ΕΠΙΛΥΣΗ 2D ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

1. Εισαγωγή

Ο αντικειμενικός σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι η ανάπτυξη ενός κώδικα ανάλυσης διδιάστατων δικτυωμάτων (2D-trusses) στο υπολογιστικό περιβάλλον Matlab. Ο κώδικας στηρίζεται στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ, Finite Element Method - FEM). Διευκρινίζεται ότι είναι δυνατόν ο ίδιος στόχος (ανάλυση κατασκευής) να επιτευχθεί ακολουθώντας διαφορετική *μητρωϊκή* πορεία (βλ. ‘Σχολιασμός’).

Η ανάλυση ενός 2Δ-δικτυώματος με τη ΜΠΣ απαιτεί την εκτέλεση των ακολούθων, σαφώς ορισμένων, εργασιών:

- *Περιγραφή του εξεταζομένου δικτυώματος*
  - Περιγραφή διατομών
  - Περιγραφή κόμβων
  - Περιγραφή ράβδων
  - Δήλωση ιδιοτήτων υλικού της κατασκευής
  - Περιγραφή στηρίξεων
  - Περιγραφή φορτίσεων

- *Σύνθεση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του δικτυώματος*

- *Επιβολή οριακών συνθηκών και φορτίσεων*

- *Υπολογισμός κομβικών μετατοπίσεων*

- *Υπολογισμός χρήσιμων μεγεθών*, όπως
  - Παραμορφώσεις ράβδων
  - Τάσεις ράβδων
  - Δυνάμεις ράβδων
  - Βάρος κατασκευής
  - Δυνάμεις στήριξης

Προφανώς, τα ανωτέρω, με κατάλληλη προσαρμογή κατά περίπτωση, ισχύουν και για μία οποιαδήποτε κατασκευή (βλ. ‘Σχολιασμός’). Σχετικά με την επιλογή του υπολογιστικού περιβάλλοντος Matlab, αυτή στηρίχθηκε κυρίως στα εξής:

- Χαρακτηρίζεται από εξαιρετική φιλικότητα (ευχρηστία)

- Διαθέτει μία πολύ πλούσια βιβλιοθήκη εργαλείων με τα οποία εύκολα, γρήγορα, αξιόπιστα και ελεγχόμενα είναι δυνατόν να επιτελεσθούν αρκετά σύνθετες διαδικασίες (π.χ. γραφικές απεικονίσεις)
- Διαθέτει πολύ καλή διαχείριση πινάκων σε υψηλό επίπεδο, στοιχείο βασικό για την εφαρμογή της ΜΠΣ, η οποία εξ ορισμού περιγράφεται με μητρωϊκές εκφράσεις

Είναι προφανές ότι αντί του Matlab είναι δυνατή η επιλογή κάποιου άλλου υπολογιστικού ή προγραμματιστικού περιβάλλοντος (π.χ. Mathematica, MathCad, Fortan, C++, κοκ).

2. Περιγραφή της εξεταζόμενης κατασκευής

Περιγραφή διατομών

Κάθε διατομή ράβδου ορίζεται σαφώς από το εμβαδόν της, έστω A_i. Εναλλακτικά, αντί της άμεσης δήλωσης της ποσότητας A_i, είναι δυνατόν να δίδονται οι γεωμετρικές διαστάσεις της διατομής, από τις οποίες προκύπτει με εύκολο υπολογισμό το εμβαδόν. Το σύνολο των NEL ράβδων (***N**umber of **E**lements*) μίας κατασκευής περιγράφεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο, έστω $Area$, διαστάσεων $NN \times 1$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1β.

α/α ράβδου (Element number)	Διατομή (cross-section)
1	A_1
2	A_2
. . .	. . .
NEL	A_{NEL}

$$\xrightarrow{\text{α/α ραβδου = α/α γραμμης πινακα Π1}} \quad Area = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{NN} \end{bmatrix}$$

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π1) (β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 1: Περιγραφή διατομών ράβδων

Στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 1α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π1, με δύο στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη αναγράφεται ο αύξων αριθμός της ράβδου (α/α ράβδου) και στη δεύτερη το αντίστοιχο εμβαδόν της διατομής της ράβδου. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π1 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό ράβδου. Για παράδειγμα, το εμβαδόν της διατομής της ράβδου 13 αναγράφεται στη $13^{η}$ γραμμή του πίνακα Π1 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π1 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στη δεύτερη στήλη του πίνακα Π1. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο $Area$ (Σχήμα 1β), το οποίο διαθέτει μόνο μία στήλη (τη δεύτερη στήλη του πίνακα Π1). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο $Area$ προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 1: Ποια είναι η διατομή μίας συγκεκριμένης ράβδου;

Παράδειγμα:

$Area(11)$:

μητρώο $Area$	$11^{η}$ γραμμή
↓	↓
διατομές ράβδων	ράβδος 11

Επομένως, εάν A_{11} είναι η διατομή της $11^{ης}$ ράβδου, τότε θα ισχύει: $A_{11} = Area(11)$

Περιγραφή κόμβων

Κάθε κόμβος ορίζεται σαφώς μέσω των συντεταγμένων του. Άρα, ο i-κόμβος περιγράφεται επαρκώς μέσω της διατεταγμένης δυάδας (x_i, y_i), όπου x_i είναι η x-συντεταγμένη και y_i είναι η y-συντεταγμένη του κόμβου. Διευκρινίζεται ότι αυτές οι συντεταγμένες εκφράζονται ως προς ένα καθολικό σύστημα αναφοράς, το οποίο επιλέγεται αυθαίρετα. Το σύνολο των NN κόμβων (***N***umber of ***N***odes) μίας κατασκευής μπορεί να περιγραφεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 2α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο, έστω $Coor$, διαστάσεων $NN \times 2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2β.

α/α κόμβου (Node number)	x-συντεταγμένη (x-coordinate)	y-συντεταγμένη (y-coordinate)
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
. . .	. . .	. . .
NN	x_{NN}	y_{NN}

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π2)

$$Coor = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \dots \\ x_{NN} & y_{NN} \end{bmatrix}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 2: Περιγραφή κόμβων σε όρους συντεταγμένων

Στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 2α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π2, με τρεις στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη αναγράφεται ο αύξων αριθμός του κόμβου (α/α κόμβου) και στις δύο επόμενες αναγράφονται αντίστοιχα οι x-συντεταγμένες και οι y-συντεταγμένες των κόμβων. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π2 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό κόμβου. Για παράδειγμα, οι συντεταγμένες του κόμβου 22 αναγράφονται στην $22^{η}$ γραμμή του πίνακα Π2 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π2 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στις επόμενες στήλες του πίνακα Π2. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο $Coor$ (Σχήμα 2β), το οποίο διαθέτει δύο στήλες (τη δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα Π2). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο $Coor$ προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 2: Ποιές είναι οι συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου κόμβου;

Παράδειγμα:

$Coor(2,1)$:	μητρώο $Coor$	2η γραμμή	1η στήλη
	↓	↓	↓
	κομβικές συντεταγμένες	κόμβος 2	x-συντεταγμένη

Επομένως, εάν X_2 είναι η x-συντεταγμένη του 2ου κόμβου, τότε θα ισχύει: $X_2 = Coor(2,1)$

Κατ' αντιστοιχία θα ισχύει:

$Coor(4,2)$:	μητρώο $Coor$	4η γραμμή	2η στήλη
	↓	↓	↓
	κομβικές συντεταγμένες	κόμβος 4	y-συντεταγμένη

Επομένως, εάν Y_4 είναι η y-συντεταγμένη του 4ου κόμβου, τότε θα ισχύει: $Y_2 = Coor(4,2)$

Περιγραφή ράβδων

Κάθε ράβδος ορίζεται σαφώς από δύο κόμβους, τον κόμβο αρχής και τον κόμβο πέρατος. Επομένως, η j-ράβδος περιγράφεται επαρκώς μέσω της δυάδας $(N_{j,a}, N_{j,\pi})$, όπου $N_{j,\alpha}$ είναι ο κόμβος αρχής (δείκτης α) και $N_{j,\pi}$ είναι ο κόμβος πέρατος (δείκτης π).

