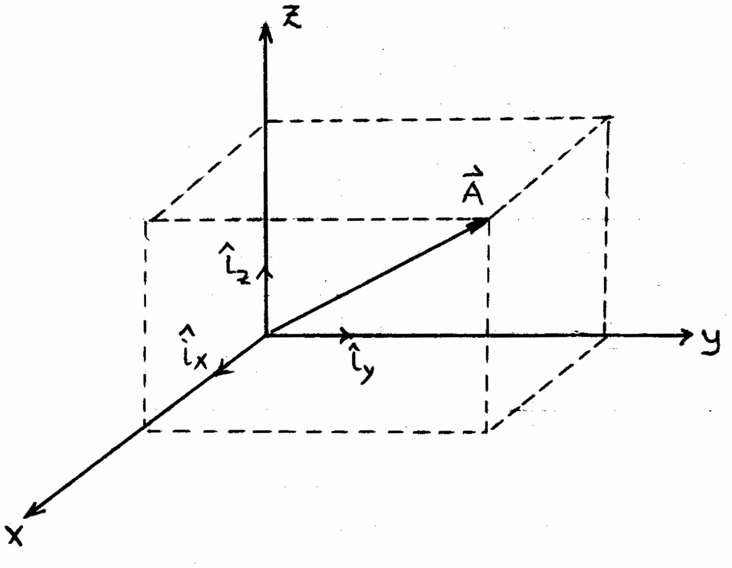
## Εισαγωγή:

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία προκαλούνται από ηλεκτρικά φορτία καθώς και από την κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων (ρεύματα). Το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου που είναι $e = 1{,}602176462 \cdot 10^{-19}$ Coulomb. Τα ηλεκτρικά φορτία μπορούν να περιγραφούν με διάφορες κατανομές φορτίου και τα ηλεκτρικά ρεύματα με αντίστοιχες κατανομές ρευμάτων.

Για την περιγραφή των διαφόρων ποσοτήτων των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων χρησιμοποιούνται τόσο βαθμωτά όσο και διανυσματικά μεγέθη. Στην περίπτωση των διανυσματικών μεγεθών είναι απαραίτητη η χρήση κάποιου συστήματος συντεταγμένων.

## Ανασκόπηση των βασικών συστημάτων συντεταγμένων:

### 1. Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων:




Εστω $\hat{i}_x, \hat{i}_y, \hat{i}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα.

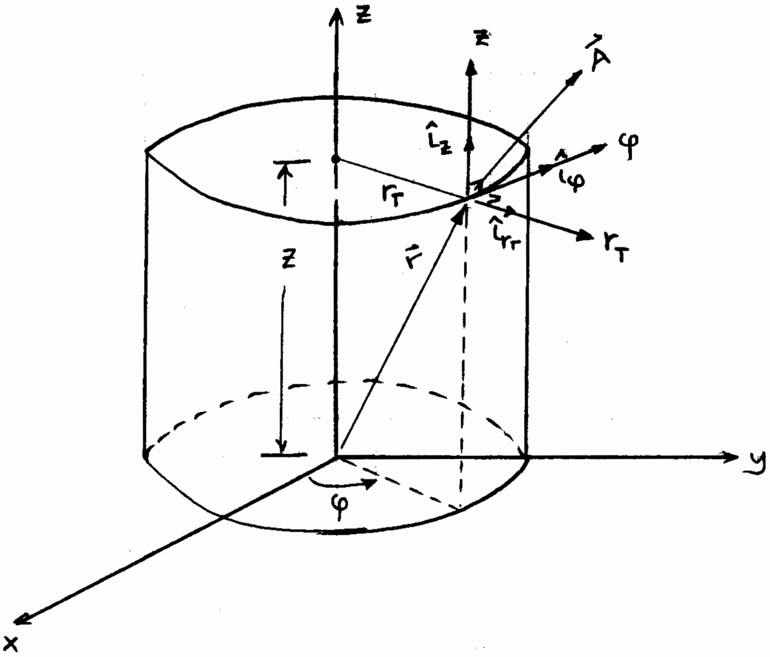
Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$ εκφράζεται ως

$$\vec{A} = A_x \hat{i}_x + A_y \hat{i}_y + A_z \hat{i}_z$$

και το διάνυσμα θέσης

$$\vec{r} = x \hat{i}_x + y \hat{i}_y + z \hat{i}_z$$

## 2. Κυλινδρικό Σύστημα Συντεταγμένων:




Έστω $\hat{i}_{r_T}, \hat{i}_\varphi, \hat{i}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία μεταβάλλονται (εκτός του $\hat{i}_z$) από σημείο σε σημείο.

Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A} = A_{r_T}\hat{i}_{r_T} + A_\varphi \hat{i}_\varphi + A_z \hat{i}_z$ .

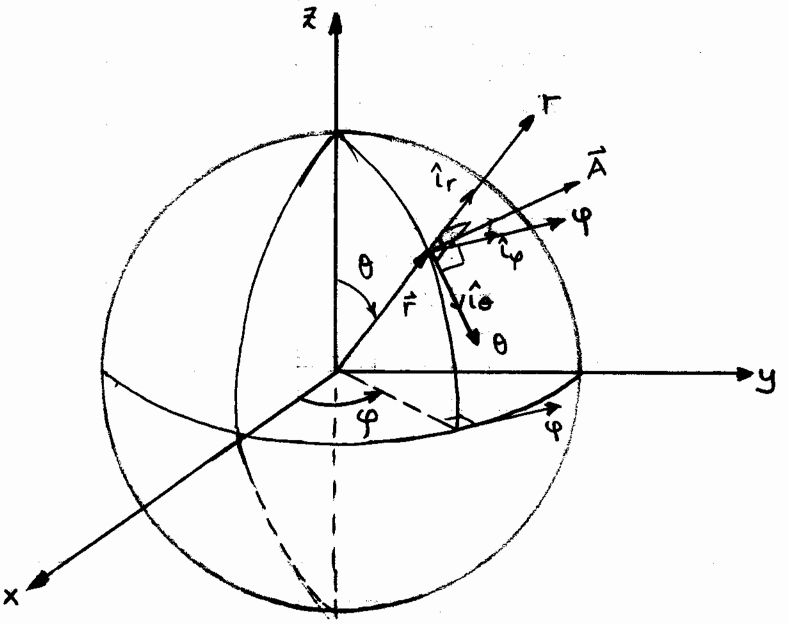
Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = r_T\cos\varphi\,\hat{i}_x + r_T\sin\varphi\,\hat{i}_y + z\,\hat{i}_z =$

