Εφαρμογές μιας Βασικής Σχέσης της Τανυστικής Άλγεβρας

Ανδρέας Κανάραχος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Χριστόφορος Προβατίδης, Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Νικόλαος Ζαφειρόπουλος, Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

Στην εργασία αυτή θα δείξουμε ότι με τη χρήση μιάς μόνο σχέσης με δείκτες μπορούν να αποδειχθούν πολλές ταυτότητες της διανυσματικής ανάλυσης και του διανυσματικού λογισμού. Οι ταυτότητες αυτές έχουν μεγάλη εφαρμογή σε διάφορες περιοχές της φυσικής όπως στην κλασική μηχανική, στην μηχανική των ρευστών, στον ηλεκτρομαγνητισμό και στην ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Επίσης δείχνουμε ότι αυτή η σχέση με δείκτες, οδηγεί σε μιά βασική ιδιότητα γιά την ομάδα SU(2) του Lie. Ετσι, η εξαγωγή των διανυσματικών ταυτοτήτων δεν είναι τυχαία αλλά απόλυτα φυσική αφού όλα τα φυσικά φαινόμενα που περιγράφουν αυτές οι διανυσματικές ταυτότητες είτε υπακούουν είτε χρησιμοποιούν την συμμετρία της ομάδας SU(2) του Lie.

Όλοι λίγο-πολύ ξέρουμε από τον τανυστικό λογισμό τον τανυστή-σύμβολο του Kronecker δ_{ij} και τον αντισυμμετρικό τανυστή-σύμβολο ε_{ijk}.([1]). Τα σύμβολα αυτά θα τα ορίσουμε γιά πληρότητα παρακάτω. Ο τανυστής-σύμβολο δ_{ij} του Kronecker ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ αν } i = j \\ 0, \text{ αν } i \neq j \end{cases}$$

Αντίστοιχα, ο αντισυμμετρικός τανυστής-σύμβολο τριών δεικτών ε_{ijk} ([1]) ορίζεται ως εξής.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ για } ijk \text{ άρτια μετάθεση των } 123 \\ -1, \text{ για } ijk \text{ περιττή μετάθεση των } 123 \\ 0, \text{ αν τουλάχιστο δύο δείκτες είναι ίσοι} \end{cases}$$

Σημειώνουμε μερικές προφανείς ιδιότητες των συμβόλων αυτών οι οποίες χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις χωρίς να αναφέρονται ρητά.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μιά σχέση μεταξύ αυτών των δύο συμβόλων. Κατόπιν θα εξάγουμε με διασκεδαστικό τρόπο βάσει της εν λόγω σχέσης γνωστές θεμελιώδεις ταυτότητες της διανυσματικής ανάλυσης και του διανυσματικού λογισμού που αποτελούν τη βάση μεγάλου μέρους της φυσικής όπως φαίνεται και από την βιβλιογραφία.

Η σχέση αυτή (σχέση 2) είναι εύκολη στην απομνημόνευση και βοηθάει κάποιον στο να θυμάται περίπλοκες ταυτότητες ή και να τις αποδεικνύει εύκολα επί τόπου, όποτε τις χρειάζεται. Κατόπιν θα δείξουμε ότι υπάρχει μιά βαθύτερη φυσική εξήγηση γιά την σχέση αυτή βάσει της ομάδας SU(2) του Lie.

Μεταξύ των συμβόλων αυτών υπάρχει η σχέση

$$\sum_{s=1}^{3} \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls} = -\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl} \tag{1}$$

Χρησιμοποιώντας τη σύμβαση άθροισης του Einstein (άθροιση σε επαναλαμβανόμενο δείκτη) τη σχέση αυτή την γράφουμε ακόμα σαν

$$\varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls} = -\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl} \tag{2}$$

Την σχέση (2) την αποδεικνύουμε λογιστικά κάνοντας τις πράξεις γιά όλες τις τετράδες (ijkl). Στο παράρτημα που ακολουθεί η σχέση 2 αποδεικνύεται από μιά πιό περίπλοκη σχέση μεταξύ των συμβόλων δ_{ij} και ε_{ijk} και η οποία αποδεικνύεται και αυτή. Την πιό περίπλοκη αυτή σχέση την παραθέτουμε για πληρότητα ([12]):

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\, (\delta_{\beta\mu}\, \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu}\, \delta_{\gamma\mu}) - \delta_{\alpha\mu}\, (\delta_{\beta\lambda}\, \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu}\, \delta_{\gamma\lambda}) + \delta_{\alpha\nu}\, (\delta_{\beta\lambda}\, \delta_{\gamma\mu} - \delta_{\beta\mu}\, \delta_{\gamma\lambda}) \tag{2α}$$

Θέτοντας στην σχέση 2α το γ ίσο με το ν και αθροίζοντας παίρνουμε την σχέση 2, όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα.

