Οι Θεμελιώδεις Δυνάμεις Στην Φύση

(Fundamental Forces in Nature)

(από http://web.mit.edu/sahughes/www/8.022/lec01.pdf)

Ο ηλεκτρομαγνητισμός είναι μια από τις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης. Οι άλλες θεμελιώδεις δυνάμεις είναι η βαρύτητα (gravity), η ισχυρή (strong nuclear force) και η ασθενής πυρηνική δύναμη (weak nuclear force). Μια σύγκριση των θεμελιωδών δυνάμεων είναι η ακόλουθη (https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_interaction):

Δύναμη	Εμβέλεια (m)	Εξάρτηση	Σωματίδια	Φορέας Αλληλεπίδρασης	Σχετικό μέγεθος
Βαρύτης	∞	$1/r^2$	κάθε μάζα	graviton	**1**
Ασθενής Πυρηνική	10^{-18}	$\sim (1/r)e^{-ar}$	Όλα τα στοιχειώδη σωματίδια εκτός φωτονίων και γλουονίων (except photons & gluons)	Weak bosons	$\mathbf{10^{25}}$
Ηλεκτρο-μαγνητική	∞	$1/r^2$	Κάθε ηλεκτρικό φορτίο	photons	$\mathbf{10^{36}}$
Ισχυρή Πυρηνική	10^{-15}	$\sim r$	Quarks & gluons	gluons	$\mathbf{10^{38}}$

Τα κύρια χαρακτηριστικά της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης είναι ότι είναι η δεύτερη ισχυρότερη και έχει μεγάλη εμβέλεια όπως και η βαρύτητα. Επιπλέον έχει διπλό πρόσημο δηλαδή μπορεί να είναι είτε ελκτική είτε απωστική.

Οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις διαδραματίζουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο στην καθημερινή ζωή. Οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κυριαρχούν μεταξύ των μορίων στην χημεία και την βιολογία (π.χ. ιοντικές δυνάμεις, van der Waals, δεσμός υδρογόνου κλπ.). Η καλή γνώση του ηλεκτρομαγνητισμού δημιουργεί μια καλύτερη κατανόηση των φυσικών φαινόμενων που βιώνουμε στην καθημερινότητά μας. Μαζί με την κβαντομηχανική αποτελούν τα εργαλεία της σύγχρονης φυσικής.

Ηλεκτρικό Φορτίο

Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (Lorentz) επιδρά σε ηλεκτρικά φορτία. Στην φύση το ηλεκτρικό φορτίο απαντάται σε διακριτή μορφή σαν «κβάντο». Το μικρότερο ηλεκτρικό φορτίο που έχει μετρηθεί είναι το φορτίο ενός ηλεκτρονίου το οποίο και θεωρείται το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Το φορτίο του ηλεκτρονίου (σε μέτρο εφόσον θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο έχει αρνητικό φορτίο) είναι **$e = 1.602176634\times10^{-19}$** Coulombs (σύμφωνα με τα

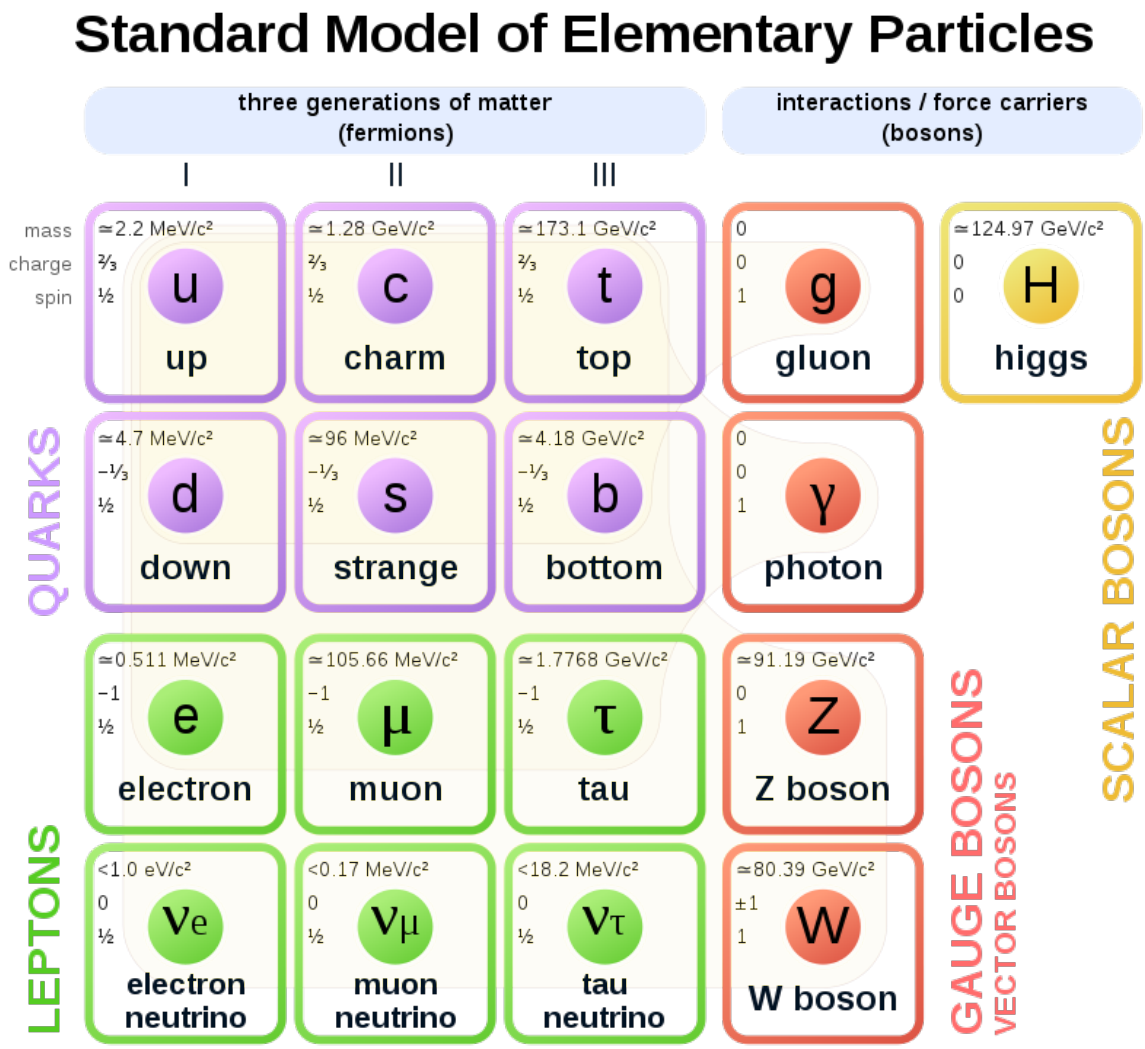
στοιχεία των φυσικών σταθερών του NIST (National Institute of Standards and Technology) (see url link:

https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Category?view=pdf&All+values.x=71&All+values.y=12)

Φυσικά και το φορτίο του πρωτονίου είναι ίσον με το φορτίο του ηλεκτρονίου αλλά είναι θετικό. Το θετικό φορτίο του πρωτονίου και το αρνητικό φορτίο του ηλεκτρονίου είναι έτσι καταχωρημένα λόγω σύμβασης (είναι απλώς ίσα και αντίθετα).

