



ΔΡΑΣΗ: «ΑΡΙΣΤΕΙΑ ΙΙ»

ΤΙΤΛΟΣ:

«Πρωτότυπες έννοιες σχεδιασμού μεταλλικών κατασκευών
για τον ενεργειακό τομέα με χρήση σύγχρονων υλικών»

4916-ENSSTRAM

Επιστημονικός Υπεύθυνος: **Καθ. Χ. ΓΑΝΤΕΣ**

ΕΝΟΤΗΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Ε.Ε.) 2

*Προκαταρκτική αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση
κελυφών τύπου sandwich για πολώνες ανεμογεννητριών*

ΠΑΡΑΔΟΤΕΟ 2.1:

*Τεχνική έκθεση προκαταρκτικής αναλυτικής και αριθμητικής
διερεύνησης κελυφών τύπου sandwich για πολώνες
ανεμογεννητριών*

2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



PROJECT: «ARISTEIA II»

TITLE:

«Novel design concepts for ENergy related Steel
STRuctures using Advanced Materials»

4916-ENSSTRAM

Research Coordinator: Prof. C. GANTES

WORK PACKAGE (W.P.) 2

*Preliminary analytical and numerical investigation of
sandwich-type shells for wind turbine towers*

DELIVERABLE 2.1:

*Technical report of the preliminary analytical and numerical
investigation of sandwich-type shells for wind turbine towers*

2015



European Union
European Social Fund



MINISTRY OF EDUCATION & RELIGIOUS AFFAIRS, CULTURE & SPORTS
MANAGING AUTHORITY

Co-financed by Greece and the European Union



EUROPEAN SOCIAL FUND

Summary

The subject of this technical report is the preliminary analytical and numerical investigation of sandwich type sections as possible alternative for the construction of large wind turbine towers. The section is constituted of two steel faces and a concrete core that binds them together. Two analytical procedures were developed for describing the behavior of the section under axial and bending actions, as well as their combination. The first solution takes into account the exact geometry of the section, while the second one is based on the assumption of a thin-walled section, outputting simpler, more easily manipulated expressions for further parametrical investigation. The accuracy of the two solutions is examined by comparing their results with those obtained from the analysis of the section in Biaxial Bending software [1], and the results of numerical simulation using the finite elements method in Adina software [2]. Both the elastic and post-elastic behavior of the section were investigated, by the calculation of stiffness and elastic resistance moment, and the determination of the plastic resistance moment, respectively.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	3
2	Ακριβής διαδικασία ανάλυσης διατομής.....	6
2.1	Αντοχή υπό αξονική καταπόνηση.....	7
2.2	Αντοχή υπό καμπτική καταπόνηση.....	8
2.2.1	Ελαστική αντοχή.....	8
2.2.2	Πλαστική αντοχή.....	11
2.3	Αντοχή υπό συνδυασμένη αξονική και καμπτική καταπόνηση.....	24
3	Προσεγγιστική διαδικασία ανάλυσης διατομής.....	26
3.1	Ανάλυση διατομής στην οριακή κατάσταση αστοχίας.....	26
3.2	Μελέτη διατομής για δεδομένη δυσκαμψία.....	30
4	Έλεγχος ορθότητας υπολογισμών αναλυτικών λύσεων.....	31
4.1	Προσομοίωση στο λογισμικό Adina.....	31
4.2	Χρήση λογισμικού Biaxial Bending για έλεγχο ακρίβειας.....	32
4.3	Έλεγχος ακρίβειας της προσεγγιστικής λύσης.....	37
5	Συμπεράσματα.....	39
6	Αναφορές.....	40

1

Εισαγωγή

Η παρούσα Τεχνική Έκθεση αποτελεί παραδοτέο του Ερευνητικού Προγράμματος με τίτλο:

ΔΡΑΣΗ «ΑΡΙΣΤΕΙΑ II»

Πρωτότυπες έννοιες σχεδιασμού μεταλλικών κατασκευών για τον ενεργειακό τομέα με χρήση σύγχρονων υλικών (ENSSTRAM)

που πραγματοποιείται κάτω από το γενικό συντονισμό του Καθηγητή Χαράλαμπου Γαντέ (Κύριος Ερευνητής).

Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζει τις δράσεις που προδιαγράφονται στην **Ενότητα Εργασίας Ε.Ε 2**, με τίτλο:

«Προκαταρκτική αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση κελυφών τύπου sandwich για πολώνες ανεμογεννητριών»

Το αντικείμενο της **Ενότητας Εργασίας Ε.Ε. 2**, έχει περιγραφεί στην εγκεκριμένη Ερευνητική Πρόταση ως:

«Θα σχεδιαστούν κελύφη από διατομές τύπου sandwich χρησιμοποιώντας ελαφροβαρή (π.χ. κυψελωτά) υλικά για τον πυρήνα και χαλύβδινα ελάσματα για τις πλευρικές επιφάνειες. Το βασικότερο χαρακτηριστικό του κυψελωτού υλικού είναι η σχετική πυκνότητά του, δηλαδή ο λόγος της πυκνότητας του προς αυτή του συμπαγούς υλικού από το οποίο είναι φτιαγμένα τα τοιχώματα. Η σχετική πυκνότητα καθορίζει την αντοχή, τη δυσκαμψία και την ικανότητα απορρόφησης ενέργειας και θα είναι η παράμετρος υπό διερεύνηση, μαζί με τον τύπο του υλικού των τοιχωμάτων, που ενδέχεται να είναι πολυμερές ή να έχει ως βάση το τσιμέντο. Ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους, σε συνδυασμό με την ικανοποίηση των απαιτήσεων που αφορούν σε καμπτική αντοχή, δυσκαμψία, κόπωση, τοπικό λυγισμό (“ρυτίδωση”), αποκόλληση της διεπιφάνειας, δυνατότητα απορρόφησης ενέργειας, βιομηχανική κατασκευή, ανθεκτικότητα κτλ. Τόσο οι αναλυτικές λύσεις όσο και τα αριθμητικά προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων που θα δημιουργηθούν, θα μπορούν να προσομοιώσουν τις προαναφερθείσες μορφές αστοχίας. Τα βασικότερα αποτελέσματα αυτής της διερεύνησης θα είναι ο καθορισμός της γεωμετρίας των κελυφών (το πάχος των χαλύβδινων ελασμάτων και του πυρήνα), ο τύπος και η σχετική πυκνότητα του υλικού του πυρήνα, καθώς και η ποιότητα του χάλυβα. Θα γίνει προκαταρκτική επιλογή διατομών οι οποίες θα ελεγχθούν πειραματικά στην ΕΕ3.»

Το εν λόγω αντικείμενο έχει καλυφθεί πλήρως, όπως περιγράφεται στα κεφάλαια που ακολουθούν. Πιο συγκεκριμένα, στην παρούσα τεχνική έκθεση παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την αναλυτική και αριθμητική προσέγγιση της μηχανικής συμπεριφοράς μίας διατομής τύπου sandwich, κυκλικού σχήματος, που αποτελείται από δύο χαλύβδινα ελάσματα και έναν πυρήνα σκυροδέματος που τα συγκρατεί, βελτιώνοντας τη μηχανικής συμπεριφορά της με μικρή αύξηση βάρους. Μελετάται σε αυτήν η επίδραση συνδυασμού αξονικής και καμπτικής φόρτισης, μέσω τεσσάρων διαφορετικών προσεγγίσεων - δύο αναλυτικών λύσεων, μίας ακριβέστερης και μίας λιγότερο ακριβούς που προσφέρει μεγαλύτερη ευελιξία στις παραμετρικές αναλύσεις, υλοποιημένες σε κώδικα Mathematica [3] και Matlab [4] αντίστοιχα, της ανάλυσης στο πρόγραμμα Biaxial Bending [1], εξειδικευμένου στην ανάλυση σύνθετων διατομών υπό αξονική καταπόνηση και διαξονική κάμψη και της αριθμητικής προσομοίωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο πρόγραμμα Adina [2]. Αναζητούνται η ελαστική και πλαστική αντοχή, καθώς και η δυσκαμψία της διατομής, και διερευνάται η επιρροή των παραμέτρων που την καθορίζουν - παχών και ποιτήτων χαλύβδινων ελασμάτων και πυρήνα σκυροδέματος, με στόχο τη βελτιστοποίησή της, σε όρους τόσο μηχανικής συμπεριφοράς, όσο και οικονομίας της κατασκευής, όπως παρουσιάζεται στο παραδοτέο 5.1. Ειδικότερα, παρουσιάζονται οι αναλυτικές εκφράσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά της διατομής και μέσω κατάλληλου κώδικα υπολογίζουν τα προαναφερθέντα μεγέθη. Αρχικά διατυπώνεται η ακριβέστερη λύση και έπειτα η απλοποιημένη εκδοχή της, ενώ αναφέρονται και οι παραδοχές που υιοθετήθηκαν στις δύο περιπτώσεις. Τέλος, ελέγχεται η ορθότητα και ακρίβεια των λύσεων, μέσω σύγκρισης των αποτελεσμάτων τους με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από αναλύσεις στα προγράμματα Biaxial Bending [1] και Adina [2].

Οι εργασίες που περιγράφονται έχουν πραγματοποιηθεί με τη συνεισφορά των παρακάτω μελών της **Ερευνητικής Ομάδας**:

- Χαράλαμπος Γαντές, Καθηγητής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ
- Γεώργιος Μπουκοβάλας, Καθηγητής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ
- Αθανάσιος Τριανταφύλλου, Καθηγητής, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Κωνσταντίνος Καλοχαιρέτης, Διδάκτωρ Πολιτικός Μηχανικός, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ
- Αλέξανδρος Βαλοσαμής, Διδάκτωρ Πολιτικός Μηχανικός, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ
- Στυλιανός Βερνάρδος, Υποψήφιος Διδάκτωρ, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, ΕΜΠ
- Αριστομένης Τσαντίλης, Υποψήφιος Διδάκτωρ, Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
- Γρηγορία-Πολυξένη Ζαράκη, Πολιτικός Μηχανικός Δομικών Έργων
- Theodore Stathopoulos, Professor, Concordia U., Canada

- Charalampos Baniotopoulos, Professor, U. of Birmingham, U.K.

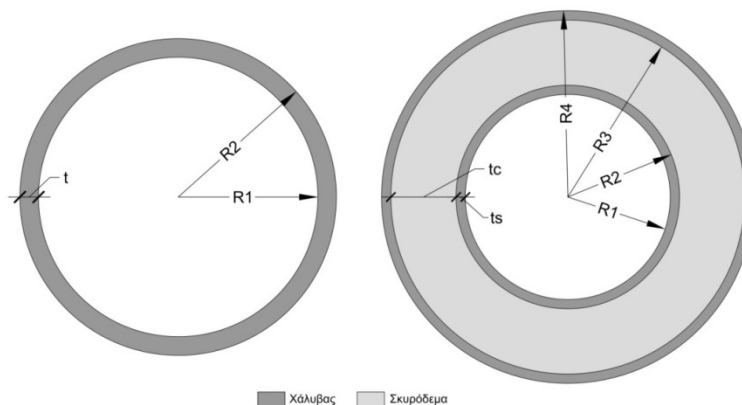
2

Ακριβής διαδικασία ανάλυσης διατομής

Η υπό εξέταση διατομή, η οποία αποτελείται από δύο χαλύβδινα ελάσματα, συγκρατούμενα από έναν πυρήνα σκυροδέματος, παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1, ενώ οι καταστατικοί νόμοι των δύο υλικών εκφράζονται από τα απλοποιημένα - σε αυτή τη φάση έρευνας - διαγράμματα του Σχήμα 2.2. Κατά παραδοχή, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2, ο εξεταζόμενος χάλυβας συμπεριφέρεται ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο σε θλίψη και εφελκυσμό, ενώ αμελείται πλήρως η ικανότητα του σκυροδέματος να παραλάβει εφελκυστικά φορτία. Αγνοούνται επιπλέον, στα πλαίσια της προκαταρκτικής αυτής μελέτης, πιθανά φαινόμενα αποκόλλησης των στρώσεων της διατομής, καθώς προϋποτίθεται πλήρης συνεργασία μεταξύ των δύο ελασμάτων και του πυρήνα. Στη διατομή ασκείται αρχικά αξονικό φορτίο και εν συνεχεία καμπτική ροπή, με στόχο να διερευνηθεί η συμπεριφορά της υπό αξονική καταπόνηση, απλή κάμψη, καθώς και συνδυασμό αυτών.

