

**Γεωδαισία IV**

**Μάθημα Εαρινού βου Εξαμήνου, Ακαδ. Έτος 2011-12**  
 ΤΕΠΑΚ, Τμ. Πολιτικών Μηχ./Τοπογράφων Μηχ. Και Μηχ. Γεωπληροφορικής

**Διδάσκων μαθήματος:**

- Δημήτρης Δεληκαράογλου
- Επισκ. Καθ.,
- Αναπλ. Καθ., ΣΑΤΜ, ΕΜΠ

[ddeli@mail.ntua.gr](mailto:ddeli@mail.ntua.gr)

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

**Περιεχόμενα σημερινού/αυριανού μαθήματος**

- Σύνδεση με το προηγούμενο μάθημα και έννοιες από τη Γεωδαισία I
- Γεωδαιτικές προσεγγίσεις για το σχήμα της Γης
- Επιφάνειες αναφοράς και τα μοντέλα τους
  - Φυσική γήινη επιφάνεια
  - Γεωειδές
  - Ελλειψοειδές (Γεωμετρικό/Χωροσταθμικό)
  - Σφαίρα
  - Άλλες επιφάνειες
- Βασικές έννοιες για τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

**Το σύγγραμμα σταθμός για τον ορισμό της Γεωδαισίας**

DIE

MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN

THEORIEEN

DER

**HÖHEREN GEODÄSIE.**

*Friedrich Robert Helmert*  
(1843 - 1917)

EINLEITUNG UND I. THEIL:

DIE MATHEMATISCHEN THEORIEEN.

Αντίγραφο (αγγλική μετάφραση) είναι διαθέσιμο στη Ψηφιακή Βιβλιοθήκη

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

**Η επιστήμη της μοντέρνας Γεωδαισίας**

Το 1880 έδωσε το βασικό ορισμό της Γεωδαισίας ως

*Friedrich Robert Helmert*  
(1843 - 1917)

- “**Η επιστήμη που πραγματεύεται τη μέτρηση και την αντιπροσώπευση (απεικόνιση) της γήινης επιφάνειας**”
- “Geodesy is the science of measuring and portraying the earth's surface”  
[Helmert, F.R. (1880) -Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodasie, p.3].

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

**με άλλα λόγια ...**

**Ο ορισμός από τον Helmert** εμπριέχει τον προσδιορισμό του γήινου πεδίου βαρύτητας **και** την επιφάνεια του ωκεάνιου φλοιού

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

**Μοντέρνα Γεωδαισία**

- Γεωδαισία** = Η επιστήμη με αντικείμενο τρεις βασικούς τομείς:
  - Τον προσδιορισμό της μορφής και των διαστάσεων της Γης → Ακριβή προσδιορισμό σημείων της γήινης φυσικής επιφάνειας (**και** της επιφάνειας του βυθού των ωκεανών)
  - Περιγραφή του εξωτερικού πεδίου βαρύτητας
  - Μελέτη των διαχρονικών μετατοπίσεων σημείων της γήινης επιφάνειας (π.χ. από τεκτονικές μικρομετακινήσεις) και των μεταβολών του πεδίου βαρύτητας της Γης

*Friedrich Robert Helmert*  
(1843 - 1917)

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΟΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Ανώτερη Γεωδαισία

- 1. Τη μορφή (σχήμα) της Γης**  
 → προσδιορισμό του σχήματος **ολόκληρης της γήινης επιφάνειας** ή **ορισμένων τμημάτων της** (και της επιφάνειας του βυθού των ωκεανών)  
 ➤ **κατ' ανάγκην και της τοπογραφίας της επιφάνειας της θάλασσας**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Γεωδαισία

- 2. Το μέγεθος (διαστάσεις) της Γης**  
 → η Γεωδαισία σχετίζεται άμεσα και με άλλες σημαντικές γεωεπιστήμες όπως την Αστρονομία, τη Γεωφυσική, την Τοπογραφία και ιδιαίτερα τη Χαρτογραφία με τις οποίες έχει πολλές επικαλύψεις



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Γεωδαισία

- 3. Το γήινο πεδίο βαρύτητας στην επιφάνεια και στο εξωτερικό του πλανήτη**  
 → μετρήσεις της έντασης της βαρύτητας της → προσδιορισμός της ισοδυναμικής επιφάνειας του βαρυντικού πεδίου που λέγεται **γεωειδές**, που είναι ιδιαίτερα αναγκαίο για τον **ορισμό του μαθηματικού σχήματος της Γης**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Γεωδαισία

- 4. Τον προσδιορισμό σημείων αναφοράς στη γήινη επιφάνεια ή επάνω από αυτή → Ικανοποίηση των ανθρώπινων αναγκών για αναζήτηση και εξερεύνηση**
  - Που βρισκόμαστε
  - Που βρισκόμασταν
  - Που θα βρισκόμαστε όταν φθάσουμε σε κάποιο προορισμό
 ➔ **Απαραίτητο βοήθημα σε εφαρμογές μεταφορών, ενέργειας, περιβάλλον, επικοινωνιών, δίκτυα κοινής οφελείας**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Γεωδαισία

- 5. Τις κινήσεις και τη δυναμική συμπεριφορά της Γης ως ουράνιο σώμα** → περιφορά γύρω από τον Ήλιο, περιστροφή γύρω από τον εαυτό της, κίνηση του γήινου πόλου και του άξονα περιστροφής, **μεταβολές στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης, ...**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι πραγματεύεται η Γεωδαισία

- 6. Διαχρονική μεταβολή και απεικόνιση**  
 → των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της Γης (σχήμα και διαστάσεις)  
 → του πεδίου βαρύτητας της Γης (**μεταβολές στη δυναμική κατάσταση των ωκεανών, τις διεργασίες στο εσωτερικό της Γης, ...**)  
 ➔ **αλλαγές στις συντεταγμένες σημείων στη γήινη επιφάνεια** εξ αιτίας των κινήσεων και των παραμορφώσεων της Γης




Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Απεικόνιση των χαρακτηριστικών της Γης

**Από την πραγματική Γη ... Σε χάρτες**

- Η Ανώτερη Γεωδαισία εστιάζει στη μελέτη της γήινης επιφάνειας σε μεγάλες εκτάσεις μέχρι και σε παγκόσμια κλίμακα  
– Γιατί χρειάζεται ?

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Τι θέλουμε ως γεωδαίτες Μηχανικοί ?

**Το ζητούμενο είναι:**  
από μετρήσεις στην επιφάνεια της Γης και έξω από αυτή να μπορεί προσδιορισθεί το σχήμα και το μέγεθος της επιφάνειας ... και να απεικονισθεί οτιδήποτε είναι πάνω σε αυτή σε διάφορες κλίμακες ...