$$= r_T\,\hat{i}_{r_T} + z\,\hat{i}_z$$

Σχέσεις με το καρτεσιανό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x &= r_T\cos\varphi \\ y &= r_T\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} r_T &= \sqrt{x^2+y^2} \qquad && r_T \geq 0 \\ \varphi &= \tan^{-1}(y/x) && 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= z && -\infty < z < \infty \end{aligned}\right.$$

## 3. Σφαιρικό Σύστημα Συντεταγμένων:




Έστω $\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\varphi$ τα μοναδιαία διανύσματα τα οποία μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο. Το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$ εκφράζεται από την σχέση:

$$\vec{A} = A_r \hat{i}_r + A_\theta \hat{i}_\theta + A_\varphi \hat{i}_\varphi$$

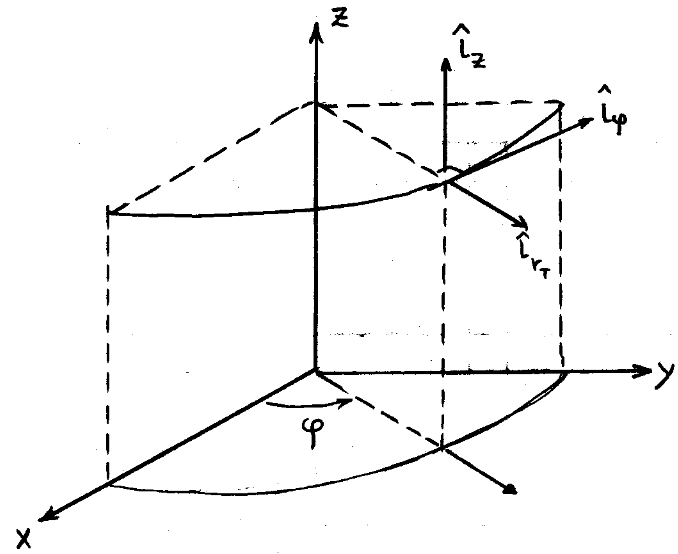
Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = r\hat{i}_r = r\sin\theta\cos\varphi\,\hat{i}_x + r\sin\theta\sin\varphi\,\hat{i}_y + r\cos\theta\,\hat{i}_z$

Σχέσεις με το καρτεσιανό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} & r \geq 0 \\ \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi = \tan^{-1}(y/x) & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array}\right.$$

# Μετασχηματισμοί Συστημάτων Συντεταγμένων:

## 1. Καρτεσιανό ↔ Κυλινδρικό




Σχέσεις μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων:

$$\hat{i}_x = \cos\varphi\,\hat{i}_{r_T} - \sin\varphi\,\hat{i}_\varphi$$

$$\hat{i}_y = \sin\varphi\,\hat{i}_{r_T} + \cos\varphi\,\hat{i}_\varphi$$

$$\hat{i}_z = \hat{i}_z$$

ή

$$\hat{i}_{r_T} = \cos\varphi\,\hat{i}_x + \sin\varphi\,\hat{i}_y$$

$$\hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{i}_x + \cos\varphi\,\hat{i}_y$$

$$\hat{i}_z = \hat{i}_z$$

Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix}\hat{i}_x\\ \hat{i}_y\\ \hat{i}_z\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{C\to R}}\begin{bmatrix}\hat{i}_{r_T}\\ \hat{i}_\varphi\\ \hat{i}_z\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{i}_{r_T}\\ \hat{i}_\varphi\\ \hat{i}_z\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{A_{R\to C}}\begin{bmatrix}\hat{i}_x\\ \hat{i}_y\\ \hat{i}_z\end{bmatrix}$$

Έστω το τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}$:

$$\vec{A} = A_x\hat{i}_x + A_y\hat{i}_y + A_z\hat{i}_z = \begin{bmatrix}A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{i}_x\\ \hat{i}_y\\ \hat{i}_z\end{bmatrix} =$$

$$[A_x \;\; A_y \;\; A_z]\, \tilde{A}_{C\to R} \begin{bmatrix} \hat{i}_{r_T} \\ \hat{i}_\varphi \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = [A_{r_T} \;\; A_\varphi \;\; A_z] \begin{bmatrix} \hat{i}_{r_T} \\ \hat{i}_\varphi \\ \hat{i}_z \end{bmatrix}$$

και $[A_{r_T} \;\; A_\varphi \;\; A_z] = [A_x \;\; A_y \;\; A_z]\, \tilde{A}_{C\to R} \Rightarrow$

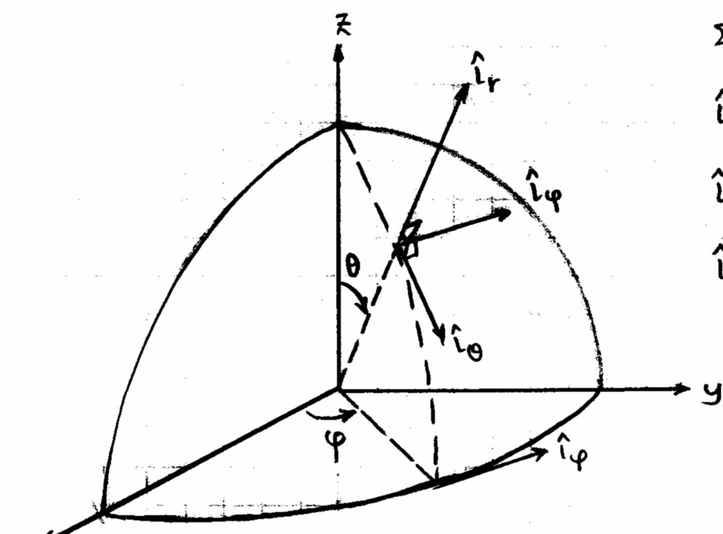
$$\begin{bmatrix} A_{r_T} \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \tilde{A}^{T}_{C\to R} \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \tilde{A}_{R\to C} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας αν $\vec{A}_R = A_x \hat{i}_x + A_y \hat{i}_y + A_z \hat{i}_z = A_{r_T} \hat{i}_{r_T} + A_\varphi \hat{i}_\varphi + A_z \hat{i}_z = \vec{A}_C$

