

Σφάλματα αριθμητικών λύσεων

1. Εισαγωγή

Σφάλματα μπορούν να προκύψουν κατά τη χρήση όλων γενικά των μεθόδων που βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη μηχανικών και άλλων προβλημάτων. Ορισμένα από αυτά ανακύπτουν σε όλες ανεξαιρέτως τις μεθοδολογίες, αναλυτικές και αριθμητικές, ενώ άλλα συναντώνται μόνο σε αριθμητικές λύσεις. Ευθύς αμέσως πρέπει να επισημάνουμε ότι στο παρόν κείμενο ο όρος *σφάλμα*¹ αναφέρεται σε όλες γενικά τις αποκλίσεις του αποτελέσματος από την λύση του πραγματικού προβλήματος.

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι αποκλίσεις αυτές είναι αποδεκτές, καθότι αναγνωρίζονται ως συμφυείς με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται, ενώ σε άλλες περιπτώσεις δεν είναι, είτε διότι δεν γίνεται σωστή χρήση της μεθόδου, είτε διότι η μέθοδος είναι εξ' αντικειμένου ανεπαρκής.

Έτσι λοιπόν τα σφάλματα που προκύπτουν σε αριθμητικές λύσεις οφείλονται γενικά σε δύο κατηγορίες: αυτά που ανακύπτουν κατά τη μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και αυτά που ανακύπτουν κατά την αριθμητική επίλυση του μαθηματικού μοντέλου στον υπολογιστή. Σφάλματα προκύπτουν στην πρώτη περίπτωση όταν η προσέγγιση στο φυσικό πρόβλημα είναι ανεπαρκής. Τέτοια σφάλματα είναι σε πολλές περιπτώσεις αμελητέα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των σχετικιστικών φαινομένων σε προβλήματα της κλασσικής μηχανικής. Όταν όμως δεν είναι αμελητέα, τότε όσο ακριβής και να είναι η αριθμητική λύση που επακολουθεί δεν είναι δυνατόν να περιορισθεί το σφάλμα αυτό. Άλλη πηγή σφαλμάτων είναι σε ορισμένες περιπτώσεις η έλλειψη επαρκούς ακρίβειας στις τιμές των φυσικών σταθερών (επιτάχυνση λόγω βαρύτητας, κ.ά.) ή και σε τιμές εμπειρικών δεδομένων. Στην περίπτωση δε των τελευταίων απαιτείται προσοχή διότι τα σφάλματα αυτά είναι τυχαία (πιθανοτικά). Στο κείμενο αυτό θα εστιάσουμε την προσοχή μας στα σφάλματα που δεν είναι αποδεκτά και τα οποία, για να κριθεί ως ικανοποιητική η λύση θα πρέπει να αποφευχθούν.

Υπάρχουν τρεις πηγές τέτοιων σφαλμάτων σε αριθμητικές (υπολογιστικές) διαδικασίες:

- Το ανθρώπινο σφάλμα (ολίσθημα ή λάθος),
- Το σφάλμα κατά τον προγραμματισμό του αλγορίθμου και
- Το σφάλμα προσέγγισης της ακριβούς λύσης

¹ σφάλμα = error

Το πρώτο μπορεί να προκύψει σε κάθε στάδιο που έρχεται σε επαφή ο χρήστης με το υπολογιστικό εργαλείο και περιορίζεται με σωστή κατάρτιση των μελετητών, οργάνωση του χώρου και τρόπου εργασίας και χρήση κατάλληλων εργαλείων. Είναι ίσως η σοβαρότερη πηγή σφαλμάτων και απαιτείται χρόνος και προσπάθεια ώστε να περιορισθεί σε αποδεκτά όρια.

Το δεύτερο είδος οφείλεται κατά κανόνα σε προσεγγίσεις που γίνονται όταν το αρχικό πρόβλημα αντικαθίσταται από κάποιο μαθηματικό ανάλογο, όπως για παράδειγμα η αντικατάσταση μίας απειροστής σειράς με μία που αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό όρων. Άλλα παραδείγματα είναι:

- Ο υπολογισμός κάποιας στοιχειώδους συνάρτησης (π.χ. $\sin x$) με χρήση των πρώτων n όρων του αναπτύγματος της αντίστοιχης σειράς Taylor.
- Η προσέγγιση ολοκληρώματος συνάρτησης με πεπερασμένη άθροιση τιμών της συνάρτησης (για παράδειγμα με χρήση του κανόνα του τραπεζίου).
- Η λύση διαφορικής εξίσωσης με αντικατάσταση των παραγώγων με πηλίκα διαφορών (πεπερασμένες διαφορές)
- Η λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ με τη μέθοδο Newton-Raphson, η οποία είναι μία επαναληπτική μέθοδος που συγκλίνει στην ακριβή λύση όταν ο αριθμός των επαναλήψεων τείνει στο άπειρο.

Το σφάλμα αυτό συνήθως καλείται *σφάλμα αποκοπής*² και προσπαθούμε γενικά να υπολογίσουμε το άνω όριό του. Ανακύπτει επίσης και το *σφάλμα στρογγύλευσης*³ που οφείλεται στο ότι δεν είναι δυνατό να αποθηκεύσουμε στον υπολογιστή τον κάθε αριθμό που υπολογίζουμε με απόλυτη ακρίβεια, λόγω του πεπερασμένου αριθμού ψηφίων (χώρου) που διατίθενται.

Μπορούμε γενικά να ορίσουμε το σφάλμα με μία από τις σχέσεις:

$$\text{Ακριβής τιμή} = \text{Προσεγγιστική τιμή} + \text{Σφάλμα} \quad (1)$$

$$\text{ή} \quad \text{Σχετικό σφάλμα} = \text{Σφάλμα} / \text{Πραγματική τιμή} \quad (2)$$

Εάν συμβολίσουμε το σφάλμα με e και το σχετικό σφάλμα με e_r και προσεγγίσουμε την τιμή $1/3$ με $0,333$ τότε:

$$e = (1/3) \times 10^{-3} \quad \text{και} \quad e_r = 10^{-3}$$

Μας ενδιαφέρει γενικά το σφάλμα e (*απόλυτο σφάλμα*)⁴, όταν όμως η ακριβής τιμή μίας ποσότητας είναι πολύ μικρή τότε χρησιμοποιείται το σχετικό σφάλμα, e_r .