Το ηλεκτρικό φορτίο σε ένα κλειστό σύστημα διατηρείται. Δηλαδή το συνολικό φορτίο ενός «κλειστού» συστήματος δεν μπορεί να μεταβληθεί.

Σύμφωνα με το καθορισμένο πρότυπο (μοντέλο) της σύγχρονης φυσικής τα πρωτόνια και τα νετρόνια αποτελούνται από quarks.(see url site: https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model).



Τα quarks έχουν ηλεκτρικό φορτίο είτε **2e/3** είτε **–e/3** (όπου e το μέτρο του φορτίου του ηλεκτρονίου). Εν τούτοις τα quarks δεν υπάρχουν στην φύση μεμονωμένα και επομένως το κβάντο του ηλεκτρικού φορτίου θεωρείται το **e**.

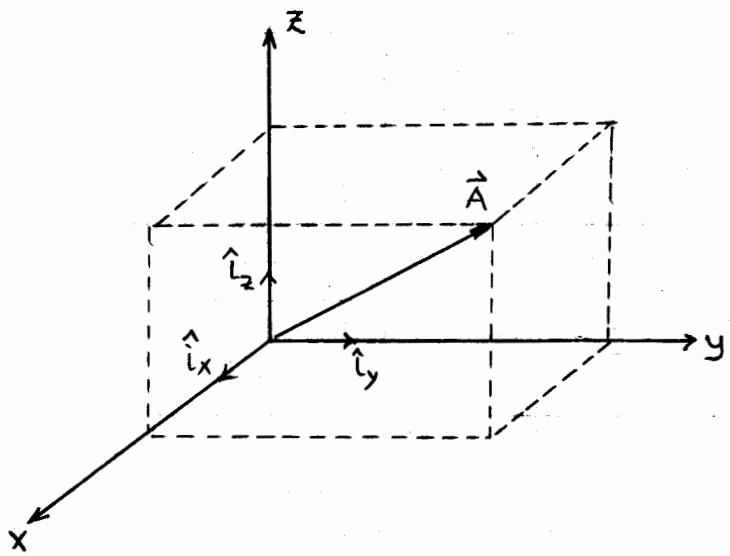
Εισαγωγή:

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκαλούνται από ηλεκτρικά φορτία καθώς και από την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων (ρεύματα). Το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου που είναι $e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ Coulomb . Τα ηλεκτρικά φορτία μπορούν να περιγραφούν με διάφορες κατανομές φορτίου και τα ηλεκτρικά ρεύματα με αντίστοιχες κατανομές ρευμάτων.

Για την περιγραφή των διαφόρων ποσοτήτων των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων χρησιμοποιούνται τόσο βαθμωτά όσο και διανυσματικά μεγέθη. Στην περίπτωση των διανυσματικών μεγεθών είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων.

Ανασκόπηση των βασικών συστημάτων συντεταγμένων:

1. Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων:



Εστω $\hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα.

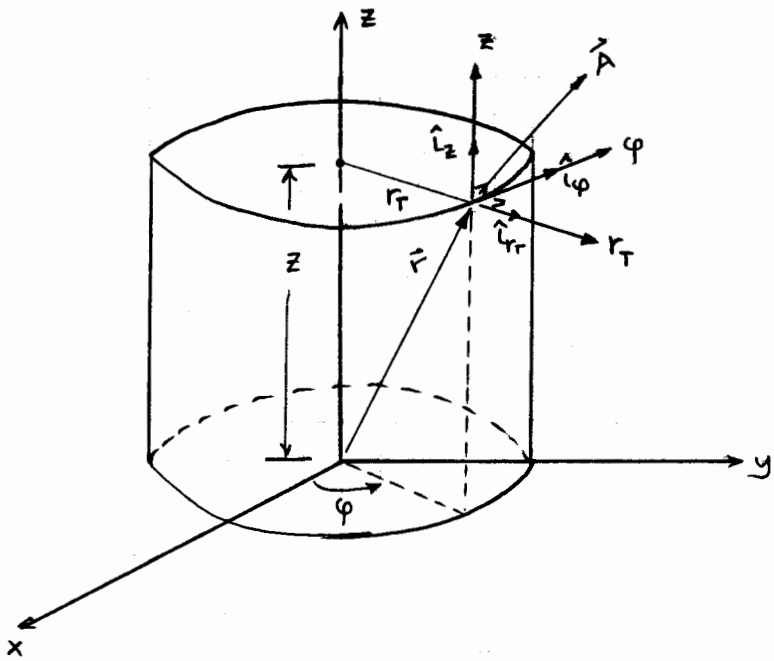
Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$ εκφράζεται ως

$$\vec{A} = A_x \hat{i}_x + A_y \hat{i}_y + A_z \hat{i}_z$$

και το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x \hat{i}_x + y \hat{i}_y + z \hat{i}_z$$

2. Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων:



Έστω $\hat{i}_{r_T}, \hat{i}_\varphi, \hat{i}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία μεταβάλλονται (εκτός του $\hat{i}_z$) από σημείο σε σημείο.

Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A} = A_{r_T}\hat{i}_{r_T} + A_\varphi \hat{i}_\varphi + A_z \hat{i}_z$.

Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = r_T\cos\varphi\, \hat{i}_x + r_T \sin\varphi\, \hat{i}_y + z\,\hat{i}_z =$

$$= r_T \hat{i}_{r_T} + z\,\hat{i}_z$$

Σχέσεις με το καρτεσιανό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x &= r_T\cos\varphi \\ y &= r_T\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r_T &= \sqrt{x^2+y^2} && r_T \geq 0 \\ \varphi &= \tan^{-1}(y/x) && 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= z && -\infty < z < \infty \end{aligned}\right.$$

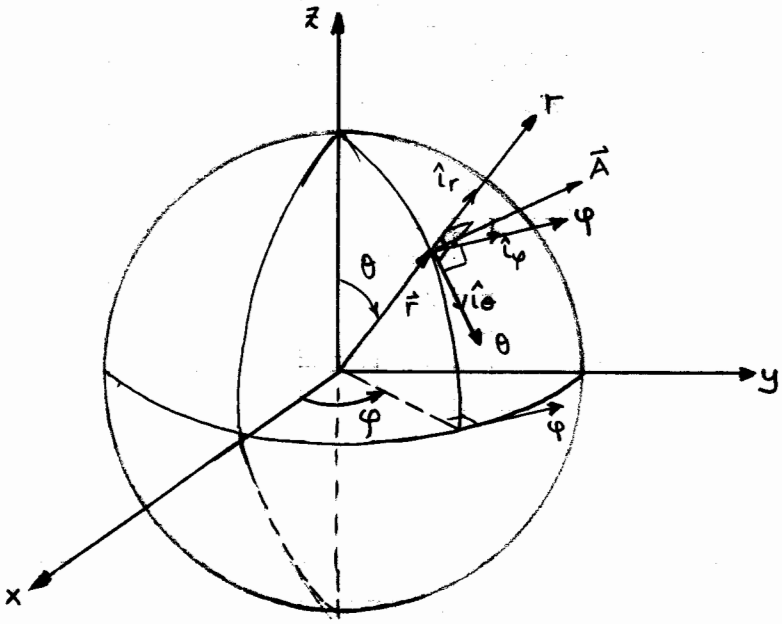
Υλοποίηση της αντίστροφης εφαπτομένης (MatLab)