τότε

$$\vec{A}_C = \tilde{A}_{R\to C} \vec{A}_R \quad \text{και} \quad \vec{A}_R = A_{C\to R} \vec{A}_C$$

## 2. Σφαιρικό ⟷ Καρτεσιανό




Σχέσεις μοναδιαίων διανυσμάτων:

$\hat{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\, \hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{i}_y + \cos\theta\, \hat{i}_z$

$\hat{i}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\, \hat{i}_x + \cos\theta\sin\varphi\, \hat{i}_y - \sin\theta\, \hat{i}_z$

$\hat{i}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{i}_x + \cos\varphi\, \hat{i}_y + \emptyset\, \hat{i}_z$

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_r \\ \hat{i}_\theta \\ \hat{i}_\varphi \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}}^{\tilde{A}_{R\to S}} \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix}$$

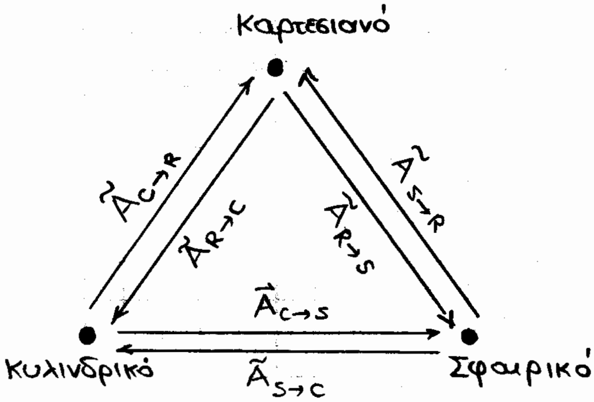
$$\begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_{S\to R}} \begin{bmatrix} \hat{i}_r \\ \hat{i}_\theta \\ \hat{i}_\varphi \end{bmatrix}$$

Όπου $\tilde{A}_{R\to S} = \tilde{A}^{T}_{S\to R}$ και για τό τυχαίο διάνυσμα $\vec{A}_R = \vec{A}_S$

(εκφρασμένο στο καρτεσιανό ή σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων)

έχουμε $\vec{A}_R = \tilde{A}_{S\to R}\,\vec{A}_S$ και $\vec{A}_S = \tilde{A}_{R\to S}\,\vec{A}_s$

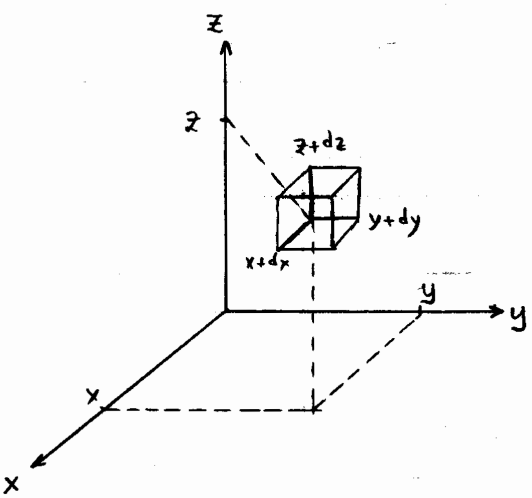
Συνοψίζοντας,

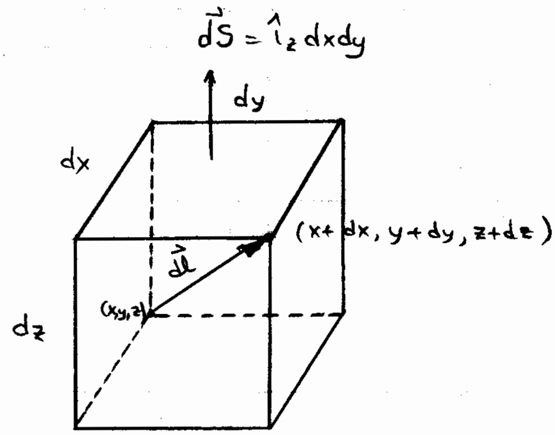



Όπου $\tilde{A}_{C\to S} = \tilde{A}_{C\to R}\,\tilde{A}_{R\to S}$ και $\tilde{A}_{S\to C} = \tilde{A}_{S\to R}\,\tilde{A}_{R\to C}$

