

Συστήματα αναφοράς

- Ένα τρισδιάστατο *σύστημα αναφοράς* αποτελείται από
- Ένα σημείο του χώρου O - την αρχή του συστήματος αναφοράς.
- Τρία ανεξάρτητα (μη συνεπίπεδα) μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}$, και $\hat{k}$ στο σημείο O , τα οποία αποτελούν την διανυσματική βάση του συστήματος αναφοράς
 - Συνήθως χρησιμοποιείται ένα δεξιόστροφο σύστημα: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$



Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Πίνακας στροφής

- Μετασχηματίζει ένα διάνυσμα από ένα ΣΑ σε ένα άλλο
- Αποτελείται από κατευθύνοντα συνημίτονα (*direction cosine matrix, DCM*)
 - από τα εσωτερικά γινόμενα των συνιστωσών των μοναδιαίων διανυσμάτων

$$C_B^A = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_3 \\ \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_3 \\ \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{r}]_B = C_B^A [\vec{r}]_A$$

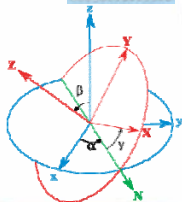
$$C_B^A C_A^B = C_A^B C_B^A = \mathbf{I}$$



Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Πίνακες στροφών Euler

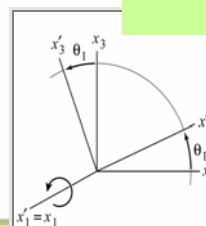
- Leonhard Euler
- Ο προσανατολισμός ενός οποιουδήποτε ΣΑ στο χώρο (π.χ. xyz) μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση τριών περιστροφών περί τους άξονες ενός σταθερού συστήματος αναφοράς (π.χ. xyz) - *Euler rotation theorem*
 - α, β, γ - Γωνίες Euler



Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Στροφή περί τον 1° άξονα

$$R_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

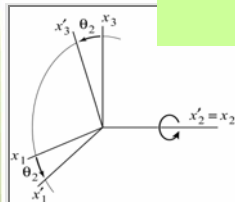


$$\mathbf{v}_{i'} = \mathbf{R}_3(\theta_1) \mathbf{v}_i$$

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Γωνίες Euler - περί τον 2° άξονα

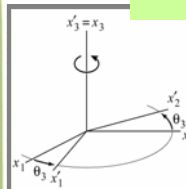
$$R_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$



Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Στροφή περί τον 3° άξονα

$$R_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{v}_{i'} = \mathbf{R}_3(\theta_1) \mathbf{v}_i$$

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

Περιγραφή του πίνακα στροφής

- Ο πίνακας στροφής από μια απλή περιστροφή εκφράζεται ως $R_i(\theta_i)$ όπου ο δείκτης 'i' υποδηλώνει τον άξονα γύρω από τον οποίο γίνεται η στροφή, και ο δείκτης 'j' στη γωνία θ ορίζει ποια είναι η σειρά της συγκεκριμένης στροφής ανάμεσα στις τρεις διαδοχικές γωνίες Euler
- Μετάβαση από τη αρχική θέση των διανυσμάτων βάσης του αρχικού συστήματος στη νέα θέση με τη βοήθεια τριών διαδοχικών στροφών γύρω από τους 3 άξονες (1,2,3), κατά αντίστοιχες γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ δίνεται από το συνολικό πίνακα στροφών

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)$$

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

Παράδειγμα: στροφές Euler 3-1-3

- Πρώτα $R_3(\phi)$ μετά $R_1(\theta)$ μετά $R_3(\psi)$

$$v_i' = R_3(\psi)v_i$$

$$C_{313}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_i'' = R_1(\theta)v_i' = R_1(\theta)R_3(\psi)v_i$$

$$C_{313}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$v_b = R_3(\phi)v_i'' = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi)v_i$$

Σειρά εφαρμογής στοιχειωδών στροφών:
από τα δεξιά προς στα αριστερά

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

Πίνακας στροφών -> γωνίες Euler

- Εάν έχουμε τα 9 στοιχεία του πίνακα στροφών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις σχετικές γωνίες Euler, πχ.

$$R^{oi} = \begin{bmatrix} -su \, c\Omega - cu \, ci \, s\Omega & -su \, s\Omega + cu \, ci \, c\Omega & cu \, si \\ -si \, s\Omega & si \, c\Omega & -ci \\ -cu \, c\Omega + su \, ci \, s\Omega & -cu \, s\Omega - su \, ci \, c\Omega & -su \, si \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} i &= \cos^{-1}(-R_{23}) \\ u &= \tan^{-1}(-R_{33}/R_{13}) \\ \Omega &= \tan^{-1}(-R_{21}/R_{22}) \end{aligned}$$

- Απαραίτητος ο έλεγχος του κατάλληλου τεταρτημόριου / χρήση της συνάρτησης atan2(y,x)

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

Πίνακας στροφών -> συνδυασμοί

xyz	$\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & s_1 s_2 \\ c_3 s_2 & c_1 c_3 - s_1 s_3 & -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 \\ s_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_3 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix}$	xyx	$\begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 s_2 + c_1 s_3 \\ s_2 & c_1 c_2 & -c_2 s_1 \\ -c_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix}$
yxz	$\begin{bmatrix} c_2 & s_1 s_2 & c_1 s_2 \\ s_2 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 \\ -c_3 s_2 & c_2 c_3 s_1 + c_1 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix}$	zyx	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 & c_2 & -c_1 c_2 \\ -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 & c_3 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix}$
yxz	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_3 & c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 \\ s_1 s_2 & c_2 & -c_1 c_2 \\ -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 & c_3 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 \end{bmatrix}$	yzx	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_2 & c_1 c_2 \\ c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 & c_2 c_3 & c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 \\ c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_3 s_2 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 \end{bmatrix}$
zxy	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_2 c_3 s_1 - c_1 s_3 & c_3 s_2 \\ c_3 s_1 + c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & s_2 s_3 \\ -c_1 s_2 & s_1 s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	zyx	$\begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_2 & c_1 c_2 \\ c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -c_2 s_3 \\ s_1 s_3 - c_1 c_3 s_2 & c_3 s_1 s_2 + c_1 s_3 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$
zxz	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_3 s_1 - c_1 c_2 s_3 & s_2 s_3 \\ c_2 c_3 s_1 + c_1 s_3 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_3 s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 & c_2 \end{bmatrix}$	zxy	$\begin{bmatrix} c_1 c_3 + s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1 & c_2 s_3 \\ c_2 s_1 & c_1 c_2 & -s_2 \\ c_3 s_1 s_2 - c_1 s_3 & c_1 c_3 s_2 + s_1 s_3 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

Γωνίες Cardan

- $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ = διαφορετικές τιμές σε κάθε επιλογή σειράς στροφών - 6 δυνατές περιπτώσεις

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_1(\theta_1)R_2(\theta_2)R_3(\theta_3)$$

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_2(\theta_2)R_3(\theta_3)R_1(\theta_1)$$

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3)R_1(\theta_1)R_2(\theta_2)$$

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)R_3(\theta_3)$$

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_1(\theta_1)R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)$$

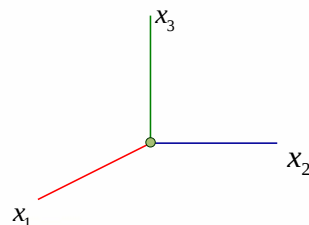
$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)$$

Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

Παράδειγμα

γωνίες Cardan για την περιστροφή

$$R = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)$$



Δ. ΔΕΝΙΚΑΡΑΚΤΩΝ, ΣΑΤΩ, ΕΜΤ