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \operatorname{atan2}(y,x) & \text{if } y \geq 0 \\ 2\pi + \operatorname{atan2}(y,x) & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

Εναλλακτικά: $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = mod\left\{\operatorname{atan2}(y,x), 2\pi\right\}$

$$mod(a,b) = a - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b$$

3. Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων:



Έστω $\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\varphi$ τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο. Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$ εκφράζεται από την σχέση:

$$\vec{A} = A_r \hat{i}_r + A_\theta \hat{i}_\theta + A_\varphi \hat{i}_\varphi$$

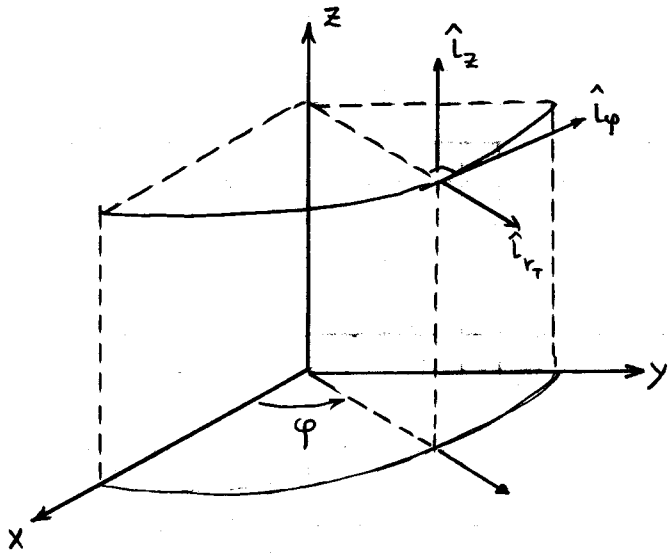
Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = r\,\hat{i}_r = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{i}_y + r\cos\theta\,\hat{i}_z$

Σχέσεις με το καρτεσιανό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} && r \geq 0 \\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) && 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi &= \tan^{-1}(y/x) && 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}\right.$$

Μετασχηματισμοί Συστημάτων Συντεταγμένων:

1. Καρτεσιανό ⟷ Κυλινδρικό



Σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων:

$$\hat{\imath}_x = \cos\varphi\, \hat{\imath}_{r_T} - \sin\varphi\, \hat{\imath}_\varphi$$

$$\hat{\imath}_y = \sin\varphi\, \hat{\imath}_{r_T} + \cos\varphi\, \hat{\imath}_\varphi$$

$$\hat{\imath}_z = \hat{\imath}_z$$

ή

$$\hat{\imath}_{r_T} = \cos\varphi\, \hat{\imath}_x + \sin\varphi\, \hat{\imath}_y$$

$$\hat{\imath}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{\imath}_x + \cos\varphi\, \hat{\imath}_y$$

$$\hat{\imath}_z = \hat{\imath}_z$$

Θηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath}_x \\ \hat{\imath}_y \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{C\to R}} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{r_T} \\ \hat{\imath}_\varphi \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath}_{r_T} \\ \hat{\imath}_\varphi \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{R\to C}} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_x \\ \hat{\imath}_y \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix}$$

Εστω το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$:

$$\vec{A} = A_x \hat{\imath}_x + A_y \hat{\imath}_y + A_z \hat{\imath}_z = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_x \\ \hat{\imath}_y \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix} =$$

$$[A_x \;\; A_y \;\; A_z]\, \tilde{A}_{C\to R} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{r_T} \\ \hat{\imath}_\varphi \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix} = [A_{r_T} \;\; A_\varphi \;\; A_z] \begin{bmatrix} \hat{\imath}_{r_T} \\ \hat{\imath}_\varphi \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix}$$

και $[A_{r_T} \;\; A_\varphi \;\; A_z] = [A_x \;\; A_y \;\; A_z]\, \tilde{A}_{C\to R} \Rightarrow$

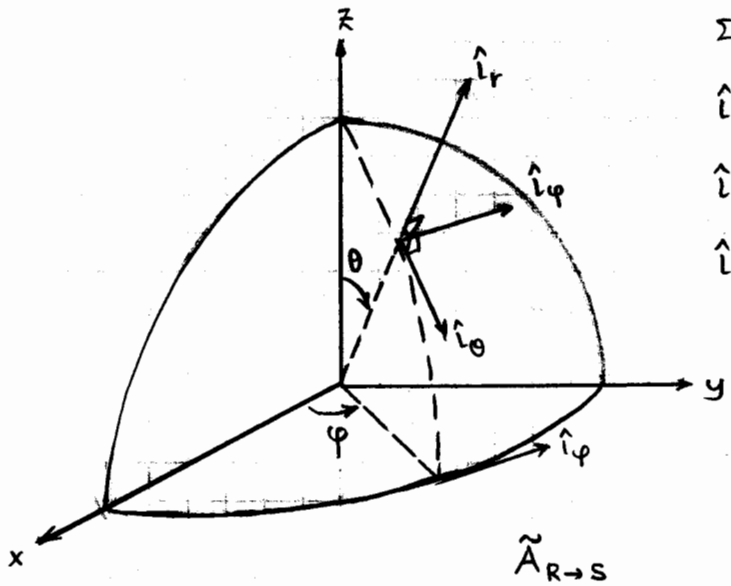
$$\begin{bmatrix} A_{r_T} \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \tilde{A}^T_{C\to R} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \tilde{A}_{R\to C} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας αν $\vec{A}_R = A_x \hat{\imath}_x + A_y \hat{\imath}_y + A_z \hat{\imath}_z = A_{r_T} \hat{\imath}_{r_T} + A_\varphi \hat{\imath}_\varphi + A_z \hat{\imath}_z = \vec{A}_C$

τότε

$$\vec{A}_C = \tilde{A}_{R\to C}\, \vec{A}_R \quad \text{και} \quad \vec{A}_R = A_{C\to R}\, \vec{A}_C$$

2. Σφαιρικό ⟷ Καρτεσιανό



Σχέσεις μοναδιαίων διανυσμάτων:

$\hat{\imath}_r = \sin\theta\cos\varphi\, \hat{\imath}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{\imath}_y + \cos\theta\, \hat{\imath}_z$

$\hat{\imath}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\, \hat{\imath}_x + \cos\theta\sin\varphi\, \hat{\imath}_y - \sin\theta\, \hat{\imath}_z$

$\hat{\imath}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{\imath}_x + \cos\varphi\, \hat{\imath}_y + 0\, \hat{\imath}_z$

$$\begin{bmatrix} \hat{\imath}_r \\ \hat{\imath}_\theta \\ \hat{\imath}_\varphi \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{A}_{R\to S}} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_x \\ \hat{\imath}_y \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix}$$