Τη σχέση (2) θα την εφαρμόσουμε εξαντλητικά γιά να εξάγουμε διάφορες ταυτότητες, πρώτα όμως θα δώσουμε μιά χρήσιμη και προφανή ιδιότητα του συμβόλου του Kronecker. Σ΄αυτή και σε όλες τις υπόλοιπες σχέσεις γίνεται χρήση της σύμβασης άθροισης του Einstein. Ετσι ισχύει:

$$\delta_{ij}\, Q_{jlm\ldots} = Q_{ilm\ldots} \tag{3}$$

οπου ijlm δείκτες και οι τρείς τελείες δηλώνουν πιθανούς άλλους δείκτες.Στις μέχρι τώρα σχέσεις αλλά και στις άλλες που θα ακολουθήσουν γίνεται η σιωπηρή παραδοχή ότι ο κάθε δείκτης παίρνει τις τιμές 1,2 και 3.

Θα δώσουμε ακόμα μερικούς ορισμούς που χρησιμοποιούνται παρακάτω. Με βάση το αντισυμμετρικό σύμβολο τριών δεικτών το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται σαν :

$$\mathbf{a}_i = (\mathbf{bXc})_i = \varepsilon_{ijk}\, b_j\, c_k \tag{4}$$

Ακόμα ο στροβιλισμός (curl) ενός διανυσματικού πεδίου γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες σαν:

$$(\nabla \text{ X } \mathbf{a})_i = \text{curl}(\mathbf{a})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j\, a_k \tag{5}$$

Το σύμβολο ∂_j δηλώνει μερική διαφόριση ως προς τη μεταβλητή x_j.

Η πρώτη διανυσματική έκφραση με μεγάλη χρήση στην κλασική μηχανική είναι η **AX(BXC)**. Χρησιμοποιώντας τις μέχρι τώρα σχέσεις γράφουμε διαδοχικά (οι αριθμοί στα δεξιά δηλώνουν τις σχέσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται σε κάθε βήμα) :

$$[\,\mathbf{A \text{ X } (B \text{ X } C)}\,]_i =$$

$$(4) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\, A_j\, (\,\mathbf{B \text{ X } C}\,)_s =$$

$$(4) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\, A_j\, \varepsilon_{skl}\, B_k\, C_l =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{skl}\, A_j\, B_k\, C_l =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls}\, A_j\, B_k\, C_l =$$

$$(2) \Rightarrow = (-\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\,)\, A_j\, B_k\, C_l =$$

$$= -\delta_{il}\,\delta_{jk}\,A_j\,B_k\,C_l + \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,A_j\,B_k\,C_l =$$

$$(3)\Rightarrow = -\,\delta_{il}\,A_k\,B_k\,C_l + \delta_{ik}\,A_l\,B_k\,C_l =$$

$$(3)\Rightarrow = -\,A_k\,B_k\,C_i + A_l\,B_i\,C_l =$$

$$= -\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,C_i + (\mathbf{A}\,\mathbf{C})\,B_i$$

Άρα ισχύει

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C} + (\mathbf{A}\,\mathbf{C})\,\mathbf{B} \qquad (6)$$

Η στροφορμή ενός υλικού σημείου που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα **ω** γύρω από ένα σημείο είναι ([2],[3]) :

$$\mathbf{L} = m\,(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = m\,(\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \qquad (7)$$

Εαν η σχέση (6) εφαρμοστεί σε συνδυασμό με την (7) για ένα σύνολο υλικών σημείων τότε δίνει τις συνιστώσες του τανυστή αδρανείας. Εάν δηλαδή θέσουμε στην σχέση (6) **A** = **C** = **r** και **B** = **ω** τότε ισχύει :

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r}^2\,\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}\,(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}) \qquad (8)$$

Λεπτομέρειες γιά την εξαγωγή των συνιστωσών του τανυστή αδρανείας απο την σχέση (8) υπάρχουν στις παραπομπές [2] και [3]. Μένουμε στην κλασική μηχανική και παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια ενός υλικού σημείου που στρέφεται γύρω από ένα σημείο είναι ([2],[3]) :

$$T_{rot} = 1/2\ m\,\mathbf{V}^2 = 1/2\ m\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \qquad (9)$$