- Γεωμετρικό σχήμα και διαστάσεις
- Προσδιορισμός του σχήματος της Γης από τη μετατροπή φυσικών στοιχείων σε γεωμετρικά (πεδίο βαρύτητας)
- Σύστημα αναφοράς (περιστροφή)

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πως το επιτυγχάνουμε ... ?

Σε μικρές εκτάσεις (10x10 km) → τοπογραφικές αποτυπώσεις ορισμένων "βασικών στοιχείων της επιφάνειας της γης" ...

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πως το επιτυγχάνουμε ... ?

Σε μικρές εκτάσεις (10x10 km) → τμήμα του γεωειδούς στην περιοχή της αποτύπωσης μπορεί να αντικατασταθεί με οριζόντιο επίπεδο εφαιπτόμενο στο γεωειδές ...

- ... που υλοποιείται μέσω της οριζοντίωσης των τοπογραφικών οργάνων, και
- Για να δοθεί η θέση ενός σημείου, οι επίπεδες συντεταγμένες (x,y) συμπληρώνονται από το υψόμετρο H

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα

**το οριζόντιο επίπεδο ως επιφάνεια αναφοράς**

- ✓ Απλή μαθηματική επιφάνεια
- ✓ Κατάλληλη για συνήθεις τοπογραφικές εργασίες
- ✓ Άμεση υλοποίηση από τα τοπογραφικά όργανα μετρήσεων

**Ωστόσο,**

- ☒ το επίπεδο είναι ακατάλληλη επιφάνεια για αναπαράσταση μεγάλων εκτάσεων
- ☒ Εξ αιτίας της καμπυλότητας των ισοδυναμικών επιφανειών του πεδίου βαρύτητας → οι κατακόρυφες δεν είναι πλέον παράλληλες
- ☒ Σε κάθε σημείο, απαιτείται ένα νέο οριζόντιο επίπεδο και συνεπώς ένα νέο σύστημα αναφοράς → αυθαίρετο και ασύμφορο ...

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πως το επιτυγχάνουμε ... ?

Σε μεγάλες εκτάσεις → γεωδαιτικούς προσδιορισμούς – (χαρτογράφηση) των "βασικών στοιχείων της επιφάνειας της γης" ... λαμβάνοντας υπόψη την καμπυλότητα της Γης

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πως το επιτυγχάνουμε ... ?

Για να "βάλουμε μαζί" όλα τα τμήματα της επιφάνειας της γης (όπως ένα πάζλ) στις σωστές θέσεις τους για να καταλήξουμε σε μια ουσιαστική απεικόνιση ... π.χ. σε ένα χάρτη ....

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Πως το επιτυγχάνουμε ... ?

... χρειάζεται να αναφέρουμε τα γήινα χαρακτηριστικά και τη θέση τους σε ένα κοινό χώρο ... σε ένα **νοητό μοντέλο της γης** ... που να μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά και να επιτρέπει κατάλληλες αναγωγές από τον πραγματικό χώρο των μετρήσεων

→ γεωαναφορά και συστήματα αναφοράς ... που είναι και το κύριο αντικείμενο της Γεωμετρικής Γεωδαισίας

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Επιφάνειες αναφοράς

... Οι διακυμάνσεις της θαλάσσιας και της τοπογραφικής επιφάνειας της Γης καθιστούν αδύνατη την προσέγγιση το σχήμα της Γης με ένα ευλόγως απλό και εύχρηστο μαθηματικό μοντέλο.

✓ Το οποιοδήποτε μοντέλο επιλεγθεί, για να είναι χρήσιμο ... πρέπει να πλησιάζει το περισσότερο δυνατό το σχήμα και τις διαστάσεις της πραγματικής Γης → μικρές αποκλίσεις ως προς την πραγματική Γη

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Μαθηματική τεκμηρίωση των χαρακτηριστικών της Γης και των μεταβολών τους

Για σημεία στη Γη Αναφέρονται τα υψόμετρα τους στο γεωειδές και οι συντεταγμένες τους στο ελλειψοειδές

Η φυσική γήινη επιφάνεια και χαρακτηρίζονται ως **συνοριακές επιφάνειες** Ο υπολογισμός τους → από τα κύρια προβλήματα της Φυσικής Γεωδαισίας

Είναι οι επιφάνειες στις οποίες αναφέρονται τα δεδομένα και προσδιορίζονται με τη λύση γεωδαιτικών συνοριακών προβλημάτων

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ και τα ΜΟΝΤΕΛΑ τους

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

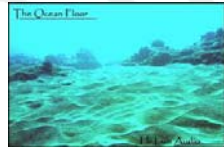
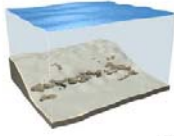
### Η φυσική γήινη επιφάνεια

- Το όριο μεταξύ της συμπαγούς Γης και της υδάτινης επιφάνειας της (υδρόσφαιρας) με την ατμόσφαιρα
- Στην πραγματικότητα, η γήινη επιφάνεια δεν είναι ούτε συμπαγής, ούτε μια υγρή μάζα
  - Ανομοιογενές υλικό, με συμπεριφορά μεταξύ των δύο διαφορετικών μαζών
- Συνήθως, για τον προσδιορισμό του σχήματος και των διαστάσεων της, η Γη θεωρείται απόλυτα άκαμπτη και στερεά, και οι οποιοσδήποτε διαχρονικές μεταβολές τους μελετώνται ξεχωριστά

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Η φυσική γήινη επιφάνεια

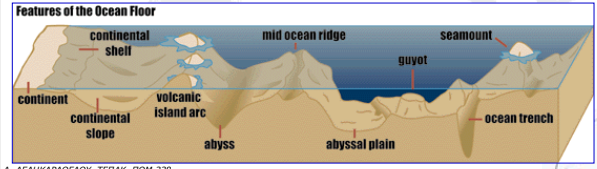
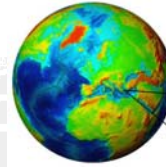
- Η επιφάνεια της Γης = η **τοπογραφική επιφάνεια** (για τα ηπειρωτικά μέρη) + ο **βυθός των θαλασσών** (στα ωκεάνια τμήματα)
  - ✓ Με την επιφάνεια των ωκεανών ασχολείται η **Θαλάσσια Γεωδαισία** και η **Ωκεανογραφία**
  - ✓ Ο βυθός των ωκεανών μπορεί να οριστεί ως προς τη θέση ισορροπίας της στάθμης της θάλασσας (**Μέση στάθμη της θάλασσας, μ.σ.θ.**)