α/α ράβδου (Element number)	α/α κόμβου αρχής	α/α κόμβου πέρατος
1	$N_{1,a}$	$N_{1,\pi}$
2	$N_{2,a}$	$N_{2,\pi}$
. . .	. . .	. . .
NEL	$N_{NEL,a}$	$N_{NEL,\pi}$

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π3)

$$Elem = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{1,a} & N_{1,\pi} \\ N_{2,a} & N_{2,\pi} \\ \cdots & \cdots \\ N_{NEL,a} & N_{NEL,\pi} \end{bmatrix}}_{\text{Μητρωικη περιγραφη ραβδων}}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 3: Περιγραφή ράβδων σε όρους κόμβων

Το σύνολο των NEL ράβδων (***N**umber of **EL**ements*) μίας κατασκευής περιγράφεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο, έστω $Elem$, διαστάσεων $NEL \times 2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3β.

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 3α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π3, με τρεις στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη αναγράφεται ο αύξων αριθμός της ράβδου και στις δύο επόμενες αναγράφονται αντίστοιχα ο αύξων αριθμός του κόμβου αρχής και ο αύξων αριθμός του κόμβου πέρατος της συγκεκριμένης ράβδου. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π3 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό ράβδου. Για παράδειγμα, οι κόμβοι αρχής και πέρατος της ράβδου 132 αναγράφονται στην 132^{η} γραμμή του πίνακα Π3 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π3 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στις επόμενες στήλες του πίνακα Π3. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο $Elem$ (Σχήμα 3β), το οποίο διαθέτει δύο στήλες (τη δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα Π3). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο $Elem$ προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 3: Ποιοι κόμβοι ορίζουν μία συγκεκριμένη ράβδο;

Παράδειγμα:

$Elem(25,1)$:	μητρώο $Elem$	25^{η} γραμμή	1^{η} στήλη
	↓	↓	↓
	Περιγραφή ράβδου	Ράβδος 25	Κόμβος αρχής

Εάν $N_{25,a}$ είναι ο κόμβος αρχής της 35^{ης} ράβδου, τότε θα ισχύει: $N_{25,a} = Elem(25,1)$

Κατ' αντιστοιχία θα ισχύει:

$Elem(103,2)$:	μητρώο $Elem$	103^{η} γραμμή	2^{η} στήλη
	↓	↓	↓
	Περιγραφή ράβδου	Ράβδος 103	Κόμβος πέρατος

Εάν $N_{103,\pi}$ είναι ο κόμβος πέρατος της 103^{ης} ράβδου, τότε θα ισχύει: $N_{103,\pi} = Elem(103,2)$

Στο σημείο αυτό, πρέπει να διευκρινισθεί ότι από τους δύο κόμβους που διαθέτει μία τυπική ράβδος (ένας κόμβος σε κάθε άκρο της), ο ένας κόμβος, με ***αυθαίρετο*** τρόπο, ορίζεται ως κόμβος αρχής, οπότε ο άλλος κόμβος καθίσταται κόμβος πέρατος. Για παράδειγμα, έστω ότι η ράβδος 15 εκτείνεται μεταξύ των κόμβων 8 και 13. Είναι δυνατόν ως κόμβος αρχής να ορισθεί είτε ο κόμβος 8 είτε ο κόμβος 13 (δική μας ***αυθαίρετη*** επιλογή).

Δήλωση ιδιοτήτων υλικού της κατασκευής

Από τις ιδιότητες του υλικού που χρησιμοποιείται για την κατασκευή μίας ράβδου, απαιτείται η γνώση του μέτρου ελαστικότητας E_j και της πυκνότητας $dens_j$. Το μέτρο ελαστικότητας εμφανίζεται στο μητρώο δυσκαμψίας μίας ράβδου j, το οποίο, ως προς *σωματόδετο* σύστημα αναφοράς, ισούται με:

$$K_{loc,j} = \frac{A_j E_j}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Η πυκνότητα $dens_j$ εμφανίζεται στο βάρος μίας ράβδου, το οποίο ισούται με:

$$W_j = dens_j \cdot A_j \cdot L_j$$

Το μέγεθος E_j για κάθε μία από τις NEL ράβδους μίας κατασκευής περιγράφεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 4α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο, έστω $Young$, διαστάσεων $NEL \times 1$ (πίνακας-στήλη), όπως φαίνεται στο Σχήμα 4β.

α/α ράβδου	Μέτρο ελαστικότητας
1	E_1
2	E_2
. . .	. . .
NEL	E_{NEL}

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π4)

$$Young = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \ldots \\ E_{NEL} \end{bmatrix}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 4: Περιγραφή μέτρου ελαστικότητας

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 4α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π4, με δύο στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη αναγράφεται ο αύξων αριθμός της ράβδου και στη δεύτερη αναγράφεται το μέτρο ελαστικότητας της συγκεκριμένης ράβδου. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π4 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό ράβδου. Για παράδειγμα, το μέτρο ελαστικότητας της ράβδου 14 αναγράφεται στην 14^{η} γραμμή του πίνακα Π4 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π4 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στη δεύτερη στήλη του πίνακα Π4. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο $Young$ (Σχήμα 4β), το οποίο διαθέτει μία στήλη (τη δεύτερη του πίνακα Π4). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο $Young$ προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 4: Ποιο είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού μίας ράβδου;

Παράδειγμα:

$Young(47,1)$: μητρώο $Young$ → Περιγραφή μέτρου ελαστικότητας υλικού

47η γραμμή → Ράβδος 47

Εάν E_{47} είναι το μέτρο ελαστικότητας της 47ης ράβδου, τότε θα ισχύει: $E_{47} = Young(47,1)$

Στην ειδική περίπτωση, όπου όλες οι ράβδοι ενός δικτυώματος έχουν το ίδιο μέτρο ελαστικότητας E, τότε το μητρώο $Young$, για λόγους οικονομίας, μπορεί να εκφρασθεί ως πίνακας-στοιχείο, δηλαδή:

$$Young = [E]$$

Ό,τι ακριβώς ισχύει για το μέτρο ελαστικότητας, ισχύει και για την πυκνότητα. Πιο συγκεκριμένα, το μέγεθος $dens_j$ για κάθε μία από τις NEL ράβδους μίας κατασκευής περιγράφεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 5α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε μητρώα, έστω $Young$ και $Dens$ αντίστοιχα, διαστάσεων $NEL \times 1$ (πίνακας-στήλη), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5β.