Και αυτή η έκφραση είναι ειδικότερη της πιό γενικής **(A X B) (C X D)**. Γράφουμε την έκφραση αυτή ως εξής :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})\,(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) =$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_s\,(\mathbf{C} \times \mathbf{D})_s =$$

$$(4)\Rightarrow = (\varepsilon_{sij}\,A_i\,B_j)\,(\varepsilon_{skl}\,C_k\,D_l) =$$

$$= \varepsilon_{sij}\,\varepsilon_{skl}\,A_i\,B_j\,C_k\,D_l =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$(2) \Rightarrow = (-\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl})\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$= -\delta_{il}\, \delta_{jk}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$= -\delta_{il}\, \delta_{jk}\, C_k\, A_i\, B_j\, D_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\delta_{il}\, C_j\, A_i\, B_j\, D_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$= -\delta_{il}\, A_i\, C_j\, B_j\, D_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, A_l\, C_j\, B_j\, D_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, A_i\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$= -\, A_l\, C_j\, B_j\, D_l + \delta_{ik}\, A_i\, \delta_{jl}\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, A_l\, C_j\, B_j\, D_l + A_k\, \delta_{jl}\, B_j\, C_k\, D_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, A_l\, C_j\, B_j\, D_l + A_k\, B_l\, C_k\, D_l =$$

$$= -\, A_l\, D_l\, C_j\, B_j + A_k\, B_l\, C_k\, D_l =$$

$$= -\, A_l\, D_l\, C_j\, B_j + A_k\, C_k\, B_l\, D_l$$

Άρα ισχύει :

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = -(\mathbf{A}\,\mathbf{D})(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) + (\mathbf{A}\,\mathbf{C})(\mathbf{B}\,\mathbf{D}) \qquad (10)$$

Θέτοντας στην σχέση (10) $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \boldsymbol{\omega}$ και $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{r}$ έχουμε την αντίστοιχη σχέση για την ενέργεια που είναι βάσει των (9) και (10) :

$$T_{rot} = 1/2\ m\ \mathbf{V}^2 = 1/2\ m\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = 1/2\ m\ [-(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r})^2 + \omega^2\, \mathbf{r}^2] \qquad (11)$$

Η σχέση (11) μπορεί να εκφραστεί και βάσει του τανυστή αδρανείας. Λεπτομέρειες υπάρχουν στις παραπομπές [2] και [3]. Αφήνουμε τις αλγεβρικές εκφράσεις με εξωτερικά γινόμενα και προσπαθούμε να αναλύσουμε την διαφορική διανυσματική έκφραση

$$[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i =$$

$$(4) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\, B_j\, (\mathbf{P} \times \mathbf{A})_s =$$

$$(5) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\, B_j\, \varepsilon_{skl}\, \partial_k\, A_l =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{skl}\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls}\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$(2) \Rightarrow = (-\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\,)\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$= -\delta_{il}\, \delta_{jk}\, B_j\, \partial_k\, A_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\delta_{il}\, B_k\, \partial_k\, A_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, B_k\, \partial_k\, A_i + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, B_j\, \partial_k\, A_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, B_k\, \partial_k\, A_i + \delta_{ik}\, B_l\, \partial_k\, A_l =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, B_k\, \partial_k\, A_i + B_l\, \partial_i\, A_l =$$

$$= -\,(\,\mathbf{B}\, \nabla\,)\, A_i + B_l\, \partial_i\, A_l$$

Έτσι ισχύει :

$$[\,\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}\,)\,]_i = -\,(\,\mathbf{B}\, \nabla\,)\, A_i + B_l\, \partial_i\, A_l \qquad (12)$$

Εάν θέσουμε στην (12) $\mathbf{B} = \mathbf{A} = \mathbf{V}$ έχουμε :

$$[\,\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}\,)\,]_i = -\,(\mathbf{V}\nabla\,)\, V_i + V_\ell\, \partial_i\, V_\ell = -\,(\mathbf{V}\nabla\,)\, V_i + \partial_i\, (V_\ell^2/2) \quad (12\alpha)$$

Η σχέση (12α) γράφεται συνοπτικά και σαν :

$$\mathbf{V}.\nabla\mathbf{V} = \nabla\, (\mathbf{V}^2/2) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}\,) \qquad (12\beta)$$

Ο όρος $(\mathbf{V}\nabla)\ \mathbf{V}$ είναι ο μεταφορικός όρος ή όρος συναγωγής (convection term) στις εξισώσεις Euler ή Navier-Stokes και η σχέση (12β) διευκολύνει την ανάλυσή του σε ένα ενεργειακό όρο $\nabla\, (\mathbf{V}^2/2)$ και έναν όρο στροβιλότητας $\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}\,)$. Λεπτομέρειες γιά αυτή την ανάλυση και τις συνέπειές της μπορούν να βρεθούν στήν παραπομπή [4] ή σε κάθε βιβλίο ρευστομηχανικής.