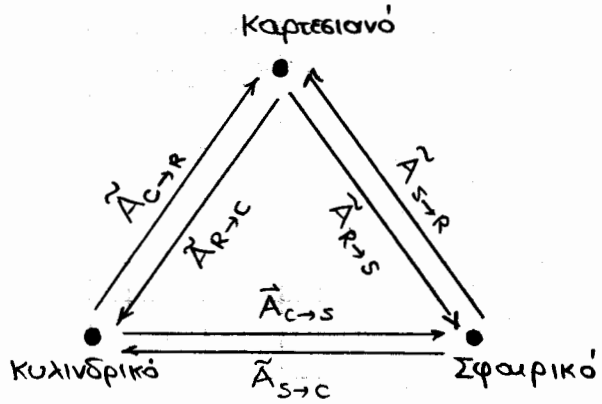
$$\begin{bmatrix} \hat{\imath}_x \\ \hat{\imath}_y \\ \hat{\imath}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{S\to R}} \begin{bmatrix} \hat{\imath}_r \\ \hat{\imath}_\theta \\ \hat{\imath}_\varphi \end{bmatrix}$$

Όπου $\tilde{A}_{R\to S} = \tilde{A}^T_{S\to R}$ και για τό τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}_R = \vec{A}_S$

(εκφρασμένο στο καρτεσιανό ή σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων)

έχουμε $\vec{A}_R = \tilde{A}_{S\to R}\vec{A}_S$ and $\vec{A}_S = \tilde{A}_{R\to S}\vec{A}_R$

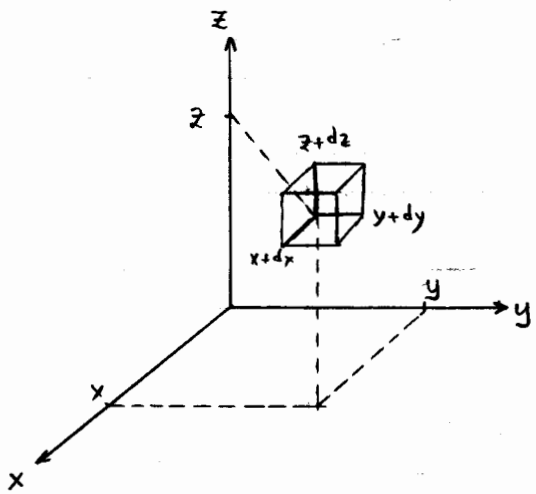
Συνοψίζοντας,

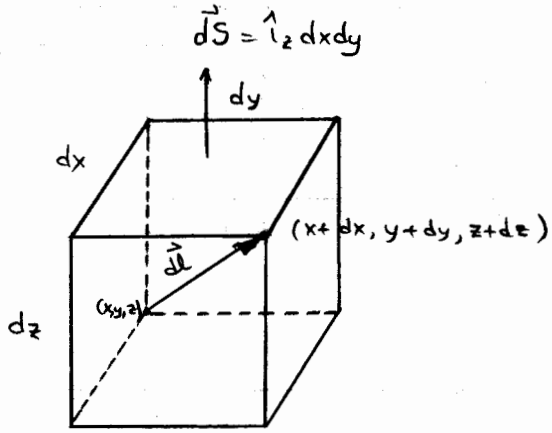


Όπου $\tilde{A}_{C\to S} = \tilde{A}_{R\to S}\tilde{A}_{C\to R}$ and $\tilde{A}_{S\to C} = \tilde{A}_{R\to C}\tilde{A}_{S\to R}$

Διαφορικά Στοιχεία:

1. Καρτεσιανό Σύστημα:



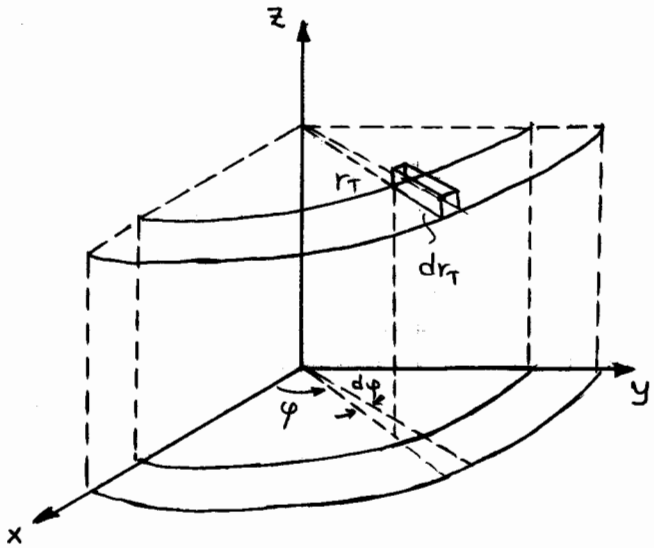


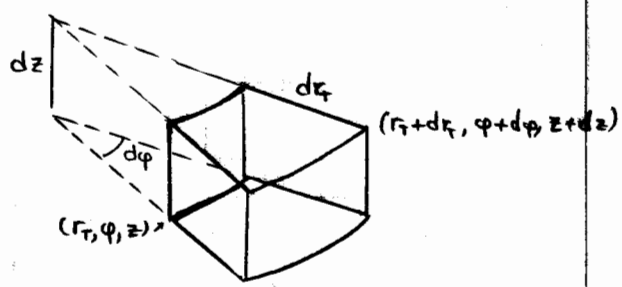
Διαφορικό μήκος : $d\vec{l} = dx\,\hat{i}_x + dy\,\hat{i}_y + dz\,\hat{i}_z$

Διαφορική Επιφάνεια : $d\vec{S} = \pm\, dxdy\,\hat{i}_z$ ή $\pm\, dxdz\,\hat{i}_y$, ή $\pm\, dydz\,\hat{i}_x$

Διαφορικός Όγκος : $dV = dx\,dy\,dz$

2. Κυλινδρικό Σύστημα:



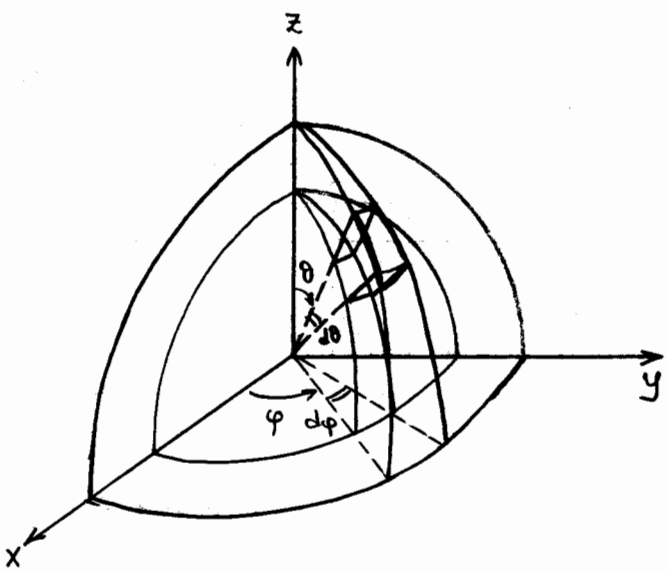


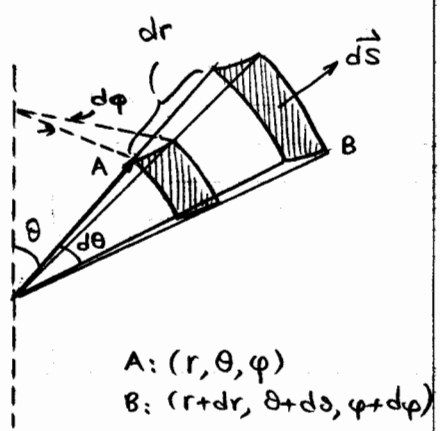
Διαφορικό μήκος: $d\vec{\ell} = dr_T\,\hat{i}_{r_T} + r_T\,d\varphi\,\hat{i}_\varphi + dz\,\hat{i}_z$

