NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

School of MechanicalEngineering

Dept. of Mechanical Design & Automatic Control

Assist. Prof. Athanasios Chasalevris, PhD

+30 210 772 3681 | chasalevris@mail.ntua.gr

9 Heroon Polytechniou Str.15780 Athens, Hellas

https://users.ntua.gr/chasalevris

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΣΜΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Για τον μηχανισμό έμβολο διωστήρας (slider-crank) του σχήματος, όπου $r_2 = 42mm, r_3 = 135mm,$, $m_2 = 42gr,$ $m_3 = 135gr,$ $m_4 = 100gr$, και για την περίπτωση της κίνησης εισόδου στον στρόφαλο (crank-driven problem) με ροπή $M_2 = 50\,\mathrm{Nm}$ και σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega_2 = 6000\,\mathrm{RPM}$, να υπολογιστούν για τις διάφορες θέσεις του μηχανισμού ($\theta_2 = 0$ έως 360^{o}):

1.1) η γωνιακή επιτάχυνση a_3 του link 3 (διωστήρας-rod) και οι επιταχύνσεις στο κέντρο βάρους του κάθε link $\bar{\mathrm{A}}_{G2}, \bar{\mathrm{A}}_{G3}, \bar{\mathrm{A}}_{G4}$ (αντίστοιχα σημεία G2, G3, G4), και $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$ στον σύνδεσμο (joint) μεταξύ στροφάλου (crank) και διωστήρα (rod) – σημείο A – στη μορφή:

π.χ. για το link 3, $\bar{\mathrm{A}}_{G3} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{G3,X} \\ \mathrm{A}_{G3,Y} \end{bmatrix}$ (σταθερό σύστημα συντεταγμένων x-y) και στη μορφή $\bar{\mathrm{A}}_{G3}^{\xi\eta} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{G3,\xi} \\ \mathrm{A}_{G3,\eta} \end{bmatrix}$(τοπικό σύστημα συντεταγμένων ξ-η στο link 3).

<u>Υποδείξεις:</u>

- τα κέντρα μάζας βρίσκονται στο γεωμετρικό κέντρο του κάθε link τα οποία θεωρούνται πρισματικοί δοκοί.
- για την γωνιακή επιτάχυνση a_3 ακολουθείστε την πρακτική των διαλέξεων στο σχετικό πρόβλημα (χρησιμοποιείστε την τελική εξίσωση)
- για τις επιταχύνσεις $\bar{\mathrm{A}}_{G2}, \bar{\mathrm{A}}_{G3}, \bar{\mathrm{A}}_{G4}, \bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{A}}$ ορίστε το διάνυσμα θέσης του κάθε σημείου ως συνάρτηση του χρόνου, παραγωγίστε δύο φορές ως προς το χρόνο, διαγράψτε τις όποιες μηδενικές ποσότητες και εκφράστε τις επιταχύνσεις ως συνάρτηση των μεταβλητών θέσης και γωνιακής ταχύτητας των όποιων links εμπλέκονται (π.χ. $\theta_2, \theta_3, \omega_2, \omega_3$)

  π.χ. για το link 3 $\bar{r}_{G3} = \bar{r}_2 + \bar{r}_{3G} = r_2(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) \end{bmatrix} + r_{3G}(t)\begin{bmatrix} \cos(\theta_3(t)) \\ \sin(\theta_3(t)) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\bar{r}}_{G3} = \ldots \Rightarrow \ddot{\bar{r}}_{G3} = \ldots$

- αφού υπολογίσετε το διάνυσμα $\begin{bmatrix} r_{G3,X} \\ r_{G3,Y} \end{bmatrix}$(π.χ. για το link 3), μετασχηματίστε το διάνυσμα στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων ξ-η του link 3 με τον μετασχηματισμό $\begin{bmatrix} \mathrm{A}_{G3,\xi} \\ \mathrm{A}_{G3,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{G3,X} \\ \mathrm{A}_{G3,Y} \end{bmatrix}$
- εκφράστε τις τελικές εξισώσεις στη μορφή π.χ. για το link 3 $\mathrm{A}_{G3,\xi} = -r_{3G} \cdot \omega_3^2 - r_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_3)$ (χρησιμοποιείστε την εξίσωση και για επαλήθευση). Θα χρειαστεί ενδεχομένως να κάνετε απλοποίηση.