Εκτός από τα παραπάνω υπάρχουν και σφάλματα που προκύπτουν κατά το στάδιο της διακριτοποίησης του προβλήματος, είτε γίνεται χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είτε της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Τα *σφάλ-*

² σφάλμα αποκοπής = cut-off error

³ σφάλμα στρογγύλευσης = round-off error

⁴ απόλυτο σφάλμα = absolute error

ματα διακριτοποίησης⁵ οφείλονται κυρίως σε μη σωστή διακριτοποίηση⁶ της κατασκευής, και οδηγούν στην απόκτηση αποτελεσμάτων αμφίβολης αξίας. Θα αναφερθούμε σε αυτά λεπτομερώς στο κεφάλαιο αυτό.

Ο μελετητής θα πρέπει λοιπόν να γνωρίζει σε κάθε στάδιο της μελέτης ποιες είναι οι πηγές πιθανών σφαλμάτων και να ακολουθεί κατάλληλες διαδικασίες για την αποφυγή τους. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφούν με παραδείγματα οι τρόποι που επηρεάζονται οι αριθμητικές λύσεις από τα σφάλματα που οφείλονται στις πηγές (β) και (γ) όπως επίσης και οι τρόποι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον περιορισμό τους.

Όσον αφορά το (α), ο αναγνώστης παραπέμπεται στο κείμενο *Guidelines for Finite Practice* (έκδοση NAFEMS), το οποίο περιλαμβάνει χρήσιμες οδηγίες για τον χρήστη προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Η διεθνής βιβλιογραφία παρ' όλο που είναι πλούσια σε κείμενα θεωρητικής φύσεως σχετικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, δεν περιλαμβάνει παρά λίγα που να δίνουν βάρος στην πρακτική χρήση της μεθόδου. Ένα τέτοιο είναι και το [9].

2. Σφάλματα αποκοπής και στρογγύλευσης

2.1 Μητρική ανάλυση

Ένα από τα σημαντικότερα στάδια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η επίλυση της μητρικής εξίσωσης $\mathbf{ku} = \mathbf{f}$, όπου $\mathbf{k}$ είναι το μητρώο ακαμψίας (συντελεστών) και $\mathbf{f}$ το μητρώο των φορτίων κατασκευής (σταθερών). Κατά κανόνα, σε κάθε υπολογιστή οι πραγματικοί αριθμοί αποθηκεύονται με ακρίβεια ενός δεδομένου αριθμού ψηφίων, έστω t , τα οποία όλα συμβάλλουν κατά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Έτσι λοιπόν, επειδή μετά από ένα αριθμό πράξεων η αρχική ακρίβεια δεν θα είναι πλέον η ίδια αλλά θα έχει ελαττωθεί, τα αποτελέσματα θα έχουν άλλη ακρίβεια, έστω s . Βλέπουμε λοιπόν ότι εμφανίζεται και ένα υπολογιστικό σφάλμα,⁷ e_c . Ας εξετάσουμε όμως την επίλυση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων:

$$e_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0000239836 \\ -0,0000109311 \end{bmatrix}$$

Μία “ακριβής” λύση (ακρίβειας 10 ψηφίων) είναι $\{u_1 = 0,3934633449, u_2 = 0,0133114709\}$. Υποθέτουμε τώρα για τον νοητό υπολογιστή μας ότι $t=3$, έχουμε δηλαδή ακρίβεια τριών ψηφίων. Για $t=3$ η λύση αποκτάται κάνοντας χρήση των τριών πρώτων ψηφίων κάθε αριθμού και εκτελώντας τις πράξεις με αυτούς. Εάν αντικαταστήσουμε το αρχικό πρόβλημα με το αντίστοιχο υπολογιστικό, θα έχουμε:

⁵ σφάλμα διακριτοποίησης = modelling error

⁶ διακριτοποίηση = discretisation

⁷ υπολογιστικό σφάλμα = computing error

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ -3,42 & 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής κατά Gauss και εκτελέσουμε τις πράξεις θα έχουμε $101 - (-3,42/3,42)(-3,42) = 97,5$. Δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ -3,42 & 101 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

όπου οι παύλες υποδηλώνουν προσεγγιστικές τιμές. Η προσεγγιστική λύση είναι:

$$\bar{u}_1 = 0,391$$

$$\bar{u}_2 = 0,0133$$

Οι διαφορές οφείλονται σε σφάλματα αποκοπής (e_{co}) και σε σφάλματα στρογγύλευσης (e_{ro}). Το σφάλμα αποκοπής προκύπτει διότι τα στοιχεία των μητρώων αναπαριστώνται με τρία μόνο ψηφία, ενώ το σφάλμα στρογγύλευσης προκύπτει διότι οι πράξεις γίνονται με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Το σφάλμα αποκοπής δεν είναι αμελητέο όταν οι απόλυτες τιμές των στοιχείων του μητρώου k διαφέρουν σημαντικά, έχουμε δηλαδή μεγάλες διαφορές στις ακαμψίες της κατασκευής. Το σφάλμα στρογγύλευσης είναι μεγάλο όταν ένα διαγώνιο στοιχείο με μικρή τιμή χρησιμοποιείται κατά τον σχηματισμό πολλαπλασιαστού μεγάλου μεγέθους. Η βασική δε αριθμητική πράξη κατά την παραγοντοποίηση είναι μία αφαίρεση ενός πολλαπλασίου της σειράς αναφοράς από αυτές που ακολουθούν. Εάν αφαιρεθούν αριθμοί με πολύ διαφορετικά μεγέθη μεταξύ τους οι οποίοι αναπαριστώνται με πεπερασμένο αριθμό ψηφίων τότε ενδέχεται το σφάλμα που θα προκύψει να μην είναι αμελητέο.