Διαφορική επιφάνεια: $d\vec{S} = \pm\, r_T\,d\varphi\,dz\,\hat{i}_{r_T}$ ή $\pm\, r_T\,d\varphi\,dr_T\,\hat{i}_z$ ή $\pm\, dz\,dr_T\,\hat{i}_\varphi$

Διαφορικός όγκος: $dV = r_T\,dr_T\,d\varphi\,dz$

3. Σφαιρικό Σύστημα:





Διαφορικό μήκος: $d\vec{\ell} = dr\,\hat{i}_r + r\,d\theta\,\hat{i}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{i}_\varphi$

Διαφορική επιφάνεια: $d\vec{S} = \pm\, r\,d\theta\,r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{i}_r$, ή $r\sin\theta\,d\varphi\,dr\,\hat{i}_\theta$

ή $\pm\, r\,d\theta\,dr\,\hat{i}_\varphi$

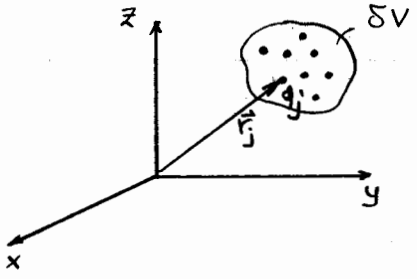
Διαφορικός όγκος: $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Ηλεκτρικό Φορτίο και Πυκνότητες Φορτίου:

Το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου $(-e)$ και του πρωτονίου $(+e)$ όπου $e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ Coulomb. Όλα τα φορτία είναι ακέραια πολλαπλάσια του $\pm e$. Τα ηλεκτρικά φορτία διατηρούνται και είναι ανεξάρτητα από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

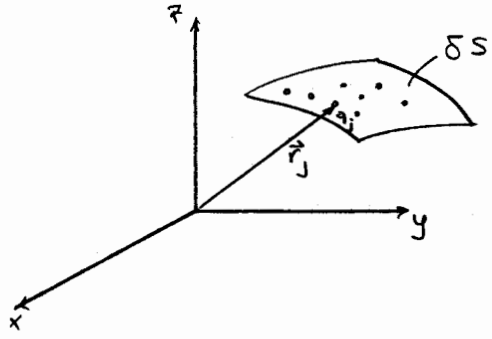
Κατανομές Ηλεκτρικού Φορτίου:

1. Χωρική Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:



Εστω όγκος $\delta V << L^3$ όπου L η μακροσκοπική διάσταση του συστήματος. Επιπλέον $\delta V >> \ell^3$ όπου ℓ η μικροσκοπική διάσταση του συστήματος (δηλαδή οι διαστάσεις των ατόμων και οι μεταξύ τους αποστάσεις). Μπορούμε να ορίσουμε το πηλίκο $\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta V}\sum_{j\in\delta V} q_j = \frac{\delta Q}{\delta V} = \frac{dQ}{dV}$ ως την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου με μονάδες σε C/m^3. Ο περιορισμός $\delta V >> \ell^3$ διασφαλίζει ότι ο όγκος δV θα περιέχει μεγάλο αριθμό φορτισμένων σωματιδίων ώστε το πηλίκο $\delta Q/\delta V$ να μην έχει έντονες χωρικές διακυμάνσεις.

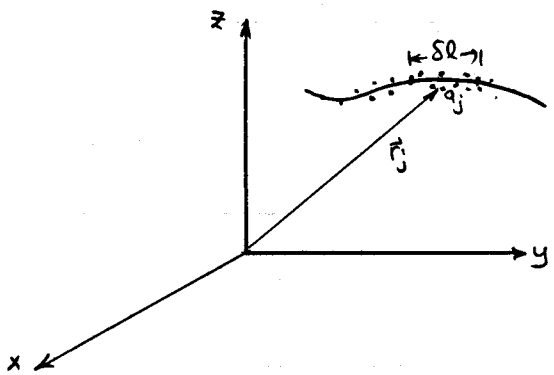
2. Επιφανειακή Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:



Όταν τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία είναι κατανεμημένα πάνω σε μία επιφάνεια τότε μπορούμε αντίστοιχα με την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου να ορίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ως:

$$\sigma(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta S}\sum_{j\in\delta S} q_j = \frac{\delta Q}{\delta S} = \frac{dQ}{dS} \quad \text{με μονάδα } C/m^2.$$

3. Γραμμική Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:



Όταν τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία είναι κατανεμημένα πολύ κοντά κατά μήκος μιάς γραμμής, τότε μπορούμε να ορίσουμε την γραμμική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ως εξής:

$$\lambda(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta l}\sum_{j\in\delta l} q_j = \frac{\delta Q}{\delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad \text{με μονάδα } C/m.$$

Επομένως το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να γραφεί ως:

$dQ = q_j$ όταν έχουμε σημειακή κατανομή φορτίου

$dQ = \rho dV$ όταν έχουμε χωρική κατανομή φορτίου

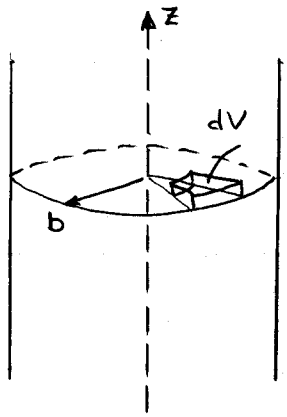
$dQ = \sigma dS$ οταν έχουμε επιφανειακή κατανομή φορτίου

$dQ = \lambda dl$ όταν έχουμε γραμμική κατανομή φορτίου.

