρτώνται και από τιμές των $\vec{E}$ και $\vec{H}$ σε προηγούμενους χρόνους. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω εξισώσεις ισχύουν στο πεδίο της συχνότητας, δηλαδή $\vec{D}(\vec{r},\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$ και ανάλογα για τα $\vec{B}$ και $\vec{H}$.

Ανισοτροπικά Υλικά:

Στα υλικά αυτά οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες εξαρτώνται από την κατεύθυνση των πεδίων. Για υλικά με ηλεκτρική ανισοτροπία έχουμε

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}}_{\tilde{\epsilon}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \rightsquigarrow \vec{D} = \tilde{\epsilon}\vec{E}$$

Ο τανυστής $\tilde{\epsilon}$ είναι συμμετρικός, δηλαδή $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ $(i,j = x,y,z)$.

Ανάλογη είναι και η σχέση μεταξύ $\vec{B}$, $\vec{H}$ για υλικά με μαγνητική ανισοτροπία.

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mu}} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \rightarrow \vec{B} = \tilde{\mu}\vec{H}$$

όπου ο τανυστής $\tilde{\mu}$ είναι συμμετρικός (για υλικά χωρίς απώλειες).

Δις-ανισοτροπικά Υλικά:

Τα υλικά αυτά περιγράφονται από τις συνταυτικές σχέσεις:

$$\vec{D} = \tilde{\epsilon}\vec{E} + \tilde{\xi}\vec{H}$$

$$\vec{B} = \tilde{\zeta}\vec{E} + \tilde{\mu}\vec{H}$$

όπου $\tilde{\zeta}$ και $\tilde{\xi}$ είναι οι λεγόμενοι μαγνητο-ηλεκτρικοί τανυστές.

Δις-ισοτροπικά Υλικά:

Τα υλικά αυτά περιγράφονται απο τις συνταυτικές σχέσεις:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} + \xi\vec{H}$$

$$\vec{B} = \zeta\vec{E} + \mu\vec{H}$$

με $\epsilon, \mu, \zeta, \xi$ βαθμωτές σταθερές. Τα χειρότροπα υλικά (chiral media) έχουν $\zeta = \xi$.

Ομοιογενή & Ανομοιογενή Υλικά

Όταν οι τιμές των μακροσκοπικών μεγεθών $\tilde{\varepsilon}$ και $\tilde{\mu}$ (ή και των $\tilde{J}, \tilde{\xi}$) παραμένουν ανεξάρτητες των χωρικών συντεταγμένων τότε τα αντίστοιχα υλικά ονομάζονται ομοιογενή. Όταν τα μακροσκοπικά αυτά μεγέθη εξαρτώνται από τις χωρικές συντεταγμένες τότε τα υλικά ονομάζονται ανομοιογενή.

Γραμμικά & Μη Γραμμικά Υλικά:

Όταν ένα ή περισσότερα από τα μακροσκοπικά μεγέθη $\tilde{\varepsilon}$ ή $\tilde{\mu}$ (ή και $\tilde{J}, \tilde{\xi}$) είναι συνάρτηση πεδιακών μεγεθών τότε το αντίστοιχο υλικό λέγεται μη γραμμικό. Στην αντίθετη περίπτωση το υλικό ονομάζεται γραμμικό.

Αγωγοί - Συντακτική Σχέση για Αγωγούς:

Όταν σε ένα υλικό εμφανίζεται αγωγιμότητα [με ειδική αγωγιμότητα σ ((γ ή g χρησιμοποιούνται)], τότε υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου οι ελεύθεροι φορείς (ηλεκτρόνια ή οπές) μπορούν να κινηθούν και επομένως να παράγεται ρεύμα. Το ρεύμα αυτό ονομάζεται ρεύμα αγωγιμότητας και μπορεί να περιγραφεί από μιά χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Η εξίσωση $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$ εκφράζει τον νόμο του Ohm από μικροσκοπική πλευρά. Η ειδική αγωγιμότης σ έχει μονάδες $1/\Omega m$. Ο όρος $\rho = 1/\sigma$ είναι η ειδική αντίσταση του αγωγού (με μονάδα Ωm).

Γενικώς σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα με αγώγιμες περιοχές ο όρος $\vec{J}$ που υπάρχει στις εξισώσεις Maxwell είναι άθροισμα δύο όρων.

$\vec{J} = \vec{J}_s + \vec{J}_c$ οπου $\vec{J}_s$ είναι η χωρική πυκνότητα των επιβαλλομένων πηγών που είναι ανεξάρτητες του περιβάλλοντος, και $\vec{J}_c$ η επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος λόγω του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Η σχέση $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση ανισοτροπικών αγωγών στην μορφή

$$\vec{J}=\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}=\tilde{\sigma}\vec{E}$$

Εφαρμογή : Ηλεκτρική χαλάρωση.