Θα διερευνήσουμε τώρα τα επί μέρους σφάλματα αποκοπής και στρογγύλευσης στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει όμως πρώτα να αποκτήσουμε την ακριβή λύση του συστήματος.

$$\begin{bmatrix} 3,42 & -3,42 \\ 0,0 & 97,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

απ' όπου $\{u_1' = 0,3934393613, u_2' = 0,0133224020\}$. Το σφάλμα αποκοπής είναι τότε:

$$e_{co} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0000239836 \\ -0,0000109311 \end{bmatrix}$$

ενώ το σφάλμα στρογγύλευσης e_{ro} , είναι:

$$e_{ro} = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0024633449 \\ -0,0000114709 \end{bmatrix}$$

Το συνολικό σφάλμα είναι:

$$e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0024633449 \\ 0,0000114709 \end{bmatrix}$$

Επειδή στην πράξη λύσεις απόλυτης ακρίβειας δεν μπορούν να αποκτηθούν, κατά κανόνα γίνεται χρήση λύσεων δευτεροτάξιας ακρίβειας (8 bit).

Έστω τώρα το σύστημα $\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ του οποίου η υπολογιστική λύση είναι $\mathbf{u}$. Εάν εφαρμόσουμε τη σχέση (1), αποκτάμε την παρακάτω μορφή για το συνολικό σφάλμα:

$$\Delta\mathbf{f} = \mathbf{f} - \mathbf{k}\bar{\mathbf{u}} \quad (3)$$

όπου το $\Delta\mathbf{f}$ υπολογίζεται με δευτεροτάξια ακρίβεια. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\sigma = \mathbf{k}^{-1} \Delta\mathbf{f} \quad (4)$$

Συμπεραίνεται λοιπόν από την (4) ότι, παρόλο που το διάνυσμα $\Delta\mathbf{f}$ μπορεί να είναι μικρό σε μέγεθος, το σφάλμα e δεν θα είναι και αυτό αναγκαστικά αμελητέο. Άρα, το ότι το διάνυσμα $\Delta\mathbf{f}$ είναι μικρό αποτελεί αναγκαία αλλά όχι και επαρκή συνθήκη για ακρίβεια της λύσης.

2.2 Πεπερασμένες διαφορές

Το ανάπτυγμα κατά Taylor της συνάρτησης $f(x+h)$ περί το x δίνεται από τη σχέση:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (5\alpha)$$

ή σε γενική μορφή,

$$f_{n+1} = f(x+h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_n) \quad (5\beta)$$

όπου $f^{(m)}$ είναι η m -οστή παράγωγος της f . Τα σφάλματα που προκύπτουν για τις προηγούμενες διαφορές βρίσκονται με τη χρήση των παρακάτω αναπτυγμάτων:

$$f_{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-h^m}{m!} f^{(m)}(x_n) \quad f_{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n) \quad (6\alpha-\beta)$$

$$f_{n-3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-3h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n) \quad f_{n-4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-4h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n) \quad (6\gamma-\delta)$$

Από το Σχήμα 2 του Κεφαλαίου 10, η πρώτη διαφορά δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta f}{\Delta x} \right]_n &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h} = \frac{f_n - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h)^m}{m!} f^{(m)}(x_n)}{h} = \\ &= f'(x_n) - \frac{h}{2} f''(x_n) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_n) - \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad f'(x_n) = \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \right]_n + \frac{h}{2} f''(x_n) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_n) - \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots \quad (7)$$

Το σφάλμα κατά τη χρήση της πρώτης προηγούμενης διαφοράς συνεπώς είναι:

$$\frac{h}{2} f''(x_n) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_n) + \frac{h^3}{24} f^{(4)}(x_n) + \dots \quad (8)$$

Εκφράζοντας τη δεύτερη διαφορά σύμφωνα με το Σχήμα 2 του Κεφαλαίου 11, βρίσκουμε ότι:

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} \right]_n = \frac{f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}}{h^2} = f''(x_n) - hf^{(3)}(x_n) + \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$\text{ή} \quad f''(x_n) = \left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} \right]_n + hf^{(3)}(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \dots \quad (9\alpha)$$

Το αντίστοιχο σφάλμα είναι συνεπώς:

$$hf^{(3)}(x_n) - \frac{7}{12} h^2 f^{(4)}(x_n) + \dots \quad (9\beta)$$

Πίνακας 1 Σφάλματα πεπερασμένων διαφορών

(α) Προηγούμενες διαφορές

	f''	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$\Delta^2 f/\Delta x^2$	$\Delta^3 f/\Delta x^3$	$\Delta^4 f/\Delta x^4$	$\Delta^5 f/\Delta x^5$	$\Delta^6 f/\Delta x^6$
f'	$h/2$	$-h^2/6$	$+h^3/24$			$h/2$	$+h^2/3$	$+h^3/4$		
f''		h	$-7/12h^2$				H	$+11/12h^2$	$+5/6h^3$	
$f^{(3)}$			$3/2h$	$-5/4h^2$				$3/2h$	$+7/4h^2$	
$f^{(4)}$									$2h$	$+17/6h^2$

(β) Επόμενες διαφορές

	f''	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$\Delta^2 f/\Delta x^2$	$\Delta^3 f/\Delta x^3$	$\Delta^4 f/\Delta x^4$	$\Delta^5 f/\Delta x^5$	$\Delta^6 f/\Delta x^6$
f'	$-h/2$	$-h^2/6$	$-h^3/24$			$-h/2$	$+h^2/3$	$-h^3/4$		
f''		$-h$	$-7/12h^2$				$-h$	$+11/12h^2$	$-5/6h^3$	
$f^{(3)}$			$-3/2h$	$-5/4h^2$				$-3/2h$	$+7/4h^2$	
$f^{(4)}$									$-2h$	$+17/6h^2$