Το ολικό φορτίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$Q = \left\{ \sum_j q_j ,\ \int_V \rho\, dV ,\ \int_S \sigma\, dS ,\ \int_l \lambda\, dl \right\} \quad \text{ανάλογα με την κατανομή.}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το ολικό φορτίο Q που περιέχεται στον κύλινδρο $x^2+y^2<b^2$ με άπειρο μήκος $(-\infty<z<+\infty)$, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει χωρική πυκνότητα φορτίου ίση με $\rho = \rho_0 \frac{a^2}{z^2+a^2}$



Το ολικό φορτίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$Q = \int_V \rho\, dV = \int_{z=-\infty}^{+\infty}\int_{r_T=0}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\rho_0 \frac{a^2}{z^2+a^2}\right)(r_T\, d\varphi\, dr_T\, dz) =$$

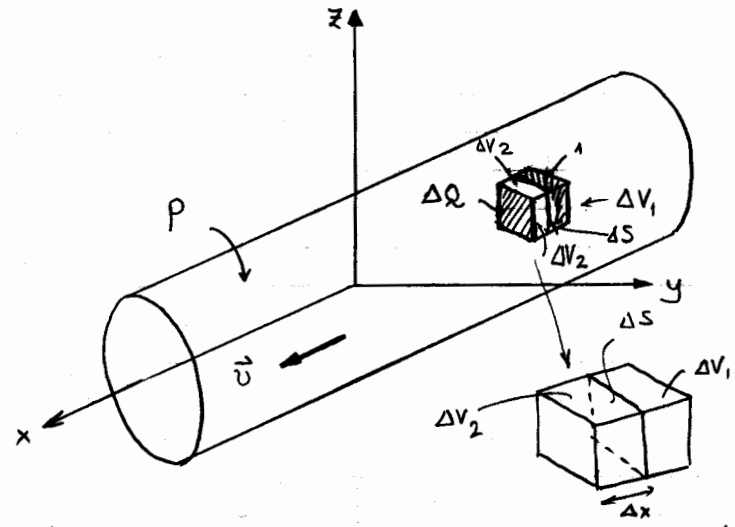
$$= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{z^2+a^2}\, dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{b} r_T\, dr_T =$$

$$= \rho_0 \left[a \tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] 2\pi\, \frac{b^2}{2} = \rho_0\, a\pi\, 2\pi\, \frac{b^2}{2} = \rho_0 \pi^2 a b^2$$

Κατανομές Ηλεκτρικού Ρεύματος:

Η κίνηση ηλεκτρικών φορτίων προκαλεί ηλεκτρικά ρεύματα.

Έστω κύλινδρος με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Έστω ότι τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία κινούνται κατα μήκος του άξονος των x με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon \hat{i}_x$ (λόγω της δράσης ενός ηλεκτρικού πεδίου). Έστω οτι το φορτίο ΔQ βρίσκεται στόν όγκο $\Delta V_1 = \Delta V$ κατα την χρονική στιγμή t.



Μετά από χρόνο Δt μεταφέρεται στην περιοχή ΔV_2. Έτσι μέσα σε χρόνο Δt το φορτίο $\Delta Q = \rho \Delta V$ πέρασε από την διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των ΔV_1 και ΔV_2.

Έστω $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta S \Delta x}{\Delta t} \Rightarrow I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \Delta S \upsilon_x$ όπου I είναι το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια ΔS. Η μονάδα ηλεκτρικού ρεύματος είναι το Ampere (A).

Χωρική Κατανομή Ηλεκτρικού Ρεύματος:

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι ολοκληρωτικό μέγεθος εφόσον ισοδυναμεί με το φορτίο που διέρχεται από μια δεδομένη επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου. Ένα σημαντικό μέγεθος περιγραφής της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος είναι η χωρική πυκνότητα. Αυτή ορίζεται ως εξής:

$$\vec{J} = \frac{1}{\delta V} \sum_{j \in \delta V} q_j \vec{\upsilon}_j$$

όπου όπως και στην περίπτωση της πυκνότητας φορτίου $\delta V << L^3$ και $\delta V >> \ell^3$, δηλαδή ο όγκος δV είναι μεγάλος από μικροσκοπικά υλίκια αλλά μικρός από μακροσκοπικά υλίκια. Εφαρμόζοντας αυτό τον ορισμό για την περίπτωση του κυλίνδρου της προηγούμενης ενότητος έχουμε:

$$J_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho\, v_x \qquad (A/m^2)$$

Αν γενικεύσουμε την προηγούμενη σχέση στις 3 διαστάσεις τότε $\vec{J} = \rho \vec{v}$.

Αν στο ηλεκτρικό ρεύμα συμμετέχουν συγχρόνως αρνητικά και θετικά φορτία με πυκνότητες ρ_n και ρ_p αντίστοιχα (όπως σε ημιαγωγούς με ηλεκτρόνια και οπές) τότε $\vec{J} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_p \vec{v}_p$ όπου $\vec{v}_n, \vec{v}_p$ οι ταχύτητες των αρνητικών και θετικών φορτίων αντίστοιχα.

Επίσης το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από μια επιφάνεια S δίδεται από την σχέση $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ όπου $d\vec{S} = dS\, \hat{i}_n$ και $\hat{i}_n$ το διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια.

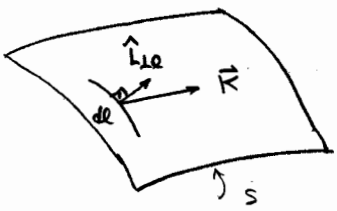
<u>Επιφανειακή κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος:</u>

Όταν τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία παραμένουν συγκεντρωμένα κοντά σε κάποια επιφάνεια δS τότε μπορεί να ορισθεί η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

$$\vec{K} = \frac{1}{\delta S} \sum_{j \in \delta S} q_j \vec{v}_j \qquad (A/m)$$

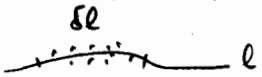
όπου $\vec{v}_j$ είναι εφαπτομενικά στην επιφάνεια δS.

Σε αυτή την περίπτωση το ρεύμα $I = \int_\ell \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp \ell}\, d\ell$



<u>Νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα:</u>

Όταν τα κινούμενα φορτία παραμένουν κοντά σε κάποια γραμμή τότε περιγράφονται από το νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα $i = \frac{1}{\delta \ell} \sum_{j \in \delta \ell} q_j v_j$ και v_j πάντα παραμένει εφαπτομενική της γραμμής ℓ. Για τον λόγο αυτό i είναι βαθμωτό μέγεθος και έχει μονάδα το Ampere (A).



Συνοψίζοντας το στοιχειώδες ηλεκτρικό ρεύμα dI είναι:

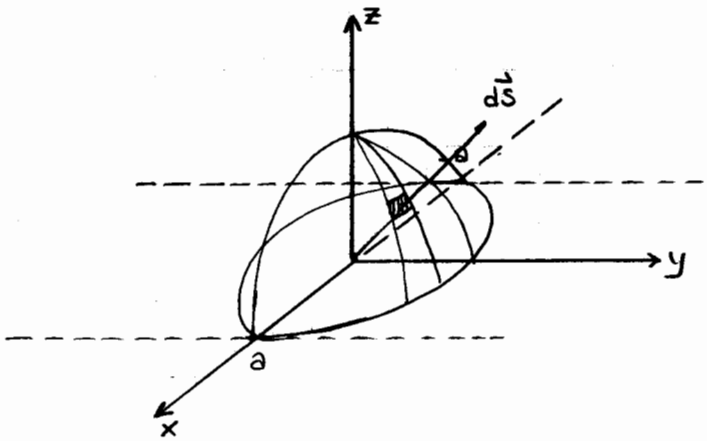
$dI = \vec{J}\cdot d\vec{S}$ για χωρική πυκνότητα ρεύματος

$dI = \vec{K}\cdot \hat{i}_{\ell\perp}\, d\ell$ για επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

$dI = i$ για γραμμοειδές ρεύμα.