α/α ράβδου	Πυκνότητα
1	$dens_1$
2	$dens_2$
. . .	. . .
NEL	$dens_2$

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π5)

$$Dens = \begin{bmatrix} dens_1 \\ dens_2 \\ ... \\ dens_{NEL} \end{bmatrix}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 5: Περιγραφή πυκνότητας ράβδων

Σε πλήρη αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 5α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π5, με δύο στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη αναγράφεται ο αύξων αριθμός της ράβδου και στη δεύτερη αναγράφεται η πυκνότητα της συγκεκριμένης ράβδου. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π5 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό ράβδου. Για παράδειγμα, η πυκνότητα της ράβδου 18 αναγράφεται στην 18η γραμμή του πίνακα Π5 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π5 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στη δεύτερη στήλη του πίνακα Π5. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο $Dens$ (Σχήμα 5β), το οποίο διαθέτει μία στήλη (τη δεύτερη του πίνακα Π5). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο $Dens$ προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 5: Ποια είναι η πυκνότητα του υλικού μίας ράβδου;

Παράδειγμα:

$Dens(73,1)$:

μητρώο $Dens$	$73^{η}$ γραμμή
↓	↓
περιγραφή πυκνότητας υλικού	Ράβδος 73

Εάν ρ_{73} είναι η πυκνότητα της $73^{ης}$ ράβδου, τότε θα ισχύει: $\rho_{73} = Dens(73,1)$

Στην ειδική περίπτωση, όπου όλες οι ράβδοι ενός δικτυώματος έχουν την ίδια πυκνότητα $dens$, τότε το μητρώο $Dens$, για λόγους οικονομίας, μπορεί να εκφρασθεί ως πίνακας-στοιχείο, δηλαδή:

$$Dens = [dens]$$

Περιγραφή στηρίξεων

Ο όρος 'βαθμός ελευθερίας' (ΒΕ, ***d***egree ***o***f ***f***reedom - dof) σημαίνει *θεωρητική* δυνατότητα κίνησης (μετατόπισης ή στροφής) ενός κόμβου. Σε ένα τυπικό στοιχείο 2Δ-ράβδου, υπάρχουν δύο κόμβοι[1] (κόμβος αρχής και κόμβος πέρατος), κάθε ένας εκ των οποίων *θεωρητικά* μπορεί μετατοπισθεί τόσο κατά τη x-διεύθυνση όσο και κατά τη y-διεύθυνση. Επομένως, ένα ραβδόμορφο στοιχείο διαθέτει δύο (2) μεταφορικούς ΒΕ ανά κόμβο ή, ισοδύναμα, τέσσερις (4) ΒΕ συνολικά. Ωστόσο, λόγω στήριξης (εξωτερικό αίτιο), είναι δυνατόν να 'απαγορεύεται' η θεωρητικά επιτρεπόμενη κίνηση ενός κόμβου. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστοιχος ΒΕ χαρακτηρίζεται ως 'δεσμευμένος' (διαφορετικά χαρακτηρίζεται ως 'μη-δεσμευμένος'). Ένας τυπικός αριθμητικός συμβολισμός (δυαδική περιγραφή) που χρησιμοποιείται ευρέως στα λογισμικά ανάλυσης κατασκευών με τη ΜΠΣ είναι ο εξής:

Δεσμευμένος βαθμός ελευθερίας	: 1
Μη-δεσμευμένος βαθμός ελευθερίας	: 0

[1] Είναι δυνατόν να ορισθεί ραβδόμορφο στοιχείο περιγραφόμενο από 3 ή και περισσότερους κόμβους

Άρα, οι ΒΕ του i-κόμβου μίας κατασκευής περιγράφονται επαρκώς μέσω της διατεταγμένης δυάδας $\left(dof_{Ni,x}, dof_{Ni,y}\right)$, όπου $dof_{Ni,x}$ είναι ο ΒΕ του i-κόμβου κατά τη x-διεύθυνση και $dof_{Ni,y}$ είναι ο ΒΕ του i-κόμβου κατά τη y-διεύθυνση (οι διευθύνσεις εκφράζονται ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς). Ισχύει δε:

$$dof_{Ni,x} \in \{0,\ 1\} \text{ και } dof_{Ni,y} \in \{0,\ 1\}$$

Οι ΒΕ των NN κόμβων μίας κατασκευής περιγράφονται όπως φαίνεται στο Σχήμα 6α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο, έστω BC, διαστάσεων $NN \times 2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6β.

α/α κόμβου	$dof_{Ni,x}$	$dof_{Ni,y}$
1	$0\ or\ 1$	$0\ or\ 1$
2	$0\ or\ 1$	$0\ or\ 1$
. . .	. . .	. . .
NN	$0\ or\ 1$	$0\ or\ 1$

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π6)

$$BC = \begin{bmatrix} dof_{N_1,x} & dof_{N_1,y} \\ dof_{N_1,x} & dof_{N_2,y} \\ \dots & \dots \\ dof_{NN,x} & dof_{NN,y} \end{bmatrix}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 6: Περιγραφή βαθμών ελευθερίας κόμβων

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 6α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π6, με τρεις στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη στήλη αναγράφεται ο αύξων αριθμός του κόμβου, στη δεύτερη στήλη δηλώνεται η δέσμευση ή η μη-δέσμευση του ΒΕ κατά τη x-διεύθυνση, ενώ στην τρίτη στήλη δηλώνεται η δέσμευση ή η μη-δέσμευση του ΒΕ κατά τη y-διεύθυνση. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π6 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό κόμβου. Για παράδειγμα, οι ΒΕ του κόμβου 211 περιγράφονται στην 211^{η} γραμμή του πίνακα Π6 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π6 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στις επόμενες στήλες του πίνακα Π6. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο BC (Σχήμα 6β), το οποίο διαθέτει δύο στήλες (τη δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα Π6). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο BC προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 6α: Ποιες είναι οι συνθήκες στήριξης ενός συγκεκριμένου κόμβου;

Επίσης, με το μητρώο BC μπορούμε να απαντήσουμε στο ακόμα πιο χρήσιμο ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 6β: Ποιοι είναι οι *δεσμευμένοι* ΒΕ της εξεταζόμενης κατασκευής;

Παράδειγμα:

$BC(11,1)$:	Μητρώο BC	$11^{η}$ γραμμή	$1^{η}$ στήλη
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	Περιγραφή στηρίξεως	Κόμβος 11	ΒΕ κατά τη x-διεύθυνση

Εάν $dof_{11,x}$ είναι ο ΒΕ του $11^{ου}$ κόμβου κατά τη x-διεύθυνση, τότε ισχύει: $dof_{11,x} = BC(11,1)$

Κατ' αντιστοιχία θα ισχύει:

$BC(31,2)$:	μητρώο BC	$31^{η}$ γραμμή	$2^{η}$ στήλη
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	Περιγραφή στηρίξεως	Κόμβος 31	ΒΕ κατά τη y-διεύθυνση

Εάν $dof_{31,y}$ είναι ο ΒΕ του $31^{ου}$ κόμβου κατά τη y-διεύθυνση, τότε ισχύει: $dof_{31,y} = BC(31,2)$

Περιγραφή φορτίσεων

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κάθε κόμβος ενός τυπικού 2Δ-ραβδόμορφου στοιχείου διαθέτει δύο βαθμούς ελευθερίας, έναν κατά τη x-διεύθυνση και έναν κατά τη y-διεύθυνση.

Αφού θεωρητικά είναι δυνατή η κίνηση κατά τις προαναφερθείσες διευθύνσεις, θα είναι δυνατή και η αντίστοιχη επιβολή *εξωτερικά* ασκουμένων φορτίων. Επομένως, κάθε i-κόμβος μπορεί να παραλάβει θεωρητικά ένα φορτίο $F_{x,i}$ κατά τη x-διεύθυνση και ένα φορτίο $F_{y,i}$ κατά τη y-διεύθυνση. Συνεπώς, οι συνιστώσες των φορτίων που ασκούνται στους NN κόμβους μίας κατασκευής θα μπορούν να περιγραφούν όπως φαίνεται στο Σχήμα 7α. Η ίδια πληροφορία μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα μητρώο F διαστάσεων $NN \times 2$ (βλ. Σχήμα 7β).