## Διαφορικά Στοιχεία:

### 1. Καρτεσιανό Σύστημα:



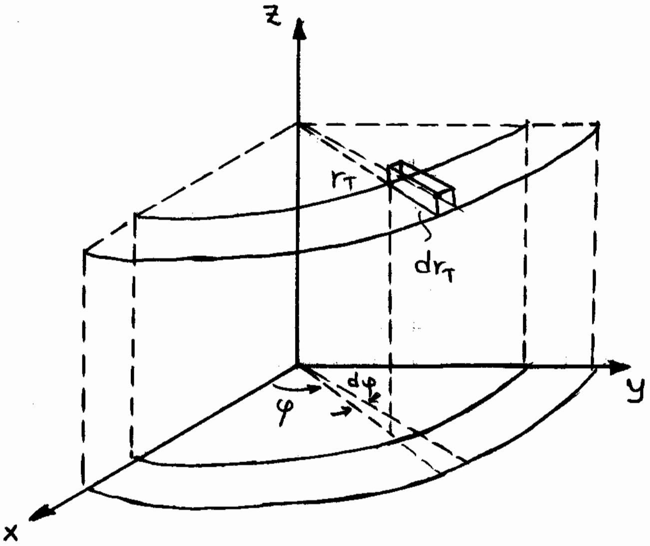



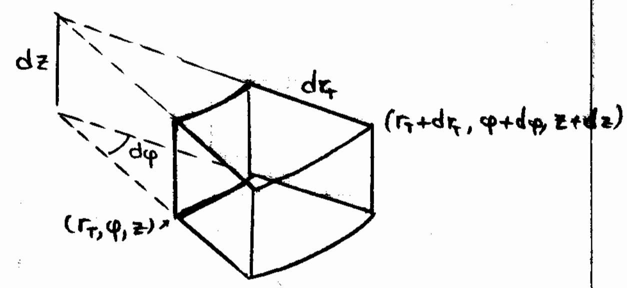

Διαφορικό μήκος : $\vec{dl} = dx\,\hat{i}_x + dy\,\hat{i}_y + dz\,\hat{i}_z$

Διαφορική Επιφάνεια : $\vec{dS} = \pm dx\,dy\,\hat{i}_z$ ή $\pm dx\,dz\,\hat{i}_y$, ή $\pm dy\,dz\,\hat{i}_x$

Διαφορικός Όγκος : $dV = dx\,dy\,dz$

## 2. Κυλινδρικό Σύστημα:



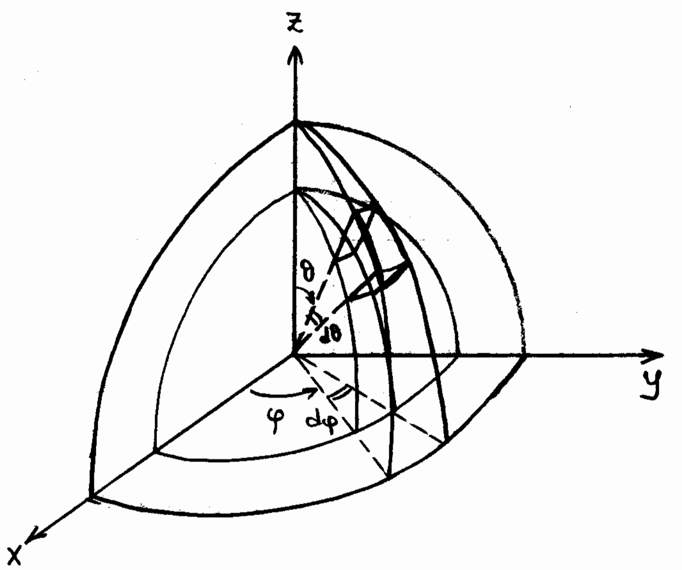



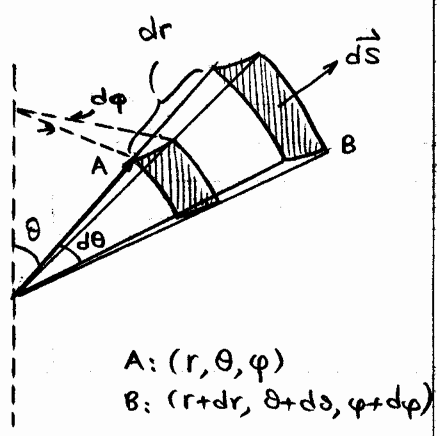

Διαφορικό μήκος: $\vec{dl} = dr_T\,\hat{i}_{r_T} + r_T\,d\varphi\,\hat{i}_\varphi + dz\,\hat{i}_z$

Διαφορική επιφάνεια: $d\vec{S} = \pm\, r_T\,d\varphi\,dz\,\hat{i}_{r_T}$ ή $\pm\, r_T\,d\varphi\,dr_T\,\hat{i}_z$ ή $\pm\, dz\,dr_T\,\hat{i}_\varphi$

Διαφορικός όγκος: $dV = r_T\,dr_T\,d\varphi\,dz$

## 3. Σφαιρικό Σύστημα:




Διαφορικό μήκος: $\vec{dl} = dr\,\hat{i}_r + r\,d\theta\,\hat{i}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{i}_\varphi$

Διαφορική επιφάνεια: $d\vec{S} = \pm\, r\,d\theta\, r\sin\theta\,d\varphi\,\hat{i}_r$, ή $r\sin\theta\,d\varphi\,dr\,\hat{i}_\theta$

ή $\pm\, r\,d\theta\,dr\,\hat{i}_\varphi$

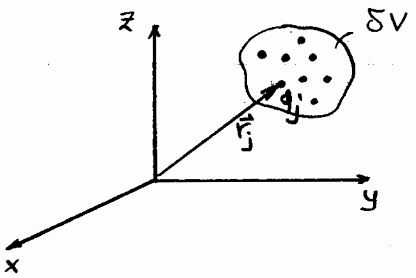
Διαφορικός όγκος: $dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

# Ηλεκτρικό Φορτίο και Πυκνότητες Φορτίου:

Το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου $(-e)$ και του πρωτονίου $(+e)$ όπου $e = 1.602176462 \cdot 10^{-19}$ Coulomb. Όλα τα φορτία είναι ακέραια πολλαπλάσια του $\pm e$. Τα ηλεκτρικά φορτία διατηρούνται και είναι ανεξάρτητα από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.