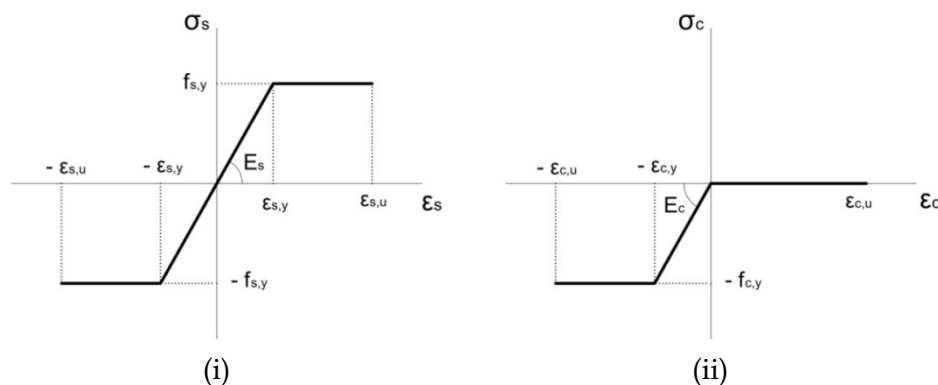
Αμιγώς χαλύβδινη, κοίλη διατομή

Κοίλη διατομή τύπου sandwich



Σχήμα 2.1: Γεωμετρικά στοιχεία τυπικής, αμιγώς χαλύβδινης, κοίλης διατομής και κοίλης διατομής τύπου sandwich (οι αναλογίες των παχών αποσκοπούν στην ευκρίνεια της απεικόνισης και όχι στη ρεαλιστική προσομοίωση των διατομών)

Figure 2.1: Geometry of typical steel and sandwich-type hollow sections (presented thicknesses are not realistic and only outline the geometry of the sections)



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα τάσεων - παραμορφώσεων (i) χάλυβα, (ii) σκυροδέματος

Figure 2.2: Stress - strain diagrams of (i) steel and (ii) concrete

2.1 Αντοχή υπό αξονική καταπόνηση

Η συμπεριφορά ενός κυλίνδρου μήκους L , διατομής sandwich με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του Σχήμα 2.1 και τα υλικά του Σχήμα 2.2, ο οποίος καταπονείται από εφελκυσμό, διέπεται από την εξ. (2.1), ενώ στην εξ. (2.2) περιγράφεται η συμπεριφορά σε θλιπτική φόρτιση,

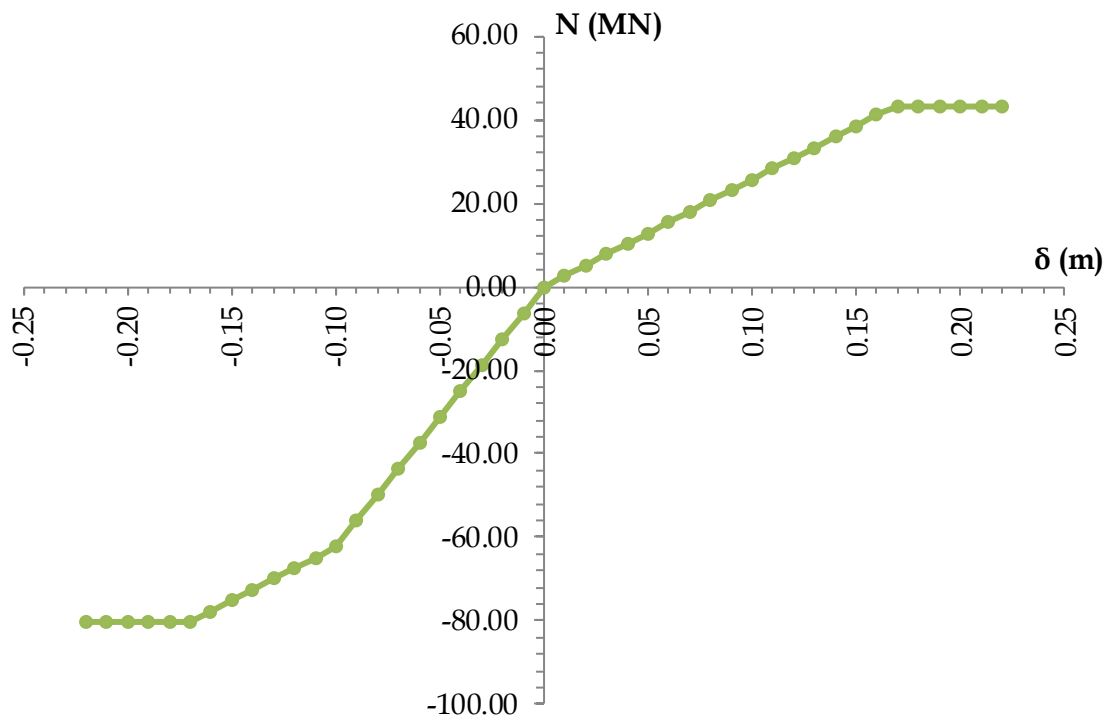
$$N_t = \frac{\delta}{L} \pi E_s \left[(R_4^2 - R_3^2) + (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (2.1)$$

$$N_c = \frac{\delta}{L} \pi \left[E_s (R_4^2 - R_3^2) + E_c (R_3^2 - R_2^2) + E_s (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (2.2)$$

όπου N_t , N_c είναι η εκάστοτε ασκούμενη εφελκυστική ή θλιπτική αξονική δύναμη και δ η αντίστοιχη αξονική μετακίνηση. Η συμπεριφορά αυτή αναπαρίσταται γραφικά στα διαγράμματα του Σχήμα 2.3, ενδεικτικά για $L=100m$, $E_s=210GPa$, $f_{s,y}=355MPa$, $E_c=30GPa$, $f_c=30MPa$, $R_4=2000mm$, $t_s=5mm$, $t_c=10mm$, $R_3=1995mm$ (R_4-t_s), $R_2=1895mm$ ($R_4-t_s-t_c$), $R_1=1890mm$ ($R_4-t_c-2t_s$). Η εφελκυστική αξονική δύναμη πλαστικής αντοχής της διατομής $N_{u,t}$ υπολογίζεται από την εξ. (2.3), ενώ η αντίστοιχη θλιπτική $N_{u,c}$ από την εξ. (2.4).

$$N_{u,t} = f_{s,y} \pi \left[(R_4^2 - R_3^2) + (R_2^2 - R_1^2) \right] \quad (2.3)$$

$$N_{u,c} = f_{s,y} \pi \left[(R_4^2 - R_3^2) + (R_2^2 - R_1^2) \right] + f_c \pi (R_3^2 - R_2^2) \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα συμπεριφοράς υπό εφελκυσμό και θλίψη για $L=100\text{m}$, $E_s=210\text{GPa}$, $f_{sy}=355\text{MPa}$, $E_c=30\text{GPa}$, $f_c=30\text{MPa}$, $R_4=2000\text{mm}$, $R_3=1995\text{mm}$, $R_2=1895\text{mm}$, $R_1=1890\text{mm}$

Figure 2.3: Chart representing section's behavior under tension and compression for $L=100\text{m}$, $E_s=210\text{GPa}$, $f_{sy}=355\text{MPa}$, $E_c=30\text{GPa}$, $f_c=30\text{MPa}$, $R_4=2000\text{mm}$, $R_3=1995\text{mm}$, $R_2=1895\text{mm}$, $R_1=1890\text{mm}$

2.2 Αντοχή υπό καμπτική καταπόνηση

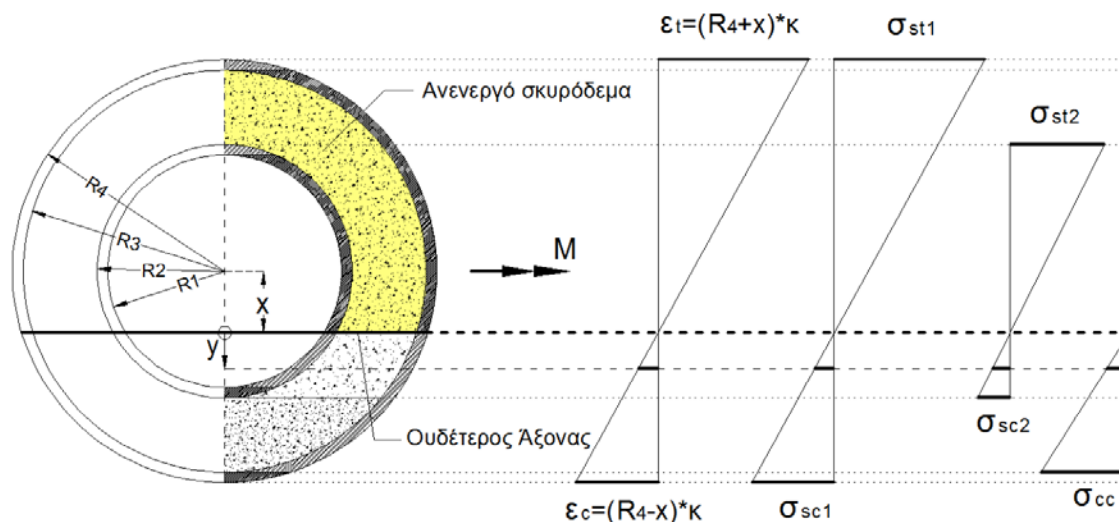
2.2.1 Ελαστική αντοχή

Με απώτερο σκοπό την πλήρη εμπορεία της ελαστικής συμπεριφοράς μίας διατομής τύπου sandwich υποβαλλόμενης σε καθαρή κάμψη, καθίσταται αναγκαίος ο προσδιορισμός των γενικών εκείνων εξισώσεων οι οποίες οδηγούν στον υπολογισμό της ελαστικής και πλαστικής ροπής αντοχής. Ως πρώτο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση, απαιτείται ο προσδιορισμός της θέσης του ουδέτερου άξονα, μέσω της εξίσωσης των εφελκυστικών και θλιπτικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στη διατομή κατά την εφαρμογή μίας συγκεντρωμένη ροπής στο κέντρο της. Η βασική εξ. (2.5), που εκφράζει την ισορροπία των δυνάμεων αυτών, μέσω του μηδενισμού της συνισταμένης των τάσεων στη συνολική επιφάνεια A της διατομής, αναλύεται για την περίπτωση της σύνθετης διατομής στην εξ. (2.6), όπου x είναι η απόσταση του ουδέτερου άξονα από το κέντρο της διατομής και y η θέση της εκάστοτε εξεταζόμενης χορδής ως προς αυτόν (Σχήμα 2.4). Προηγουμένως, η διατομή έχει νοερά διασπαστεί σε επιμέρους ζώνες, ώστε να είναι εφικτή η ολοκλήρωση των δυνάμεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.4, στο οποίο επίσης απεικονίζονται οι τάσεις και παραμορφώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε υλικό και επομένως σε κάθε ζώνη. Καθώς η εξ. (2.6) δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί ως προς x

με συμβολικό τρόπο, επιλέγονται σε αυτή τη φάση της διαδικασίας συγκεκριμένες τιμές για τα πάχη και τα μέτρα ελαστικότητας των υλικών, καθώς και μία τυχαία τιμή καμπυλότητας για τη διατομή. Μέσω επαναληπτικής διαδικασίας κάποιας κατάλληλης αριθμητικής μεθόδου, όπως η μέθοδος Newton-Raphson, υπολογίζεται έπειτα η τιμή του x , η οποία εκφράζει τη θέση του ουδέτερου άξονα.

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{R_3-x}^{R_4-x} E_s \kappa y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \\ & + \int_0^{R_3-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & + \int_{R_2-x}^{R_3-x} E_c \kappa y \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \\ & + \int_0^{R_2-x} E_c \kappa y \left(\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & + \int_{R_1-x}^{R_2-x} E_s \kappa y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \\ & + \int_0^{R_1-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & - \int_0^{-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & - \int_{-x}^{-R_3-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & - \int_{-R_3-x}^{-R_4-x} E_s \kappa y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \\ & - \int_0^{-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & - \int_{-x}^{-R_1-x} E_s \kappa y \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\ & - \int_{-R_1-x}^{-R_2-x} E_s \kappa y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.4: Διατομή τύπου sandwich υπό καθαρή κάμψη

Figure 2.4: Sandwich-type section under pure bending

Με δεδομένη πλέον τη θέση του ουδέτερου άξονα είναι εφικτός ο υπολογισμός της ροπής που έχει - θεωρητικά - προκαλέσει την καμπυλότητα που υποτέθηκε παραπάνω. Η εξ. (2.7), μέσω της οποίας προσδιορίζεται η ροπή που έχει αναπτυχθεί, συγκεκριμενοποιείται για τη διατομή του **Σχήμα 2.4** στην εξ. (2.8).