Στο εσωτερικό αγωγού ειδικής αγωγιμότητας σ και επιτρεπτότητας ϵ τοποθετείται χωρικό φορτίο με πυκνότητα ρ_0 την χρονική στιγμή $t=0$.

Από τον νόμο του Gauss έχουμε: $\rho=\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\vec{\nabla}\cdot(\epsilon\vec{E})=\epsilon\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε: $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(\sigma\vec{E})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \sigma\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sigma\frac{\rho}{\epsilon}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\sigma}{\epsilon}\rho=0 \Rightarrow$$

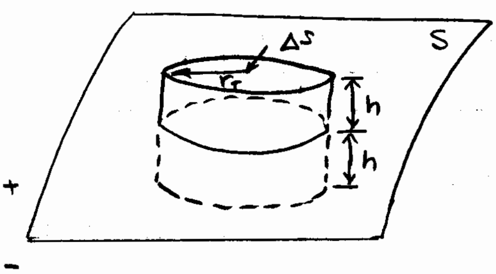
$$\rho=\rho_0\, e^{-t/\tau} \qquad \tau=\epsilon/\sigma = \text{χρονική σταθερά χαλάρωσης του αγωγού.}$$

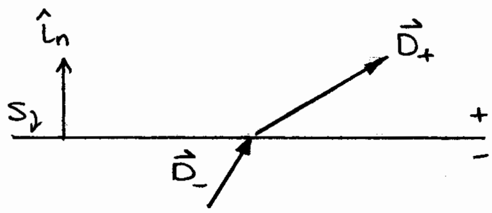
Παρατηρούμε ότι το φορτίο τείνει να συγκεντρωθεί στην επιφάνεια του αγωγού με χρονική σταθερά τ.

Οριακές Συνθήκες του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

Τα πεδιακά μεγέθη $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{J}$ είναι δυνατόν να παρουσιάσουν ασυνέχειες στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών. Στην περίπτωση αυτή η διαφορική μορφή των εξισώσεων του Maxwell δεν ισχύει. Στα σημεία λοιπόν των διαχωριστικών επιφανειών οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις εξισώσεις Maxwell παρουσιάζουν ασυνέχειες. Στα σημεία λοιπόν διαχωριστικών επιφανειών οι εξισώσεις Maxwell ισοδυναμούν με ορισμένες οριακές συνθήκες, μιά για κάθε εξίσωση Maxwell.

(α) Οριακή Συνθήκη για το διάνυσμα Διηλεκτρικής Μετατόπισης $\vec{D}$:





Έστω διαχωριστική επιφάνεια S μεταξύ δύο υλικών με πιθανή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss για τον κύλινδρο ύψους 2h και επιφάνειας ΔS.

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q = \int_V \rho\, dV + \oint_S \sigma\, dS$$

Όμως $\displaystyle\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} \simeq (\vec{D}_+\cdot\hat{i}_n - \vec{D}_-\cdot\hat{i}_n)\Delta S + \vec{D}\cdot\hat{i}_r(2\pi r_T)2h \qquad (\Delta S = 2\pi r_T)$

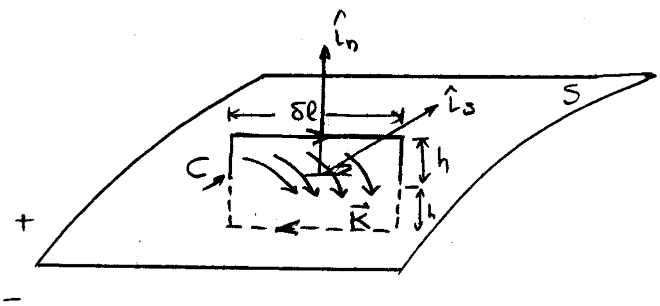
Επίσης $\displaystyle\int_V \rho\, dV = \rho\,\Delta S\, 2h$, $\displaystyle\oint_S \sigma\, dS = \sigma\,\Delta S$ εφόσον επιφανειακό φορτίο μπορεί να υπάρχει μόνο στην διαχωριστική επιφάνεια S. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss στον κύλινδρο με $h\to 0$ έχουμε:

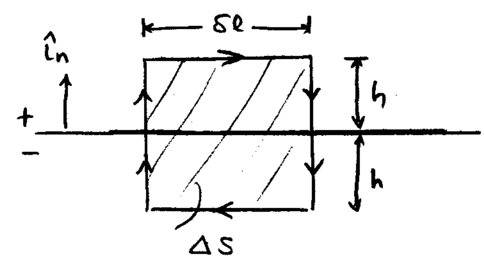
$$\hat{i}_n\cdot(\vec{D}_+ - \vec{D}_-)\Delta S = \sigma\,\Delta S \Rightarrow \quad \hat{i}_n\cdot(\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma$$

Εάν εφαρμόσουμε τον νόμο που εκφράζει την ανυπαρξία μαγνητικών μονοπόλων (νόμος Gauss στο μαγνητισμό) τότε έχουμε την ακόλουθη οριακή συνθήκη:

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$$

(β) Οριακή Συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του $\vec{E}$





'Εστω πάλι διαχωριστική επιφάνεια S μεταξύ δύο υλικών με πιθανή επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K}$. Θα εφαρμόσουμε τον νόμο του Faraday στην καμπύλη C (παραλληλεπίπεδος βρόχος) που εσωκλείει την επιφάνεια ΔS.