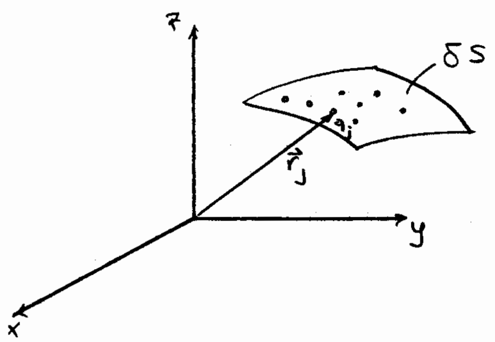
## Κατανομές Ηλεκτρικού Φορτίου:

### 1. Χωρική Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:




Έστω όγκος $\delta V << L^3$ όπου $L$ η μακροσκοπική διάσταση του συστήματος. Επιπλέον $\delta V >> \ell^3$ όπου $\ell$ η μικροσκοπική διάσταση του συστήματος (δηλαδή οι διαστάσεις των ατόμων και οι μεταξύ τους αποστάσεις). Μπορούμε να ορίσουμε το πηλίκο $\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta V} \sum_{j \in \delta V} q_j = \frac{\delta Q}{\delta V} = \frac{dQ}{dV}$ ως την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου με μονάδες σε $C/m^3$. Ο περιορισμός $\delta V >> \ell^3$ διασφαλίζει ότι ο όγκος $\delta V$ θα περιέχει μεγάλο αριθμό φορτισμένων σωματιδίων ώστε το πηλίκο $\delta Q/\delta V$ να μην έχει έντονες χωρικές διακυμάνσεις.

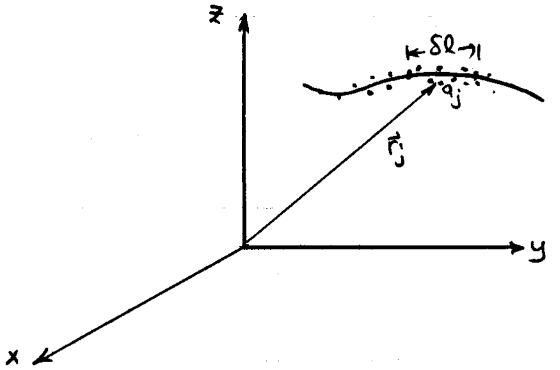
### 2. Επιφανειακή Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:




Όταν τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία είναι κατανεμημένα πάνω σε μία επιφάνεια τότε μπορούμε αντίστοιχα με την χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου να ορίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ως:

$$\sigma(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta S} \sum_{j \in \delta S} q_j = \frac{\delta Q}{\delta S} = \frac{dQ}{dS}$$ με μονάδα $C/m^2$.

## 3. Γραμμική Πυκνότητα Ηλεκτρικού Φορτίου:




Όταν τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία είναι κατανεμημένα πολύ κοντά κατά μήκος μιάς γραμμής, τότε μπορούμε να ορίσουμε την γραμμική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ως εξής:

$$\lambda(\vec{r},t) = \frac{1}{\delta \ell}\sum_{j \in \delta \ell} q_j = \frac{\delta Q}{\delta \ell} = \frac{dQ}{d\ell}$$ με μονάδα C/m.

Επομένως το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο μπορεί να γραφεί ως:

$dQ = q_j$ όταν έχουμε σημειακή κατανομή φορτίου

$dQ = \rho\, dV$ όταν έχουμε χωρική κατανομή φορτίου

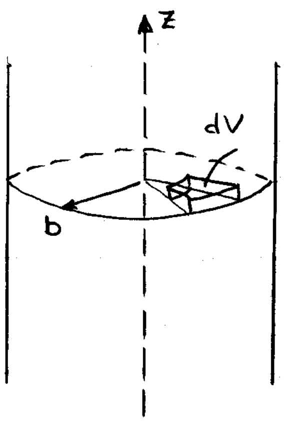
$dQ = \sigma\, dS$ όταν έχουμε επιφανειακή κατανομή φορτίου

$dQ = \lambda\, d\ell$ όταν έχουμε γραμμική κατανομή φορτίου.

Το ολικό φορτίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$Q = \left\{ \sum_j q_j ,\ \int_V \rho\, dV,\ \int_S \sigma\, dS,\ \int_\ell \lambda\, d\ell \right\}$$ ανάλογα με την κατανομή.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το ολικό φορτίο Q που περιέχεται στον κύλινδρο $x^2+y^2 < b^2$ με άπειρο μήκος $(-\infty < z < +\infty)$, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει χωρική πυκνότητα φορτίου ίση με $\rho = \rho_0 \frac{a^2}{z^2+a^2}$




Το ολικό φορτίο μπορεί να βρεθεί ως εξής:

$$Q = \int_V \rho\, dV = \int_{z=-\infty}^{+\infty}\int_{r_T=0}^{b}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\rho_0 \frac{a^2}{z^2+a^2}\right)(r_T\, d\varphi\, dr_T\, dz) =$$

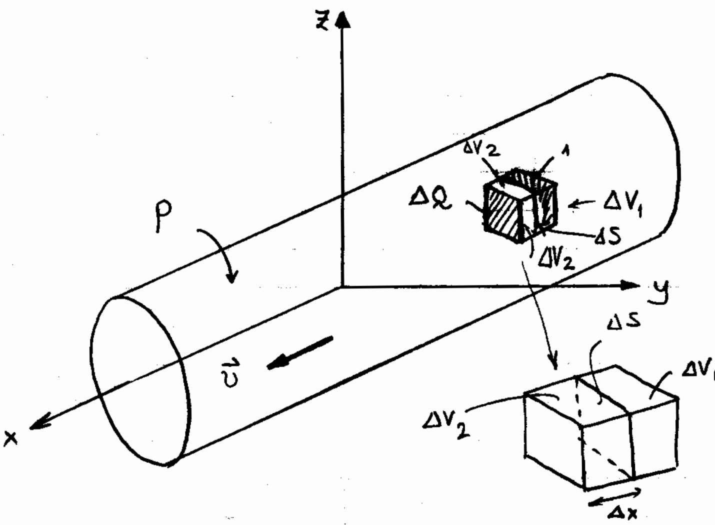
$$= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{z^2+a^2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r_T\, dr_T =$$

$$= \rho_0 \left[ a \tan^{-1}\left(\frac{z}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] 2\pi \frac{b^2}{2} = \rho_0\, a\pi\, 2\pi \frac{b^2}{2} = \rho_0 \pi^2 a b^2$$

## Κατανομές Ηλεκτρικού Ρεύματος:

Η κίνηση ηλεκτρικών φορτίων προκαλεί ηλεκτρικά ρεύματα.