και το ολικό ρεύμα είναι αντίστοιχα $I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$, $I=\int_\ell \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp\ell}\, d\ell$, $I=i$.

<u>Παράδειγμα:</u> Στην περιοχή $|x|<a$ υπάρχει η χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \hat{i}_z J_0 (1-x^2/a^2)$. Να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από την ημισφαιρική επιφάνεια $r=a$, $z>0$.



$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$dS = a\sin\theta\, d\varphi\, a\, d\theta = a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$d\vec{S} = \hat{i}_r\, dS$$

$$\hat{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\, \hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{i}_y + \cos\theta\, \hat{i}_z$$

$$\vec{J}\cdot d\vec{S} = \left[\hat{i}_z J_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\cdot\left[a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi\, \hat{i}_r\right]$$

$$\rightarrow \vec{J}\cdot d\vec{S} = J_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, (\hat{i}_z\cdot\hat{i}_r) =$$

$$= J_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) a^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Επιπλέον $x = a\sin\theta\cos\varphi$. Επομένως

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} J_0\left(1-\frac{a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}\right) a^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= J_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (1-\sin^2\theta\cos^2\varphi)\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= J_0 a^2\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\pi\sin\theta\cos\theta\, d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\right) d\theta\right] =$$

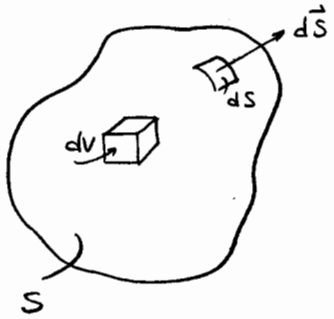
$$= J_0 a^2\left[\left(2\pi\,\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\, d\theta}_{1/4}\left(\frac{1}{2}2\pi\right)\right] = J_0 a^2\left[\pi - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{3}{4}\pi J_0 a^2$$

Νόμος Διατήρησης Ηλεκτρικού Φορτίου: (Εξίσωση συνέχειας)

Το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται και επομένως η αύξηση/μείωση του ηλεκτρικού φορτίου σε κάποια περιοχή είναι ισόποση με την διαφορά μεταξύ των φορτίων που εισήλθαν και εκείνων που εξήλθαν. Επομένως

"Αύξηση. φορτίου σε μιά περιοχή " = − "φορτία που εξήλθαν"

Ας θεωρήσουμε μια κλειστή επιφάνεια S. Μαθηματικά η παραπάνω



συνθήκη μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Αν $Q = \int_V \rho\, dV$ τότε η παραπάνω συνθήκη γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V \rho\, dV\right] = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

ή $$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ο νόμος διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου στην ολοκληρωτική του μορφή. Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της απόκλισης, ($\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$) τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dV \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

και η τελευταία εξίσωση είναι ο νόμος διατήρησης φορτίου στην σημειακή του μορφή (διαφορική) ο οποίος αναφέρεται και σαν εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού ρεύματος.

Ο Κανόνας του Leibniz:

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x,t)dt$ όπου οι συναρτήσεις $A(x)$ και $B(x)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς x και οι συναρτήσεις $f(x,t)$ και $\partial f(x,t)/\partial t$ είναι συνεχείς ως προς x και t. Τότε η παράγωγος dF/dx δίδεται από την εξίσωση:

$$\frac{dF}{dx} = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x, B(x)) \frac{dB}{dx} - f(x, A(x)) \frac{dA}{dx}. \tag{1}$$

Στην τρισδιάστατη περίπτωση ο κανόνας του Leibniz λαμβάνει την κάτωθι μορφή:

$$\frac{d}{dt} F(\vec{r}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial F}{\partial t} dV + \int_{S(t)} F(\vec{r}, t)\ \vec{v}_b \cdot d\vec{S}. \tag{2}$$

όπου $V(t)$ είναι ο όγκος που ολοκληρώνεται η F και $S(t)$ είναι η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο $V(t)$. Το διάνυσμα $\vec{v}_b$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα που κινείται η συνοριακή επιφάνεια $S(t)$ και η στοιχειώδης επιφάνεια $d\vec{S} = \hat{\imath}_S dS$ με $\hat{\imath}_S$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $S(t)$.

Παράδειγμα (Από Σημειώσεις Ι. Βομβορίδη):

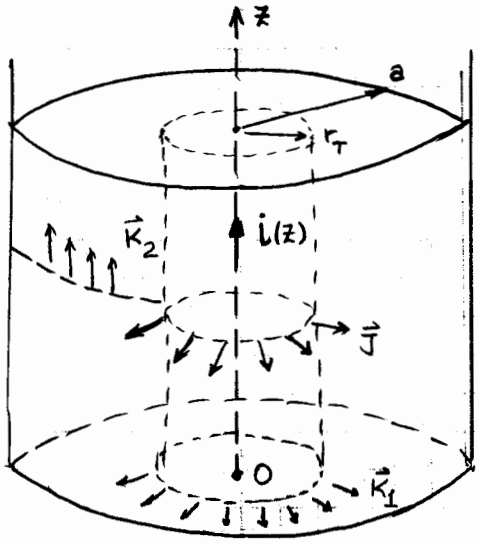
Σε κυλινδρικό σύστημα με άξονα z υπάρχει νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα $I(z) = i_0 e^{-z/h}$ για $r_T = 0$, $z > 0$. Επίσης είναι δυνατόν να υπάρχουν:

1) Στον ημιάπειρο κυλινδρικό χώρο $r_T < a$, $z > 0$ χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{i}_{r_T} J_T$

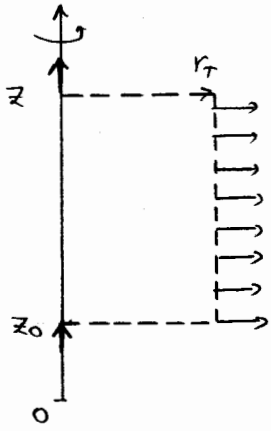
2) Στον επίπεδο δίσκο $r_T < a$, $z = 0$ επιφανειακή πυκνότητα με αμιγώς ακτινική διεύθυνση $\vec{K}_1 = K_1 \hat{i}_{r_T}$

3) Στην ημιάπειρη κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, $z > 0$ επιφανειακή πυκνότητα με αμιγώς αξονική διεύθυνση $\vec{K}_2 = \hat{i}_z K_2$.

Δεν υπάρχουν πουθενά ηλεκτρικά φορτία. Να βρεθούν τα $\vec{J}$, $\vec{K}_1$ και $\vec{K}_2$.



Έστω κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r_T, με $r_T < a$, μεταξύ z_0 και $z > 0$ ($z_0 > 0$).