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Η φυσική γήινη επιφάνεια

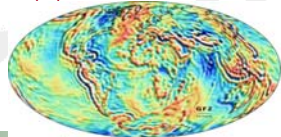
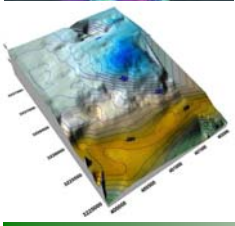
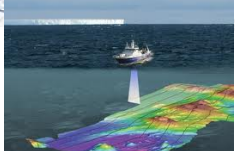
- Τόσο η γήινη επιφάνεια στα ηπειρωτικά μέρη, όσο και η θαλάσσια επιφάνεια και η τοπογραφία του πυθμένα είναι πολύ ανώμαλες επιφάνειες → **δεν προσφέρονται για μαθηματικούς υπολογισμούς**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Η φυσική γήινη επιφάνεια

- Συνήθης παρουσίαση της τοπογραφικής επιφάνειας (ηπειρωτικής ή θαλάσσιας ή του πυθμένα)
  - ✓ **Χάρτες με υψόμετρα ως προς τη μ.σ.θ.** (θεωρητικά ως προς το γεωειδές)
  - ✓ **Συνολική μαθηματική αναπαράσταση**
  - ✓ **π.χ. από μοντέλα σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Μοντέλα για το σχήμα της Γης

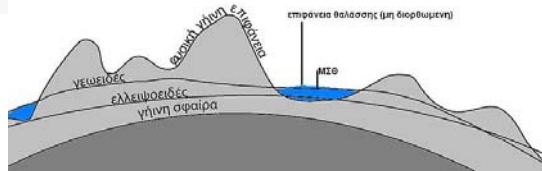
- Σε πρώτη προσέγγιση, το σχήμα της Γη είναι σφαιρικό,
- Όπως φαίνεται και σε δορυφορικές εικόνες από το διάστημα
- Σε δεύτερη προσέγγιση, το σχήμα της Γης τείνει σε εκείνο ενός **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**
- Η **“κανονική” προσέγγιση της πραγματικής Γης**



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Το γεωειδές

- Μια «απλοποίηση» για την επιφάνεια της Γης στις θαλάσσιες περιοχές είναι η στάθμη που έχουν οι **υδατίνες μάζες** όταν είναι σε κατάσταση υδροστατικής ισορροπίας, δηλαδή τη **μέση στάθμη του νερού για ένα μακρύ χρονικό διάστημα.**
- Το γεωειδές = η **ισοδυναμική επιφάνεια** της Γης η οποία ταυτίζεται (με αρκετή ακρίβεια, ±1m) με τη μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ) εάν αυτή διορθωθεί από την επίδραση των παλιρροιών, των ρευμάτων, της μεταβολής της πυκνότητας και του κυματισμού



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

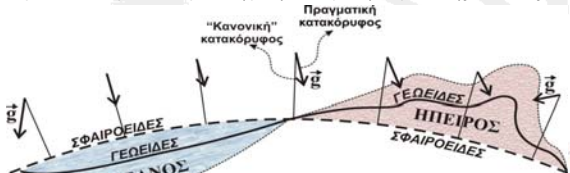
## Ισοδυναμικές Επιφάνειες

πάνω στις οποίες το δυναμικό του βαρυντικού πεδίου είναι σταθερό

$$W(x, y, z) = c$$

Η πιο ενδιαφέρουσα ισοδυναμική επιφάνεια είναι η επιφάνεια της θάλασσας, αφού το νερό αν δεν είχε το ίδιο δυναμικό στην επιφάνειά του θα κινιόταν λόγω της βαρύτητας, μέχρι να πάρει το σχήμα μίας ισοδυναμικής επιφάνειας!

**Γεωειδές:** Η ισοδυναμική επιφάνεια που περιβάλλει τη Γη και που πάνω της το δυναμικό είναι ίσο με το δυναμικό στη μέση αδιατάρακτη επιφάνεια της θάλασσας.



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το δυναμικό $W$ του πραγματικού πεδίου βαρύτητας

- $W = V + \phi$   
Ελκτικό δυναμικό + Φυγόκεντρο δυναμικό εξ αιτίας της περιστροφής της Γης

$\vec{g} = \nabla W$

$g = |\nabla W|$

$W = U_0$

$U = U_0$

topography

geoid

ellipsoid

gravity vector

$W = U_0$

$U = U_0$

$\vec{g} = \nabla W$

$g = |\nabla W|$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Ισοδυναμικές επιφάνειες

Χαρακτηριστικές ιδιότητες τους

- Δεν τέμνονται μεταξύ τους
- Διατάσσονται σε επαλληλία γύρω από τη Γη (αύξηση της βαρύτητας → σύγκλιση των ισοδυναμικών επιφανειών)
- Είναι κλειστές, συνεχείς, και μαθηματικά πολύπλοκες επιφάνειες
- Γενικά, είναι ομαλές καμπύλες επιφάνειες, στον εξωτερικό χώρο της Γης, ενώ στα σημεία στο εσωτερικό της Γης επιδεικνύουν ανωμαλίες όπου υφίστανται απότομες αλλαγές της πυκνότητας

$W = \text{constant}$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Δυναμικές γραμμές (lines of force, plumblines) ή κατακόρυφες

- Είναι οι καμπύλες γραμμές στις οποίες τα διανύσματα της βαρύτητας είναι εφαπτόμενα σε κάθε σημείο τους
- Δηλ. τέμνουν κάθετα όλες τις ισοδυναμικές επιφάνειες
- Διεύθυνση της κατακόρυφου

Γεωειδές  $W = W_0$

$W = \text{constant}$

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές

Γεωειδές  $W = W_0$

$W = \text{constant}$

Ονομάστηκε από τον **Carl Friedrich Gauss** το μαθηματικό σχήμα της Γης → Γεωειδές (=σαν Γη, χαρακτηριστική επιφάνεια της δυναμικής Γης) → χαρακτηρίζει άμεσα το πεδίο βαρύτητας της Γης

- Δεν αποτελεί τη μαθηματική υλοποίηση ενός σώματος, όπως π.χ. στην περίπτωση ενός ελλειψοειδούς

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές

Θαλάσσια επιφάνεια

Ωκεάνιος πυθμένας

$P_1$

$H_{P1} (<0)$

$P_2$

$H_{P2} (>0)$

Γήινη επιφάνεια

Γεωειδές

- Ο ορισμός γεωειδές = ΜΣΘ δεν είναι αυστηρός
- Στην πραγματικότητα η θάλασσα δεν είναι ισοδυναμική επιφάνεια εξ αιτίας των δυναμικών διεργασιών της (παλίρροιας, ρεύματα, κύματα, ...)
- Στις ηπειρωτικές περιοχές οι διακυμάνσεις του γεωειδούς οφείλονται σε επιδράσεις της τοπογραφίας, της γεωλογίας.