1.2) οι αδρανειακές δυνάμεις $P_2^{\mathrm{I}\xi}, P_2^{\mathrm{I}\eta}, P_3^{\mathrm{I}\xi}, P_3^{\mathrm{I}\eta}, P_4^{\mathrm{I}\xi}, P_4^{\mathrm{I}\eta}$, και οι αδρανειακές ροπές $\mathrm{M}_2^{\mathrm{I}}, \mathrm{M}_3^{\mathrm{I}}, \mathrm{M}_4^{\mathrm{I}}$ που δρούνε στο (και γύρω από) κέντρο μάζας του κάθε link, στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του κάθε link.

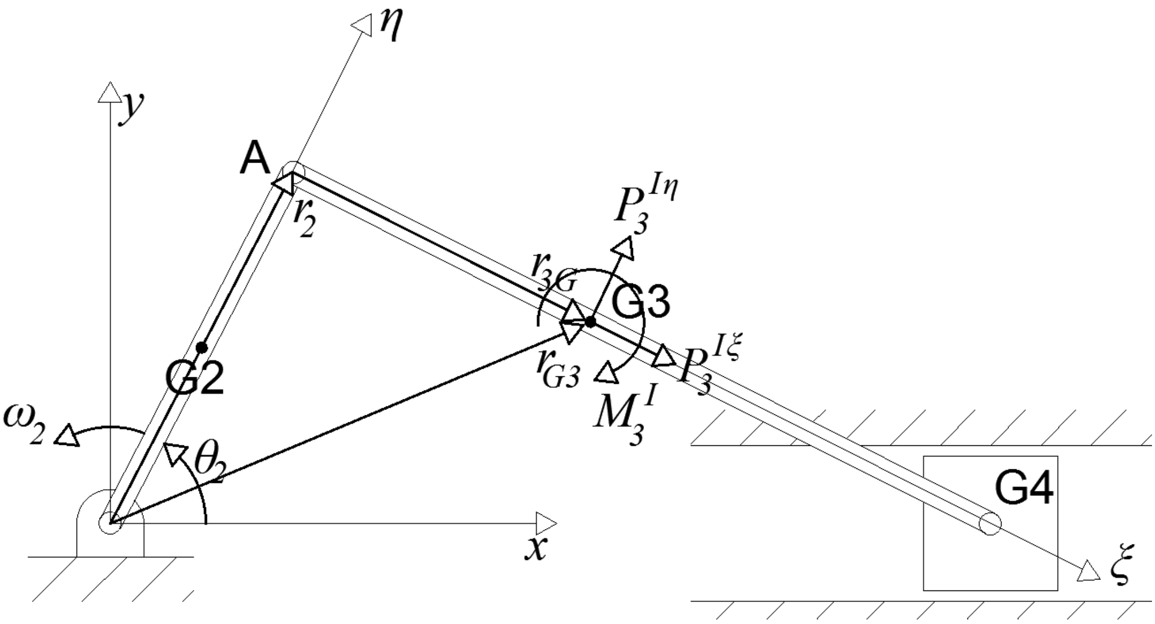
<u>Υποδείξεις:</u>

- κάποιες θα είναι μηδέν.