Από την εξ. (2.9), με γνωστά τα μεγέθη της ροπής και της καμπυλότητας που αυτή δημιουργεί, μπορεί τώρα να υπολογιστεί η ισοδύναμη ενεργός δυσκαμψία της σύνθετης διατομής, $(EI)_{eff}$, μέσω της οποίας, τέλος, προσδιορίζεται η ζητούμενη ελαστική ροπή, ως εκείνη για την οποία το κρισιμότερο σημείο της διατομής εισέρχεται στη διαρροή. Τα υποψήφια κρίσιμα σημεία είναι αφενός η ακραία ίνα του εξωτερικού χαλύβδινου ελάσματος στην εφελκόμενη περιοχή, στην οποία το σκυρόδεμα παραμένει ανενεργό και δε συνεισφέρει στην παραλαβή φορτίων, και αφετέρου η ακραία ίνα του σκυροδέματος στη θλιβόμενη περιοχή, όπου αυτό το σημαντικά ασθενέστερο σε σχέση με το χάλυβα υλικό αναπτύσσει τη μέγιστη τάση του. Βάσει των παραπάνω, η ελαστική ροπή της διατομής υπολογίζεται τελικά από την εξ. (2.10).

$$\int_A \sigma_x y dA \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \int_{R_3-x}^{R_4-x} E_s \kappa y^2 \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \\
 &+ 2 \int_0^{R_3-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{R_2-x}^{R_3-x} E_c \kappa y^2 \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \\
 &+ 2 \int_0^{R_2-x} E_c \kappa y^2 \left(\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{R_1-x}^{R_2-x} E_s \kappa y^2 \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \\
 &+ 2 \int_0^{R_1-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_0^{-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{-x}^{-R_3-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{-R_3-x}^{-R_4-x} E_s \kappa y^2 \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \\
 &+ 2 \int_0^{-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{-x}^{-R_1-x} E_s \kappa y^2 \left(\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2} \right) dy \\
 &+ 2 \int_{-R_1-x}^{-R_2-x} E_s \kappa y^2 \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \\
 M &= (EI)_{eff} \kappa
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

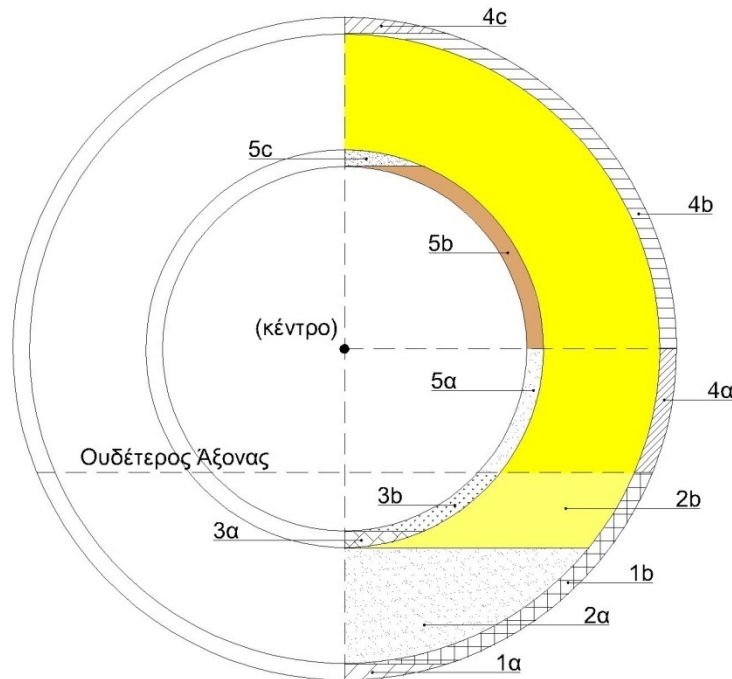
$$M_{el} = \min \left\{ M_{s,max} = \frac{f_{sy} (EI)_{eff}}{E_s (R_4 + x)}, M_{c,max} = \frac{f_c (EI)_{eff}}{E_c (R_3 - x)} \right\} \tag{2.10}$$

2.2.2 Πλαστική αντοχή

2.2.2.1 Αρχή και επέκταση διαρροής

Η διατομή πλέον χωρίζεται σε τμήματα που έχουν διαρρεύσει και σε τμήματα που συμπεριφέρονται ακόμη ελαστικά. Κάθε τμήμα, ανάλογα με το αν έχει διαρρεύσει πλήρως, εν μέρει ή αν βρίσκεται ακόμη στην ελαστική περιοχή, αντιμετωπίζεται διαφορετικά, καθώς τα ολοκληρώματα που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις δυνάμεις που αναπτύσσονται αλλάζουν με τη σειρά τους, σε σχέση με την εξέλιξη της διαρροής και τη θέση του ουδέτερου άξονα. Στις εξ. (2.11) - (2.58) παρουσιάζονται για όλους τους τομείς της διατομής, και ανάλογα με την εξέλιξη της διαρροής, οι δυνάμεις

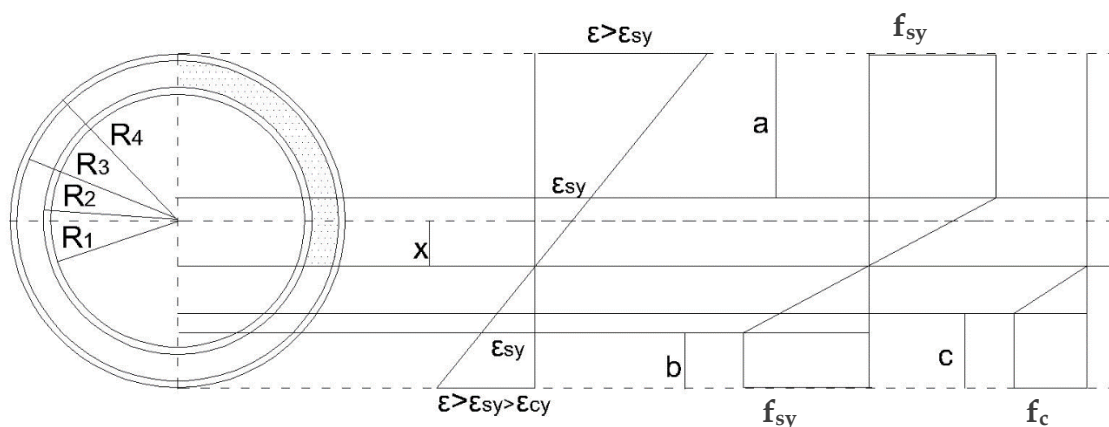
που αναπτύσσονται. Η διατομή έχει και σε αυτήν την περίπτωση κατακερματιστεί όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Κατακερματισμός της διατομής sandwich σε τομείς για την πραγματοποίηση των υπολογισμών

Figure 2.5: Fragmentation of sandwich-type section for the implementation of computations

Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.6, για την περιγραφή της διαρροής χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο a που εκφράζει τη στάθμη της διαρροής, αφορά τον εφελκόμενο χάλυβα, έχει θετικό πρόσημο, ξεκινά από την κορυφή της διατομής και έχει εύρος τιμών από 0 έως $R_4 + x$, έως δηλαδή τη στάθμη του ουδέτερου άξονα. Με την ίδια λογική, το σύμβολο b αναφέρεται στη διαρροή του θλιβόμενου χάλυβα, λαμβάνει θετικές μόνο τιμές, ξεκινά από την κάτω ίνα της διατομής η οποία θλίβεται, ενώ η τιμή του κυμαίνεται από 0 έως $R_4 - x$, καταλαμβάνει δηλαδή όλο το εύρος της θλιβόμενης περιοχής. Τέλος, χρησιμοποιείται το σύμβολο c , που αφορά τη διαρροή του θλιβόμενου σκυροδέματος, έχει θετικό πρόσημο και έχει τη δυνατότητα να λάβει τιμές από 0 έως $R_4 - x$. Τα εύρη τιμών των εν λόγω μεταβλητών έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτουν όλες τις πιθανές περιπτώσεις.



Σχήμα 2.6: Διαρροή τμημάτων 1a, 1b, 3a, 3b του εφελκόμενου χάλυβα, 4b, 4c, 5b, 5c του θλιβόμενου και 2a, 2b του σκυροδέματος, όπως προσδιορίστηκαν στο Σχήμα 2.5

Figure 2.6: Yielding of sectors 1a, 1b, 3a, 3b of steel in tension, 4b, 4c, 5b, 5c of steel in compression and 2a, 2b of concrete, as defined in Figure 2.5

- Τομέας 1a

- $b = 0$

$$A_{11} = \int_{R_3-x}^{R_4-x} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.11)$$

- $0 < b < R_4 - R_3$

$$A_{21} = \int_{R_4-x-b}^{R_4-x} f_{sy} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.12)$$

$$A_{22} = \int_{R_3-x}^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y}{R_4-x-b} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.13)$$

- $R_4 - R_3 < b$

$$A_{31} = \int_{R_3-x}^{R_4-x} f_{sy} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.14)$$

- Τομέας 1b

- $0 < b < R_4 - R_3$

$$B_{11} = \int_0^{R_3-x} f_{sy} \frac{y}{R_4-x-b} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.15)$$

- $R_4 - R_3 < b < R_4 - x$

$$B_{21} = \int_{R_4-x-b}^{R_3-x} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.16)$$

$$B_{22} = \int_0^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y}{R_4-x-b} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.17)$$

- $b = R_4 - x$

$$B_{31} = \int_0^{R_3-x} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.18)$$

• Τομέας 2a

- $0 < c < R_4 - R_3$

$$C_{11} = \int_{R_2-x}^{R_3-x} \sigma_c \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.19)$$

- $R_4 - R_3 < c < R_4 - R_2$

$$C_{21} = \int_{R_4-x-c}^{R_3-x} f_c \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.20)$$

$$C_{22} = \int_{R_2-x}^{R_4-x-c} \sigma_c \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.21)$$

- $R_4 - R_2 < c$

$$C_{31} = \int_{R_2-x}^{R_3-x} f_c \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.22)$$

• Τομέας 2b

- $c < R_4 - R_2$

$$D_{11} = \int_0^{R_2-x} \sigma_c [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.23)$$

- $R_4 - R_2 < c < R_4 - x$

$$D_{21} = \int_{R_4-x-c}^{R_2-x} f_c [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.24)$$

$$D_{22} = \int_0^{R_4-x-c} \sigma_c [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.25)$$

$$- \quad c = R_4 - x$$

$$D_{31} = \int_0^{R_2-x} f_c [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.26)$$

όπου

$$\sigma_c = f_{sy} \frac{y}{R_4 + x - a} \frac{E_c}{E_s} \quad (2.27)$$

- Τομέας 3a

$$- \quad b < R_4 - R_2$$

$$F_{11} = \int_{R_1-x}^{R_2-x} f_{sy} \frac{y}{R_4 - x - b} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.28)$$

$$- \quad R_4 - R_2 < b < R_4 - R_1$$

$$F_{21} = \int_{R_4-x-b}^{R_2-x} f_{sy} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \sqrt{2} \quad (2.29)$$

$$F_{22} = \int_{R_1-x}^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y}{R_4 - x - b} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.30)$$

$$- \quad R_4 - R_1 < b$$

$$F_{31} = \int_{R_1-x}^{R_2-x} f_{sy} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.31)$$

- Τομέας 3b

$$- \quad b < R_4 - R_1$$

$$H_{11} = \int_0^{R_1-x} f_{sy} \frac{y}{R_4 - x - b} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.32)$$

$$- \quad R_4 - R_1 < b < R_4 - x$$

$$H_{21} = \int_{R_4-x-b}^{R_1-x} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.33)$$

$$H_{22} = \int_0^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y}{R_4 - x - b} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.34)$$

- $b = R_4 - x$

$$H_{31} = \int_0^{R_1-x} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.35)$$

• Τομέας 4a

- $a < R_4$

$$J_{11} = \int_0^{-x} f_{sy} \frac{y}{R_4 + x - a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.36)$$

- $R_4 < a < R_4 + x$

$$J_{21} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-x} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.37)$$

$$J_{22} = \int_0^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4 + x - a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.38)$$

- $a = R_4 - x$

$$J_{31} = \int_0^{-x} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.39)$$

• Τομέας 4b

- $0 < a < R_4 - R_3$

$$K_{11} = \int_{-x}^{-(R_3+x)} f_{sy} \frac{y}{R_4 + x - a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.40)$$

- $R_4 - R_3 < a < R_4$

$$K_{21} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_3+x)} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.41)$$

$$K_{22} = \int_{-x}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4 + x - a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.42)$$

- $R_4 < a$

$$K_{31} = \int_{-x}^{-(R_3+x)} f_{sy} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.43)$$

- Τομέας 4c

- $0 < \alpha < R_4 - R_3$

$$L_{11} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_4+x)} f_{sy} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.44)$$

$$L_{12} = \int_{-(R_3+x)}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.45)$$

- $R_4 - R_3 < a$

$$L_{21} = \int_{-(R_3+x)}^{-(R_4+x)} f_{sy} \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.46)$$

- Τομέας 5a

- $a < R_4$

$$M_{11} = \int_0^{-x} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.47)$$

- $R_4 < a < R_4 + x$

$$M_{21} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-x} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.48)$$

$$M_{22} = \int_0^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.49)$$

- $a = R_4 + x$

$$M_{31} = \int_0^{-x} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.50)$$

- Τομέας 5b

- $a < R_4 - R_1$

$$N_{11} = \int_{-x}^{-(R_1+x)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.51)$$

- $R_4 - R_1 < a < R_4$

$$N_{21} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_1+x)} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.52)$$

$$N_{22} = \int_{-x}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.53)$$

- $R_4 < a$

$$N_{31} = \int_{-x}^{-(R_1+x)} f_{sy} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy \quad (2.54)$$

• Τομέας 5c

- $a < R_4 - R_2$

$$P_{11} = \int_{-(R_1+x)}^{-(R_2+x)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.55)$$

- $R_4 - R_2 < a < R_4 - R_1$

$$P_{21} = \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_2+x)} f_{sy} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.56)$$

$$P_{22} = \int_{-(R_1+x)}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y}{R_4+x-a} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.57)$$

