Τελεστές – Ορισμοί και τυπολόγιο

Τελεστής ανάδελτα (Del operator), ∇ή $\vec{\nabla}$

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Αν f , g είναι βαθμωτές συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z τότε καλούμε **Κλίση** (gradf) του f:

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla f$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

Αν υ είναι διανυσματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z τότε καλούμε divυ **Απόκλιση** του υ

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v}$$

Αν υ είναι διανυσματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z τότε καλούμε curl υ (ή rot υ) **Περιστροφή** του υ

$$\operatorname{curl} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \nabla \times \vec{v}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Αν u είναι διανυσματική συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z τότε

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u}\,\nabla \cdot \vec{v} - \vec{v}\,\nabla \cdot \vec{u} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v}$$

Ο **τελεστής του Laplace** Δ ή ∇^2 ορίζεται ως

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$$

Πράξεις , Ιδιότητες

Αν **A** είναι διανυσματική συνάρτηση και f, g είναι βαθμωτές συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y, z τότε:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$$

$\operatorname{curl}\operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = 0$, η περιστροφή της κλίσεως του f είναι μηδέν.

$\operatorname{div}\operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, η απόκλιση της περιστροφής του **A** είναι μηδέν.

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\Delta fg = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f$$