Στη διανυσματική ανάλυση συναντάται ακόμα η έκφραση curl(curl(**A**)) ([5],[6],[7]). Αυτή γράφεται όμοια :

$$\mathrm{curl}(\,\mathrm{curl}(\,\mathbf{A}\,))_i =$$

$$(5) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\partial_j\, \mathrm{curl}(\,\mathbf{A}\,))_s =$$

$$(5) \Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\partial_j\, (\varepsilon_{skl}\partial_k\, A_l\,) =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{skl}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$(2) \Rightarrow = (-\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\,)\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$= -\, \delta_{il}\, \delta_{jk}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, \delta_{il}\, \partial_k\, (\partial_k\, A_l\,) + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, \partial_k\, (\partial_k\, A_i\,) + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, \partial_k\, (\partial_k\, A_i\,) + \delta_{ik}\, \partial_l\, (\partial_k\, A_l\,) =$$

$$= -\, \partial_k\, (\partial_k\, A_i\,) + \delta_{ik}\, \partial_k\, (\partial_l\, A_l\,) =$$

$$(3) \Rightarrow = -\, \partial_k\, (\partial_k\, A_i\,) + \partial_i\, (\partial_l\, A_l\,) =$$

$$= -\, \nabla^2(\, A_i\,) + \partial_i\, (\partial_l\, A_l\,) =$$

$$= -\, \nabla^2(\, A_i\,) + \partial_i\, (\, \mathrm{div}(\,\mathbf{A}\,))$$

Άρα ισχύει η σχέση ([5],[6],[7]) :

$$\mathrm{curl}(\,\mathrm{curl}(\,\mathbf{A}\,)) = -\, \nabla^2(\,\mathbf{A}\,) + \mathrm{grad}\,(\,\mathrm{div}(\,\mathbf{A}\,)) \tag{13}$$

Η σχέση (13) χρησιμεύει γιά να εξαχθεί η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό (**E**) ή το μαγνητικό (**B**) πεδίο από τις σημειακές εξισώσεις του Maxwell. Λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην παραπομπή [6]. Ακόμα η σχέση (13) χρησιμεύει στο να εξαχθούν οι εξισώσεις διάδοσης των ελαστικών κυμάτων εγκαρσίων ή διαμήκων από τις εξισώσεις της ελαστοδυναμικής. Λεπτομέρειες γιά την εξαγωγή αυτή μπορούν να βρεθούν στην παραπομπή [5].

Επίσης, στη ρευστομηχανική βρίσκει εφαρμογή η ανάλυση της παρακάτω έκφρασης ∇ X (**V** X **W**). Την έκφραση αυτή τη γράφουμε σαν:

$$[\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{W})]_i =$$

$$(5)\Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\partial_j (\mathbf{V} \times \mathbf{W})_s =$$

$$(4)\Rightarrow = \varepsilon_{ijs}\partial_j (\varepsilon_{skl} V_k W_l) =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{skl}\, \partial_j (V_k W_l) =$$

$$= \varepsilon_{ijs}\varepsilon_{kls}\, \partial_j (V_k W_l) =$$

$$(2)\Rightarrow = (-\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl})\, \partial_j (V_k W_l) =$$

$$= - \delta_{il}\, \delta_{jk}\, \partial_j (V_k W_l) + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k W_l) =$$

$$= - \delta_{il}\, \delta_{jk}\, \partial_j (V_k) W_l - \delta_{il}\, \delta_{jk}\, V_k\, \partial_j (W_l) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3)\Rightarrow = - \delta_{il}\, \partial_k (V_k) W_l - \delta_{il}\, \delta_{jk}\, V_k\, \partial_j (W_l) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3)\Rightarrow = - \partial_k (V_k) W_i - \delta_{il}\, \delta_{jk}\, V_k\, \partial_j (W_l) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3)\Rightarrow = - \partial_k (V_k) W_i - \delta_{il}\, V_j\, \partial_j (W_l) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3)\Rightarrow = - \partial_k (V_k) W_i - V_j\, \partial_j (W_i) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3)\Rightarrow = - \partial_k (V_k) W_i - V_j\, \partial_j (W_i) +$$

$$+ \delta_{ik}\, \partial_l (V_k) W_l + \delta_{ik}\, \delta_{jl}\, \partial_j (W_l)\, V_k =$$

$$(3) \Rightarrow = -\partial_k (V_k) W_i - V_j \partial_j (W_i) +$$

$$+ \partial_l (V_i) W_l + \delta_{lk} \delta_{jl} \partial_j (W_l) V_k =$$

$$(3) \Rightarrow = -\partial_k (V_k) W_i - V_j \partial_j (W_i) +$$

$$+ \partial_l (V_i) W_l + \delta_{ik} \partial_l (W_l) V_k =$$

$$(3) \Rightarrow = -\partial_k (V_k) W_i - V_j \partial_j (W_i) + \partial_l (V_i) W_l + \partial_l (W_l) V_i$$