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές

κατακόρυφος στο γεωειδές

Ξησική επιφάνεια

γεωειδές

ελλειψοειδές

Απόχλι γεωειδούς

κάθετος στο ελλειψοειδές

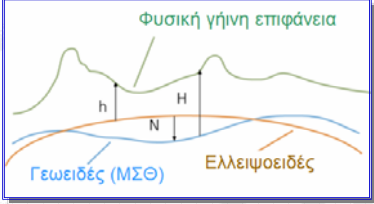
Θαλάσσια επιφάνεια ΜΣΘ

- Είναι μια ομαλή αλλά ιδιαίτερα ακανόνιστη επιφάνεια που αντιστοιχεί όχι στην "Φυσική Γήινη Επιφάνεια" (ΦΓΕ), αλλά σε μια επιφάνεια που μπορεί μόνο να προσεγγιστεί με **εκτενείς μετρήσεις βαρύτητας και υπολογισμούς**.
- Σε κάθε σημείο του γεωειδούς η κατακόρυφος (≡ διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας) είναι κάθετη στην επιφάνεια του

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές & σχέσεις υψομέτρων

- Ο συνδυασμός ορθομετρικών υψομέτρων  $H$  (π.χ. από τοπογραφικούς χάρτες) και υψομέτρων του γεωειδούς  $N$  δίνει το συνολικό γεωμετρικό υψόμετρο  $h$  της τοπογραφικής επιφάνειας πάνω από το **ελλειψοειδές αναφοράς**

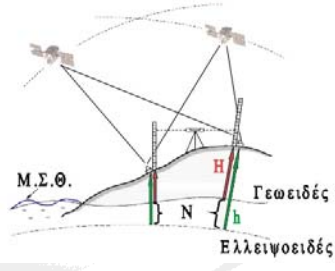


$N$  - διαφορά (αποχή) γεωειδούς και ελλειψοειδούς κατά μήκος της καθέτου  
 $h$  - απόσταση του σημείου στο γήινο ανάγλυφο από το ελλειψοειδές κατά μήκος της καθέτου  
 $H$  - απόσταση του σημείου στο γήινο ανάγλυφο από το γεωειδές κατά μήκος της κατακόρυφου

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές & σχέσεις υψομέτρων

- $N$  - από βαρυτημετρικές, αστρογεωδαιτικές και δορυφορικές παρατηρήσεις ή το συνδυασμό τους
- $h$  - Στην εποχή των GNSS, άμεσα μετρήσιμο από GPS, GLONASS, (GALILEO), ...
- $H$  - από χωροστάθμηση. Το υψόμετρο άμεσα ενδιαφέροντος στα τεχνικά έργα και εφαρμογές

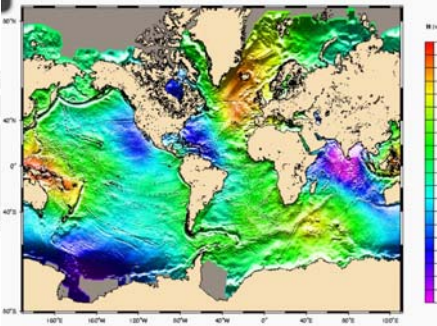


**Γνώση του γεωειδούς → σύνδεση  $H$  και  $h$  → GPS χωροστάθμηση → τεράστια πρακτικά οφέλη**

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

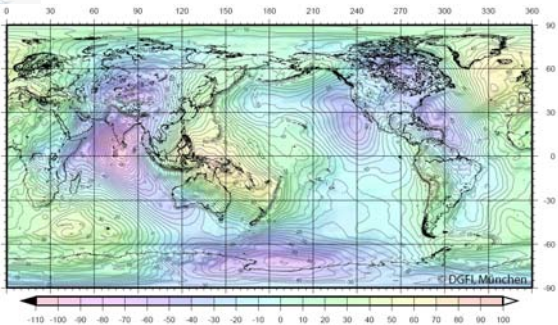
### Το γεωειδές

- Μπορεί να θεωρηθεί ότι "χαρτογραφεί" το 72% της γήινης επιφάνειας, ενώ το υπόλοιπο 28% προεκτείνεται νοητά κάτω από τα ηπειρωτικά τμήματα (στη στάθμη της θάλασσας)



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές

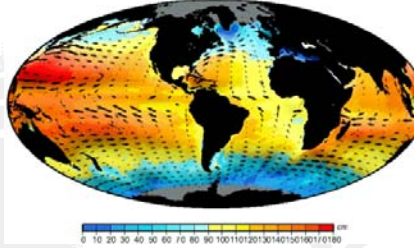


- Σε παγκόσμια κλίμακα οι αποχές του γεωειδούς: **±100m**

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Το γεωειδές, ΜΣΘ και ΣΣΘ

- Η θαλάσσια επιφάνεια είναι λιγότερο σταθερή από την τοπογραφική επιφάνεια → η στιγμιαία στάθμη της θάλασσας μεταβάλλεται ημερησία μέχρι ±10 m από τη ΜΣΘ

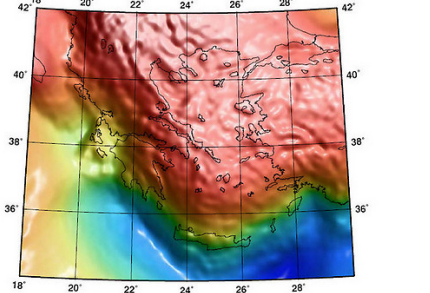


**Δυναμική τοπογραφία της θαλάσσιας επιφάνειας:** μέση διαφορά ( $\pm 1m$ ) μεταξύ της πραγματικής θαλάσσιας επιφάνειας και του γεωειδούς. Προκαλείται από τα ωκεάνια ρεύματα, τους ανέμους και τη μεταφορά θερμότητας στους ωκεανούς. Συνήθως υπολογίζεται από μετρήσεις πλοίων (μετρήσεις θερμοκρασίας και αλατότητας σε διάφορα βάθη) και τα τελευταία χρόνια, άμεσα και με υψηλή ακρίβεια από δορυφόρους αλτιμετρίας