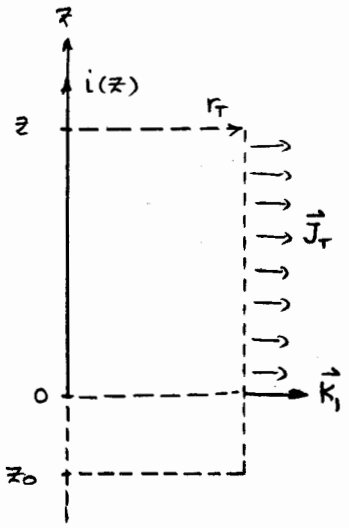
Από τον Νόμο Διατήρησης Φορτίου (ΝΔΦ) έχουμε:

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\cancel{\int_0 \rho\, dV} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow i(z) - i(z_0) + \int_{z_0}^{z} J_T(r_T)\, 2\pi r_T\, dz' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dz} + J_T(r_T, z)\, 2\pi r_T = 0 \Rightarrow J_T(r_T, z) = -\frac{di}{dz}\frac{1}{2\pi r_T} = -\left(-\frac{1}{h} i_0\right) e^{-z/h} \frac{1}{2\pi r_T}$$

$$\rightarrow \vec{J} = J_T(r_T, z)\, \hat{i}_{r_T} = \frac{i_0}{h} e^{-z/h} \frac{1}{2\pi r_T}\, \hat{i}_{r_T}$$

Για την επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_1$ έστω κυλινδρική επιφάνεια με $r_T < a$, μεταξύ $z_0 < 0$ και $z > 0$.



Από τον Ν.Δ.Φ. έχουμε

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

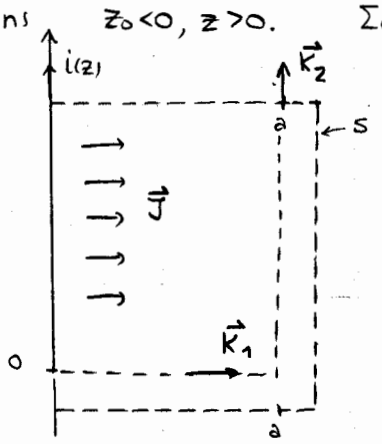
$$i(z) + \int_{z_0}^{z} J_T(r_T, z')\, 2\pi r_T\, dz' + K_1 2\pi r_T = 0$$

$$\Rightarrow i_0 e^{-z/h} + \int_0^z \frac{i_0}{h}\frac{1}{\cancel{2\pi r_T}} e^{-z'/h}\, \cancel{2\pi r_T}\, dz' + K_1 2\pi r_T = 0$$

$$\Rightarrow i_0 e^{-z/h} + i_0(1 - e^{-z/h}) + K_1 2\pi r_T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = -\frac{i_0}{2\pi r_T} \rightsquigarrow \vec{K}_1 = -\frac{i_0}{2\pi r_T}\hat{i}_{rT}$$

Τελικά για να βρεθεί και η K_2 πρέπει η επιφάνεια S να έχει ακτίνα $r_T > a$. Επίσης $z_0 < 0$, $z > 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:



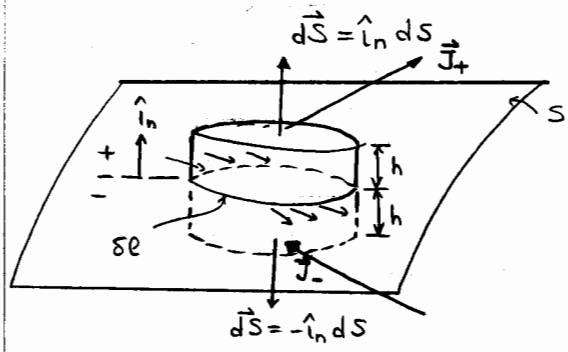
$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

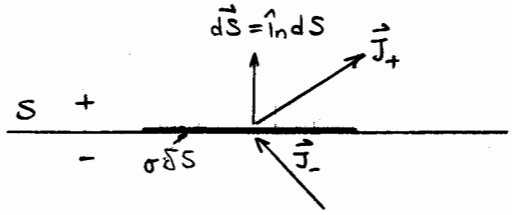
$$i(z) + K_2 2\pi a = 0 \Rightarrow$$

$$K_2 = -\frac{i_0}{2\pi a} e^{-z/h} \Rightarrow$$

$$\vec{K}_2 = -\hat{i}_z \frac{i_0}{2\pi a} e^{-z/h}$$

Νόμος Διατήρησης Φορτίου σε διδιάστατο χώρο (επιφάνεια):





Έστω επιφάνεια S με επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K}$ και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Δεν υπάρχουν σημειακά ή γραμμικά φορτία ούτε γραμμικά ρεύματα. Ο χώρος πάνω (+) και κάτω (−) από την S είναι δυνατόν να έχει χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και ρεύματος $\vec{J}$. Έστω ο κύλινδρος ύψους 2h και επιφάνειας dS όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε τον ΝΔΦ σε αυτό τον κύλινδρο έχουμε:

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{i}_n\cdot\vec{J}_+ dS - \hat{i}_n\cdot\vec{J}_- dS + \vec{J}\cdot\hat{i}_{r_T}\, 2\pi r_T 2h + \int_{\delta l} \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp l}\, dl + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\, dS\, 2h + \sigma\, dS\right] = 0$$

Όταν $h \to 0 \rightsquigarrow \hat{i}_n\cdot(\vec{J}_+ - \vec{J}_-)dS + \int_{\delta l} \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp l}\, dl + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = 0 \Rightarrow$

$$\hat{i}_n\cdot(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) + \frac{1}{dS}\int_{\delta l} \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp l}\, dl + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Όμως $\lim_{dS,\, \delta l \to 0} \frac{1}{dS}\int_{\delta l} \vec{K}\cdot\hat{i}_{\perp l}\, dl = \vec{\nabla}_2\cdot\vec{K}$ = διδιάστατη απόκλιση

Επομένως $\hat{i}_n\cdot(\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla}_2\cdot\vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$

Διδιάστατη απόκλιση $\nabla\cdot\mathbf{K}$ εφαπτομενικού διανύσματος $\mathbf{K} = \mathbf{i}_1 K_1(s_1, s_2) + \mathbf{i}_2 K_2(s_1, s_2)$

Καρτεσιανές	Κυλινδρικές	Σφαιρικές
Επίπεδο $x = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{\partial}{\partial y}K_y + \frac{\partial}{\partial z}K_z$$	Κύλινδρος $r_T = \sigma\tau\alpha\theta. = a$: $$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \varphi}K_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}K_z$$	Σφαίρα $r = \sigma\tau\alpha\theta. = a$: $$\frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(K_\theta \sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}K_\varphi\right)$$
Επίπεδο $y = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{\partial}{\partial z}K_z + \frac{\partial}{\partial x}K_x$$	Ημιεπίπεδο $\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{\partial}{\partial z}K_z + \frac{\partial}{\partial r_T}K_T$$	Κώνος $\theta = \sigma\tau\alpha\theta. = \theta_0$: $$\frac{1}{r\sin\theta_0}\frac{\partial}{\partial\varphi}K_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rK_r\right)$$
Επίπεδο $z = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{\partial}{\partial x}K_x + \frac{\partial}{\partial y}K_y$$	Επίπεδο $z = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{1}{r_T}\left(\frac{\partial}{\partial r_T}\left(r_T K_T\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}K_\varphi\right)$$	Ημιεπίπεδο $\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$: $$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rK_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}K_\theta\right)$$