Assist. Prof. Athanasios Chasalevris, PhD
+30 210 772 3681 | chasalevris@mail.ntua.gr
9 Heroon Polytechniou Str.15780 Athens, Hellas
https://users.ntua.gr/chasalevris

- π.χ για το link 3, $P_3^{I\xi} = -m_3 \cdot A_{G3,\xi}$, $P_3^{I\eta} = -m_3 \cdot A_{G3,\eta}$, $M_3^{I} = -I_3 \cdot \alpha_3$ (όπου I_3 ροπή αδράνειας του link – mass moment of inertia - για περιστροφή γύρω απο το G3)

- **Τα αποτελέσματα των γραφικών παραστάσεων να γίνουν με το αρχείο crank_driven_HW1.m**
- **Οι τελικές εξισώσεις και οι γραφικές παραστάσεις να παρουσιαστούν στο αρχειο template.doc**



Assist. Prof. Athanasios Chasalevris, PhD

+30 210 772 3681 | chasalevris@mail.ntua.gr

9 Heroon Polytechniou Str.15780 Athens, Hellas

http://users.ntua.gr/chasalevris

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΣΜΩΝ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

1.1) ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΙΣ

- <u>Επιτάχυνση στο G2</u>

$$\overline{r}_{2G} = r_{2G}\begin{bmatrix}\cos(\theta_2)\\ \sin(\theta_2)\end{bmatrix} \Rightarrow \ddot{\overline{r}}_{2G} = \begin{bmatrix}A_{G2,x}\\ A_{G2,y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\sin(\theta_2)\dot{r}_{2G}\dot{\theta}_2 + \cos(\theta_2)\ddot{r}_{2G} + r_{2G}\left(-\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right)\\ 2\cos(\theta_2)\dot{r}_{2G}\dot{\theta}_2 + \sin(\theta_2)\ddot{r}_{2G} + r_{2G}\left(-\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right)\end{bmatrix}$$

με $\dot{r}_{2G} = 0, \ddot{r}_{2G} = 0, \dot{\theta}_2 = \omega_2, \ddot{\theta}_2 = 0, r_{2G} = r_2/2$, άρα $\begin{bmatrix}A_{G2,x}\\ A_{G2,y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_{2G}\cos(\theta_2)\omega_2^2\\ -r_{2G}\sin(\theta_2)\omega_2^2\end{bmatrix}$(όλα γνωστά)

Τότε με μετασχηματισμό απο το x-y (global) στο ξ-η (του link 2),

$$\begin{bmatrix}A_{G2,\xi}\\ A_{G2,\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2)\\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{G2,x}\\ A_{G2,y}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}A_{G2,\xi}\\ A_{G2,\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_{2G}\omega_2^2\\ 0\end{bmatrix}$$ (όλα γνωστά)

- <u>Επιτάχυνση στο A</u>

$$\overline{r}_2 = r_2\begin{bmatrix}\cos(\theta_2)\\ \sin(\theta_2)\end{bmatrix} \Rightarrow \ddot{\overline{r}}_2 = \begin{bmatrix}A_{A,x}\\ A_{A,y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\sin(\theta_2)\dot{r}_2\dot{\theta}_2 + \cos(\theta_2)\ddot{r}_2 + r_2\left(-\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right)\\ 2\cos(\theta_2)\dot{r}_2\dot{\theta}_2 + \sin(\theta_2)\ddot{r}_2 + r_2\left(-\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right)\end{bmatrix}$$

με $\dot{r}_2 = 0, \ddot{r}_2 = 0, \dot{\theta}_2 = \omega_2, \ddot{\theta}_2 = 0,$, άρα $\begin{bmatrix}A_{A,x}\\ A_{A,y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_2\cos(\theta_2)\omega_2^2\\ -r_2\sin(\theta_2)\omega_2^2\end{bmatrix}$(όλα γνωστά)

Τότε με μετασχηματισμό απο το x-y (global) στο ξ-η (του link 2),

$$\begin{bmatrix}A_{A,\xi}\\ A_{A,\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2)\\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{A,x}\\ A_{A,y}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}A_{A,\xi}\\ A_{A,\eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r_2\omega_2^2\\ 0\end{bmatrix}$$ (όλα γνωστά)