Άρα ισχύει :

$$\nabla \mathrm{X} (\mathbf{V} \mathrm{X} \mathbf{W}) = -\mathbf{W} (\nabla \mathbf{V}) - (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{W} + (\mathbf{W} \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{V} (\nabla \mathbf{W}) \qquad (14)$$

Η σχέση (14) χρησιμεύει γιά να εξαχθεί ο νόμος διάχυσης της στροβιλότητας στα ρευστά. Λεπτομέρειες υπάρχουν στην παραπομπή [9] ή σε κάθε προχωρημένο βιβλίο ρευστομηχανικής.

Δείξαμε ότι σημαντικές ταυτότητες της φυσικής μπορούν να εξαχθούν βάσει της σχέσης (2). Ολες οι σχέσεις που αποδείχθηκαν ισχύουν γιά τον τρισδιάστατο χώρο ο οποίος υπακούει στη συμμετρία της ομάδας του Lie SU(2), ([8],[10],[11]). Θα επαναλάβουμε τις σχέσεις μεταξύ των γεννητόρων σ_i. Ισχύουν ([8],[10],[11]) :

$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (15)$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (16)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε τις σχέσεις (15) και (16) χρησιμοποιώντας την πιό μικρής διάστασης αναπαράσταση των γεννητόρων της SU(2) που είναι οι πίνακες του Pauli. Λεπτομέρειες υπάρχουν στις παραπομπές [8],[10],[11]. Εάν προσθέσουμε τις (15) και (16) έχουμε :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad (17)$$

Εαν σχηματίσουμε τον όρο $\sigma_i \sigma_j \sigma_k$ έχουμε :

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_k =$$

$$(17) \Rightarrow = (\delta_{ij} + i\, \varepsilon_{ijs} \sigma_s) \sigma_k =$$

$$= \delta_{ij} \sigma_k + i\, \varepsilon_{ijs} \sigma_s \sigma_k =$$

$$(17) \Rightarrow = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,(\delta_{sk} + i\,\varepsilon_{skl}\,\sigma_l\,) =$$

$$= \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} - \varepsilon_{ijs}\,\varepsilon_{skl}\,\sigma_l =$$

$$= \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} - \varepsilon_{ijs}\,\varepsilon_{kls}\,\sigma_l =$$

$$(2) \Rightarrow = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} - (\,-\delta_{il}\,\delta_{jk} + \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,)\,\sigma_l =$$

$$= \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} + \delta_{il}\,\delta_{jk}\,\sigma_l - \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\sigma_l =$$

$$(3) \Rightarrow = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} + \delta_{jk}\,\sigma_i - \delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\sigma_l =$$

$$(3) \Rightarrow = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijs}\,\delta_{sk} + \delta_{jk}\,\sigma_i - \delta_{ik}\,\sigma_j =$$

$$(3) \Rightarrow = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijk} + \delta_{jk}\,\sigma_i - \delta_{ik}\,\sigma_j$$

Αρα ισχύει ([11]) :

$$\sigma_i\,\sigma_j\,\sigma_k = \delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijk} + \delta_{jk}\,\sigma_i - \delta_{ik}\,\sigma_j \qquad (18)$$

Αρα δείξαμε ότι βάσει της σχέσης (2) το γινόμενο $\sigma_i\sigma_j\sigma_k$ αναλύεται σε άθροισμα όρων της μονάδας και των γεννητόρων σ_i , σ_j και σ_k. Η ιδιότητα αυτή είναι εσωτερική της ομάδας SU(2).