(γ) Μέσες διαφορές

	f''	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$f^{(6)}$	$\Delta^2 f/\Delta x^2$	$\Delta^3 f/\Delta x^3$	$\Delta^4 f/\Delta x^4$	$\Delta^5 f/\Delta x^5$	$\Delta^6 f/\Delta x^6$
f'		$-h^2/6$	0	$-h^4/12$	$0...$		$-h^2/6$	0	$+h^4/30$	$0...$
f''			$-h^2/12$	0	$-h^4/360$			$-h^2/12$	0	$+h^4/90$
$f^{(3)}$				$-h^2/4$					$-h^2/4$	$0...$
$f^{(4)}$										$-h^2/6$

$$\eta \quad f^{(3)}(x_n) = \left[\frac{\Delta^3 f}{\Delta x^3} \right]_n + \frac{3h}{2} f^{(4)}(x_n) - \frac{5h^2}{4} f^{(5)}(x_n) + \dots \quad (10\alpha)$$

Το αντίστοιχο σφάλμα είναι

$$\frac{3}{2} h f^{(4)}(x_n) - \frac{5h^2}{4} f^{(5)}(x_n) + \dots \quad (10\beta)$$

Από τον Πίνακα 1 συμπεραίνεται ότι το σφάλμα των επομένων και προηγούμενων διαφορών είναι της τάξης του διαστήματος h , ενώ για τις μέσες διαφορές είναι της τάξης του h^2 . Συνεπώς οι μέσες διαφορές έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται ευρύτερα. Γενικά, η ακρίβεια αυξάνεται με αναγωγή του σφάλματος σε υψηλότερη τάξη διαστήματος h .

3. Σφάλματα διακριτοποίησης

Αυτά γενικά χωρίζονται σε αυτά που προκύπτουν κατά την απόκτηση του αριθμητικού προτύπου (μοντέλου) και σε αυτά που προκύπτουν κατά την εισαγωγή των δεδομένων στον υπολογιστή.

Από τα τελευταία το συνηθέστερο όλων είναι τα λάθη κατά τον ορισμό των στοιχείων ή και των κόμβων και για τον εντοπισμό και την διόρθωσή τους συνιστάται η χρήση γραφικών εργαλείων. Λάθη προκύπτουν επίσης και κατά τη χρήση εντολών που δημιουργούν κόμβους με αυτοματοποιημένη διαδικασία, ή και στοιχεία, επειδή εύκολα μπορεί να χρησιμοποιηθεί εσφαλμένος αριθμός επαναλήψεων ή διαστημάτων αρίθμησης. Σημειώνεται ότι σε μεγάλα μοντέλα δεν είναι εύκολος ο εντοπισμός τέτοιων λαθών.

Η αντικατάσταση ενός συνεχούς μέσου από πεπερασμένα στοιχεία συνεπάγεται επιλογή ειδών στοιχείων, αριθμού, μορφών, οριακών συνθηκών και επιβολής φορτίων σε αυτά. Κατά τη διαδικασία αυτή υπεισέρχονται σφάλματα που καλούνται *σφάλματα διακριτοποίησης*⁸, το σημαντικότερο από αυτά οφείλεται στην αντικατάσταση του μαθηματικού από το αριθμητικό μοντέλο.

Όπως έχουμε ήδη περιγράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο, η ΜΠΣ μπορεί να εκληφθεί ως μία μορφή ανάλυσης Ritz. Στην ΜΠΣ το μητρώο συναρτήσεων των μετατοπίσεων, $\mathbf{H}^{(m)} \{m=1, 2, \dots, n\}$ αντιστοιχεί στις συναρτήσεις Ritz ενώ οι μετατοπίσεις στους κόμβους του πλέγματος (άγνωστοι) αντιστοιχούν στους συντελεστές Ritz. Επειδή δε η μέθοδος Ritz βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα που έχουν μεταβολική διατύπωση όχι μόνο στη μηχανική των συνεχών μέσων, η ΜΠΣ μπορεί να εφαρμοσθεί και ευρύτερα (μετάδοση θερμότητας κλπ). Ας θυμηθούμε όμως τη σχέση (2) του Κεφαλαίου 4:

$$\Pi = U - W \quad (11)$$

όπου Π είναι το συναρτησιακό του συστήματος. Από την αρχή των δυνατών έργων,

$$\delta \Pi = 0 \quad (12)$$

Όταν δηλαδή το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, το ολικό δυναμικό είναι στάσιμο.

Αποδεικνύεται δε ότι το στάσιμο αντιστοιχεί σε ελάχιστο της συνολικής δυναμικής ενέργειας. Επίσης, $W = 2U$, όπου W είναι το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων και U είναι η εσωτερική παραμορφωσιακή ενέργεια. Άρα, $\Pi = -U$, και η κατάσταση ισορροπίας αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της παραμορφωσιακής ενέργειας του συστήματος.

Κατά συνέπεια, το συνολικό δυναμικό που αντιστοιχεί στους συντελεστές Ritz είναι ένα άνω όριο του πραγματικού δυναμικού ενώ η αντίστοιχη παραμορφωσιακή ενέργεια είναι κάτω όριο της πραγματικής παραμορφωσιακής ενέργειας. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στη ΜΠΣ γίνεται υποεκτίμηση των τιμών των μετατοπίσεων ενώ

⁸ σφάλμα διακριτοποίησης = discretisation error

γίνεται υπερεκτίμηση της ακαμψίας μίας κατασκευής εφόσον οι εξωτερικές φορτίσεις επιβάλλονται ως δυνάμεις.

Εάν θελήσουμε να προσεγγίσουμε τη σωστή ακαμψία της κατασκευής, μπορούμε, όπως αναφέρεται στο Κεφάλαιο 5, στην περίπτωση των ισοπαραμετρικών στοιχείων να ελαττώσουμε την τάξη της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Με τον τρόπο αυτό αποκτάται καλύτερη προσέγγιση στην ακαμψία της κατασκευής.