Θα μπορούσε κάποιος να πει κατευθείαν οτι η επιτάχυνση στο A είναι διπλάσια απο αυτή στο G2 και να αποφύγει τις πράξεις διότι αλλάζει μόνο η θέση απο $r_{2G} = r_2/2$ σε r_2

- <u>Επιτάχυνση στο G3</u>

$$\overline{r}_{G3} = \overline{r}_2 + \overline{r}_{3G} = r_2\begin{bmatrix}\cos(\theta_2)\\ \sin(\theta_2)\end{bmatrix} + r_{3G}\begin{bmatrix}\cos(\theta_3)\\ \sin(\theta_3)\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\ddot{\overline{r}}_{G3} = \begin{bmatrix}A_{G3,x}\\ A_{G3,y}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-2\sin(\theta_2)\dot{r}_2\dot{\theta}_2 - 2\sin(\theta_3)\dot{r}_{3G}\dot{\theta}_3 + \cos(\theta_2)\ddot{r}_2 + \cos(\theta_3)\ddot{r}_{3G} + r_2\left(-\cos(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \sin(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right) + r_{3G}\left(-\cos(\theta_3)\dot{\theta}_3^2 - \sin(\theta_3)\ddot{\theta}_3\right)\\ 2\cos(\theta_2)\dot{r}_2\dot{\theta}_2 + 2\cos(\theta_3)\dot{r}_{3G}\dot{\theta}_3 + \sin(\theta_2)\ddot{r}_2 + \sin(\theta_3)\ddot{r}_{3G} + r_2\left(-\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_2)\ddot{\theta}_2\right) + r_{3G}\left(-\sin(\theta_3)\dot{\theta}_3^2 + \cos(\theta_3)\ddot{\theta}_3\right)\end{bmatrix}$$

με $\dot{r}_2 = 0, \ddot{r}_2 = 0, \dot{r}_{3G} = 0, \ddot{r}_{3G} = 0, \dot{\theta}_2 = \omega_2, \ddot{\theta}_2 = 0, \dot{\theta}_3 = \omega_3, \ddot{\theta}_3 = a_3, r_{3G} = r_3/2$,

NATIONAL TECHNICAL
UNIVERSITY OF ATHENS

School of MechanicalEngineering
Dept. of Mechanical Design & Automatic Control

Assist. Prof. Athanasios Chasalevris, PhD
+30 210 772 3681 | chasalevris@mail.ntua.gr
9 Heroon Polytechniou Str.15780 Athens, Hellas
http://users.ntua.gr/chasalevris

άρα $\begin{bmatrix} A_{G3,x} \\ A_{G3,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_2\cos(\theta_2)\omega_2^2 - r_{3G}\left(\cos(\theta_3)\omega_3^2 + \sin(\theta_3)a_3\right) \\ -r_2\sin(\theta_2)\omega_2^2 - r_{3G}\left(\sin(\theta_3)\omega_3^2 - \cos(\theta_3)a_3\right) \end{bmatrix}$ (όλα γνωστά – το a_3 είναι γνωστό απο την κινηματική ανάλυση).

Τότε με μετασχηματισμό απο το x-y (global) στο ξ-η (του link 3),

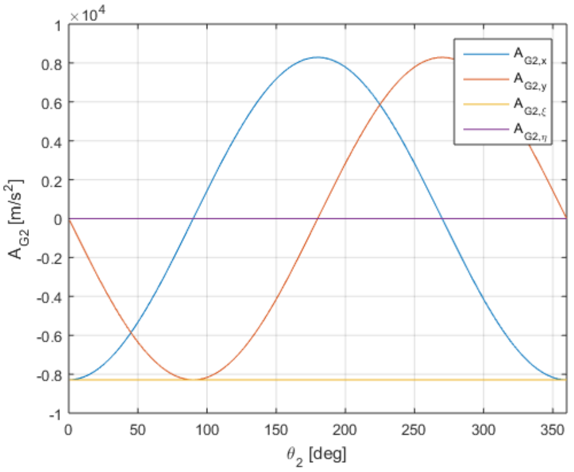
$$\begin{bmatrix} A_{G3,\xi} \\ A_{G3,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ -\sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{G3,x} \\ A_{G3,y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{G3,\xi} \\ A_{G3,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{3G}\omega_3^2 - r_2\omega_2^2\cos(\theta_2-\theta_3) \\ r_{3G}\alpha_3 - r_2\omega_2^2\sin(\theta_2-\theta_3) \end{bmatrix} \text{(όλα γνωστά)}$$