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

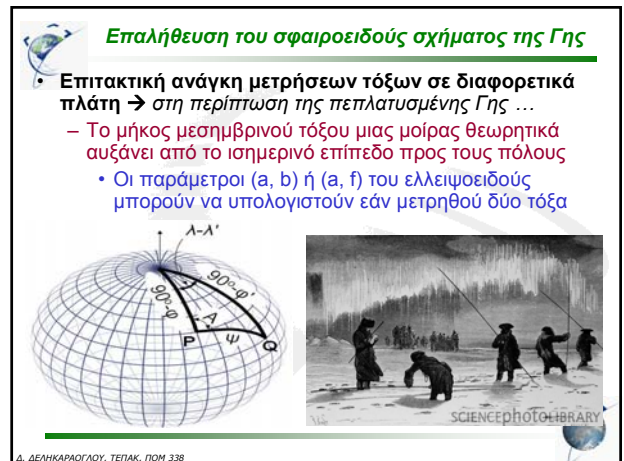
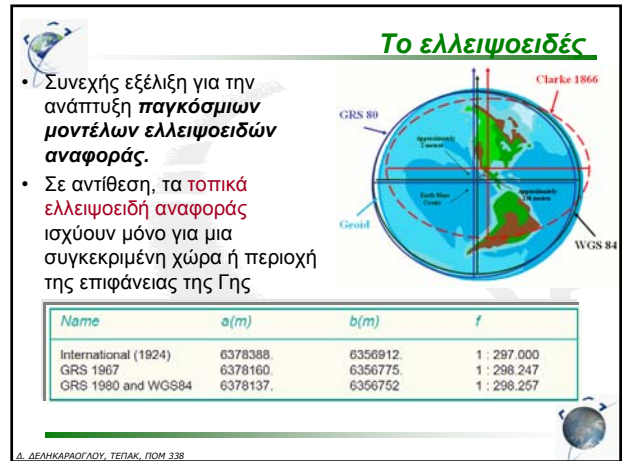
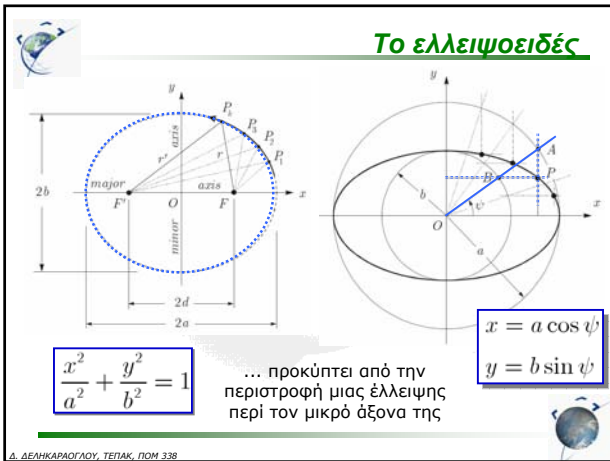
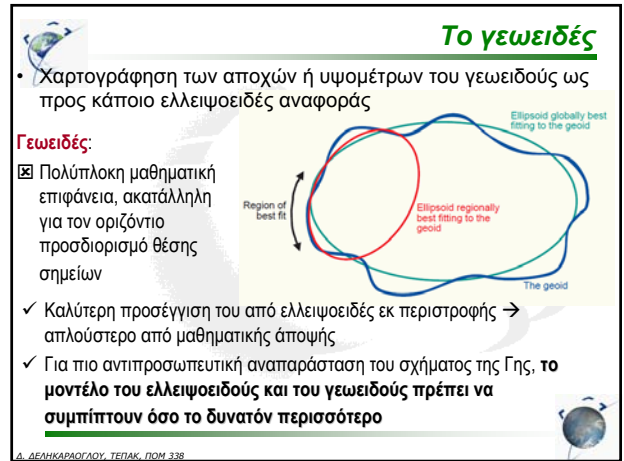
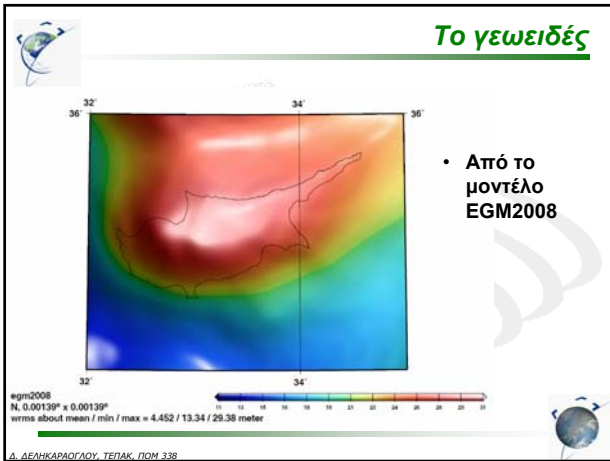
### Το γεωειδές

- Σε εθνικό ή περιφερειακό επίπεδο, οι αποχές μπορεί να είναι της τάξης των μερικών (δεκάδων) μέτρων



eigen-6c-136707  
 $N, 0.0167^{\circ} \times 0.0167^{\circ}$   
 wms about mean / min / max = 11.09 / -0.05159 / 45.66 meter

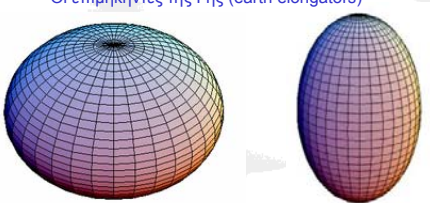
Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΛΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338





### Επαλήθευση του σφαιροειδούς σχήματος της Γης

- Δύο αντίθετες επιστημονικές απόψεις
  - Του Νεύτωνα ( $f=1/230$ ) και του Huygens ( $f=1/576$ )
    - Οι επιπλατυστές της Γης (earth flatteners)
  - Των Γάλλων αστρονόμων, π.χ. J.-D. Cassini
    - Οι επιμηκντές της Γης (earth elongators)



**Oblate σφαιροειδές**      **Prolate σφαιροειδές**

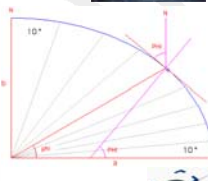
Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Επαλήθευση του σφαιροειδούς σχήματος της Γης

- 1736 - Δύο επιστημονικές αποστολές μετρήσεων
  - Λαπωνία (A. Clairaut - P. L. Maupertuis)
  - Περού (P. Bouguer - La Condamine)
- Οι μετρήσεις δικαίωσαν την άποψη του Νεύτωνα ( $\rightarrow f = 1/210$ )

The Results for 1° meridian arc measurements:  
using 1 Toise = 1,949,036 m.

	Toises	km	(a-b)/a
Peru (0° - 3° S)	56766	110.64	1/327
Lapland (66° - 67° N)	57438	111.95	1/92
France	57078	111.25	1/387



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Χαρακτηριστικά σχόλια του Βολταίρου

- Με την επιστροφή του Clairault, τον χαρακτηρίζει
  - ... σαν τον άνθρωπο που επιπλάτυνε τους πόλους ... και τους Cassinis
- Και με την επιστροφή της αποστολής από το Περού
  - ... βρήκατε μετά από παρατεταμένο μόχθο ότι βρήκε ο Νεύτωνα ... χωρίς να χρειαστεί να βγει από το δωμάτιο του !!!




Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

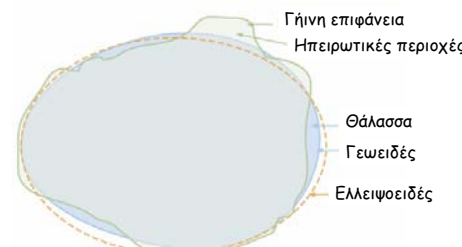
### Μηχανικές ιδιότητες του ελλειψοειδούς

- Στη πραγματικότητα, εξ αιτίας των πραγματικών ανωμαλιών της Γης
- Η πρακτική που ακολουθείται στη Γεωδαισία είναι
  - ✓ Να χρησιμοποιείται το ελλειψοειδές εκ περιστροφής προκειμένου να εκφραστεί **το κανονικό μέρος** των φυσικών και γεωμετρικών μεγεθών που αφορούν τη Γη, και στη συνέχεια
  - ✓ Να μελετάται **το υπόλοιπο μέρος** (ή διαταρακτικό ή ανωμαλιστικό μέρος) των εν λόγω μεγεθών



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΤ      ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΓΗΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

### Το Ελλειψοειδές και η Γη

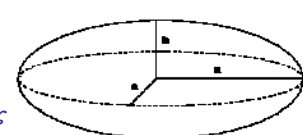


- ✓ Πως επιλέγεται ένα **ελλειψοειδές εκ περιστροφής** προκειμένου να εκφράζει κατάλληλα τη μαθηματική προσέγγιση της πραγματικής Γης, συμπεριλαμβανομένων και των μηχανικών ιδιοτήτων της ?

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΤ      ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΓΗΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

### Το Ελλειψοειδές και η Γη

- Γεωμετρικά χαρακτηριστικά (δηλ. μέγεθος και διαστάσεις)
  - Ελλειψοειδές εκ περιστροφής
  - Τριαξονικό ελλειψοειδές
- Δυναμικά χαρακτηριστικά που να πλησιάζουν όσο το δυνατόν τα μηχανικά χαρακτηριστικά της πραγματικής Γης (όπως το πεδίο βαρύτητας)
  - π.χ. η επιφάνεια του να είναι ισοδυναμική επιφάνεια της περιστρεφόμενης μάζας της Γης
  - Συμβατό με ένα μοντέλο της κατανομής των πυκνοτήτων στο εσωτερικό της Γης

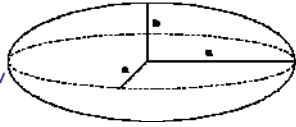


Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΙΟΥ, ΣΑΤΜ/ΕΜΤ      ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΓΗΙΝΟ ΠΕΔΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

## Κανονικό ή χωροσταθμικό ελλειψοειδές



- Γεωκεντρικό και κατάλληλα προσανατολισμένο
  - Συμμετρία ως προς τον άξονα z



- Μέγεθος και διαστάσεις**
  - μεγάλος ημιάξονας  $a$  και επιπλάτυνση  $f$  (ή μικρός ημιάξονας  $b$ )
- Η μάζα του είναι ίση με τη μάζα της πραγματικής Γης (ορίζοντας στην πράξη την παράμετρο  $GM$ ) → **πεδίο έλξης**
- Περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  όπως και η πραγματική Γη → **φυγόκεντρο δυναμικό**

## Κανονικό ή χωροσταθμικό ελλειψοειδές



- Στη **Γεωμετρική Γεωδαισία** το ελλειψοειδές χρησιμοποιείται σαν επιφάνεια αναφοράς των μετρήσεων στη γήινη επιφάνεια και αναγωγής τους στο "κανονικό" σχήμα της Γης
- Στη **Φυσική Γεωδαισία** το χωροσταθμικό ελλειψοειδές χρησιμοποιείται ως μοντέλο του γήινου πεδίου βαρύτητας → **το κανονικό πεδίο βαρύτητας**
  - Επιπλέον προϋπόθεση στον ορισμό του (χωρίς όμως να είναι απαραίτητο), ότι η επιφάνεια του είναι **ισοδυναμική επιφάνεια του κανονικού πεδίου βαρύτητας**
    - Όπως και το γεωειδές αποτελεί **ισοδυναμική επιφάνεια του πραγματικού πεδίου βαρύτητας**

## Κανονικό ή χωροσταθμικό ελλειψοειδές



- ΤΟΝΙΖΕΤΑΙ, ότι **δεν πρέπει να γίνεται οποιαδήποτε υπόθεση** σχετικά με την κατανομή των μαζών κάτω από την επιφάνεια του χωροσταθμικού ελλειψοειδούς
  - Υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί κατανομής μαζών και πυκνοτήτων που δημιουργούν το ίδιο ελκτικό πεδίο δυνάμεων στο χώρο
- Προσπάθειες αξιοποίησης ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς αντί του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής
  - Ο υπολογιστικός φόρτος είναι πολύ μεγαλύτερος

## Ελλειψοειδή αναφοράς



Ellipsoid	Equatorial axis, a (m)	Polar axis, b (m)	Inverse flattening, 1/f
Airy 1830	6 377 563.4	6 356 256.9	299.324 975 3
Clarke 1866	6 378 206.4	6 356 583.8	294.978 698 2
Bessel 1841	6 377 397.155	6 356 078.965	299.152 843 4
International 1924	6 378 388	6 356 911.9	297
Krasovsky 1940	6 378 245	6 356 863	298.299 738 1
GRS 1980	6 378 137	6 356 752.3141	298.257 222 101
WGS 1984	6 378 137	6 356 752.3142	298.257 223 563
Sphere (6371 km)	6 371 000	6 371 000	$\infty$

Όλα τα ελλειψοειδή αναφοράς δεν είναι απαραίτητα και χωροσταθμικά ελλειψοειδή

## ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

## Τι είναι ένα σύστημα αναφοράς ...?

- Είναι το σύνολο των παραδοχών και ορισμών που οριοθετούν ένα χώρο (μια περιοχή ή και ολόκληρη τη Γη) και αποσκοπούν, μέσω ενός κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων, στην περιγραφή της θέσης σημείων ή αντικειμένων στο χώρο αυτό με αριθμητικές τιμές → **μαθηματική περιγραφή της γήινης επιφάνειας**
- Ουσιαστικά, ένα σύστημα συντεταγμένων είναι πάντα σχετικό ως προς κάποιο σταθερό σημείο και οριοθετείται με συγκεκριμένες παραδοχές που επιτρέπουν την υλοποίηση του.
- Πλαίσια αναφοράς:** η υλοποίηση συστημάτων αναφοράς, που επιτρέπουν, με τη βοήθεια κατάλληλων παραμέτρων εντοπισμού, την αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση με τις θέσεις σημείων, αντικειμένων, οντοτήτων στο χώρο



### Απαραίτητες προϋποθέσεις για ένα χρηστικό σύστημα αναφοράς στη Γεωδαισία ...

- Σε συνδυασμό με κατάλληλες τεχνικές μετρήσεων, να μπορεί ...
- Να προσδιορίζει τη θέση για κάθε σημείο ενδιαφέροντος στο χώρο
  - Να υλοποιεί τα σημεία ενδιαφέροντος (π.χ. μιας κτηματογράφησης, ενός τεχνικού έργου,...) που έχουν γνωστές παραμέτρους εντοπισμού
  - Να υπολογίζει απαραίτητα μεγέθη (διευθύνσεις, αποστάσεις, γωνίες) που σχετίζονται με τη γεωμετρία του χώρου στην περιοχή ενδιαφέροντος



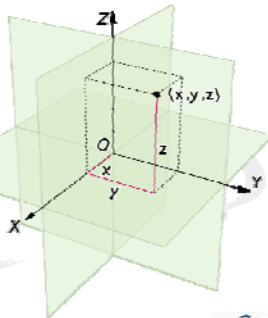
### Συστήματα συντεταγμένων ...