Στο σημείο αυτό αγγίζουμε το πρόβλημα ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης που απαιτείται στα ισοπαραμετρικά στοιχεία κατά τον υπολογισμό των μητρώων ακαμψίας, μάζας, και δυνάμεων γενικά. Κατά κανόνα, με τη σωστή τάξη ολοκλήρωσης αποκτώνται αποτελέσματα απόλυτης ακρίβειας. Εάν όμως η τάξη ολοκλήρωσης κατά τον υπολογισμό των όρων του μητρώου ακαμψίας είναι μικρότερη απ' ότι πρέπει, ο αριθμός των μηδενικών ιδιοτιμών⁹ θα είναι μεγαλύτερος του αριθμού των δυνατών μορφών παραμόρφωσης ως άκαμπτο σώμα και το μητρώο γίνεται μοναδιαίο. Είναι συνεπώς ανάγκη να ορίζεται σωστά η τάξη ολοκλήρωσης, η οποία θα εξαρτηθεί από τις ιδιότητες του στοιχείου και τη μέθοδο ολοκλήρωσης. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Κεφάλαιο 5 (εδάφιο 6).

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι, όταν η διακριτοποίηση είναι ικανοποιητική, το αριθμητικό σφάλμα της λύσης θα έχει ως άνω όριο αυτό που προκύπτει κατά την προσέγγιση της ακριβούς λύσης με συναρτήσεις παρεμβολής οι οποίες έχουν μηδενικό σφάλμα στους κόμβους.¹⁰

Ας εξετάσουμε όμως την περίπτωση μίας ράβδου η οποία φέρει αξονικό φορτίο. Στο πρόβλημα αυτό μελετάται το σφάλμα λόγω της γραμμικής παρεμβολής μεταξύ των τιμών των μετατοπίσεων (u_i, u_{i+1}) σε συνεχόμενους κόμβους. Στο i -οστό στοιχείο τότε, το σφάλμα διακριτοποίησης e_d είναι $e_d = e_d \delta(x)$ και:

$$e_d \delta(x) = u(x) - u_i \left[1 - \frac{x - x_i}{h_i} \right] - u_{i+1} \left[\frac{x - x_i}{h_i} \right] \quad (13)$$

όπου $u(x)$ είναι η ακριβής λύση. Επίσης, $u_i = u(x_i)$ και $u_{i+1} = u(x_{i+1})$ όπου x_i, x_{i+1} είναι οι κόμβοι. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Rolle¹¹ αποδεικνύεται ότι τα άνω όρια στα σφάλματα των τιμών των μετατοπίσεων και των παραμορφώσεων είναι:

$$e(x) \leq \frac{1}{8} h_i^2 \left[\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |u''(x)| \right] \quad (14a)$$

⁹ ιδιοτιμή = eigenvalue

¹⁰ Strang G., Fix G.F. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 1973.

¹¹ Θεώρημα του Rolle: εάν $f(a)=f(b)=0$, τότε $f'(x)=0$ στο πεδίο τιμών a έως b , και η παράγωγος της $f(x)$ είναι συνεχής στο (a,b) . Διαφορετικά, εάν z_1, z_2 είναι δύο πραγματικές ρίζες της $f(z)$, τότε η $f'(z)$ έχει ρίζα στο πεδίο z_1-z_2 .

$$|e'(x)| \leq h_i \left[\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |u''(x)| \right] \quad (14\beta)$$

αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

- α) Το σφάλμα στις παραμορφώσεις είναι ανάλογο προς τις διαστάσεις του στοιχείου ενώ το σφάλμα στις μετατοπίσεις είναι ανάλογο προς το τετράγωνο των διαστάσεών του.
- β) Τα σφάλματα είναι ανάλογα προς τις παραγώγους μίας τάξεως υψηλότερης της τάξης των συναρτήσεων παρεμβολής.
- γ) Οι μετατοπίσεις υπολογίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια στην περιοχή των κόμβων, ενώ οι τιμές των παραμορφώσεων είναι ακριβέστερες στην περιοχή των σημείων ολοκλήρωσης (σημεία Gauss, στο εσωτερικό των στοιχείων).

Εάν σε μία μονοδιάστατη κατασκευή διπλασιάσουμε τον αριθμό των στοιχείων το σφάλμα στις παραμορφώσεις θα υποδιπλασιασθεί ενώ το σφάλμα στις μετατοπίσεις θα υποτετραπλασιασθεί. Επεκτείνοντας τον συλλογισμό σε διδιάστατα ή τρισδιάστατα στοιχεία με περισσότερους βαθμούς ελευθερίας αποδεικνύεται ότι η τάξη του σφάλματος της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης ισούται με $h^{2(q-m)}$ όπου:

- H = χαρακτηριστικό μήκος στοιχείου. (Σε διδιάστατα ή τρισδιάστατα στοιχεία λαμβάνεται ως ίσο με την μεγαλύτερη απόσταση που ενώνει δύο κόμβους στο στοιχείο.)
- $q-1$ = βαθμός υψηλότερου πλήρους πολυωνύμου του πεδίου μετατοπίσεων
- $2m$ = τάξη υψηλότερης παραγώγου που περιλαμβάνεται στην εξίσωση ισορροπίας, όταν αυτή εκφράζεται συναρτήσει των μετατοπίσεων

Στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου αναφέραμε τον ορισμό του σχετικού σφάλματος, τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε τώρα. Μία ένδειξη μεγέθους του σχετικού σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$e_r \approx \rho_1 \rho_2 h^{q-r} \quad (15)$$

όπου

- ρ_1 = μέγιστος λόγος πλευρών σε στοιχείο σε ολόκληρο το πλέγμα
- ρ_2 = λόγος του χαρακτηριστικού μήκους του μεγαλύτερου στοιχείου προς αυτό του μικρότερου στοιχείου
- r = 1 για επίπεδα και στερεά στοιχεία
= 2 για στοιχεία-δοκούς και στοιχεία-ελάσματα
- q = βλέπε ορισμό προηγουμένως
- H = $N^{(-1/n)}$ όπου