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Όμως $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \vec{E}_+\cdot(\hat{i}_s\times\hat{i}_n)\,\delta\ell - \vec{E}_-\cdot(\hat{i}_s\times\hat{i}_n)\,\delta\ell + \vec{E}_+\cdot(-\hat{i}_n)h + \vec{E}_-\cdot(-\hat{i}_n)h + \vec{E}_-\cdot(\hat{i}_n)h + \vec{E}_+\cdot(\hat{i}_n)h$$

Όταν $h\to 0 \rightarrow$ $$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = (\hat{i}_s\times\hat{i}_n)\cdot(\vec{E}_+-\vec{E}_s)\,\delta\ell = \left[\hat{i}_n\times(\vec{E}_+-\vec{E}_-)\right]\cdot\hat{i}_s\,\delta\ell$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$. Γιά το δεξί σκέλος του νόμου του Faraday έχουμε:

$$-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\hat{i}_s\,\delta\ell\,2h\right) = -\delta\ell\,2h\,\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\hat{i}_s\right)$$ και όταν

$h\to 0 \rightarrow$ $$-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \to 0.$$

Επομένως η συνοριακή συνθήκη γράφεται ως εξής:

$$\left[\hat{i}_n\times(\vec{E}_+-\vec{E}_-)\right]\cdot\hat{i}_s\,\cancel{\delta\ell} = -\cancel{\delta\ell}\,2h\,\frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\hat{i}_s) = 0 \text{ όταν } h\to 0$$

Επειδή η επιλογή της C έγινε τυχαία και η επιφάνεια ΔS μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση εφόσον τα $\delta\ell$ παραμένουν εφαπτομενικά της S, τότε

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0 \rightarrow E_{t+} = E_{t-}$$

δηλαδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες του $\vec{E}$ παραμένουν συνεχείς.

Αν εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι η αντίστοιχη οριακή συνθήκη είναι η εξής:

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K}$$

Συνοψίζοντας, οι οριακές συνθήκες από τις εξισώσεις Maxwell και τον νόμο διατήρησης φορτίου είναι:

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_+ - \vec{D}_-) = \sigma$$

$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 0$$

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \vec{K}$$

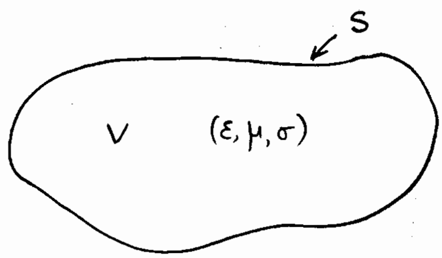
$$\hat{i}_n \cdot (\vec{B}_+ - \vec{B}_-) = 0$$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Όπως οι εξισώσεις Maxwell δεν είναι ανεξάρτητες έτσι και οι οριακές συνθήκες δεν είναι όλες ανεξάρτητες. Γενικώς για χρονομεταβλητά πεδία αρκεί η εφαρμογή των οριακών συνθηκών για τις εφαπτομενικές συνιστώσες των $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Η πλήρωση αυτών των οριακών συνθηκών εξασφαλίζει την πλήρωση των υπολοίπων (εφόσον οι πηγές υπακούουν στο νόμο διατήρησης φορτίου).

Θεώρημα Μοναδικότητας Προβλημάτων οριακών συνθηκών:

Σε ομογενή, ισοτροπικά, και γραμμικά υλικά μιά λύση των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιεί δεδομένες οριακές και αρχικές συνθήκες είναι μοναδική.



Οι οριακές συνθήκες πάνω στην S μπορεί να είναι οι εξής:

$\vec{E}_t(S) = \vec{f}$ ή

$\vec{H}_t(S) = \vec{g}$ ή

$\vec{E}_t(S_1) = \vec{f}_1$ και $\vec{H}_t(S_2) = \vec{g}_1$

με $S_1 \cup S_2 = S$.

Επίσης για αρχικές συνθήκες έχουμε $\vec{E}(\vec{r}, t_0) = \vec{w}(\vec{r}, t_0)$ και $\vec{H}(\vec{r}, t_0) = \vec{u}(\vec{r}, t_0)$.

Το θεώρημα της μοναδικότητος ισχύει και για μέσα χωρίς απώλειες $(\sigma = 0)$, καθώς και για ανισοτροπικά μέσα.