α/α κόμβου	Δύναμη κατά τη x-διεύθυνση	Δύναμη κατά τη y-διεύθυνση
1	$F_{x,1}$	$F_{y,1}$
2	$F_{x,2}$	$F_{y,2}$
. . .	. . .	. . .
NN	$F_{x,NN}$	$F_{y,NN}$

(α) αναλυτική γραφή (πίνακας Π7)

$$F = \begin{bmatrix} F_{x,1} & F_{y,1} \\ F_{x,2} & F_{y,2} \\ \dots & \dots \\ F_{x,NN} & F_{y,NN} \end{bmatrix}$$

(β) μητρωϊκή γραφή

Σχήμα 7: Περιγραφή φόρτισης κόμβων

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, στην αναλυτική γραφή (Σχήμα 7α) χρησιμοποιείται ένας πίνακας, έστω Π7, με τρεις στήλες, εκ των οποίων στην πρώτη στήλη αναγράφεται ο αύξων αριθμός του κόμβου, ενώ στις άλλες δύο περιγράφεται η συνιστώσα της εξωτερικά επιβαλλόμενης δύναμης κατά τη x-διεύθυνση και τη y-διεύθυνση αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ο αύξων αριθμός γραμμής του πίνακα Π7 ταυτίζεται με τον αύξοντα αριθμό κόμβου. Για παράδειγμα, οι συνιστώσες της δύναμης που ασκούνται στον κόμβου 21 περιγράφονται στην $21^{η}$ γραμμή του πίνακα Π7 κοκ. Επομένως, η πρώτη στήλη του πίνακα Π7 μπορεί να παραληφθεί δεδομένου ότι η πληροφορία που παρέχει εμπεριέχεται στις επόμενες στήλες του πίνακα Π7. Με αυτό το σκεπτικό, κατασκευάζεται το μητρώο F (Σχήμα 7β), το οποίο διαθέτει δύο στήλες (τη δεύτερη και την τρίτη στήλη του πίνακα Π7). Έχοντας αυτά υπ' όψιν, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουμε το μητρώο F προκειμένου να απαντήσουμε στο ακόλουθο βασικό ερώτημα:

Βασικό ερώτημα 7: Ποιες εξωτερικές δυνάμεις ασκούνται σε έναν συγκεκριμένο κόμβο;

Παράδειγμα:

$F(3,1)$:	Μητρώο F	$3^{η}$ γραμμή	$1^{η}$ στήλη
	↓	↓	↓
	Περιγραφή φορτίσεως	Κόμβος 3	x-συνιστώσα φόρτισης

Εάν $F_{3,x}$ είναι η x-συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στον κόμβο 3, τότε: $F_{3,x} = F(3,1)$

Κατ' αντιστοιχία θα ισχύει:

$F(99,2)$:	μητρώο F	$99^{η}$ γραμμή	$2^{η}$ στήλη
	↓	↓	↓
	Περιγραφή φορτίσεως	Κόμβος 99	ΒΕ κατά τη y-διεύθυνση

Εάν $F_{99,y}$ είναι η y-συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στον κόμβο 99 τότε: $F_{99,x} = F(99,1)$

3. Σύνθεση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του δικτυώματος

Τοπικό μητρώο δυσκαμψίας ράβδου

Το μητρώο δυσκαμψίας $K_{loc,j}$ ενός πεπερασμένου στοιχείου j πληροφορεί σχετικά με τον τρόπο που 'αλληλεπιδρούν' μεταξύ τους οι ΒΕ του εν λόγω στοιχείου. Στην περίπτωση ενός δικτυώματος, το επιλεγέν πεπερασμένο στοιχείο είναι αυτό της ράβδου και, όπως έχει ήδη αναφερθεί, το αντίστοιχο μητρώο δυσκαμψίας ως, προς το σωματόδετο σύστημα αναφοράς, ισούται με:

$$K_{loc,j} = \frac{A_j E_j}{L_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Με κατάλληλο μετασχηματισμό (στροφή αξόνων), προκύπτει το μητρώο δυσκαμψίας $K_{glob,j}$ μίας ράβδου j ως προς το καθολικό σύστημα αναφοράς:

$$K_{glob,j} = \frac{A_j E_j}{L_j} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{ldof1=1} & \text{ldof2=2} & \text{ldof3=3} & \text{ldof4=4} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} c^2 & c\cdot s & -c^2 & -c\cdot s \\ c\cdot s & s^2 & -c\cdot s & -s^2 \\ -c^2 & -c\cdot s & c^2 & c\cdot s \\ -c\cdot s & -s^2 & c\cdot s & s^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{ldof1=1} \\ \text{ldof2=2} \\ \text{ldof3=3} \\ \text{ldof4=4} \end{array} \end{array}$$

όπου:

A_j	: εμβαδόν διατομής ράβδου
E_j	: μέτρο ελαστικότητας ράβδου
L_j	: μήκος ράβδου
ϑ_j	: γωνία προσανατολισμού ράβδου
$c = \cos\left(\vartheta_j\right)$	: συνημίτονο γωνίας ϑ_j
$s = \sin\left(\vartheta_j\right)$	: ημίτονο γωνίας ϑ_j

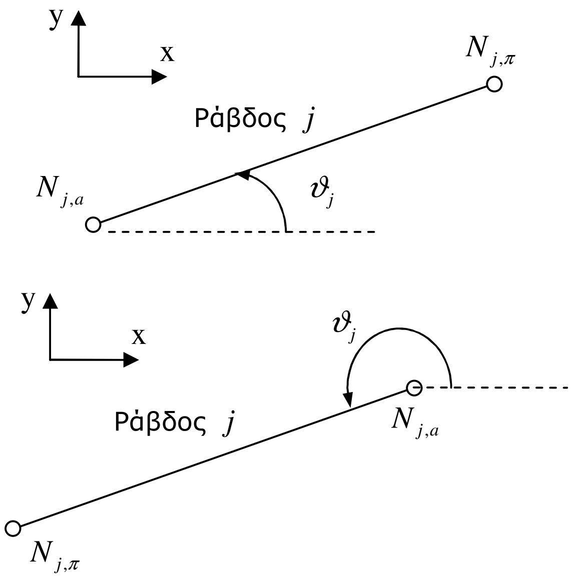
Ως ldof1, ldof2, ldof3 και ldof4 συμβολίζονται, σε *τοπική* αρίθμηση (*local* dofs), οι ΒΕ της ράβδου j, οι οποίοι έχουν αναγραφεί περιμετρικά του μητρώου καθαρά για εποπτικούς λόγους. Εάν είναι γνωστά τα A_j, E_j, L_j και ϑ_j, τότε είναι δυνατόν να υπολογισθεί το $K_{glob,j}$. Σε αντίθεση με τα μεγέθη A_j και E_j, τα οποία δηλώνονται άμεσα στα μητρώα $Area$ και $Young$ αντίστοιχα, τα μεγέθη L_j και ϑ_j πρέπει να υπολογιστούν. Ισχύει:

Προβολή της ράβδου j στον οριζόντιο άξονα:	$\Delta x_j^2 = \left(x_{j,N_\pi} - x_{j,N_a}\right)^2$
Προβολή της ράβδου j στον κατακόρυφο άξονα:	$\Delta y_j^2 = \left(y_{j,N_\pi} - y_{j,N_a}\right)^2$
Μήκος ράβδου j:	$L_j = \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}$
Προσανατολισμός ράβδου:	$c = \cos\left(\vartheta_j\right) = \dfrac{\Delta x_j}{L_j}$ και $s = \sin\left(\vartheta_j\right) = \dfrac{\Delta y_j}{L_j}$

όπου:

x_{j,N_a}:	x-συντεταγμένη του κόμβου αρχής της ράβδου j
x_{j,N_π}:	x-συντεταγμένη του κόμβου πέρατος της ράβδου j
y_{j,N_a}:	y-συντεταγμένη του κόμβου αρχής της ράβδου j
y_{j,N_π}:	y-συντεταγμένη του κόμβου πέρατος της ράβδου j

Διευκρινίζεται ότι ο προσανατολισμός μίας ράβδου καθορίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται η ευθεία αναφοράς (βοηθητική ευθεία), η οποία είναι παράλληλη προς τον x-άξονα του καθολικού συστήματος αναφοράς και τοποθετείται στον κόμβο αρχής της j-ράβδου. Η γωνία προσανατολισμού ϑ_j διαγράφεται ανθωρολογιακά, ξεκινώντας από την ευθεία αναφοράς και καταλήγοντας στο διαμήκη άξονα της j-ράβδου .