- N = αριθμός στοιχείων στο πλέγμα
 n = αριθμός διαστάσεων (1, 2, ή 3 για μονοδιάστατα, διδιάστατα ή τρισδιάστατα προβλήματα αντίστοιχα)

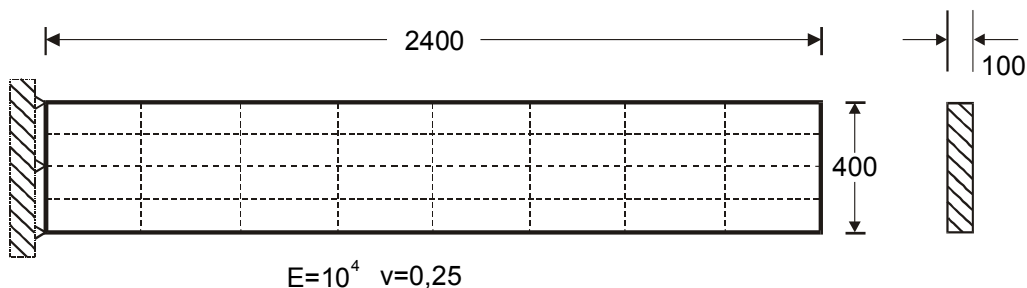
Για να αποκτήσουμε κάποια διαίσθηση αποδεκτών τιμών του σχετικού σφάλματος, αναφέρουμε ότι, εάν το σχετικό σφάλμα είναι ίσο με το ένα δέκατο του συνολικού σφάλματος, τα αποτελέσματα μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστα. Για μικρότερες τιμές, το πλέγμα περιέχει περισσότερα στοιχεία απ' ό,τι απαιτείται ενώ για μεγαλύτερες θα πρέπει να επανασυσταθεί το πλέγμα.

Κάνοντας χρήση δύο πλεγμάτων για το ίδιο πρόβλημα, είναι δυνατό να αποκτηθεί προσέγγιση στην ακριβή λύση, υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Θα πρέπει δηλαδή να ακολουθηθεί κανονική εξέλιξη του πλέγματος, δηλαδή θα πρέπει σε κάθε στάδιο να διατηρούνται ο αριθμός των κόμβων και τα όρια των στοιχείων, ενώ προστίθενται νέοι κόμβοι και όρια. Τα ρ_1 και ρ_2 θα πρέπει να παραμένουν σταθερά, ενώ τα είδη των στοιχείων και οι κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης δεν θα πρέπει να μεταβάλλονται. Οι γωνιακοί κόμβοι παραμένουν γωνιακοί και οι ενδιάμεσοι παραμένουν ενδιάμεσοι. Τέλος, η ποσότητα που παρεκβάλλεται πρέπει να υπολογίζεται σε σταθερό σημείο στον χώρο σε σχέση με το αντίστοιχο στοιχείο (δηλ. για παράδειγμα σε γωνιακό κόμβο στοιχείου).

Εάν χρησιμοποιηθούν μόνο δύο πλέγματα, ο ρυθμός σύγκλισης παραμένει απροσδιόριστος και το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να τον θεωρήσουμε γραμμικό. Εάν προστεθεί και τρίτο πλέγμα αποκτάται μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσέγγιση της ακριβούς λύσης.

Παράδειγμα 1

Να διερευνηθεί η ακρίβεια της λύσης του προβλήματος του προβόλου του σχήματος για πλέγματα με 8 στοιχεία, (συνεχείς γραμμές), 32 στοιχεία, (διακεκομμένες γραμμές) και 128 στοιχεία αντίστοιχα. Ο πρόβολος φέρει κατακόρυφο φορτίο 100 μονάδων στο ελεύθερο άκρο του.



Λύση

Πίνακας 2 Αποτελέσματα τριών πλεγμάτων διακριτοποίησης προβόλου

Δεδομένα πλέγματος		Βέλος κάμψης		Ακριβής λύση	
N	$h=1/N^{1/2}$	Πλήρες	Ανηγμένο	Πλήρες	Ανηγμένο
8	0,3536	4,562	11,440	7,978	8,617
32	0,1768	7,124	9,323	8,695	8,788
128	0,0884	8,302	8,922		

Το βέλος κάμψης με βάση τη θεωρία δοκών λαμβάνοντας υπόψη και μετατοπίσεις λόγω διάτμησης ισούται με 8,882 (ακριβές αποτέλεσμα).

4. Η έννοια του μέτρου διανύσματος και του μέτρου μητρώου

Στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου δόθηκαν δύο ορισμοί σφάλματος που έχουν γενική εφαρμογή. Σε προβλήματα όμως τοπικού σφάλματος σε πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων οι ορισμοί αυτοί είναι ανεπαρκείς διότι μπορεί μεν να είναι μεγάλο το τοπικό σφάλμα λόγω ανωμαλιών κ.ά., στο σύνολό της όμως η συμπεριφορά μπορεί να είναι αποδεκτή. Για το λόγο αυτό απαιτείται μία ποσότητα που να εκφράζει το μέγεθος του σχετικού διανύσματος ή μητρώου το οποίο μπορεί να αναφέρεται είτε στην μετρούμενη ποσότητα είτε στο αντίστοιχο σφάλμα.