Εάν εφαρμόσουμε την σχέση (18) στην εκφραση **(aσ) (bσ) (cσ)** έχουμε :

$$(\mathbf{a}\sigma)\,(\mathbf{b}\sigma)\,(\mathbf{c}\sigma) =$$

$$= (\,a_i\,\sigma_i\,)\,(\,b_j\,\sigma_j\,)\,(\,c_k\,\sigma_k\,) =$$

$$= a_i\,b_j\,c_k\,\sigma_i\,\sigma_j\,\sigma_k =$$

$$(18) \Rightarrow = a_i\,b_j\,c_k\,(\delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijk} + \delta_{jk}\,\sigma_i - \delta_{ik}\,\sigma_j\,) =$$

$$= a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{ij}\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijk}\,a_i\,b_j\,c_k + a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{jk}\,\sigma_i - a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{ik}\,\sigma_j =$$

$$(3) \Rightarrow = a_i\,b_i\,c_k\,\sigma_k + i\,\varepsilon_{ijk}\,a_i\,b_j\,c_k + a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{jk}\,\sigma_i - a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{ik}\,\sigma_j =$$

$$= (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,\varepsilon_{ijk}\,a_i\,b_j\,c_k + a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{jk}\,\sigma_i - a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{ik}\,\sigma_j =$$

$$(4) \Rightarrow = (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} + a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{jk}\,\sigma_i - a_i\,b_j\,c_k\,\delta_{ik}\,\sigma_j =$$

$$(3) \Rightarrow = (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} + a_i\, b_j\, c_j\, \sigma_i - a_i\, b_j\, c_k\, \delta_{ik}\, \sigma_j =$$

$$= (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{bc})\,(\mathbf{a}\sigma) - a_i\, b_j\, c_k\, \delta_{ik}\, \sigma_j =$$

$$(3) \Rightarrow = (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{bc})\,(\mathbf{a}\sigma) - a_i\, b_j\, c_i\, \sigma_j =$$

$$= (\mathbf{ab})\,(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{bc})\,(\mathbf{a}\sigma) - (\mathbf{ac})\,(\mathbf{b}\sigma)$$

Αρα ισχύει :

$$(\mathbf{a}\sigma)(\mathbf{b}\sigma)(\mathbf{c}\sigma) = (\mathbf{ab})(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{bc})(\mathbf{a}\sigma) - (\mathbf{ac})(\mathbf{b}\sigma) \qquad (19)$$

Εάν θέσουμε $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{n}$ με $\mathbf{n}\,\mathbf{n} = 1$ και $\mathbf{b} = \mathbf{x}$ έχουμε ότι :

$$(\mathbf{n}\sigma)(\mathbf{x}\sigma)(\mathbf{n}\sigma) = 2(\mathbf{nx})(\mathbf{n}\sigma) - (\mathbf{x}\sigma) \qquad (19a)$$

Η σχέση (19a) χρησιμεύει γιά την εξαγωγή των μετασχηματισμών των Einstein-Lorentz γιά την σχέση του χώρου και του χρόνου μεταξύ δύο αδρανειακών συστημάτων που κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά το ένα σχετικά με το άλλο. Λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην παραπομπή [10].

Στην εργασία αυτή δείξαμε ότι με βάση την σχέση (2) την οποία ξαναγράφουμε για πληρότητα :

$$\varepsilon_{ijs}\, \varepsilon_{kls} = -\delta_{il}\, \delta_{jk} + \delta_{ik}\, \delta_{jl} \qquad (2)$$

μπορούν να αποδειχθούν οι παρακάτω διανυσματικές ταυτότητες τις οποίες ξαναγράφουμε για πληρότητα:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C} + (\mathbf{A}\,\mathbf{C})\,\mathbf{B} \qquad (6)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = -(\mathbf{A}\,\mathbf{D})(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) + (\mathbf{A}\,\mathbf{C})(\mathbf{B}\,\mathbf{D}) \qquad (10)$$

$$[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = -(\mathbf{B}\,\nabla)\,A_i + B_l\, \partial_i\, A_l \qquad (12)$$

$$\mathrm{curl}(\,\mathrm{curl}(\mathbf{A})) = -\nabla^2(\mathbf{A}) + \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}(\mathbf{A})) \qquad (13)$$

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = -\mathbf{W}\,(\nabla\,\mathbf{V}) - (\mathbf{V}\,\nabla)\,\mathbf{W} + (\mathbf{W}\,\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{V}\,(\nabla\,\mathbf{W}) \qquad (14)$$

$$(\mathbf{a}\sigma)(\mathbf{b}\sigma)(\mathbf{c}\sigma) = (\mathbf{ab})(\mathbf{c}\sigma) + i\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c} + (\mathbf{bc})(\mathbf{a}\sigma) - (\mathbf{ac})(\mathbf{b}\sigma) \qquad (19)$$

Οι ταυτότητες αυτές διέπουν στην πραγματικότητα όλη την κλασική μηχανική, τον ηλεκτρομαγνητισμό και την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Δηλαδή η κομψή μορφή των νόμων των παραπάνω τμημάτων της φυσικής οφείλεται από μαθηματικής πλευράς στην σχέση (2), η οποία δηλώνει ότι το γινόμενο τριών γεννητόρων της ομάδας SU(2) αναλύεται σε άθροισμα της μονάδας και αυτών των ιδίων τριών γεννητόρων. Ακόμα, οι συντελεστές σε αυτή την ανάλυση ειναι τανυστές-σύμβολα του Kronecker που έχουν απλοποιητικές ιδιότητες.