(α) ο 'αριστερός κόμβος' είναι ο κόμβος αρχής

(β) ο 'αριστερός κόμβος' είναι ο κόμβος πέρατος

Σχήμα 8: Προσανατολισμός ράβδου

Από όλα τα παραπάνω, καθίσταται προφανές ότι ο υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας μίας ράβδου απαιτεί και τον καθορισμό των μεγεθών x_{j,N_a}, x_{j,N_π}, y_{j,N_a} και y_{j,N_π}, κάτι που επιτυγχάνεται μέσω της κατάλληλης διασύνδεσης των μητρώων $Coor$ και $Elem$, όπως περιγράφεται στην επόμενη ενότητα.

Σύζευξη μητρώων $Coor$ και $Elem$

Εκτός των βασικών ερωτημάτων που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, είναι δυνατόν να τεθούν σύνθετα ερωτήματα, όπως:

Σύνθετο ερώτημα 1: Ποια είναι η x-συντεταγμένη (ή η y-συντεταγμένη) του κόμβου αρχής (ή του κόμβου πέρατος) μίας συγκεκριμένης ράβδου;'

Η απάντηση σε αυτού του τύπου τα σύνθετα ερωτήματα προκύπτει μέσω της κατάλληλης σύζευξης (σύνθετης χρήσης) των μητρώων $Coor$ και $Elem$. Η γενική μορφή είναι η εξής:

Κόμβος αρχής

$$x_{j,N_{\alpha}} = \mathrm{Coor}\big(\ \mathrm{Elem}(j,1),\ \ 1\big)$$
$$y_{j,N_{a}} = \mathrm{Coor}\big(\ \mathrm{Elem}(j,1),\ \ 2\big)$$

Κόμβος πέρατος

$$x_{j,N_{\pi}} = \mathrm{Coor}\big(\ \mathrm{Elem}(j,2),\ \ 1\big)$$
$$y_{j,N_{a}} = \mathrm{Coor}\big(\ \mathrm{Elem}(j,2),\ \ 2\big)$$

Ακολουθεί η επεξήγηση της ανωτέρω γραφής.

$$\boxed{x_{j,N_\alpha} = \mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(j, 1\right),\ \ 1\right)}$$

συντεταγμένη

για τη ράβδο j

κόμβος αρχής

ράβδος j

και τον κόμβο αρχής

x-συντεταγμένη

κατά τη x-διεύθυνση

$$\boxed{y_{j,N_\alpha} = \mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(j, 1\right),\ \ 2\right)}$$

συντεταγμένη

για τη ράβδο j

κόμβος αρχής

ράβδος j

και τον κόμβο αρχής

y-συντεταγμένη

κατά τη y-διεύθυνση

$$\boxed{x_{j,N_\pi} = \mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(j, 2\right),\ \ 1\right)}$$

συντεταγμένη

για τη ράβδο j

κόμβος πέρατος

ράβδος j

και τον κόμβο πέρατος

x-συντεταγμένη

κατά τη x-διεύθυνση

$$\boxed{y_{j,N_\pi} = \mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(j, 2\right),\ \ 2\right)}$$

συντεταγμένη

για τη ράβδο j

κόμβος πέρατος

ράβδος j

και τον κόμβο πέρατος

y-συντεταγμένη

κατά τη y-διεύθυνση

Παραδείγματα:

$$\boxed{\mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(13,\ 1\right),\quad 1\right)}$$

συντεταγμένη
για τη ράβδο **13**
και τον κόμβο αρχής
κατά τη x-διεύθυνση

Άρα: $\mathrm{Coor}\left(\mathrm{Elem}\left(13,1\right),1\right) = X_{N_{13,a}}$

$$\boxed{\mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(35,\ 1\right),\quad 2\right)}$$

συντεταγμένη
για τη ράβδο **35**
και τον κόμβο αρχής
κατά τη y-διεύθυνση

Άρα: $\mathrm{Coor}\left(\mathrm{Elem}\left(35,1\right),1\right) = Y_{N_{35,a}}$

$$\boxed{\mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(76,\ 2\right),\quad 1\right)}$$

συντεταγμένη
για τη ράβδο **76**
και τον κόμβο πέρατος
κατά τη x-διεύθυνση

Άρα: $\mathrm{Coor}\left(\mathrm{Elem}\left(76,2\right),1\right) = X_{N_{76,\pi}}$

$$\boxed{\mathrm{Coor}\left(\ \mathrm{Elem}\left(103,\ 2\right),\quad 2\right)}$$

συντεταγμένη
για τη ράβδο **103**
και τον κόμβο πέρατος
κατά τη y-διεύθυνση

Άρα: $\mathrm{Coor}\left(\mathrm{Elem}\left(103,2\right),2\right) = Y_{N_{103,\pi}}$

Καθολικό μητρώο δυσκαμψίας κατασκευής

Ένα πολύ σημαντικό σημείο της όλης διαδικασίας είναι η ενημέρωση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας K_{glob} ολόκληρης της κατασκευής (δικτύωμα στην προκειμένη περίπτωση) από τα μητρώα δυσκαμψίας $K_{glob,j}$ των επί μέρους στοιχείων (ράβδοι στην προκειμένη περίπτωση). Το 'κλειδί' σε αυτή την εργασία είναι η σωστή τοποθέτηση των στοιχείων των μητρώων $K_{glob,j}$ $j = 1,..,NEL$ στο μητρώο K_{glob}, κάτι που επιτυγχάνεται μέσω της μετατροπής της *τοπικής* αρίθμησης των ΒΕ σε καθολική.

$$K_{glob,j} = \begin{bmatrix} k_{11,j} & k_{12,j} & k_{13,j} & k_{14,j} \\ & k_{22,j} & k_{23,j} & k_{24,j} \\ & & k_{33,j} & k_{34,j} \\ sym & & & k_{44,j} \end{bmatrix} \quad \overset{?}{\longrightarrow} \quad K_{glob} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \dots & k_{1,2NN} \\ & k_{2,2} & k_{2,3} & \dots & k_{2,2NN} \\ & & k_{3,3} & \dots & k_{3,2NN} \\ & & & \dots & \dots \\ sym & & & & k_{2NN,2NN} \end{bmatrix}$$

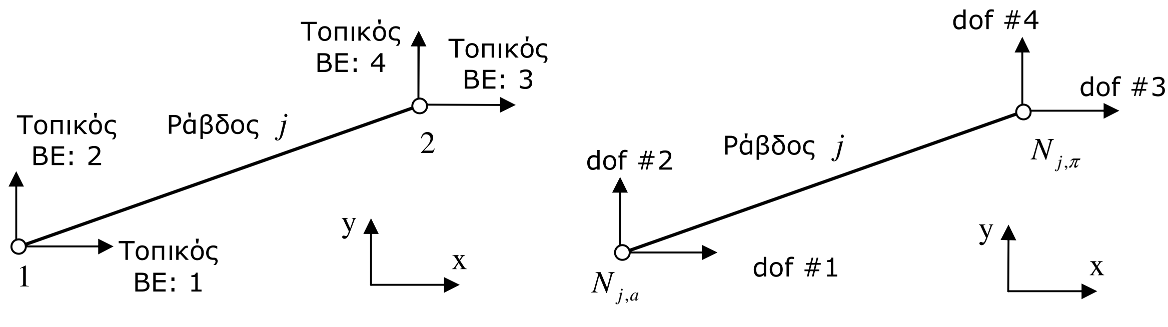
$K_{glob,j}$: Μητρώο δυσκαμψίας στοιχείου, διάστασης 4×4 με τοπική αρίθμηση ΒΕ

K_{glob} : Μητρώο δυσκαμψίας ολόκληρης της κατασκευής, διάστασης $2NN \times 2NN$ με καθολική αρίθμηση ΒΕ

Σχήμα 9: Σύνθεση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας της εξεταζόμενης κατασκευής

Εύρεση καθολικής αρίθμησης των ΒΕ ενός στοιχείου ράβδου

Έστω μία τυπική ράβδος (ραβδόμορφο στοιχείο) δύο διαστάσεων με κόμβο αρχής $N_{j,a}$ και κόμβο πέρατος $N_{j,\pi}$.(βλ. Σχήμα 10).