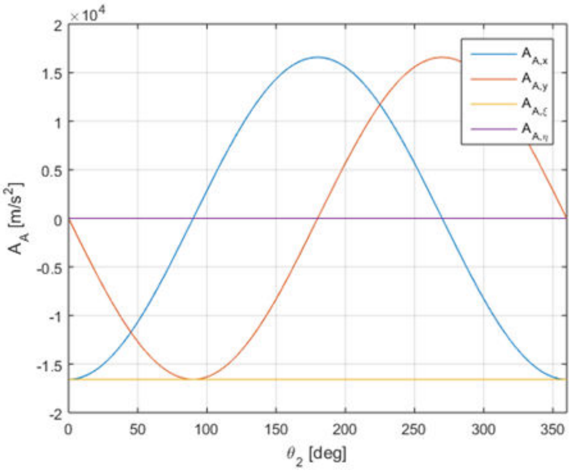
- <u>Επιτάχυνση στο G4</u>

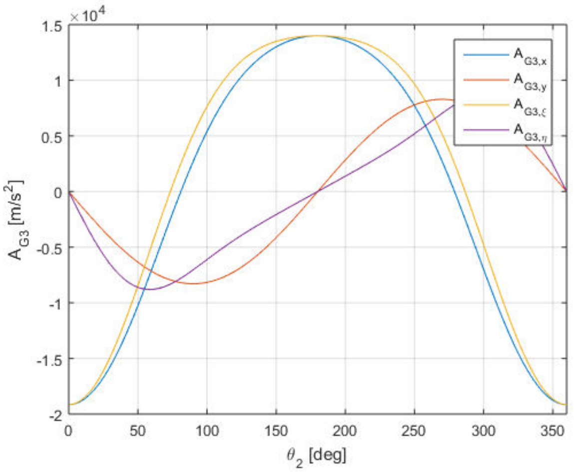
$\bar{r}_{4G} = \ddot{\bar{r}}_1 = \begin{bmatrix} A_{G4,x} \\ A_{G4,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($\ddot{r}_1$ γνωστό απο την κινηματική ανάλυση για crank-driven προβλημα, $A_{G4,y} = 0$ διότι στον slider δεν έχω κατακόρυφη κίνηση)

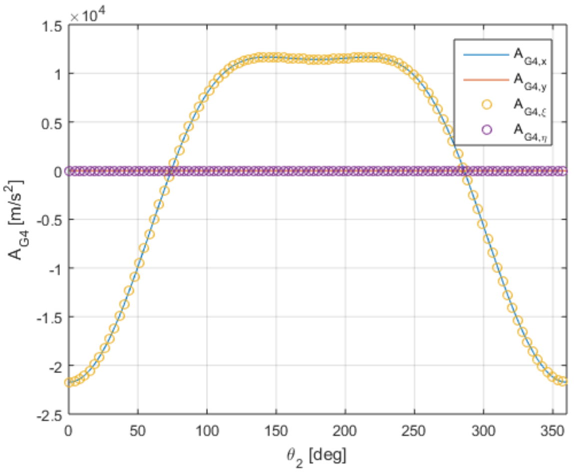
Τότε με μετασχηματισμό απο το x-y (global) στο ξ-η (του link 4) – δεν χρειάζεται καν διότι τα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι παράλληλα (δηλ. $\theta_4 = 0$),

$$\begin{bmatrix} A_{G4,\xi} \\ A_{G4,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \\ -\sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{G4,x} \\ A_{G4,y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{G4,\xi} \\ A_{G4,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{(γνωστό)}$$