- **Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων**
  - Πολικό σύστημα συντεταγμένων
  - Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων
  - Καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων
  - Γεωγραφικές συντεταγμένες
  - **Γεωδαιτικές συντεταγμένες**
  - Οριζόντιες συντεταγμένες
  - **Ουράνιες συντεταγμένες**
- Μεγάλη ποικιλία διαφορετικών συντεταγμένων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον εντοπισμό σημείων
- Πρέπει να είναι κατάλληλα προσαρμοσμένες σε ένα σύστημα αναφοράς ώστε να εξυπηρετούν τις εκάστοτε εφαρμογές



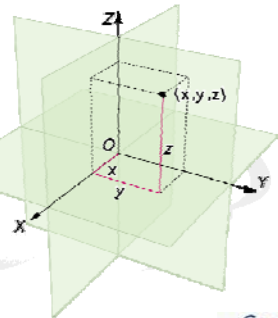
### Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

- Είναι ένα **ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων** που χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει ένα σημείο στο επίπεδο ή στο χώρο.
- Οφείλει το όνομά του στον **Καρτέσιο (Descartes)** που το εισήγαγε.
- Ορίζονται στην περίπτωση των δύο, τριών ή και ανώτερων διαστάσεων.



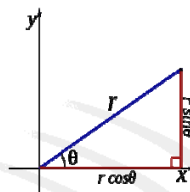
### Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

- Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, είναι βολικό να ορίσουμε τα **ορθομοναδιαία διανύσματα**  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  τα οποία έχουν διεύθυνση κατά τη θετική φορά των αξόνων x, y και z αντίστοιχα.
- Το διάνυσμα θέσης  $r$  ενός σημείου με συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στο χώρο  
 $\rightarrow r(x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$



### Πολικό σύστημα συντεταγμένων

- Στα μαθηματικά, το **πολικό σύστημα συντεταγμένων** είναι ένα δισδιάστατο σύστημα συντεταγμένων
- στο οποίο η θέση οποιουδήποτε σημείου σε ένα επίπεδο καθορίζεται από την απόσταση του σημείου αυτού από ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο αναφοράς και τη γωνία από μία αυθαίρετα επιλεγμένη κατεύθυνση

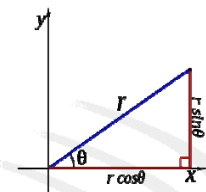


- $r$  - **ακτινική συντεταγμένη** ή απλώς **ακτίνα** (από την αγγλική λέξη **radius**)
- $\theta$  - **γωνιακή συντεταγμένη** ή **αζιμούθιο**



### Πολικό σύστημα συντεταγμένων

- Η ακτινική συντεταγμένη ενός σημείου αναφέρεται ως προς την αρχή των αξόνων  $(0,0)$
- Το αζιμούθιο μετράται από τον θετικό οριζόντιο άξονα με φορά αντίθετη από εκείνη των δεικτών του ρολογιού
  - μετράται συνήθως σε ακτίνια αντί για μοίρες



$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = y/x$$

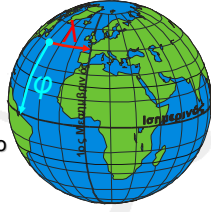
$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$$



## Γεωγραφικές συντεταγμένες

- $\phi$  – γεωγραφικό πλάτος
- $\lambda$  – γεωγραφικό μήκος
- Ορίζονται στην υδρόγειο σφαίρα σε ένα **σύστημα από γραμμές**
  - οι **παράλληλοι κύκλοι** και
  - οι **μεσημβρινοί**

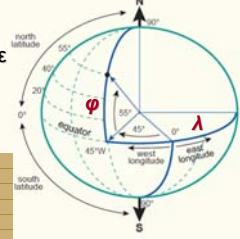


- Ο μεγαλύτερος **παράλληλος κύκλος** → **Ισημερινός**, χωρίζει τη Γη σε Βόρειο και Νότιο ημισφαίριο
- Ο **1ος Μεσημβρινός** περνά από το αστροσκοπείο του Γκρήνουιτς στη Μ. Βρετανία
- Οι **μεσημβρινοί** χωρίζουν τη Γη σε Δυτικό και Ανατολικό ημισφαίριο

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Γεωγραφικές συντεταγμένες

- $\phi$  – γεωγραφικό πλάτος
- $\lambda$  – γεωγραφικό μήκος
- Ορίζονται στην υδρόγειο σφαίρα σε ένα **σύστημα από γραμμές**
  - οι **παράλληλοι κύκλοι** και
  - οι **μεσημβρινοί**



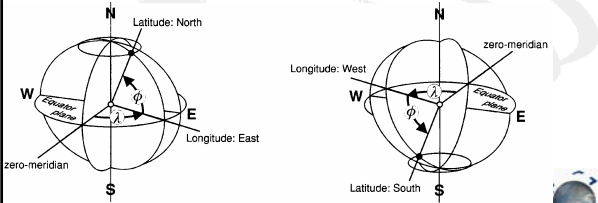
- Ο μεγαλύτερος **παράλληλος κύκλος** → **Ισημερινός**, χωρίζει τη Γη σε Βόρειο και Νότιο ημισφαίριο

- Ο **1ος Μεσημβρινός** περνά από το αστροσκοπείο του Γκρήνουιτς στη Μ. Βρετανία
- Οι **μεσημβρινοί** χωρίζουν τη Γη σε Δυτικό και Ανατολικό ημισφαίριο