(α) τοπική αρίθμηση (β) καθολική αρίθμηση ΒΕ

Σχήμα 10: Σχηματική αναπαράσταση ραβδόμορφου στοιχείου

Ισχύουν τα ακόλουθα:

	Για τον κόμβο αρχής	Για τον κόμβο πέρατος
Αύξων αριθμός εξεταζομένου κόμβου	$N_{j,a}$	$N_{j,\pi}$
Πλήθος προηγηθέντων κόμβων	$\left(N_{j,a}-1\right)$	$\left(N_{j,\pi}-1\right)$
ΒΕ ανά κόμβο	2	2
Πλήθος προηγηθέντων ΒΕ	$2\cdot\left(N_{j,a}-1\right)$	$2\cdot\left(N_{j,\pi}-1\right)$
ΒΕ εξεταζομένου κόμβου κατά τη x-διεύθυνση	$2\cdot\left(N_{j,a}-1\right)+1=2\cdot N_{j,a}-1$	$2\cdot\left(N_{j,\pi}-1\right)+1=2\cdot N_{j,\pi}-1$
ΒΕ εξεταζομένου κόμβου κατά τη y-διεύθυνση	$2\cdot\left(N_{j,a}-1\right)+2=2\cdot N_{j,a}$	$2\cdot\left(N_{j,\pi}-1\right)+2=2\cdot N_{j,\pi}$

Διευκρινίζεται ότι:
(Πλήθος προηγηθέντων κόμβων) = (Αύξων αριθμός εξεταζομένου κόμβου) − 1

(Πλήθος προηγηθέντων ΒΕ) = (Πλήθος προηγηθέντων κόμβων) × (ΒΕ ανά κόμβο)

(ΒΕ εξεταζομένου κόμβου κατά τη x-διεύθυνση) = (Πλήθος προηγηθέντων ΒΕ) + 1

(ΒΕ εξεταζομένου κόμβου κατά τη y-διεύθυνση) = (Πλήθος προηγηθέντων ΒΕ) + 2

Εναλλακτικά:

$$\begin{pmatrix}\text{ΒΕ εξεταζομενου κομβου}\\ \text{κατα τη y-διευθυνση}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{ΒΕ εξεταζομενου κομβου}\\ \text{κατα τη x-διευθυνση}\end{pmatrix}+1$$

Ωστόσο, ισχύει ότι:

$$N_{j,a}=Elem(j,1) \text{ και } N_{j,\pi}=Elem(j,2)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω, προκύπτει:

Πίνακας Π8: Βαθμοί Ελευθερίας ράβδου

Ράβδος j	Κόμβος αρχής $N_{j,a}=Elem(j,1)$	x-διεύθυνση	$\text{dof}1=2\cdot Elem\left(j,1\right)-1$
		y-διεύθυνση	$\text{dof}2=2\cdot Elem\left(j,1\right)$
	Κόμβος πέρατος $N_{j,\pi}=Elem(j,2)$	x-διεύθυνση	$\text{dof}3=2\cdot Elem\left(j,2\right)-1$
		y-διεύθυνση	$\text{dof}4=2\cdot Elem\left(j,2\right)$

Άρα οι ΒΕ μίας ράβδου είναι δυνατόν να γραφούν μητρωϊκά ως εξής:

$$\text{Edof} = [\text{dof1 dof2 dof3 dof4}]^T$$

4. Επιβολή οριακών συνθηκών και φορτίσεων

Η επιβολή των οριακών συνθηκών (στήριξη) μπορεί να υλοποιηθεί με δύο τρόπους, είτε *διαγράφοντας* γραμμές και στήλες από το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας $[K]_{glob}$ της κατασκευής που αντιστοιχούν σε *δεσμευμένους ΒΕ* είτε *αποσπώντας* γραμμές και στήλες από το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής που αντιστοιχούν σε *μη-δεσμευμένους* ΒΕ. Ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα ακολουθηθεί, τελικά προκύπτει ένα υπό-μητρώο του $[K]_{glob}$ στο οποίο διατηρούνται στοιχεία σχετιζόμενα με *μη-δεσμευμένους* ΒΕ.

Η επιβολή των φορτίσεων συνίσταται στην ανάλυση των εξωτερικά ασκουμένων δυνάμεων σε συνιστώσες, οι οποίες κατόπιν επιβάλλονται στους κόμβους της κατασκευής. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δυνάμεις στήριξης (αντιδράσεις) αποτελούν εξωτερικές δυνάμεις σε μία κατασκευή, ωστόσο δεν είναι γνωστές από την αρχή. Επειδή σχετίζονται με δεσμευμένους ΒΕ, δηλαδή σχετίζονται με γραμμές και στήλες του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας της κατασκευής που δεν λαμβάνονται υπ' όψιν στην επίλυση (υπολογισμός κομβικών μετατοπίσεων - βλ. επόμενη παράγραφο), η αρχική μη-γνώση των δυνάμεων στήριξης δεν αποτελεί πρόβλημα. Διευκρινίζεται ότι οι αντιδράσεις υπολογίζονται αφού προηγηθεί η επίλυση της κατασκευής.

5. Υπολογισμός κομβικών μετατοπίσεων

Οι κομβικές μετατοπίσεις που σχετίζονται με δεσμευμένους ΒΕ είναι μηδενικές, δηλαδή:

$$\{U\}_{fixed\_dofs} = \{0\}$$

Οι κομβικές μετατοπίσεις που σχετίζονται με μη-δεσμευμένους ΒΕ προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$[K]_{glob,free\_dofs} \cdot \{U\}_{free\_dofs} = \{F\}_{free\_dofs}$$

όπου:

$[K]_{glob,free\_dofs}$: το τμήμα του $[K]_{glob}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ

$\{U\}_{free\_dofs}$: το τμήμα του $\{U\}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ

$\{F\}_{free\_dofs}$: το τμήμα του $\{F\}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ και

$[K]_{glob}$: το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής

$\{U\}$: διάνυσμα όλων των κομβικών μετατοπίσεων της κατασκευής

$\{F\}$: διάνυσμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στην κατασκευή

Είναι προφανές ότι ισχύει:

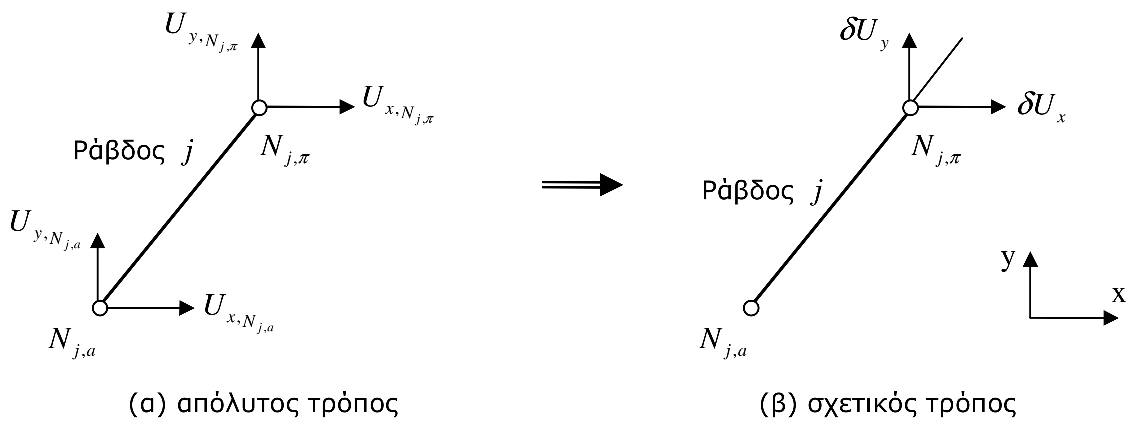
$$\{U\}_{free\_dofs} = \left([K]_{glob,free\_dofs}\right)^{-1} \cdot \{F\}_{free\_dofs}$$

6. Υπολογισμός χρήσιμων μεγεθών

Εκτός από τον υπολογισμό των κομβικών μετατοπίσεων, υπάρχουν και άλλα μεγέθη, η γνώση των οποίων είναι άκρως χρήσιμη για την αξιολόγηση μίας κατασκευής. Στην προκειμένη περίπτωση (δικτύωμα), το ενδιαφέρον επικεντρώνεται και στις ποσότητες που παρουσιάζονται στις επόμενες παραγράφους.