Έστω κύλινδρος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho$. Έστω ότι τα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία κινούνται κατα μήκος του άξονος των $x$ με ταχύτητα $\vec{u}=u\hat{i}_x$ (λόγω της δράσης ενός ηλεκτρικού πεδίου). Εστω οτι το φορτίο $\Delta Q$ βρίσκεται στόν όγκο $\Delta V_1=\Delta V$ κατα την χρονική στιγμή $t$.




Μετά από χρόνο $\Delta t$ μεταφέρεται στην περιοχή $\Delta V_2$. Έτσι μέσα σε χρόνο $\Delta t$ το φορτίο $\Delta Q=\rho\,\Delta V$ πέρασε από την διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των $\Delta V_1$ και $\Delta V_2$.

Έστω $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\dfrac{\rho\,\Delta V}{\Delta t}=\dfrac{\rho\,\Delta S\,\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=\rho\,\Delta S\,u_x$ όπου $I$ είναι το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια $\Delta S$. Η μονάδα ηλεκτρικού ρεύματος είναι το Ampere (A).

## Χωρική κατανομή Ηλεκτρικού Ρεύματος:

Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι ολοκληρωτικό μέγεθος εφόσον ισοδυναμεί με το φορτίο που διέρχεται από μια δεδομένη επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου. Ένα σημαντικό μέγεθος περιγραφής της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος είναι η χωρική πυκνότητα. Αυτή ορίζεται ως εξής:

$$\vec{J}=\frac{1}{\delta V}\sum_{j\in\delta V} q_j\vec{u}_j$$

όπου όπως και στην περίπτωση της πυκνότητας φορτίου $\delta V \ll L^3$ και $\delta V \gg \ell^3$, δηλαδή ο όγκος $\delta V$ είναι μεγάλος από μικροσκοπική κλίμακα αλλά μικρός από μακροσκοπική κλίμακα. Εφαρμόζοντας αυτό τον ορισμό για την περίπτωση του κυλίνδρου της προηγούμενης ενότητος έχουμε:

$$J_x = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho\, u_x \qquad (A/m^2)$$

Αν γενικεύσουμε την προηγούμενη σχέση στις 3 διαστάσεις τότε $\vec{J} = \rho \vec{u}$.

Αν στο ηλεκτρικό ρεύμα συμμετέχουν συγχρόνως αρνητικά και θετικά φορτία με πυκνότητες $\rho_n$ και $\rho_p$ αντίστοιχα (όπως σε ημιαγωγούς με ηλεκτρόνια και οπές) τότε $\vec{J} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_p \vec{v}_p$ όπου $\vec{v}_n, \vec{v}_p$ οι ταχύτητες των αρνητικών και θετικών φορτίων αντίστοιχα.

Επίσης το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από μια επιφάνεια S δίδεται από την σχέση $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ οπου $d\vec{S} = dS\, \hat{i}_n$ και $\hat{i}_n$ το διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια.

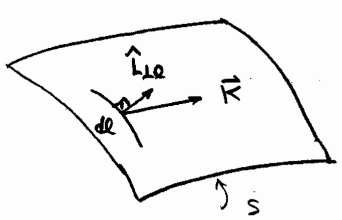
**Επιφανειακή κατανομή Ηλεκτρικού ρεύματος:**

Όταν τα κινούμενα ηλεκτρικά φορτία παραμένουν συγκεντρωμένα κοντά σε κάποια επιφάνεια δS τότε μπορεί να ορισθεί η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

$$\vec{K} = \frac{1}{\delta S} \sum_{j \in \delta S} q_j \vec{v}_j$$

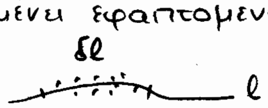
όπου $\vec{v}_j$ είναι εφαπτομενικά στην επιφάνεια δS.
(A/m)

Σε αυτή την περίπτωση το ρεύμα $I = \int_l \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp l}\, dl$




**Νηματοειδές Ηλεκτρικό Ρεύμα:**

Όταν τα κινούμενα φορτία παραμένουν κοντά σε κάποια γραμμή τότε περιγράφονται από το νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα $i = \frac{1}{\delta l} \sum_{j \in \delta l} q_j v_j$ και $v_j$ πάντα παραμένει εφαπτομενική της γραμμής $l$. Για τον λόγο αυτό $i$ είναι βαθμωτό




μέγεθος και έχει μονάδα το Ampere (A).

Συνοψίζοντας το στοιχειώδες ηλεκτρικό ρεύμα $dI$ είναι:

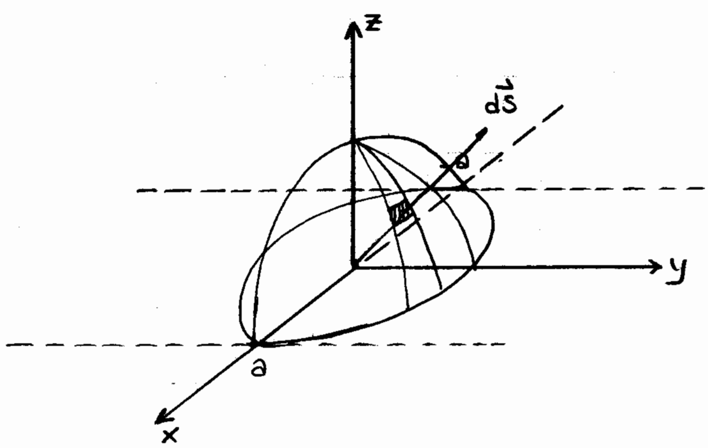
$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$ για χωρική πυκνότητα ρεύματος

$dI = \vec{K} \cdot \hat{i}_{e\perp}\, dl$ για επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

$dI = i$ για νηματοειδές ρεύμα.