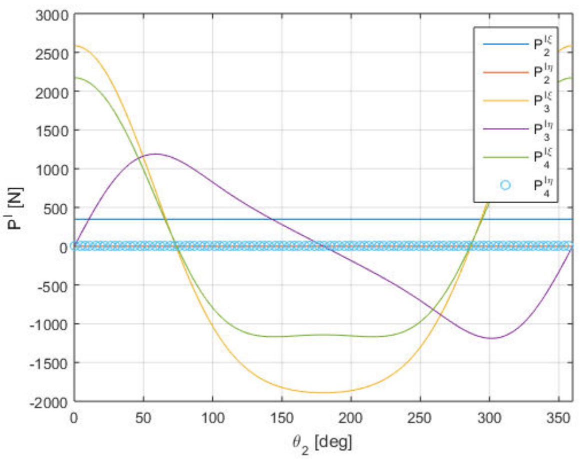
NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
School of MechanicalEngineering
Dept. of Mechanical Design & Automatic Control

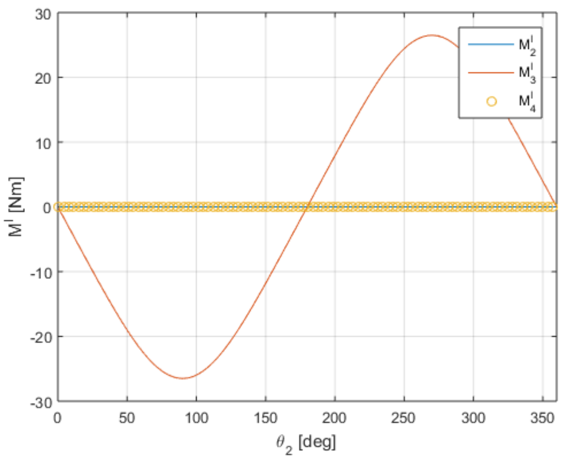
Assist. Prof. Athanasios Chasalevris, PhD
+30 210 772 3681 | chasalevris@mail.ntua.gr
9 Heroon Polytechniou Str.15780 Athens, Hellas
http://users.ntua.gr/chasalevris

1.2) ΔΥΝΑΜΕΙΣ

$$P_2^{I\xi} = -m_2 A_{G2,\xi} \qquad P_2^{I\eta} = -m_2 A_{G2,\eta}$$
$$P_3^{I\xi} = -m_3 A_{G3,\xi} \qquad P_3^{I\eta} = -m_3 A_{G3,\eta}$$
$$P_4^{I\xi} = -m_4 A_{G4,\xi} \qquad P_4^{I\eta} = -m_4 A_{G4,\eta}$$
$$M_2^I = -\mathrm{I}_{G2}\alpha_2, \qquad M_3^I = -\mathrm{I}_{G3}\alpha_3, \qquad M_4^I = -\mathrm{I}_{G4}\alpha_4$$

Με $\mathrm{I}_{G2} = \frac{1}{12} m_2 r_2^2$ και $\mathrm{I}_{G3} = \frac{1}{12} m_3 r_3^2$. Εννοείται οτι $\alpha_2 = 0$ (ο crank περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα), και $\alpha_4 = 0$ (το slider δεν περιστρέφεται καν).





- **Παρατήρηση:** οι αδρανειακές δυνάμεις ενός διωστήρα μάζας 135 gr σε έναν κινητήρα μοτοσυκλέτας[1] στις 6.000 RPM υπερβαίνουν τα 2.500 N !!! (250 κιλά περίπου), ενώ οι επιταχύνσεις είναι περίπου 20.000 m/s^2 !!!

[1] Το μοντέλο στροφάλου διωστήρα ανταποκρίνεται σε γεωμετρία και μάζα σε κινητήρα μοτοσυκλέτας Yamaha XT 600