Αυτό δίνεται από το μέτρο¹² (νόρμα), που είναι μία πραγματική συνάρτηση, οι ιδιότητες της οποίας αποτελούν γενίκευση του μεγέθους του μήκους στον Ευκλείδειο χώρο. Το Ευκλείδειο μέτρο¹³ ή μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$, ορίζεται τότε από τη σχέση:

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^2 \right]^{1/2} \quad (16)$$

Το μέτρο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$1. \quad \|\mathbf{u}\| \geq 0 \text{ και } \|\mathbf{u}\| = 0 \quad (17\alpha)$$

εάν και μόνον εάν $\mathbf{u}=0$, δηλ. $v_i=0$ για $i = 1, \dots, n$

¹² μέτρο = norm

¹³ Ευκλείδειο μέτρο = Euclidean norm

$$2. \|a\mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\| \text{ για κάθε πραγματικό (ή μιγαδικό) αριθμό } a \quad (17\beta)$$

$$3. \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \text{ για διανύσματα } \mathbf{u}, \mathbf{v} \quad (17\gamma)$$

Οι ιδιότητες 1 και 2 είναι προφανείς, ενώ η 3 προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Οι παραπάνω ιδιότητες δεν χαρακτηρίζουν μόνο το μέτρο όπως αυτό ορίστηκε από τη σχέση (16): γενικά καλούμε οποιαδήποτε συνάρτηση που κατέχει τις ιδιότητες αυτές *διανυσματικό μέτρο*¹⁴ και συνεπώς η γενίκευση του παραπάνω ορισμού λαμβάνει τη μορφή:

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right]^{1/p} \quad (18)$$

Η παραπάνω ποσότητα καλείται *μέτρο* L_p . Εάν $p \rightarrow \infty$, τότε ορίζεται το *απειροστό* ή *μέγιστο μέτρο* L_∞ .¹⁵

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i| \quad (19)$$

Οι παραπάνω έννοιες μπορούν να επεκταθούν και στην μελέτη υπολογιστικών σφαλμάτων σε πράξεις που περιλαμβάνουν μητρώα. Το *μέτρο* του *μητρώου* $\mathbf{A}$ ¹⁶ ορίζεται από τη σχέση:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| \quad (20)$$

Καλείται δε αυτό *επαγόμενο μέτρο*¹⁷ διότι επάγεται από το διανυσματικό μέτρο που αναφέρεται στη σχέση (20). Το μέτρο του μητρώου $\mathbf{A}$, όπως αυτό ορίστηκε από την (20), αποτελεί ειδική περίπτωση του συνήθους ορισμού του μέτρου γραμμικού μετασχηματισμού και γενικά υπάρχουν μέτρα μητρώων που δεν επάγονται διανυσματικών μέτρων.

Η ποσότητα που ορίζεται από τη σχέση (20) ικανοποιεί τις σχέσεις (17α-γ) και επί πλέον ικανοποιεί και την παρακάτω σχέση:

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \quad (21)$$

όπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ είναι μητρώα. Μπορούμε συνεπώς να ορίσουμε ως μέτρο μητρώου οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την σχέση (21). Αντίστοιχα με τα διανυσματικά μέτρα L_o και L_∞ έχουμε:

¹⁴ διανυσματικό μέτρο = vector norm

¹⁵ απειροστό (μέγιστο) μέτρο = infinite norm

¹⁶ μέτρο μητρώου = matrix norm

¹⁷ επαγόμενο μέτρο = induced norm

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (22\alpha)$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (22\beta)$$

Εκτός του μέτρου του διανύσματος (μητρώου) γίνεται χρήση και της έννοιας της *φασματικής ακτίνας* $\rho(\mathbf{A})$ ¹⁸, ο ορισμός της οποίας ακολουθεί:

$$\rho(\mathbf{A}) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (23)$$

όπου λ_i είναι η i -οστή ιδιοτιμή του μητρώου $\mathbf{A}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \quad (24)$$

Η χρήση των μέτρων συνιστά έναν από τους καλύτερους τρόπους προσδιορισμού του αριθμητικού σφάλματος, που ορίζεται από τη διαφορά της προσέγγισης $\mathbf{u}_c$ από το ακριβές αποτέλεσμα $\mathbf{u}$. Η ποσότητα $\|\mathbf{u}_c - \mathbf{u}\|$ χρησιμοποιείται τότε για να εκτιμηθεί η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης.

Επειδή η ακρίβεια αριθμητικών λύσεων της εξίσωσης $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}$ εξαρτάται όχι μόνο από το μέγεθος της μικρότερης ιδιοτιμής $\lambda_{\min}$ αλλά και από το λόγο της μεγαλύτερης προς τη μικρότερη ιδιοτιμή ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$), μπορούμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό πρόβλημα $\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{f}$ από το $(\mathbf{A}+\delta\mathbf{A})(\mathbf{u}+\delta\mathbf{u})=\mathbf{f}$. Εάν θεωρήσουμε αμελητέο το γινόμενο $\delta\mathbf{A}\delta\mathbf{u}$, τότε,

$$\delta\mathbf{u} = -\mathbf{A}^{-1} \delta\mathbf{A} \mathbf{u} \quad (25)$$

Θεωρώντας τώρα τα αντίστοιχα μέτρα, έχουμε:

$$\frac{\|\delta\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (26)$$

όπου $\text{cond}(\mathbf{A})$ καλείται *αριθμός κατάστασης*¹⁹ του μητρώου $\mathbf{A}$ σε σχέση με το δεδομένο μέτρο του και:

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (27)$$

¹⁸ φασματική ακτίνα = spectral density

¹⁹ αριθμός κατάστασης = condition number

Από τη σχέση (27) συμπεραίνουμε ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός κατάστασης ελαττώνεται η ευστάθεια της λύσης του συστήματος, προκύπτει δε *κακή κατάσταση*²⁰ του συστήματος των εξισώσεων. Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των ψηφίων της λύσης που είναι ακριβή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για υπολογιστή ακρίβειας t ψηφίων ισχύει:

$$\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = 10^{-t} \quad (28)$$

Εάν η αποκτώμενη λύση είναι ακρίβειας s ψηφίων,

$$\frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = 10^{-s} \quad (29)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (28) και (29) στην (26), αποκτάται ο αριθμός των ψηφίων της λύσης που είναι ακριβή:

$$s \geq t - \log_{10}[\text{cond}(\mathbf{A})] \quad (30)$$

Ο αριθμός των ψηφίων ακρίβειας που χάθηκε προσεγγίζεται συνεπώς με την ποσότητα:

$$\log_{10}[\text{cond}(\mathbf{A})]$$

ενώ δεν λαμβάνεται υπόψη τυχόν πρόσθετη απώλεια ακρίβειας (υπολογιστικό σφάλμα) κατά την εκπόνηση των αριθμητικών πράξεων.