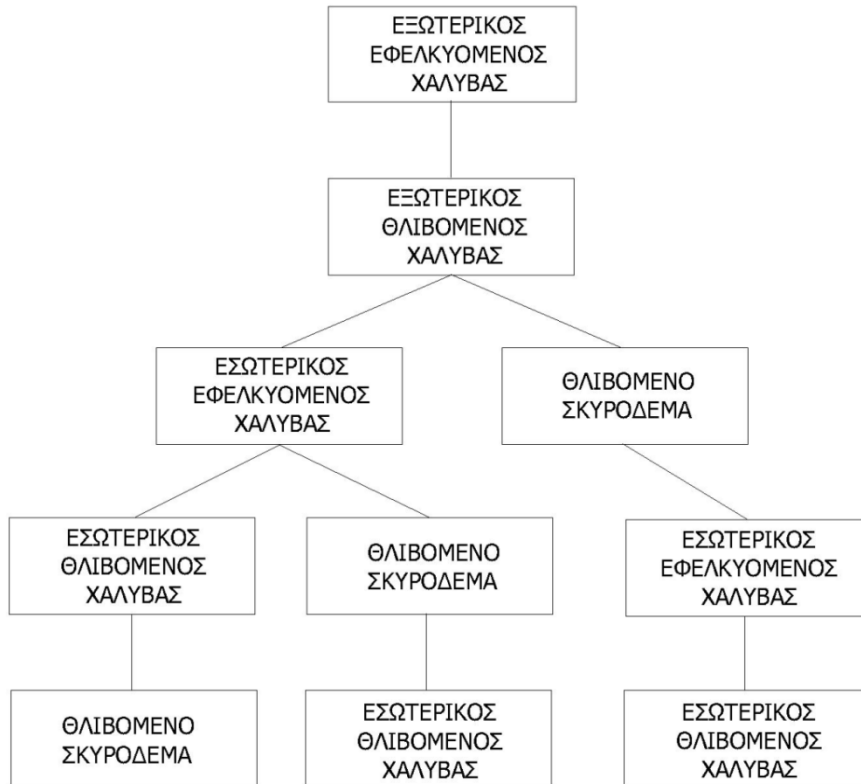
- $R_4 - R_1 < a$

$$P_{31} = \int_{-(R_1+x)}^{-(R_2+x)} f_{sy} \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \quad (2.58)$$

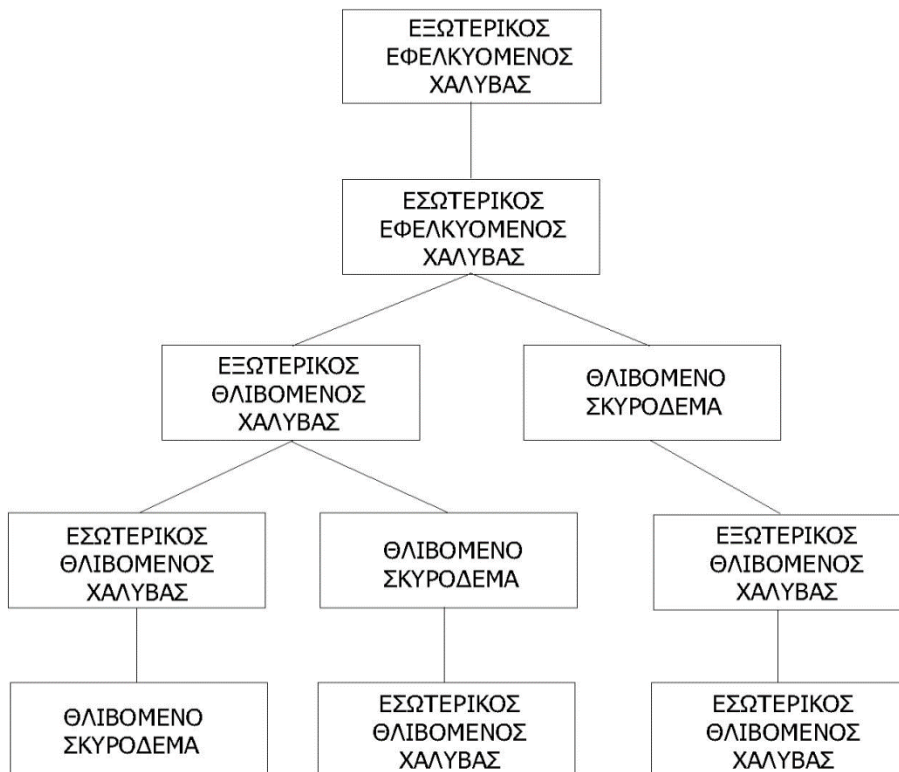
Οι εξισώσεις που προηγήθηκαν συνδυάζονται κάθε φορά με κατάλληλο τρόπο, ανάλογα με τη στάθμη της διαρροής στη διατομή. Όπως είναι φυσικό, η φύση της διατομής οδηγεί σε πολλούς πιθανούς συνδυασμούς παραμορφώσεων και τάσεων. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι σε κάθε ένα της διατομής sandwich είναι δυνατό να απαντάται μόνον ένα υλικό, αν για παράδειγμα η εξετασθείσα διατομή περιλαμβάνει μόνο τον τομέα 4c, ή δύο υλικά, αν η διατομή περιλαμβάνει τους τομείς 1a και 2b, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και αναπτύσσουν τάσεις ανάλογα με το στάδιο της φόρτισης στην οποία υπόκειται η διατομή.

Στο Σχήμα 2.7 που προηγήθηκε παρουσιάζονται τρία πιθανά σενάρια εξάπλωσης της διαρροής, υποθέτοντας ότι ο εφελκόμενος χάλυβας εισέρχεται πρώτος στην πλαστική περιοχή. Η φύση της διατομής οδηγεί, στη συνέχεια, σε μια σειρά από πιθανές περιπτώσεις επέκτασης της διαρροής, οι οποίες είναι δυνατό να μειωθούν μέσω των γεωμετρικών περιορισμών. Με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διατομής,

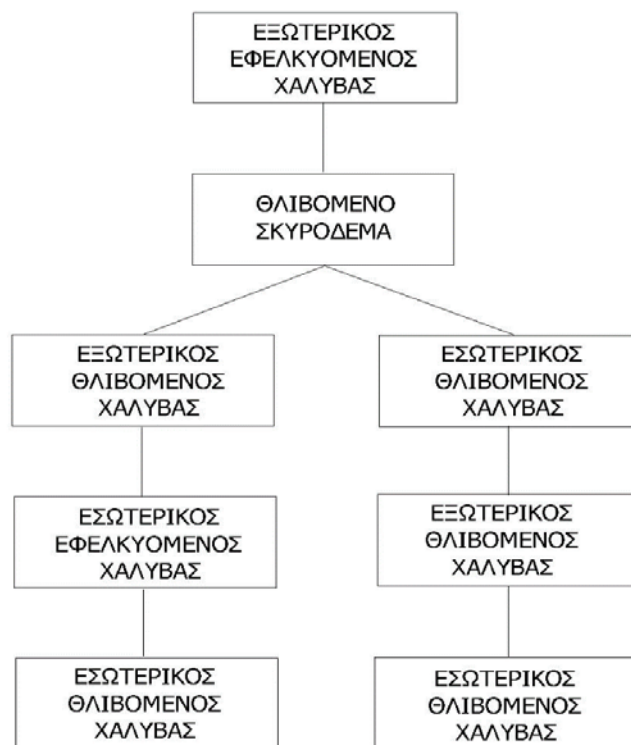
εύκολα συμπεραίνεται πως η διαρροή του εσωτερικού εφελκόμενου χάλυβα θα προηγηθεί της διαρροής του εσωτερικού θλιβόμενου. Αυτό καθώς, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.6, η θέση του ουδέτερου άξονα, που βρίσκεται στο κάτω μισό της διατομής και χωρίζει τα διαγράμματα τάσεων σε όμοια τρίγωνα, δημιουργεί αναλογικά μεγαλύτερη παραμόρφωση στην στάθμη του εσωτερικού θλιβόμενου χάλυβα από ό,τι στην αντίστοιχη στάθμη του εφελκόμενου. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την παραδοχή πως το υλικό του εξωτερικού και του εσωτερικού χάλυβα είναι το ίδιο, οδηγεί στο συμπέρασμα πως στην ελαστική περιοχή η τάση της ακραίας εσωτερικής θλιβόμενης ίνας είναι μικρότερη από την τάση της ακραίας εσωτερικής εφελκόμενης ίνας. Ως εκ τούτου, η διαρροή θα προηγηθεί στη δεύτερη στάθμη σε σχέση με την πρώτη. Όσο αυξάνεται η παραμόρφωση της διατομής, τόσο αυξάνονται οι τάσεις που αναπτύσσονται σε αυτήν και κατ' επέκταση και η διαρροή των υλικών που την αποτελούν.



(i)



(ii)



(iii)

Σχήμα 2.7: Ενδεικτικά διαγράμματα ροής εναλλακτικών περιπτώσεων εξάπλωσης της διαρροής

Figure 2.7: Flow charts of possible cases for the expansion of yielding

Ο συνδυασμός των δυνάμεων που αναπτύσσονται στα εκάστοτε τμήματα οδηγεί στον προσδιορισμό της θέσης του ουδέτερου άξονα με τη βοήθεια της εξ. (2.59), που εκφράζει την ισορροπία των δυνάμεων, και των εξ. (2.60), (2.61) που προκύπτουν από τη γεωμετρική σχέση των παραμορφώσεων, σύμφωνα με τη μορφή της διατομής.

$$A_{31} + B_{21} + B_{22} + C_{31} + D_{21} + D_{22} + F_{31} + H_{21} + H_{22} = J_{11} + K_{21} + K_{22} + L_{21} + M_{11} + N_{21} + N_{22} + P_{31} \quad (2.59)$$

$$\frac{\varepsilon_{sy}}{R_4 - x - b} = \frac{\varepsilon_{cy}}{R_4 - x - c} \Rightarrow b = \frac{(\varepsilon_{sy} - \varepsilon_{cy})x - (\varepsilon_{sy} - \varepsilon_{cy})R_4 + \varepsilon_{sy}c}{\varepsilon_{cy}} \quad (2.60)$$

$$\frac{\varepsilon_{sy}}{R_4 + x - a} = \frac{\varepsilon_{cy}}{R_4 - x - c} \Rightarrow a = \frac{(\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{cy})x - (\varepsilon_{sy} - \varepsilon_{cy})R_4 + \varepsilon_{sy}c}{\varepsilon_{cy}} \quad (2.61)$$

Για τον υπολογισμό της ροπής που αναπτύσσεται στην εξεταζόμενη διατομή sandwich χρησιμοποιείται η εξ. (2.62), με τις παραδοχές ότι $(R_4 - R_1) < a < R_4$, $(R_4 - R_1) < b < (R_4 - x)$ και $(R_4 - R_2) < c < (R_4 - x)$, οι οποίες εκφράζουν τη θεώρηση ότι στην προκειμένη περίπτωση παρουσιάζεται διαρροή στους τομείς 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4b, 4c, 5b και 5c.

Κεφάλαιο 2: Ακριβής διαδικασία ανάλυσης διατομής

$$\begin{aligned}
 M = & 2 \left[\int_{R_3-x}^{R_4-x} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \int_{R_4-x-b}^{R_3-x} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \right. \\
 & \int_0^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y^2}{R_4-x-b} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_2-x}^{R_3-x} f_c y \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy + \int_{R_4-x-c}^{R_2-x} f_c y [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_0^{R_4-x-c} f_c \frac{y^2}{R_4-x-c} [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_1-x}^{R_3-x} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy + \int_{R_4-x-b}^{R_1-x} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_0^{R_4-x-b} f_{sy} \frac{y^2}{R_4-x-b} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_0^{-x} f_{sy} \frac{y^2}{R_4+x-a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \tag{2.62} \\
 & \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_3-x)} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y^2}{R_4+x-a} [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-(R_3+x)}^{-(R_4+x)} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \int_0^{-x} f_{sy} \frac{y^2}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-(R_4+x-a)}^{-(R_1+x)} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_4+x-a)} f_{sy} \frac{y^2}{R_4+x-a} [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \left. \int_{-(R_1+x)}^{-(R_2+x)} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \right]
 \end{aligned}$$

Για όλες τις περιπτώσεις που προηγήθηκαν, αφού έχουν βρεθεί για κάθε σημείο οι ροπές που αναπτύσσονται και η θέση του ουδέτερου άξονα, που φυσικά αλλάζει για κάθε φόρτιση, είναι δυνατός πλέον ο υπολογισμός της καμπυλότητας της διατομής από την εξ. (2.63).