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

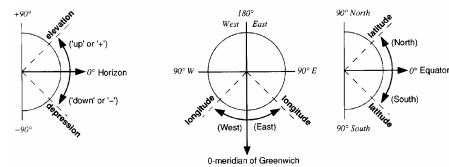
## Γεωγραφικές συντεταγμένες

- Το γεωγραφικό μήκος χαρακτηρίζεται Ανατολικό A (East, E) ή Δυτικό Δ (West, W) ανάλογα σε ποιο ημισφαίριο βρίσκεται το σημείο ενδιαφέροντος
- **Προσοχή**, σε αρκετές χώρες (π.χ. Καναδάς, ΗΠΑ) χρησιμοποιούν ως  $\lambda$  θετικά, τις τιμές **γεωγραφικού μήκους προς τα δυτικά**, και όχι όπως κάνουμε π.χ. στην Ελλάδα όπου  $\lambda$  θετικά είναι οι τιμές γεωγραφικού μήκους ανατολικά του Greenwich



Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Γεωγραφικές συντεταγμένες



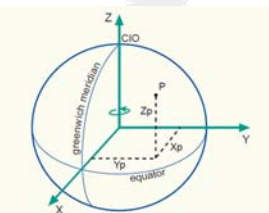
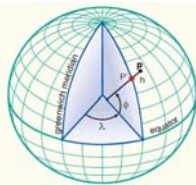
- Τα μήκη των περιμέτρων των παράλληλων κύκλων είναι συνημιτονειδής συνάρτηση του γεωγραφικού τους πλάτους

Γεωγ. πλάτος	Μήκος τόξου 1°	Γεωγ. πλάτος	Μήκος τόξου 1°
0°	111,0 Km	50°	71,6 Km
10°	109,6 Km	60°	55,7 Km
20°	104,6 Km	66 1/2°	44,6 Km
23 1/2°	102,1 Km	70°	38,1 Km
30°	96,4 Km	80°	19,3 Km
40°	85,3 Km	90°	0,0 Km

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## 3-D Γεωδαιτικές συντεταγμένες

- $\phi$  – γεωδαιτικό πλάτος
- $\lambda$  – γεωδαιτικό μήκος
- $h$  – γεωμετρικό υψόμετρο (η κατακόρυφη απόσταση του σημείου πάνω από το ελλειψοειδές)

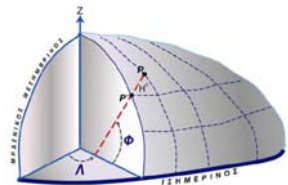


- Ή εναλλακτικά μέσω των **γεωκεντρικών συντεταγμένων** ( $x, y, z$ ), επίσης γνωστών ως **3D καρτεσιανές συντεταγμένες**

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

## Αστρονομικές συντεταγμένες

- Επιφάνεια αναφοράς το γεωειδές
- Διεύθυνση της κατακόρυφου από κάθε σημείο ενδιαφέροντος μέχρι την επιφάνεια του γεωειδούς



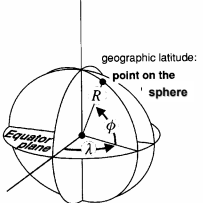
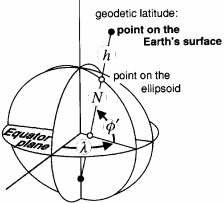
- 'μεσημβρινοί και παράλληλοι' είναι κλειστές γραμμές 2ου βαθμού (ούτε ελλείψεις, ούτε κύκλοι)

- $\Phi$  – αστρονομικό πλάτος
- $\Lambda$  – αστρονομικό μήκος
- $H$  – ορθομετρικό υψόμετρο
- **Φυσικές συντεταγμένες ...**

Δ. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### 3-D Γεωδαιτικές συντεταγμένες

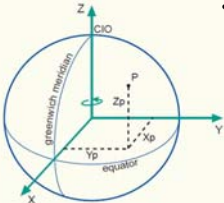
- Συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό
  - ✓  $\phi'$  – γεωδαιτικό πλάτος,
- Προς αποφυγή σύγχυσης με το
  - ✓  $\phi$  – γεωγραφικό πλάτος

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338


### 3-D γεωκεντρικές συντεταγμένες

- Το γεωκεντρικό σύστημα έχει την αρχή του στο κέντρο μάζας της Γης με τους X- και Y-άξονες στο επίπεδο του ισημερινού. Ο X-άξονας περνά μέσα από τον μεσημβρινό του Γκρίνουιτς, και ο Z-άξονας συμπίπτει με τον μέσο άξονα περιστροφής της Γης → δεξιόστροφο τρισσορογώνιο σύστημα
- Δεδομένου ότι ο άξονας περιστροφής της Γης αλλάζει τη θέση του με την πάροδο του χρόνου (κίνηση του πόλου) → η μέση θέση του γήινου πόλου για το έτος 1903 έχει χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί η «συμβατικά διεθνής αρχή» (CIO, *Conventional International Origin*).



Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

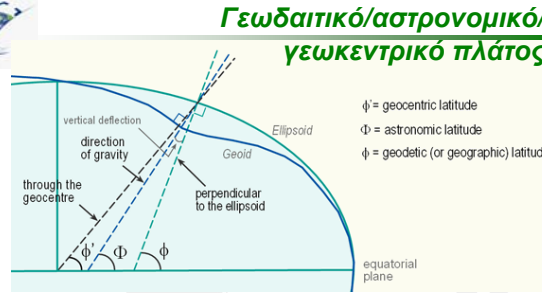
### Γεωδαιτικό/αστρονομικό/γεωκεντρικό πλάτος



- Το **αστρονομικό πλάτος** ( $\Phi$ ) = η γωνία μεταξύ του επιπέδου του ισημερινού και της καθέτου στο γεωειδές (δηλαδή τη διεύθυνση της κατακόρυφου)
- Προκύπτει άμεσα από παρατηρήσεις αστέρων, χωρίς διόρθωση για την απόκλιση της κατακόρυφου, και ισχύει μόνο **για θέσεις στην επιφάνεια της Γης**

Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Γεωδαιτικό/αστρονομικό/γεωκεντρικό πλάτος



- Το **γεωκεντρικό πλάτος** ( $\phi'$ ) = η γωνία μεταξύ του επιπέδου του ισημερινού και της γραμμής από το κέντρο του ελλειψοειδούς
- Η τιμή αυτή διαφέρει συνήθως από το γεωδαιτικό πλάτος, εκτός εάν η Γη λαμβάνεται ως μια τέλεια σφαίρα.

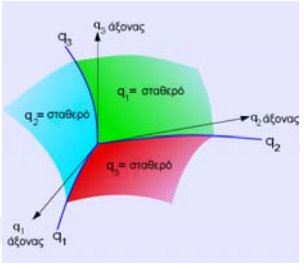
Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338

### Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

$q_1, q_2, q_3$  - συνδέονται τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τρεις συνεχώς διαφορίσιμες εξισώσεις μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y, z) \\ q_2 &= q_2(x, y, z) \\ q_3 &= q_3(x, y, z) \end{aligned}$$


Α. ΔΕΛΗΚΑΡΑΓΓΟΥ, ΤΕΠΑΚ, ΠΟΜ 338