Βιβλιογραφία

[1] M. Lipschitz, "Διαφορική γεωμετρία", Schaum's outline series, Mc-Graw Hill, ΕΣΠΙ, 1982, Κεφ.10

[2] Π. Θεοχάρης, "Μηχανική του απολύτως στερεού σώματος", Εκδόσεις ΕΜΠ, 1984, Κεφ. 9

[3] Κ. Μυλωνάς, "Κινηματική και δυναμική του στερεού σώματος", Μέρος Α, Εκδόσεις ΕΜΠ, 1982, Παράγραφοι 13.9 και 13.10

[4] Κ. Παπαηλιού, "Θερμικές στροβιλομηχανές Ι", Εκδόσεις ΕΜΠ, 1985, Κεφ. 2

[5] Α. Κανάραχος, "Δυναμική και μηχανικές ταλαντώσεις - πεπερασμένα στοιχεία", Εκδόσεις Πλαίσιο, 1984, Παράγραφος 2.3

[6] D. Halliday and R. Resnich, "Φυσική Μέρος Β", Μετάφραση, Γ. Πνευματικός, 1976, Παράρτημα

[7] Φ. Σεραφείμ, "Ηλεκτρομαγνητικά πεδία", 1984, Εκδόσεις ΕΜΠ

[8] D.B. Lichtenberg, "Unitary symmetry and elementary partices", Academic Press, 1970, Ch. 6.1

[9] Σ. Τσαγγάρης, "Μηχανική των ρευστών ΙΙ", Εκδόσεις ΕΜΠ, 1985, Παράγραφος 11

[10] C. Misner, K. Thorne and J.A. Wheeler, "Gravitation", Freeman, 1973, Ch. 41

[11] A.O. Barut, "Electrodynamics and classical theory of fields and particles", Dover Publ., 1980, Ch. I.5

[12] S. Okubo, "Some consequences of Unitary symmetry model", στο βιβλίο των M.Gell-Mann and Y.Ne'emann, "The Eightfold Way", W.A. Benjamin, 1964, Υποσημείωση στο τέλος του άρθρου.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παραθέτουμε παρακάτω την απόδειξη της περίπλοκης ταυτότητας (2α) που βρίσκεται στην παραπομπή [2] του παραρτήματος (είναι η ίδια με την παραπομπή [12] του άρθρου). Επίσης δείχνουμε πως από την (2α) εξάγεται η (2). Ξαναγράφουμε την σχέση (2α) και την ονομάζουμε (Π1).

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\,(\delta_{\beta\mu}\,\delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\gamma\mu}) - \delta_{\alpha\mu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\gamma\lambda}) + \delta_{\alpha\nu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\gamma\mu} - \delta_{\beta\mu}\,\delta_{\gamma\lambda}) \qquad (\Pi1)$$

Σχηματίζουμε την παρακάτω ορίζουσα την οποία και αναλύουμε διεξοδικά :

$$\det\begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} =$$

$$\det\begin{vmatrix} \delta_{\alpha1} & \delta_{\alpha2} & \delta_{\alpha3} \\ \delta_{\beta1} & \delta_{\beta2} & \delta_{\beta3} \\ \delta_{\gamma1} & \delta_{\gamma2} & \delta_{\gamma3} \end{vmatrix} \quad \varepsilon_{\lambda\mu\nu} =$$

$$\det\begin{vmatrix} \delta_{\alpha1} & \delta_{\beta1} & \delta_{\gamma1} \\ \delta_{\alpha2} & \delta_{\beta2} & \delta_{\gamma2} \\ \delta_{\alpha3} & \delta_{\beta3} & \delta_{\gamma3} \end{vmatrix} \quad \varepsilon_{\lambda\mu\nu} =$$

$$\det\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{vmatrix} \quad \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} =$$

$$= \varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

Διότι ισχύει προφανώς :

$$\det\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 1$$

Αναπτύσσοντας την αρχική ορίζουσα έχουμε την (Π1). Εάν τώρα στην σχέση (Π1) θέσουμε γ=ν και αθροίσουμε ως προς τον δείκτη ν έχουμε :