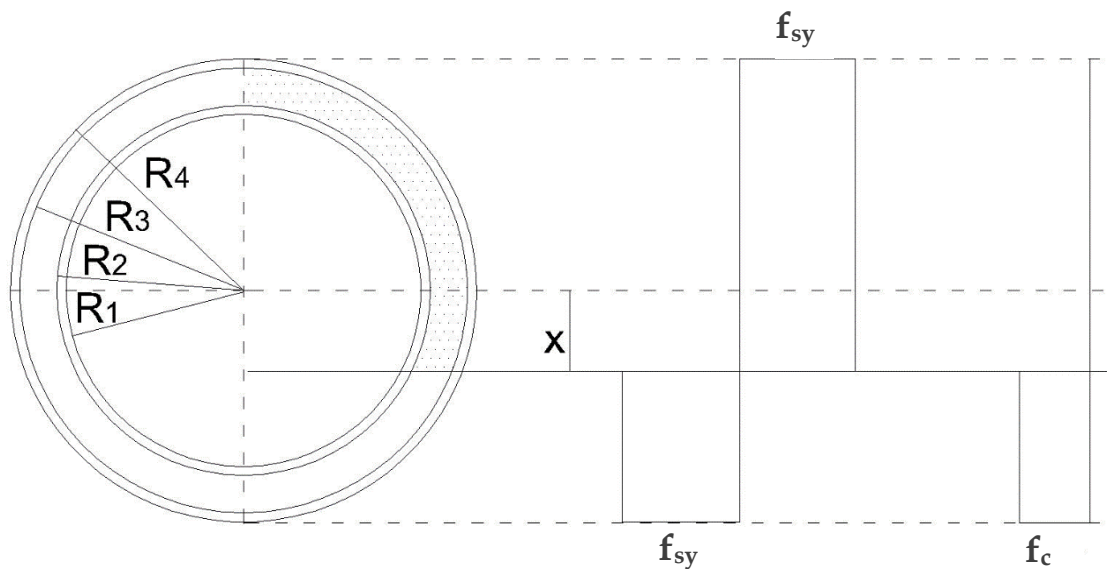
$$M = \sum \int y \sigma A = \sum \int y \varepsilon (EI)_{eff} A = \sum \int y (\kappa y) (EI)_{eff} A \tag{2.63}$$

2.2.2.2 Πλήρης πλαστικοποίηση

Η παραμορφωσιακή κατάσταση της πλήρους πλαστικοποίησης και τα διαγράμματα τάσεων που αναπτύσσονται παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.8. Η εύρεση του ουδέτερου άξονα στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται με την εξίσωση των δυνάμεων όπως αυτή παρουσιάζεται στην εξ. (2.64)

$$A_{31} + B_{31} + C_{31} + D_{31} + F_{31} + H_{31} = J_{31} + K_{31} + L_{31} + M_{31} + N_{31} + P_{31} \quad (2.64)$$

Αφού η θέση του ουδέτερου άξονα έχει ήδη προσδιοριστεί είναι πλέον εύκολος ο υπολογισμός της ροπής πλήρους πλαστικοποίησης της διατομής sandwich που εξετάζεται, με τη βοήθεια της εξ. (2.65) και για δεδομένες πλέον τις ακριβείς στάθμες διαρροής, δηλαδή $a = R_4 + x$, $b = R_4 - x$ και $c = R_4 - x$.



Σχήμα 2.8: Πλήρως πλαστικοποιημένη διατομή

Figure 2.8: Fully plastified section

$$\begin{aligned}
 M = 2 [& \int_{R_3-x}^{R_4-x} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{R_3-x} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_2-x}^{R_3-x} f_c y \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{R_2-x} f_c y [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_1-x}^{R_2-x} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{R_1-x} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_0^{-x} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_3-x)} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-(R_3+x)}^{-(R_4+x)} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{-x} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_1+x)} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-(R_1+x)}^{-(R_2+x)} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy]
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

2.3 Αντοχή υπό συνδυασμένη αξονική και καμπτική καταπόνηση

Η χρήση της διατομής sandwich για την κατασκευή πολώνων ανεμογεννητριών καθιστά επιπλέον απαραίτητη την εξέταση της αντοχής της υπό συνθήκες συνδυασμένης αξονικής και καμπτικής φόρτισης, λαμβάνοντας υπόψη τη συνύπαρξη της ροπής που προκαλείται από την ανεμοπίεση και της αξονικής δύναμης λόγω των φορτίων βαρύτητας από την άτρακτο, τα περύγια αλλά και τον ίδιο τον πολώνα. Με τη μετατροπή της εξ. (2.64) υπολογισμού του ουδέτερου άξονα στη μορφή:

$$A_{3l} + B_{3l} + C_{3l} + D_{3l} + F_{3l} + H_{3l} - J_{3l} - K_{3l} - L_{3l} - M_{3l} - N_{3l} - P_{3l} = N_c \quad (2.66)$$

και τη μετατροπή της εξ. (2.65) υπολογισμού της ροπής στην εξ. (2.67), όπου N_c η εφαρμοζόμενη θλιπτική δύναμη, ο υπολογισμός της πλαστικής ροπής αντοχής της διατομής πραγματοποιείται με τη διαδικασία που περιγράφηκε για την περίπτωση καθαρής κάμψης στην παράγραφο 2.2.2.2.

$$\begin{aligned}
 M = 2 & \left[\int_{R_3-x}^{R_4-x} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \right. \\
 & \int_0^{R_3-x} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_2-x}^{R_3-x} f_c y \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{R_2-x} f_c y [\sqrt{R_3^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{R_1-x}^{R_2-x} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{R_1-x} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_0^{-x} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_3-x)} f_{sy} y [\sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_3^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-(R_3+x)}^{-(R_4+x)} f_{sy} y \sqrt{R_4^2 - (x+y)^2} dy + \\
 & \int_0^{-x} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \int_{-x}^{-(R_1+x)} f_{sy} y [\sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} - \sqrt{R_1^2 - (x+y)^2}] dy + \\
 & \left. \int_{-(R_1+x)}^{-(R_2+x)} f_{sy} y \sqrt{R_2^2 - (x+y)^2} dy \right] + \\
 & N_c x
 \end{aligned} \quad (2.67)$$

3

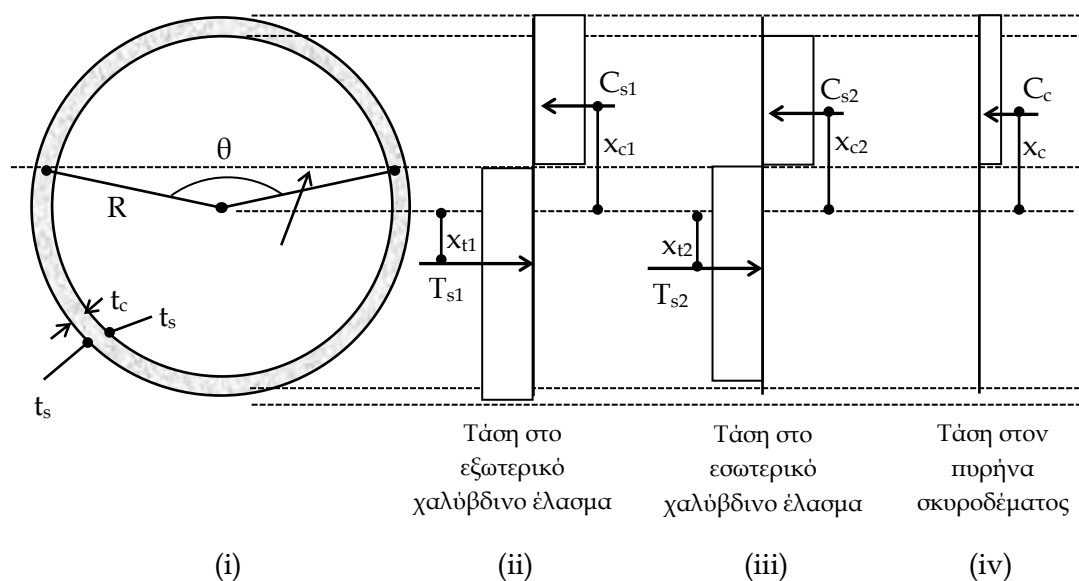
Προσεγγιστική διαδικασία ανάλυσης διατομής

Με δεδομένη την πολυπλοκότητα της προσέγγισης που περιγράφηκε παραπάνω, η ακρίβεια στην περιγραφή του προβλήματος επιτυγχάνεται εις βάρος της ευελιξίας των εξισώσεων, υπό την έννοια της δυνατότητας χειρισμού τους με τρόπο που να επιτρέπει την ευχερέστερη πραγματοποίηση παραμετρικών αναλύσεων και την εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων, χωρίς να απαιτείται η κατάλυση της συμβολικής μορφής των εκφράσεων με την απόδοση συγκεκριμένων τιμών στις μεταβλητές. Η προσέγγιση που επιχειρείται παρακάτω καλείται να αντισταθμίσει αυτό το μειονέκτημα της ακριβούς αναλυτικής λύσης, μέσω των απλουστεύσεων που προκύπτουν από την παραδοχή λεπτότοιχης διατομής. Λαμβάνοντας υπόψη τις τάξεις μεγέθους των γεωμετρικών χαρακτηριστικών που συνάδουν με την εφαρμογή της διατομής sandwich σε πυλώνες ανεμογεννητριών μεγάλου μεγέθους, η παραδοχή αυτή κρίνεται εύλογη, ενώ το σφάλμα που ενέχει θα εκτιμηθεί στην ενότητα 4.3.

3.1 Ανάλυση διατομής στην οριακή κατάσταση αστοχίας

Θεωρείται η διατομή του Σχήμα 3.1, με τα εξής γεωμετρικά χαρακτηριστικά:

- t_s = πάχος έκαστου χαλύβδινου ελάσματος
- t_c = πάχος σκυροδέματος
- R = μέση ακτίνα διατομής



Σχήμα 3.1: (i) Διατομή, (ii) τάσεις στο εξωτερικό χαλύβδινο έλασμα, (iii) τάσεις στο εσωτερικό χαλύβδινο έλασμα, (iv) τάσεις (θλιπτικές μόνο) στον πυρήνα σκυροδέματος.

Figure 3.1: (i) Sandwich section, (ii) outer steel-face stresses, (iii) inner steel-face stresses, (iv) concrete-core compressive stresses.

Η συνεργασία μεταξύ χάλυβα και σκυροδέματος θεωρείται πλήρης. Η τάση διαρροής του χάλυβα και η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος θεωρούνται ίσες με f_{sy} και f_c αντίστοιχα.

Στα Σχήμα 3.1ii,iii,iv δίνεται η κατανομή των τάσεων στα τρία διακριτά τμήματα της διατομής, ήτοι στο εξωτερικό χαλύβδινο έλασμα (Σχήμα 3.1ii), στο εσωτερικό χαλύβδινο έλασμα (Σχήμα 3.1iii) και στο σκυρόδεμα (Σχήμα 3.1iv), σε κατάσταση οριακής εκμετάλλευσης της διατομής. Οι τάσεις που δείχνονται πάνω από τον πλαστικό ουδέτερο άξονα θεωρούνται θλιπτικές, ενώ αυτές που είναι από κάτω είναι εφελκυστικές. Για το σκυρόδεμα γίνεται η υπόθεση μηδενικής εφελκυστικής αντοχής.

Οι εσωτερικές δυνάμεις στο Σχήμα 3.1 ορίζονται ως εξής:

- C_{s1} = συνισταμένη θλιπτική δύναμη στο εξωτερικό χαλύβδινο έλασμα
- C_{s2} = συνισταμένη θλιπτική δύναμη στο εσωτερικό χαλύβδινο έλασμα
- C_c = συνισταμένη θλιπτική δύναμη στο σκυρόδεμα
- T_{s1} = συνισταμένη εφελκυστική δύναμη στο εξωτερικό χαλύβδινο έλασμα
- T_{s2} = συνισταμένη εφελκυστική δύναμη στο εσωτερικό χαλύβδινο έλασμα

Οι αποστάσεις των εσωτερικών δυνάμεων από τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής είναι:

- $x_{c1} =$ απόσταση της C_{s1}
- $x_{c2} =$ απόσταση της C_{s2}
- $x_c =$ απόσταση της C_c
- $x_{t1} =$ απόσταση της T_{s1}
- $x_{t2} =$ απόσταση της T_{s2}

Υποθέτοντας ότι η διατομή είναι λεπτότοιχη, είναι:

$$C_{s1} \approx R\theta t_s f_{sy} \quad (3.1)$$

$$C_{s2} \approx R\theta t_s f_{sy} \quad (3.2)$$

$$C_c \approx R\theta t_c f_c \quad (3.3)$$

$$T_{s1} \approx R(2\pi - \theta) t_s f_{sy} \quad (3.4)$$

$$T_{s2} \approx R(2\pi - \theta) t_s f_{sy} \quad (3.5)$$

Η απαίτηση ισοροπίας των εσωτερικών δυνάμεων δίνει:

$$(C_{s1} + C_{s2} + C_c) - (T_{s1} + T_{s2}) = N \quad (3.6)$$

όπου $N =$ θλιπτική δύναμη στη διατομή.