και το ολικό ρεύμα είναι αντίστοιχα $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, $I = \int_l \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp l}\, dl$, $I = i$.

<u>Παράδειγμα:</u> Στην περιοχή $|x| < a$ υπάρχει η χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = \hat{i}_z J_0 (1 - x^2/a^2)$. Να βρεθεί το ολικό ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από την ημισφαιρική επιφάνεια $r = a$, $z > 0$.




$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$dS = a\sin\theta\, d\varphi\, a\, d\theta = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$d\vec{S} = \hat{i}_r\, dS$$

$$\hat{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\, \hat{i}_x + \sin\theta\sin\varphi\, \hat{i}_y + \cos\theta\, \hat{i}_z$$

$$\vec{J} \cdot d\vec{S} = \left[\hat{i}_z J_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right] \cdot \left[a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{i}_r\right]$$

$$\rightarrow \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, (\hat{i}_z \cdot \hat{i}_r) =$$

$$= J_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) a^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Επιπλέον $x = a\sin\theta\cos\varphi$. Επομένως

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} J_0 \left(1 - \frac{a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2}\right) a^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= J_0 a^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi) \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= J_0 a^2 \left[\int_{\theta=0}^{\pi/2} 2\pi \sin\theta\cos\theta\, d\theta - \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) d\theta\right] =$$

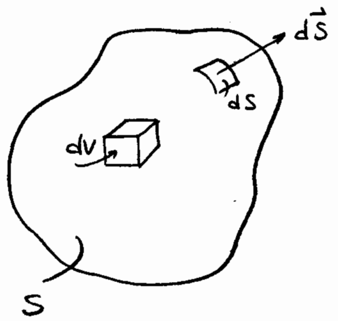
$$= J_0 a^2 \left[\left(2\pi\, \frac{1}{2}\right) - \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta}_{1/4} \left(\frac{1}{2} 2\pi\right)\right] = J_0 a^2 \left[\pi - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{3}{4}\pi J_0 a^2$$

Νόμος Διατήρησης Ηλεκτρικού Φορτίου: (Εξίσωση συνέχειας)

Το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται και επομένως η αύξηση/μείωση του ηλεκτρικού φορτίου σε κάποια περιοχή είναι ισόποση με την διαφορά μεταξύ των φορτίων που εισήλθαν και εκείνων που εξήλθαν. Επομένως

"Αύξηση φορτίου σε μιά περιοχή" = − "φορτία που εξήλθαν"

Ας θεωρήσουμε μια κλειστή επιφάνεια $S$. Μαθηματικά η παραπάνω




συνθήκη μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Αν $Q = \int_V \rho\, dV$ τότε η παραπάνω συνθήκη γράφεται ως

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V \rho\, dV\right] = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

ή

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ο νόμος διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου στην ολοκληρωτική του μορφή. Αν χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της απόκλισης, ( $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$ ) τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\, dV \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

και η τελευταία εξίσωση είναι ο νόμος διατήρησης φορτίου στην σημειακή του μορφή (διαφορική) ο οποίος αναφέρεται και σαν εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού ρεύματος.

<u>Παράδειγμα (Από Σημειώσεις Ι. Βομβορίδη):</u>

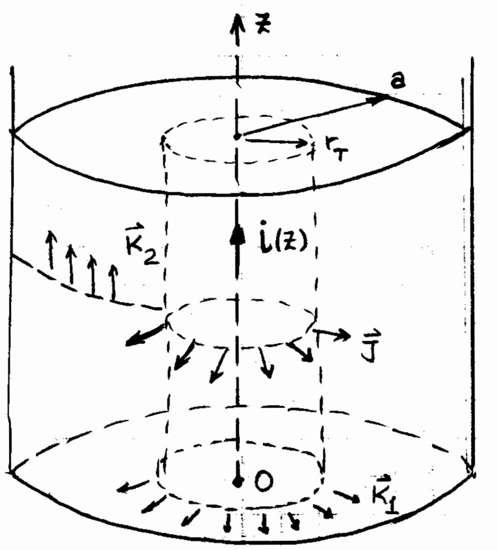
Σε κυλινδρικό σύστημα με άξονα $z$ υπάρχει νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα $I(z) = i_0 e^{-z/h}$ για $r_T = 0$, $z > 0$. Επίσης είναι δυνατόν να υπάρχουν:

1) Στον ημιάπειρο κυλινδρικό χώρο $r_T < a$, $z > 0$ χωρική πυκνότητα $\vec{J} = \hat{i}_{r_T} J_T$

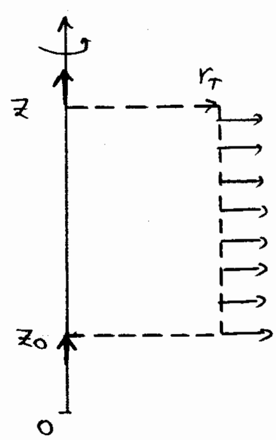
2) Στον επίπεδο δίσκο $r_T < a$, $z = 0$ επιφανειακή πυκνότητα με αμιγώς ακτινική διεύθυνση $\vec{K}_1 = K_1 \hat{i}_{r_T}$

3) Στην ημιάπειρη κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$, $z > 0$ επιφανειακή πυκνότητα με αμιγώς αξονική διεύθυνση $\vec{K}_2 = \hat{i}_z K_2$.

Δεν υπάρχουν πουθενά ηλεκτρικά φορτία. Να βρεθούν τα $\vec{J}$, $\vec{K}_1$ και $\vec{K}_2$.




Έστω κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας $r_T$, με $r_T < a$, μεταξύ $z_0$ και $z > 0$ $(z_0 > 0)$.