Παραμορφώσεις ράβδων

Η μεταβολή του μήκους δL_j μίας j-ράβδου προκύπτει όπως φαίνεται στο Σχήμα 11. Πιο συγκεκριμένα, οι κομβικές μετατοπίσεις μίας j-ράβδου είναι δυνατόν να απεικονισθούν με δύο τρόπους, τον απόλυτο (Σχήμα 11α) και τον σχετικό (Σχήμα 11β).



Σχήμα 11: Κομβικές μετατοπίσεις

Σύμφωνα με τον απόλυτο τρόπο, για κάθε κόμβο αναγράφεται η μετατόπιση τόσο κατά τη x-διεύθυνση όσο και κατά τη y-διεύθυνση. Σύμφωνα με το σχετικό τρόπο, ο κόμβος αρχής θεωρείται ακίνητος (μηδενικές μετατοπίσεις), ενώ ο κόμβος πέρατος εμφανίζει κίνηση σχετική ως προς τον κόμβο αρχής, άρα οι σχετικές του μετατοπίσεις δU_x και δU_y θα δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\delta U_x = U_{x,N_{j,\pi}} - U_{x,N_{j,a}} \qquad \text{και} \qquad \delta U_y = U_{y,N_{j,\pi}} - U_{y,N_{j,a}}$$

Το άθροισμα των προβολών των σχετικών μετατοπίσεων δU_x και δU_y επί του άξονα της ράβδου ισούται αριθμητικά με τη μεταβολή δL_j του μήκους της j-ράβδου, δηλαδή:

$$\delta L_j = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_j & \sin\vartheta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta U_x \\ \delta U_y \end{bmatrix}$$

Η παραμόρφωση ε_j μίας ράβδου ισούται με

$$\varepsilon_j = \frac{\delta L_j}{L_j}$$

όπου

L_j : μήκος της j-ράβδου
δL_j : μεταβολή μήκους της j-ράβδου

Τάσεις ράβδων

Η αξονική τάση σ_j που εμφανίζεται σε μία j-ράβδο ισούται με:

$$\sigma_j = E_j \cdot \varepsilon_j$$

όπου:

ε_j : παραμόρφωση της j-ράβδου
E_j : μέτρο ελαστικότητας του υλικού της j-ράβδου

Δυνάμεις ράβδων

Η αξονική δύναμη F_j που εμφανίζεται σε μία j-ράβδο ισούται με:

$$F_j = \sigma_j \cdot A_j$$

όπου:

σ_j : αξονική τάση της j-ράβδου

A_j : εμβαδόν διατομής της j-ράβδου

Βάρος κατασκευής

Το βάρος W της κατασκευής (δικτυώματος) ισούται με:

$$W = \sum_{j=1}^{NEL} \rho_j \cdot A_j \cdot L_j$$

όπου

ρ_j : πυκνότητα υλικού της j-ράβδου

A_j : εμβαδόν διατομής της j-ράβδου

L_j : μήκος της j-ράβδου

Σημειώνεται ότι εάν μία κατασκευή φορτίζεται από το *ίδιον βάρος της και μόνο*, τότε το άθροισμα των δυνάμεων στήριξης ισούται με το βάρος της κατασκευής.

Δυνάμεις στήριξης

Οι δυνάμεις στήριξης $\{F\}_{fixed\_dofs}$ είναι ίσες με:

$$\{F\}_{fixed\_dofs} = [K]_{glob,fixed\_dofs} \cdot \{U\}$$

όπου:

$[K]_{glob,fixed\_dofs}$: το τμήμα του $[K]_{glob}$ που σχετίζεται με δεσμευμένους ΒΕ

$\{U\}$: το διάνυσμα των κομβικών μετατοπίσεων

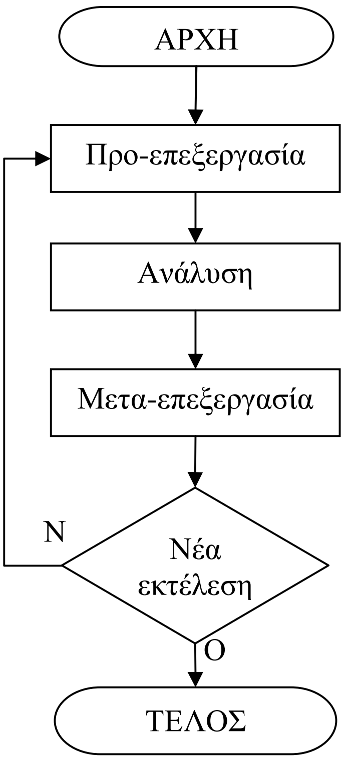
Οι δυνάμεις στήριξης πρέπει να εξισορροπούν τα εξωτερικώς επιβαλλόμενα φορτία, επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum \{F\}_{fixed\_dofs} = \sum \{F\}_{free\_dofs}$$

7. Σχολιασμός

Περί λογισμικού

Ένα πλήρες υπολογιστικό περιβάλλον για την ανάλυση μίας μηχανολογικής κατασκευής με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) εμφανίζει τρία διακριτά μέρη (βλ. Σχήμα 12).



Σχήμα 12: Τυπική δομή λογισμικού ΜΠΣ

<u>'Προ-επεξεργασία' (pre-processing)</u>

Αφορά στην εισαγωγή όλων εκείνων των δεδομένων που απαιτούνται για τη μελέτη της κατασκευής, δηλαδή:

- Γεωμετρική περιγραφή της κατασκευής
- Διακριτοποίηση της κατασκευής
- Δήλωση ιδιοτήτων υλικού της κατασκευής
- Δήλωση στηρίξεων
- Δήλωση φορτίσεων

Η γεωμετρική περιγραφή της κατασκευής επιτυγχάνεται μέσω της σχεδίασης αυτής. Με τον όρο 'διακριτοποίηση της κατασκευής', ισοδύναμα με τον όρο 'δημιουργία πλέγματος', εννοούμε τη διαίρεση της κατασκευής σε πλήθος στοιχείων με πεπερασμένες γεωμετρικές διαστάσεις (Πεπερασμένα Στοιχεία - ΠΣ). Ο τύπος των ΠΣ αποτελεί επιλογή του χρήστη. Επομένως, η προ-επεξεργασία είναι ουσιαστικά ένα σχεδιαστικό περιβάλλον, στο οποίο προσομοιώνεται η προς μελέτη κατασκευή. Το προϊόν αυτής της προσομοίωσης καλείται 'μοντέλο'

<u>'Ανάλυση' (Analysis)</u>

Σε αυτό το τμήμα λαμβάνει χώρα ο υπολογισμός όλων των ποσοτήτων ενδιαφέροντος, όπως κομβικές μετατοπίσεις, τάσεις, παραμορφώσεις, ιδιοσυχνότητες, κοκ.