Με αντικατάσταση των εξ. (3.1) - (3.5) στην εξ. (3.6) προκύπτει η γωνία θ , άρα και η θέση του ουδέτερου άξονα, ως εξής:

$$\theta = \frac{\frac{N}{R^2 f_{sy}} + 4\pi \frac{t_s}{R}}{4 \frac{t_s}{R} + \frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}}} \quad (3.7)$$

Η ροπή αντοχής της διατομής είναι:

$$M_R = C_{s1} x_{c1} + C_{s2} x_{c2} + C_c x_c + T_{s1} x_{t1} + T_{s2} x_{t2} \quad (3.8)$$

Η υπόθεση λεπτότοιχης διατομής δίνει:

$$x_{c1} \approx x_{c2} \approx x_c \quad \text{και} \quad x_{t1} \approx x_{t2} \quad (3.9)$$

Θέτοντας $x_{c1} = x_{c2} = x_c$ και $x_{t1} = x_{t2} = x_t$, από τον ορισμό του κέντρου βάρους επιφανειών προκύπτει ότι:

$$x_c \theta = x_t (2\pi - \theta) \quad (3.10)$$

Από αντικατάσταση των εξ. (3.9) και (3.10) στην εξ. (3.8) και μετά από πράξεις και απλοποιήσεις η (ανηγμένη) ροπή αντοχής υπολογίζεται ως:

$$\mu_R = \frac{M_R}{R^3 f_{sy}} = \frac{2}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{N}{R^2 f_{sy}} + 4\pi \frac{t_s}{R} \right) \quad (3.11)$$

Η αντίσταση της διατομής σε κεντρική θλίψη είναι:

$$N_R = 4\pi R t_s f_{sy} + 2\pi R t_c f_c \quad (3.12)$$

οπότε η ανηγμένη αξονική αντίσταση γράφεται:

$$\frac{N_R}{R^2 f_{sy}} = 2\pi \left(\frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}} + \frac{2t_s}{R} \right) \quad (3.13)$$

Στη συνέχεια ορίζεται η ανηγμένη ως προς την αντοχή δρώσα αξονική δύναμη:

$$\nu = \frac{N}{N_R} \quad (3.14)$$

και από τον συνδυασμό των εξ. (3.13) και (3.14) προκύπτει:

$$\frac{N}{R^2 f_{sy}} = 2\pi \nu \left(\frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}} + \frac{2t_s}{R} \right) \quad (3.15)$$

Αντικατάσταση της εξ. (3.15) στην εξ. (3.11) και στην εξ. (3.7) δίνει τελικώς:

$$\mu_R = \frac{4\pi}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \left[(\nu + 1) \frac{2t_s}{R} + \nu \frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}} \right] \quad (3.16)$$

όπου

$$\theta = \frac{4\pi (\nu + 1) \frac{t_s}{R} + \nu \frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}}}{4 \frac{t_s}{R} + \frac{t_c}{R} \frac{f_c}{f_{sy}}} \quad (3.17)$$

Η προσεκτική ανάγνωση των τελευταίων δύο σχέσεων οδηγεί στο ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι η ανηγμένη ροπή αντίστασης μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση τεσσάρων βασικών παραμέτρων. Δύο εξ αυτών (οι λόγοι $2t_s/R$ και t_c/R είναι γεωμετρικές, μία (ο λόγος f_c/f_{sy}) αφορά τα υλικά και μία, η ποσότητα ν , εκφράζει τη δρώσα αξονική δύναμη. Η ανωτέρω εξ. (3.16) έχει προγραμματισθεί σε κώδικα MatLab [4], έτσι ώστε να είναι δυνατός ο προσδιορισμός της επιρροής οποιασδήποτε παραμέτρου στη ροπή αντοχής.

3.2 Μελέτη διατομής για δεδομένη δυσκαμψία

Η ενεργός δυσκαμψία $(EI)_{eff}$ της διατομής μπορεί να δοθεί προσεγγιστικά από τη σχέση

$$(EI)_{eff} = E_s I_a + k_e E_c I_c \quad (3.18)$$

όπου:

E_s = μέτρο ελαστικότητας χάλυβα

E_c = μέση τιμή μέτρου ελαστικότητας σκυροδέματος

I_s = ροπή αδράνειας χαλύβδινης διατομής (ως προς κεντροβαρικό άξονα)

I_c = ροπή αδράνειας σκυροδέματος (ως προς κεντροβαρικό άξονα)

k_e = μειωτικός συντελεστής (π.χ. λόγω ρηγμάτωσης του σκυροδέματος), της τάξης του 0.6.

Θεωρώντας όλα τα στοιχεία της διατομής μικρού πάχους σε σχέση με την ακτίνα, οι ροπές αδράνειας είναι:

$$I_s \approx 2\pi R^3 t_s \quad (3.19)$$

$$I_c = \pi R^3 t_c \quad (3.20)$$

οπότε, με κατάλληλη αναγωγή ώστε να προκύψει ως αδιάστατο μέγεθος, η (ανηγμένη) δυσκαμψία γράφεται ως εξής:

$$\frac{(EI)_{eff}}{E_s \pi R^4} = \frac{2t_s}{R} + k_e \frac{E_c}{E_s} \frac{t_c}{R} \quad (3.21)$$

4

Έλεγχος ορθότητας υπολογισμών αναλυτικών λύσεων

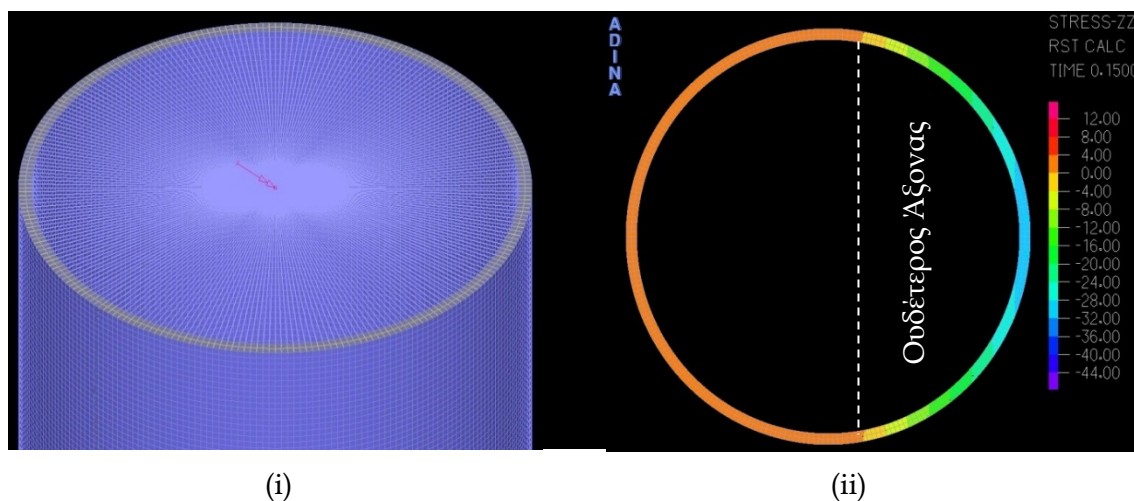
Οι εξισώσεις της προηγούμενης ενότητας, οι οποίες περιγράφουν την ελαστική και πλαστική συμπεριφορά μίας διατομής τύπου sandwich, υποβαλλόμενης σε αξονική φόρτιση, καθαρή κάμψη και συνδυασμό τους, μεταφέρονται υπό τη μορφή κώδικα στο πρόγραμμα Mathematica [3], ώστε να καταστεί δυνατή η επεξεργασία και παραμετροποίησή τους, με στόχο την εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων.

Προκειμένου να ελεγχθεί η ορθότητα των υπολογισμών, επιχειρήθηκε η διασταύρωση των αποτελεσμάτων από τους κώδικες σε Mathematica [3] και MatLab [4], που προέκυψαν από τις δύο αναλυτικές λύσεις, με τα αποτελέσματα του λογισμικού Biaxial Bending [1], εξειδικευμένου στην ανάλυση σύνθετων διατομών υπό καμπτική και αξονική καταπόνηση, καθώς και με εκείνα του προγράμματος αριθμητικής ανάλυσης με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, Adina [2].

4.1 Προσομοίωση στο λογισμικό Adina

Η προσομοίωση της διατομής τύπου sandwich στο περιβάλλον του προγράμματος Adina πραγματοποιήθηκε μέσω ενός κυλίνδρου, πακτωμένου στη βάση του και υποβαλλόμενου σε καθαρή κάμψη, μέσω συγκεντρωμένης, καμπτικής ροπής στην κορυφή του. Ο κύλινδρος συνίσταται από τρισδιάστατα, συμπαγή πεπερασμένα στοιχεία (3D-Solid elements), που προσομοιώνουν τον πυρήνα σκυροδέματος και πεπερασμένα στοιχεία κελύφους (Shell elements), που προσομοιώνουν τα δύο χαλύβδινα ελάσματα. Προκειμένου να συμπεριληφθεί στην ανάλυση η προϋπόθεση της πλήρους και άρρηκτης συνεργασίας των τριών στρώσεων της διατομής, το προσομοίωμα κατασκευάστηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε τα συμπαγή στοιχεία του πυρήνα να διαθέτουν κοινούς κόμβους με τα επιφανειακά στοιχεία των ελασμάτων εκατέρωθέν του. Τμήμα του προσομοιώματος απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1i. Από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, εκτός των ζευγών ροπών και στρωφών που συνιστούν το δρόμο ισορροπίας του φορέα, με τη βοήθεια της χρωματικής αναπαράστασης της κατανομής των τάσεων που αναπτύσσονται στη διατομή (Σχήμα 4.1ii), είναι εφικτός ο προσδιορισμός της θέσης του ουδέτερου άξονα και η σύγκριση, έπειτα, με τη θέση που

προκύπτει από τον κώδικα που έχει συνταχθεί στο περιβάλλον Mathematica [3]. Η θέση του ουδέτερου άξονα που προέκυψε από τις δύο προσεγγίσεις παρουσίασε σε κάθε περίπτωση απόλυτη ταύτιση.

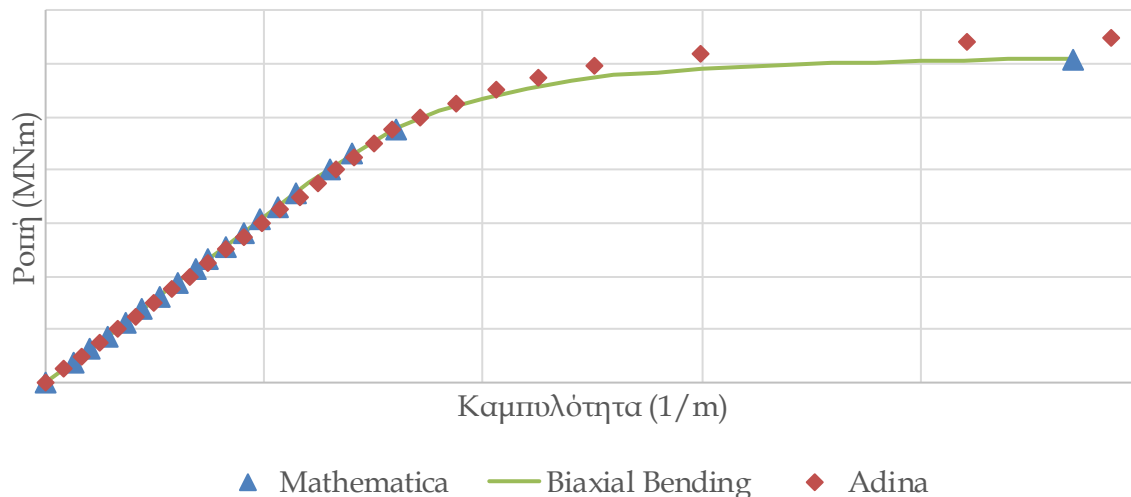


Σχήμα 4.1: (i) Προσομοίωμα κυλινδρικής διατομής sandwich με πεπερασμένα στοιχεία, στο πρόγραμμα Adina [2] και (ii) Χρωματική παρουσίαση διαβάθμισης αναπτυσσόμενων τάσεων για τον προσδιορισμό του ουδέτερου άξονα

Figure 4.1: (i) Sandwich-section cylindrical finite-element model in Adina [2], (ii) neutral-axis determination through contour stress results

4.2 Χρήση λογισμικού Biaxial Bending για έλεγχο ακριβείας

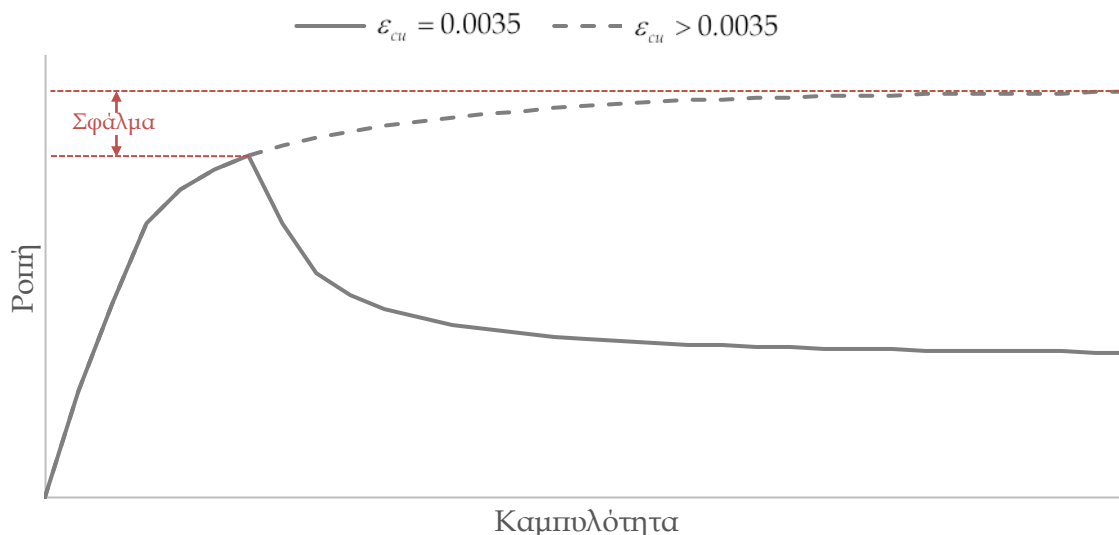
Τα αποτελέσματα από την ανάλυση της διατομής sandwich που πραγματοποιήθηκε στο πρόγραμμα Biaxial Bending [1], για ένα μεγάλο αριθμό συνδυασμών γεωμετρικών χαρακτηριστικών, φορτίσεων και ποιότητας υλικών, παρουσίασαν μηδενική απόκλιση από εκείνα της ακριβούς αναλυτικής λύσης, επιβεβαιώνοντας έτσι την ορθότητά της. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων αφορά τα μεγέθη της ελαστικής ροπής αντοχής, της πλαστικής ροπής αντοχής και της ισοδύναμης δυσκαμψίας στην ελαστική περιοχή. Για την ταυτόχρονη εποπτεία των τριών μεγεθών σχεδιάστηκε το διάγραμμα ροπών - καμπυλοτήτων της διατομής που φαίνεται στο Σχήμα 4.2 και απεικονίζει την ταύτιση των αποτελεσμάτων, ενδεικτικά για τιμές $E_s=210\text{GPa}$, $f_{sy}=355\text{MPa}$, $E_c=32\text{GPa}$, $f_c=30\text{MPa}$, $t_s=10\text{mm}$, $t_c=100\text{mm}$, $R_4=2000\text{mm}$. Στο ίδιο διάγραμμα εμφανίζονται επίσης οι τιμές που προέκυψαν από την προσομοίωση στο πρόγραμμα Adina [2].