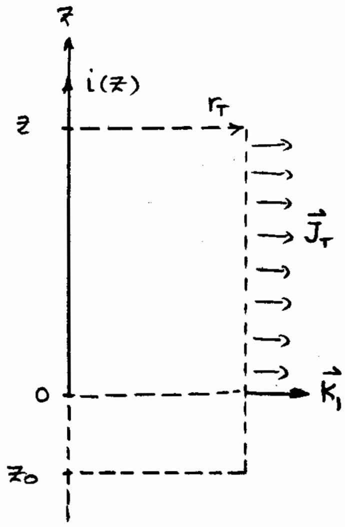

Από τον Νόμο Διατήρησης Φορτίου (ΝΔΦ) έχουμε:

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\cancel{\int_O \rho\, dV} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow i(z) - i(z_0) + \int_{z_0}^{z} J_T(r_T)\, 2\pi r_T\, dz' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dz} + J_T(r_T, z)\, 2\pi r_T = 0 \Rightarrow J_T(r_T, z) = -\frac{di}{dz}\frac{1}{2\pi r_T} = -\left(-\frac{1}{h} i_0\right) e^{-z/h}\frac{1}{2\pi r_T}$$

$$\rightarrow \vec{J} = J_T(r_T, z)\,\hat{i}_{r_T} = \frac{i_0}{h} e^{-z/h}\frac{1}{2\pi r_T}\,\hat{i}_{r_T}$$

Για την επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K}_1$ έστω κυλινδρική επιφάνεια με $r_T < a$, μεταξύ $z_0 < 0$ και $z > 0$.




Από τον Ν.Δ.Φ. έχουμε

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

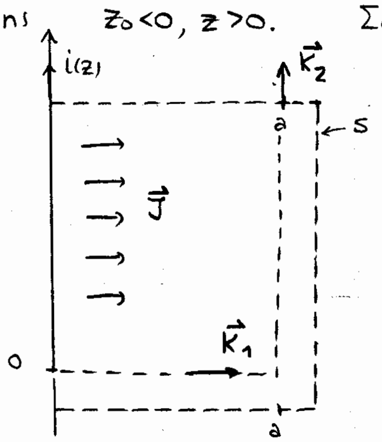
$$i(z) + \int_{z_0}^{z} J_T(r_T, z')\, 2\pi r_T\, dz' + K_1 2\pi r_T = 0$$

$$\Rightarrow i_0 e^{-z/h} + \int_0^z \frac{i_0}{h}\frac{1}{\cancel{2\pi r_T}} e^{-z'/h}\, \cancel{2\pi r_T}\, dz' + K_1 2\pi r_T = 0$$

$$\Rightarrow i_0 e^{-z/h} + i_0(1 - e^{-z/h}) + K_1 . 2\pi r_T = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = -\frac{i_0}{2\pi r_T} \Rightarrow \vec{K}_1 = -\frac{i_0}{2\pi r_T}\hat{i}_{r_T}$$

Τελικά για να βρεθεί και η $K_2$ πρέπει η επιφάνεια S να έχει ακτίνα $r_T > a$. Επίσης $z_0 < 0$, $z > 0$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:



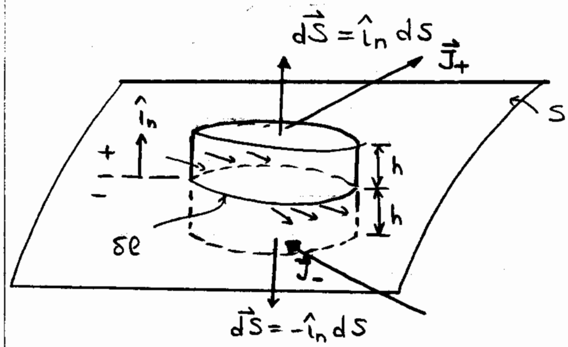

$$\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$$

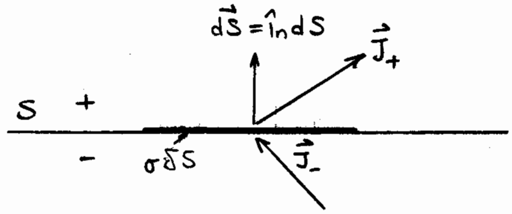
$$i(z) + K_2 2\pi a = 0 \Rightarrow$$

$$K_2 = -\frac{i_0}{2\pi a} e^{-z/h} \Rightarrow$$

$$\vec{K}_2 = -\hat{i}_z \frac{i_0}{2\pi a} e^{-z/h}$$

## Νόμος Διατήρησης Φορτίου σε διδιάστατο χώρο (επιφάνεια)!




Έστω επιφάνεια S με επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K}$ και επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Δεν υπάρχουν σημειακά η γραμμικά φορτία ούτε νηματοειδή ρεύματα. Ο χώρος πάνω (+) και κάτω (−) από την S είναι δυνατόν να έχει χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και ρεύματος $\vec{J}$. Έστω ο κύλινδρος ύψους 2h και επιφάνειας dS όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θεωρήσουμε τον ΝΔΦ σε αυτό τον κύλινδρο έχουμε:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} Q = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{i}_n \cdot \vec{J}_+ dS - \hat{i}_n \cdot \vec{J}_- dS + \vec{J} \cdot \hat{i}_{r_T} 2\pi r_T 2h + \int_{\delta\ell} \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp\ell} \, d\ell + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \, dS \, 2h + \sigma \, dS\right] = 0$$

Όταν $h \to 0 \sim$ $\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) dS + \int_{\delta\ell} \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp\ell} \, d\ell + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = 0 \Rightarrow$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) + \frac{1}{dS} \int_{\delta\ell} \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp\ell} \, d\ell + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Όμως $\lim_{dS, \delta\ell \to 0} \frac{1}{dS} \int_{\delta\ell} \vec{K} \cdot \hat{i}_{\perp\ell} \, d\ell = \vec{\nabla} \cdot \vec{K}$ = διδιάστατη απόκλιση

Επομένως $\hat{i}_n \cdot (\vec{J}_+ - \vec{J}_-) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{K} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$