<u>'Μετά-επεξεργασία' (post-processing)</u>

Σε αυτό το τμήμα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Ο πλέον συνήθης τρόπος παροσυσίασης είναι μέσω χρωματικής απεικόνισης. Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή της ποσότητας ενδιαφέροντος, π.χ. τάση, εμφανίζεται ως κατανομή χρωμάτων σε όλη της έκταση της κατασκευής σύμφωνα με μία χρωματική κλίμακα. Επιπροσθέτως, είναι δυνατή η παρουσίαση αποτελεσμάτων είτε με τη μορφή γραφημάτων, είτε με τη μορφή πινάκων είτε ως περιεχόμενο κάποιου αρχείου δεδομένων. Διευκρινίζεται ότι η χρωματική απεικόνιση, αν και δίδει μία γρήγορη και εποπτική εικόνα της κατανομής ενός μεγέθους, είναι δυνατόν να παραπλανήσει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η κατασκευή μίας χρωματικής κατανομής στηρίζεται σε διαδικασίες παρεμβολής (interpolation) μεταξύ αριθμητικών τιμών σε συγκεκριμένα σημεία, οπότε υπάρχει ο κίνδυνος αυτό που απεικονίζεται χρωματικά να διαφέρει σημαντικά από αυτό που περιγράφεται αριθμητικά.

Περί γενικότερης ισχύος της ΜΠΣ

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάσθηκε η αντιμετώπιση ενός 2Δ-δικτυώματος. Ακριβώς η η ίδια πορεία εργασιών ακολουθείται για την εξέταση οποιασδήποτε κατασκευής. Το μόνο που αλλάζει είναι ο τύπος του πεπερασμένου στοιχείου που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός πλαισίου, πρέπει να χρησιμοποιηθεί το πεπερασμένο στοιχείου της δοκού, ενώ σε περίπτωση επίπεδης ελαστικότητας πρέπει να χρησιμοποιηθεί αντίστοιχος τύπος πεπερασμένου στοιχείου (π.χ. 3-κομβικό τριγωνικό στοιχείο, 4-κομβικό τετραπλευρικό στοιχείο κοκ). Ανάλογα, δε, με τη διάσταση του προβλήματος (π.χ. 1Δ, 2Δ ή 3Δ), επιλέγεται η κατάλληλη διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας του πεπερασμένου στοιχείου. Για παράδειγμα, σε ένα 2Δ-δικτύωμα χρησιμοποιείται το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου σε 2Δ, ενώ σε ένα 3Δ-δικτύωμα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η διατύπωση του μητρώου δυσκαμψίας της ράβδου σε 3Δ.

Περί μητρώου μάζας

Εν γένει, ένα σώμα εμφανίζει αντίσταση στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων. Στην περίπτωση όπου οι εξωτερικές δυνάμεις τείνουν να παραμορφώσουν το σώμα, η αντίσταση που αυτό προβάλλει περιγράφεται ποσοτικά μέσω του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του $\left[K\right]$. Στην περίπτωση όπου οι εξωτερικές δυνάμεις τείνουν να μετακινήσουν το σώμα, η αντίσταση που αυτό προβάλλει περιγράφεται ποσοτικά μέσω του καθολικού μητρώου μάζας του $\left[M\right]$. Το μητρώο $\left[M\right]$ συντίθεται όπως ακριβώς και το μητρώο $\left[K\right]$. Το μητρώο $\left[M\right]$ χρησιμοποιείται όταν είναι επιθυμητή η μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς ενός σώματος, οπότε η προς επίλυση εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\left[M\right]\left\{\ddot{U}\right\}+\left[K\right]\left\{U\right\}=\left\{F\right\}$$

Ειδική κατηγορία αποτελούν τα προβλήματα ιδιοανυσματικής ανάλυσης (ιδιοανάλυσης), όπου εκεί ζητείται ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων του εξεταζομένου σώματος, ενώ η προς επίλυση εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\det\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)=0$$

Στην περίπτωση όπου είναι επιθυμητός ο συνυπολογισμός του ίδιου βάρους μίας κατασκευής, τότε το μητρώο μάζας $\left[M\right]$ δεν επεισέρχεται άμεσα στην προς επίλυση εξίσωση:

$$[K]\{U\}=\{F\}$$

Ωστόσο, χρησιμοποιείται προκειμένου να υπολογισθεί η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο, η οποία στη συνέχεια κατανέμεται στους κόμβους του αντίστοιχου στοιχείου, άρα προστίθεται κατάλληλα στις εξωτερικά ασκούμενες κομβικές δυνάμεις. Με άλλα λόγια, η επίδραση του ίδιου βάρους της κατασκευής εμφανίζεται έμμεσα στο διάνυσμα $\{F\}$ της ανωτέρω εξίσωσης.

Περί επιβολής οριακών συνθηκών

Όπως έχει σχολιασθεί στην αντίστοιχη ενότητα, η ανάλυση μίας κατασκευής στηρίζεται στην επίλυση της εξίσωσης:

$$[K]_{glob,free\_dofs}\cdot\{U\}_{free\_dofs}=\{F\}_{free\_dofs}$$

όπου

$[K]_{glob,free\_dofs}$	:	το τμήμα του $[K]_{glob}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ
$\{U\}_{free\_dofs}$	:	το τμήμα του $\{U\}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ
$\{F\}_{free\_dofs}$	:	το τμήμα του $\{F\}$ που αντιστοιχεί σε μη-δεσμευμένους ΒΕ

Τα μητρώα $[K]_{glob,free\_dofs}$ και $\{F\}_{free\_dofs}$ είναι δυνατόν να προέλθουν από τα μητρώα $[K]_{glob}$ και $\{F\}$, αντίστοιχα, με δύο τρόπους: είτε διαγράφοντας από τα μητρώα $[K]_{glob}$ και $\{F\}$ εκείνες τις γραμμές και στήλες που σχετίζονται με δεσμευμένους ΒΕ, είτε αποσπώντας από τα μητρώα $[K]_{glob}$ και $\{F\}$ εκείνες τις γραμμές και στήλες που σχετίζονται με μη-δεσμευμένους ΒΕ. Όσον αφορά στη διαγραφή, ή απόσπαση, των γραμμών και στηλών, δηλαδή όσον αφορά στην επιβολή των συνθηκών στήριξης, αυτή πραγματοποιείται με δύο τρόπους:

- 1^{ος} τρόπος: για κάθε πεπερασμένο στοιχείο συντίθεται το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας, κατόπιν ενημερώνεται το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής και, αφού ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία για όλα τα ΠΣ της κατασκευής, διαγράφονται (αποσπούνται) από αυτό γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν σε δεσμευμένους (μη-δεσμευμένους) βαθμούς ελευθερίας. Με άλλα λόγια, η επιβολή των συνθηκών στήριξης υλοποιείται σε καθολικό (global) επίπεδο.
- 2^{ος} τρόπος: για κάθε πεπερασμένο στοιχείο συντίθεται το τοπικό μητρώο δυσκαμψίας, κατόπιν διαγράφονται (αποσπούνται) από αυτό γραμμές και στήλες που αντιστοιχούν σε δεσμευμένους (μη-δεσμευμένους) βαθμούς ελευθερίας και μετά ενημερώνεται το

καθολικό μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής. Με άλλα λόγια, η επιβολή των συνθηκών στήριξης υλοποιείται σε τοπικό (local) επίπεδο.

Από απόψεως προγραμματισμού, η δεύτερη αντιμετώπιση οδηγεί σε καλύτερη διαχείριση της μνήμης του Η/Υ μιας και αποθηκεύονται σε αυτήν μόνον στοιχεία τα οποία θα αξιοποιηθούν. Παλαιότερα, η διαθέσιμη μνήμη των επιτραπέζιων Η/Υ ήταν πολύ περιορισμένη, οπότε η διαχείριση της μνήμης ήταν ζήτημα πρωτίστης σημασίας, κάτι που δεν ισχύει πλέον σε τόσο σημαντικό βαθμό.