Σχήμα 4.2: Σύγκριση διαγράμματος ροπών - καμπυλοτήτων μεταξύ Mathematica [3] (ακριβής αναλυτική λύση), Biaxial Bending [1] και Adina [2] για διατομή τύπου sandwich, χαρακτηριστικών:
 $E_s=210\text{GPa}$, $f_{sy}=355\text{MPa}$, $E_c=32\text{GPa}$, $f_c=30\text{MPa}$, $t_s=10\text{mm}$, $t_c=100\text{mm}$, $R_4=2000\text{mm}$

Figure 4.2: Moment - curvature diagram comparison between Mathematica [3] (precise analytical solution), Biaxial Bending [1] and Adina [2] for a sandwich-type section of:
 $E_s=210\text{GPa}$, $f_{sy}=355\text{MPa}$, $E_c=32\text{GPa}$, $f_c=30\text{MPa}$, $t_s=10\text{mm}$, $t_c=100\text{mm}$, $R_4=2000\text{mm}$

Πρέπει στο σημείο αυτό να σημειωθεί ότι, κατά τον υπολογισμό της πλαστικής ροπής αντοχής, έγινε η παραδοχή ότι το σκυρόδεμα είναι ικανό να διατηρεί τη μέγιστη αντοχή του μέχρι η παραμόρφωση της διατομής να φτάσει την παραμόρφωση θραύσης του χάλυβα. Μία ρεαλιστικότερη προσέγγιση θα περιορίζε τη συνεισφορά του σκυροδέματος, όσον αφορά την αντοχή της διατομής, στο εύρος παραμόρφωσης που ορίζει ο νόμος του συγκεκριμένου υλικού, κάτι που προκειμένου να ληφθεί υπόψη στις αναλύσεις θα απαιτούσε έλεγχο των παραμορφώσεων στη μετελαστική περιοχή και κατά συνέπεια θα περιέπλεκε σημαντικά τους υπολογισμούς. Το σφάλμα φαίνεται ποιοτικά στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Ποιοτική απεικόνιση σφάλματος λόγω επέκτασης της παραμόρφωσης θραύσης του σκυροδέματος

Figure 4.3: Qualitative depiction of error due to prolongation of concrete ultimate strain

Βάσει των παραπάνω, κρίνεται απαραίτητη η εκτίμηση του σφάλματος που απορρέει από τη συγκεκριμένη παραδοχή. Θεωρώντας ως μέγιστη παραμόρφωση του χάλυβα την τιμή $\varepsilon_{su} = 0.1$ και ότι το σκυροδέμα παύει να συνεισφέρει όταν η παραμόρφωσή του φτάσει την τιμή $\varepsilon_{cu} = 0.0035$, υπολογίζεται η νέα ροπή αντοχής στο πρόγραμμα Biaxial Bending για διάφορες τιμές θλιπτικού φορτίου. Προκειμένου η διερεύνηση να ανταποκρίνεται στη φύση του προβλήματος, πραγματοποιήθηκε μία χονδρική εκτίμηση της τάξης μεγέθους του μόνιμου αξονικού θλιπτικού φορτίου που καλείται να φέρει μια διατομή sandwich, στη βάση του πυλώνα μίας σύγχρονης ανεμογεννήτριας μεγάλου μεγέθους.

Αν υποθεθεί πως ο εν λόγω πυλώνας έχει ύψος $h = 100\text{m}$ και διάμετρο βάσης $2R_4 = 4\text{m}$, που συντηρητικά θα θεωρηθεί σταθερή καθ' ύψος, τότε στην περίπτωση ενός παραδείγματος βελτιστοποιημένης διατομής, σύμφωνα με όσα περιγράφονται στο παραδοτέο 5.1, που ο λόγος πάχους της διατομής προς την ακτίνα είναι $(2t_s + t_c)/R_4 = 0.15$ και ο λόγος πάχους του σκυροδέματος προς το πάχος του χάλυβα είναι $t_c/(2t_s) = 4$, το ίδιο βάρος του πυλώνα θα είναι:

$$N_{tower} = \left[\pi(R_4^2 - R_3^2 + R_2^2 - R_1^2)\gamma_s + \pi(R_3^2 - R_2^2)\gamma_c \right] h \approx 10.50\text{MN} \quad (4.1)$$

όπου $\gamma_s = 78.5\text{kN/m}^3$, $\gamma_c = 25\text{kN/m}^3$ είναι τα ειδικά βάρη του χάλυβα και του σκυροδέματος αντίστοιχα. Επιπλέον, το συνολικό βάρος της ατράκτου και του ρότορα που ασκείται στην κορυφή του πυλώνα, ενδεικτικά για ένα από τα μεγαλύτερα

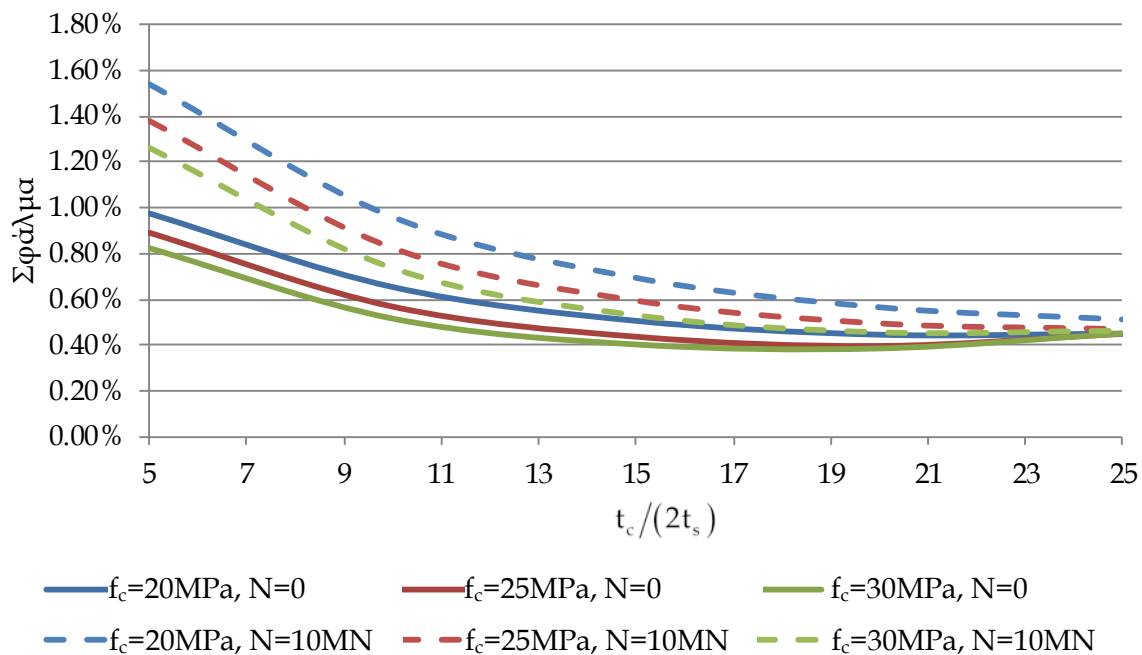
παγκοσμίως μοντέλα ανεμογεννήτριας, Siemens SWT-6.0-154 [5], είναι, σύμφωνα με τα τεχνικά στοιχεία από την κατασκευάστρια εταιρία,

$$N_{nacelle,rotor} = 360t = 3.60MN \quad (4.2)$$

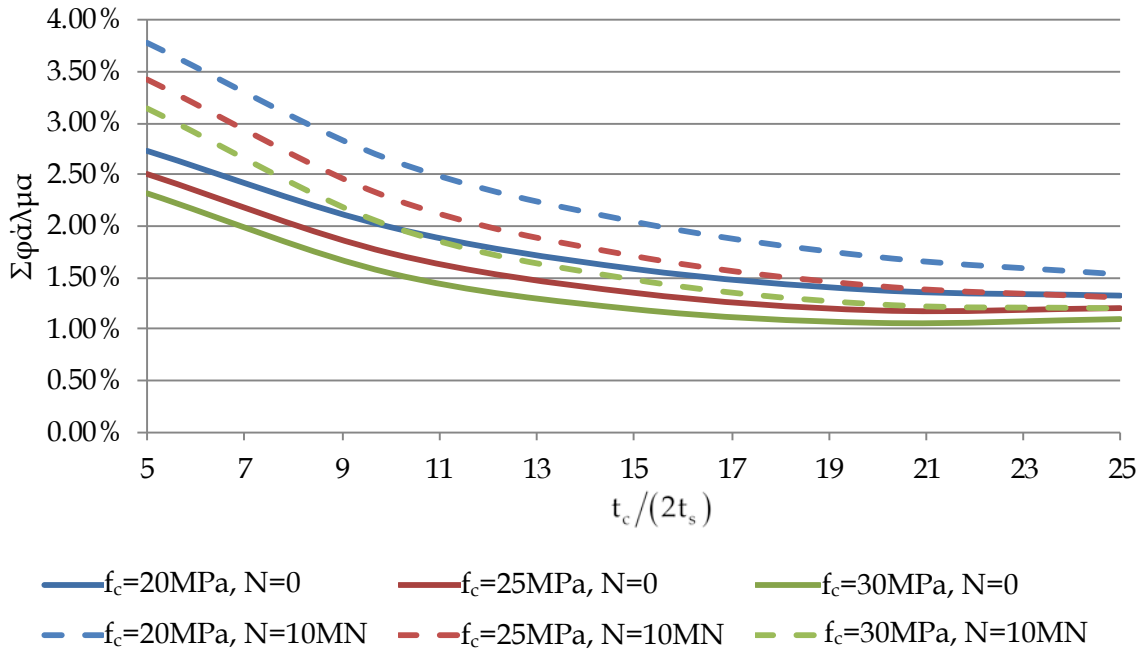
Συνολικά, επομένως το θλιπτικό φορτίο σε μια διατομή στη βάση του συγκεκριμένου πυλώνα θα είναι:

$$N_{tower} + N_{nacelle,rotor} = 14.10MN \quad (4.3)$$

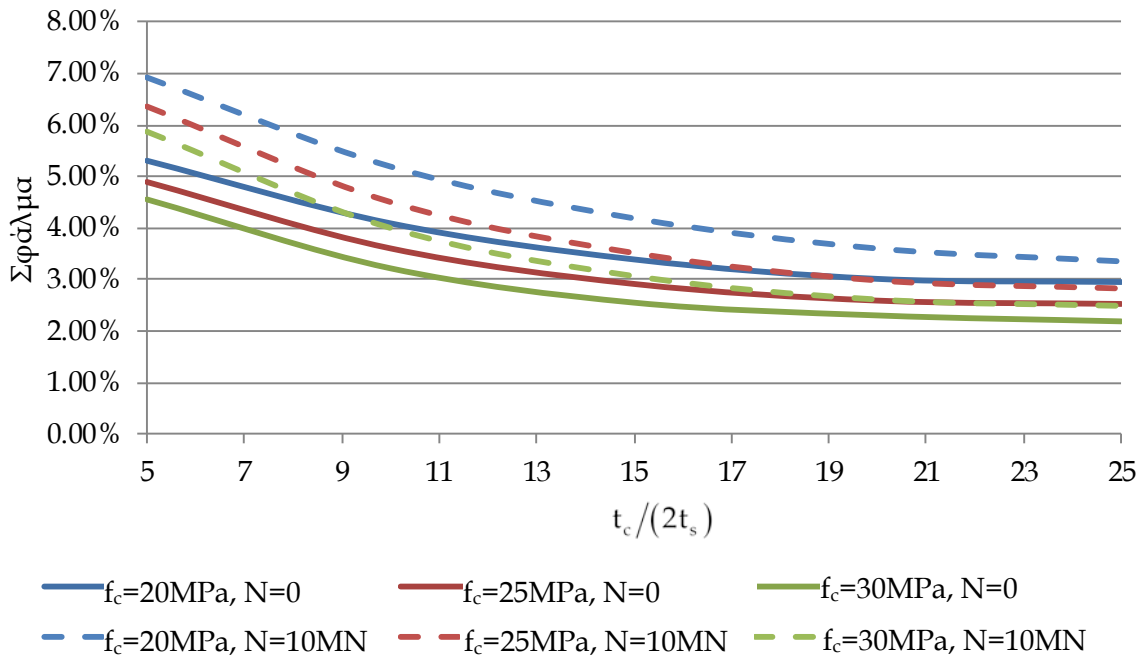
Στα διαγράμματα του Σχήμα 4.4 παρουσιάζεται, ενδεικτικά για θλιπτικό φορτίο $N=0$ και $N=10MN$, η απόκλιση που προκύπτει λόγω της παραδοχής, για διαφορετικές ποιότητες υλικών. Είναι εμφανές ότι το σφάλμα μειώνεται καθώς αυξάνεται το πάχος του σκυροδέματος και βελτιώνεται η ποιότητά του, ενώ αυξάνεται με την αύξηση του θλιπτικού φορτίου. Πρακτικά, προκύπτει ότι για ρεαλιστικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά και θλιπτικά φορτία, δεν ξεπερνά το 3%, για ακραίες ωστόσο περιπτώσεις, οπότε απαιτείται μείωση της υπολογισμένης πλαστικής ροπής αντοχής κατά το αντίστοιχο ποσοστό, ώστε να ληφθεί υπόψη το σφάλμα.