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\,(\delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\nu} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\nu\mu}) - \delta_{\alpha\mu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\nu} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\nu\lambda}) + \delta_{\alpha\nu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\mu} - \delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\lambda})$$

ή
$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\,(3\delta_{\beta\mu} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\nu\mu}) - \delta_{\alpha\mu}\,(3\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\nu}\,\delta_{\nu\lambda}) + \delta_{\alpha\nu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\mu} - \delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\lambda}) =$$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\,(3\delta_{\beta\mu} - \delta_{\beta\mu}) - \delta_{\alpha\mu}\,(3\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\beta\lambda}) + \delta_{\alpha\nu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\mu} - \delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\lambda}) =$$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = 2\delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} - 2\delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\nu}\,(\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\mu} - \delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\lambda}) =$$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = 2\delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} - 2\delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\nu}\,\delta_{\beta\lambda}\,\delta_{\nu\mu} - \delta_{\alpha\nu}\,\delta_{\beta\mu}\,\delta_{\nu\lambda} =$$

(3)ή $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = 2\delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} - 2\delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu}$

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\,\varepsilon_{\alpha\beta\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\,\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\lambda} \qquad (\Pi 2)$$

Η σχέση (Π2) είναι η σχέση (2) του άρθρου γραμμένη με άλλους δείκτες. Στην εξαγωγή της από την (Π1) όπου θέσαμε γ=ν χρησιμοποιήσαμε και την ιδιότητα $\delta_{\nu\nu} = 3$ όπου γίνεται άθροιση ως προς το ν. Και τούτο διότι χρησιμοποιούμε τον τανυστή-σύμβολο του Kronecker στις τρείς διαστάσεις.

Βιβλιογραφία Παραρτήματος

[1] Σ. Ανδρεαδάκη, "Γραμμική Αλγεβρα", 1981, σελ.136-146

[2] S.Okubo, "Some consequences of Unitary symmetry model", στο βιβλίο των M.Gell-Mann and Y.Ne'emann, "The Eightfold Way", W.A. Benjamin, 1964, Υποσημείωση στο τέλος του άρθρου.

ΥΠΟΜΝΗΜΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Γ, C, b, ω : Διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο.

Γ_i, C_i, b_i, ω_i : i-συνιστώσα του αντιστοίχου διανύσματος.

δ_{ij} : Τανυστής-σύμβολο του Kronecker (Δέλτα του Kronecker).

ε_{ijk} : Αντισυμμετρικός τανυστής-σύμβολο τριών δεικτών.

$\partial_i f$: Μερική παράγωγος της βαθμωτής συνάρτησης f ως προς την i συνιστώσα δηλαδή το $\partial f/\partial x_i$.

grad(f) : Κλίση της βαθμωτής συνάρτησης f δηλαδη το διανυσματικό πεδίο $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$. Η k-συνιστώσα γράφεται και σαν $\partial_k f$.

∇f : Ιδιο με το grad(f).

div(**W**) : Απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{W} = (W_x, W_y, W_z)$, δηλαδή το $\partial W_x/\partial x + \partial W_y/\partial y + \partial W_z/\partial z$. Γράφεται και σαν $\partial_k W_k$ όταν $\mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3)$ και $\partial_i W_j = \partial W_j/\partial x^i$.

$\nabla \mathbf{W}$: Ιδιο με το div(**W**).

curl(**W**): Στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου **W** δηλαδή το διανυσματικό πεδίο $(\partial W_z/\partial y - \partial W_y/\partial z, \partial W_x/\partial z - \partial W_z/\partial x, \partial W_y/\partial x - \partial W_x/\partial y)$. Η i-συνιστώσα του γράφεται και σαν $\varepsilon_{ijk}\partial_j W_k$.

$\nabla \mathrm{X}\, \mathbf{W}$: Ιδιο με το curl(**W**).

$\nabla^2 f$: Λαπλασιανή ή ανάδελτα της βαθμωτής συνάρτησης f δηλαδη το div(grad(f)). Γράφεται και σαν $\partial_k\partial_k f$.

$\nabla^2\mathbf{W}$: Λαπλασιανή ή ανάδελτα του διανυσματικού πεδίου **W** δηλαδη το διανυσματικό πεδίο $(\nabla^2 W_x, \nabla^2 W_y, \nabla^2 W_z)$. Η i-συνιστώσα του γράφεται και σαν $\partial_k\partial_k W_i$.