(i)



(ii)



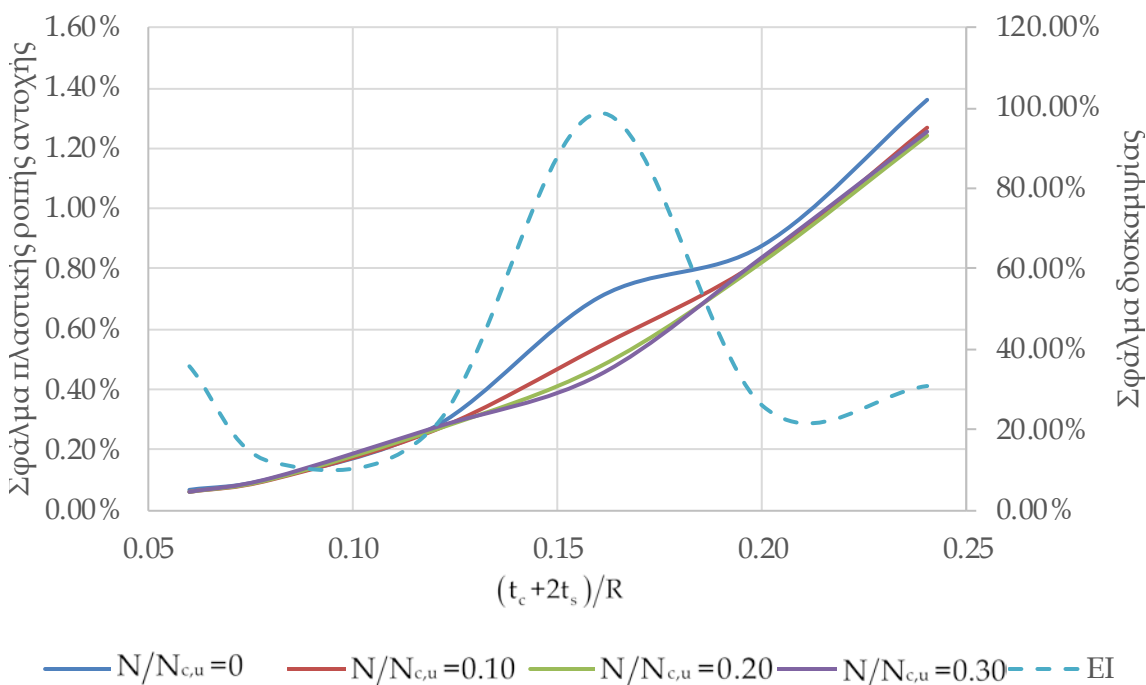
(iii)

Σχήμα 4.4: Σφάλμα στον υπολογισμό της πλαστική ροπής αντοχής λόγω επέκτασης της παραμόρφωσης θραύσης του σκυροδέματος για (i) $f_{sy}=235\text{MPa}$, (ii) $f_{sy}=355\text{MPa}$ και (iii) $f_{sy}=460\text{MPa}$.

Figure 4.4: Plastic resistance moment error due to prolongation of concrete ultimate strain for (i) $f_{sy}=235\text{MPa}$, (ii) $f_{sy}=355\text{MPa}$ and (iii) $f_{sy}=460\text{MPa}$.

4.3 Έλεγχος ακρίβειας της προσεγγιστικής λύσης

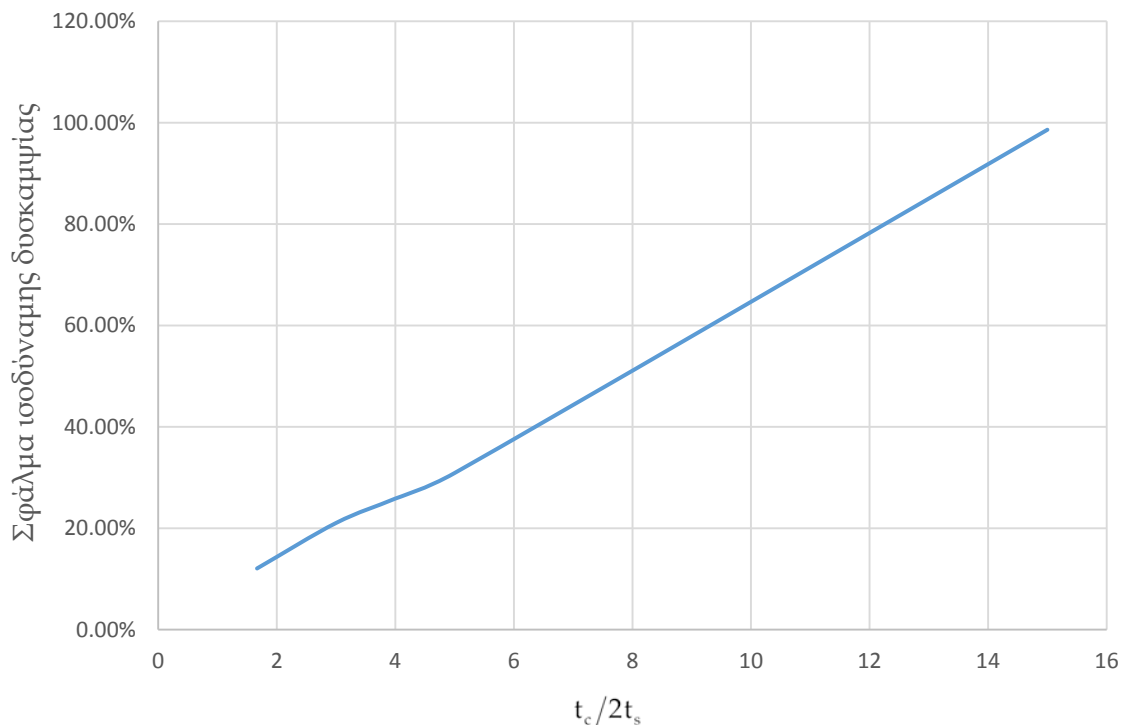
Στη συνέχεια εξετάστηκε η δυνατότητα της προσεγγιστικής λύσης να υπολογίζει με επαρκή ακρίβεια την πλαστική ροπή αντοχής καθώς και την ισοδύναμη δυσκαμψία της διατομής. Οι ίδιες παραμετρικές αναλύσεις που πραγματοποιήθηκαν στην περίπτωση της ακριβούς διαδικασίας επίλυσης έδειξαν ότι η παραδοχή του αμελητέου πάχους των υλικών σε σχέση με την ακτίνα της διατομής που χρησιμοποιήθηκε στην προσεγγιστική λύση μειώνει, όπως θα ήταν αναμενόμενο, την ακρίβεια των αποτελεσμάτων όσο το πάχος των ελασμάτων και του πυρήνα αυξάνεται, ωστόσο για ρεαλιστικές τιμές γεωμετρικών χαρακτηριστικών της υπό μελέτη περίπτωσης, το σφάλμα δεν ξεπερνά το 1.5%. Τα διαγράμματα του Σχήμα 4.5 απεικονίζουν τη μεταβολή του σφάλματος των αποτελεσμάτων της προσεγγιστικής λύσης ως συνάρτηση του μεγέθους $(2t_s + t_c)/R_4$, καθορισμένο λόγο ποιότητας υλικών $f_c/f_{sy} = 0.15$ και τιμές του λόγου $N/N_{c,u} = 0, 0.10, 0.20$ και 0.30 ο οποίος εκφράζει το εκάστοτε εφαρμοζόμενο θλιπτικό φορτίο ως ποσοστό του αντίστοιχου μέγιστου που μπορεί να παραλάβει η διατομή σε συνθήκες καθαρής θλίψης, όπως αυτό υπολογίζεται από την εξ. (2.4). Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται επίσης η διακύμανση του σφάλματος στον υπολογισμό της ισοδύναμης δυσκαμψίας της διατομής.



Σχήμα 4.5: Σφάλμα απλοποιητικής μεθόδου στον υπολογισμό της πλαστικής ροπής αντοχής και της δυσκαμψίας

Figure 4.5: Error in plastic resistance moment and stiffness calculations by the simplified method

Αντίθετα με την περίπτωση της ροπής αντοχής, το σφάλμα της προσεγγιστικής μεθόδου στον υπολογισμό της ισοδύναμης δυσκαμψίας της διατομής είναι σημαντικό, βρέθηκε ότι αυξάνεται περίπου γραμμικά με την αύξηση του λόγου $t_c/2t_s$ και, για αναλογίες παχών ελασμάτων και πυρήνα που έχουν φυσικό νόημα για την εξεταζόμενη περίπτωση, καθιστά αναγκαία την εφαρμογή της ακριβέστερης μεθόδου ανάλυσης. Στο Σχήμα 4.6 φαίνεται η εν λόγω αύξηση του σφάλματος ως συνάρτηση του λόγου $t_c/2t_s$, για δεδομένο λόγο μέτρων ελαστικότητας υλικών $E_c/E_s = 0.15$ και $R = 2m$.



Σχήμα 4.6: Μεταβολή σφάλματος απλοποιητικής μεθόδου στον υπολογισμό της δυσκαμψίας για $E_c/E_s = 0.15$ και $R=2m$

Figure 4.6: Error variation in stiffness calculation by the simplified method for $E_c/E_s = 0.15$ and $R=2m$

Συμπεράσματα

Διατομές τύπου sandwich από δύο χαλύβδινα ελάσματα και έναν πυρήνα σκυροδέματος διερευνήθηκαν σε προκαταρκτικό στάδιο με αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους, με απώτερο στόχο την περαιτέρω εξέτασή τους ως εναλλακτικής λύσης για την κατασκευή πυλώνων ανεμογεννητριών μεγάλου ύψους, άνω του οποίου η χρήση αμιγώς χαλύβδινων κοίλων διατομών καθίσταται ανεπαρκής είτε με όρους στατικής συμπεριφοράς, είτε με όρους οικονομίας. Καταστρώθηκαν αναλυτικές εξισώσεις μέσω δύο διαφορετικών προσεγγίσεων - μίας λεπτομερούς και μίας απλοποιημένης βάσει της παραδοχής λεπτότοιχης διατομής - για τις περιπτώσεις της αξονικής καταπόνησης, της καθαρής κάμψης και του συνδυασμού τους, έως το πρώτο σημείο διαρροής που αποτελεί και στην πράξη άνω όριο για το σχεδιασμό των πυλώνων, καθώς και για τη μετελαστική περιοχή, έως το όριο θραύσης της διατομής. Οι αναλυτικές εκφράσεις εισήχθησαν με μορφή κώδικα Mathematica [3] και Matlab [4], για την ακριβή και την απλοποιημένη λύση αντίστοιχα, για περαιτέρω επεξεργασία. Η ορθότητα των δύο προσεγγίσεων ελέγχθηκε μέσω σύγκρισης με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αναλύσεις σε δύο διαφορετικής μεθοδολογίας ανάλυσης προγράμματα, το Biaxial Bending [1], εξειδικευμένο στην ανάλυση σύνθετων διατομών υπό καμπτική και αξονική καταπόνηση, και το πρόγραμμα αριθμητικής ανάλυσης με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, Adina [2]. Η σύνθετη λύση προέβλεψε με ακρίβεια τη συμπεριφορά της υπό εξέταση διατομής, όσον αφορά τόσο την αντοχή όσο και τη δυσκαμψία της, ενώ η απλοποιημένη λύση προσέγγισε επίσης ικανοποιητικά την αντοχή με σημαντική ωστόσο απόκλιση στις τιμές της δυσκαμψίας. Με βάση τα συμπεράσματα αυτά, τα πλεονεκτήματα της κάθε αναλυτικής λύσης αξιοποιούνται καταλλήλως κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης που παρουσιάζεται στο παραδοτέο 5.1.

Αναφορές

- [1] Charalampakis A. E. & Koumousis V. K., "Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load", *Advances in Engineering Software*, Vol. 39, 2008, pp. 923-936.
- [2] ADINA R&D Inc., *Theory and Modeling Guide - Volume I: ADINA*, Report ARD 08-7, 2006.
- [3] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 9.0, Champaign, IL, 2012.
- [4] The MathWorks, Inc., *MATLAB Release 2011b*, The Natick, Massachusetts, United States, 2011.
- [5] Siemens AG., *Siemens D6 platform - 6.0-MW direct drive wind turbine, Platform Brochure*, 2014.