Παράδειγμα 2

Να διερευνηθεί η κατάσταση των δύο παρακάτω μητρωικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00 \\ -2,00 \end{bmatrix}$$

$$\text{με λύση} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 100 \end{bmatrix}$$

²⁰ κακή κατάσταση = poor condition

$$\text{και} \quad \begin{bmatrix} 1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 1,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,00 \\ -2,00 \end{bmatrix}$$

$$\text{με λύση} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 204 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Λύση

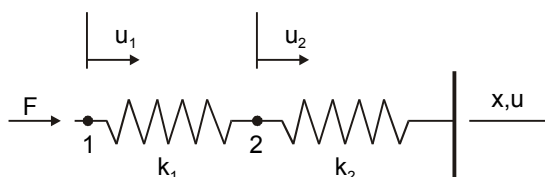
Βλέπουμε ότι μία αλλαγή σε ένα στοιχείο της τάξης του 1% επιφέρει διπλασιασμό των αποτελεσμάτων, τα οποία είναι συνεπώς ευαίσθητα σε μικρές αλλαγές των τιμών των στοιχείων του μητρώου συντελεστών (ακαμψίας) ή του μητρώου σταθερών (φορτίων) του συστήματος αυτού. Το γεωμετρικό ανάλογο της λύσης του παραπάνω συστήματος είναι η τομή δύο ευθειών που είναι σχεδόν παράλληλες (οι εξισώσεις τους είναι $x-y=4$ και $-x+1,02y=-2$). Μία μικρή περιστροφή της δεύτερης επιφέρει τότε σημαντική μετατόπιση του σημείου τομής τους. Παρατηρούμε δε ότι, στην περίπτωση αυτή, η σχέση των όρων των σειρών του συγκεκριμένου μητρώου είναι (σχεδόν) γραμμική.

Στην περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος, οι όροι της δεύτερης σειράς είναι ακέραιο πολλαπλάσιο αυτών της πρώτης. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής κατά Gauss για να επιλύσουμε το σύστημα, ο δεύτερος διαγώνιος συντελεστής γίνεται $1,02-1,0=0,02$. Για ακρίβεια δύο ψηφίων, όλοι οι όροι θα γίνουν τότε ίσοι με 1,0 και το μητρώο γίνεται μοναδιαίο. Η απαλοιφή δίνει $1,0-1,0=0,0$ για τον δεύτερο διαγώνιο όρο και καταλήγουμε στη διαίρεση $y=2,0/0,0$.

Τα συστήματα του παραπάνω παραδείγματος χαρακτηρίζονται από κακή κατάσταση, στην περίπτωση δε των μοντέλων κατασκευαστικών προβλημάτων, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αποφευχθεί με χρήση ακαμψιών (όρων κατά μήκος της κύριας διαγωνίου του μητρώου ακαμψιών) με μέγεθος της ίδιας τάξης. Συμβάλλει επίσης στην αποφυγή κακής κατάστασης η χρήση μεγαλύτερου αριθμού ψηφίων καθότι έτσι αυξάνεται η αριθμητική ακρίβεια. Δεν επιλύεται όμως έτσι το πρόβλημα.

Παράδειγμα 3

Να διερευνηθεί η κατάσταση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας της κατασκευής του σχήματος.



Σχήμα 2 Κατασκευή με δύο βαθμούς ελευθερίας

Λύση

Η μητρωική εξίσωση ισορροπίας, $KU=F$, γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εάν $k_1 \gg k_2$, το σύστημα είναι κακής κατάστασης ενώ εάν $k_2 \gg k_1$ το σύστημα έχει ευσταθή λύση. Οι σειρές του μητρώου K είναι σχεδόν γραμμικά εξαρτημένες εάν $k_1 \gg k_2$ ενώ δεν είναι εάν $k_2 \gg k_1$. Κατά την απαλοιφή κατά Gauss, υπολογίζουμε τον ανηγμένο συντελεστή $(k_1 + k_2) - k_1$ το οποίο δίνει λανθασμένο αποτέλεσμα εάν $k_1 \gg k_2$ και k_2/k_1 είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με αυτό του σφάλματος αποκοπής. Μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε εάν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα τις τιμές $k_1 = 40$, $k_2 = 0,0014$.

Τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία πρέπει να δίνεται προσοχή είναι αυτά για τα οποία η καμπτική ακαμψία είναι αρκετά μικρότερη της μεμβρανικής (π.χ. τα λεπτότοιχα κελύφη). Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση στοιχείου-ράβδου και στην περίπτωση αυτή, επειδή για τις ομοεπίπεδες μετατοπίσεις u_1 και u_2 στα άκρα 1 και 2 θα είναι $u_1 \approx u_2$, είναι προτιμότερο να γίνει επιβολή περιορισμού ($u_1 = u_2$). Με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η κακή κατάσταση της μητρωικής εξίσωσης.

Μπορούμε επίσης να ελαττώσουμε την ακαμψία ενός τμήματος της κατασκευής, όπως για παράδειγμα την αξονική ακαμψία EA/L στοιχείου-δοκού, διαιρώντας την με 100. Το αποτέλεσμα είναι να διατηρηθεί μεγαλύτερη η αξονική (μεμβρανική) ακαμψία από την καμπτική και τα μεγέθη u_1 και u_2 θα παραμείνουν μεγαλύτερα της σχετικής μετατόπισης $u_2 - u_1$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να κάνουμε χρήση σχετικών και όχι απολύτων μετατοπίσεων, σε επιλεγμένους βαθμούς ελευθερίας. Λόγου χάρη, στο προηγούμενο παράδειγμα, εισάγεται η $u_r = u_1 - u_2$. Η μητρωική εξίσωση γράφεται τότε:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \end{bmatrix}$$

Το σύστημα αυτό είναι καλής κατάστασης για οποιεσδήποτε τιμές των ακαμψιών k_1 , k_2 .

Τέλος, συνιστάται επίσης η χρήση δευτεροτάξιας ακρίβειας, εκτός εάν το όριο στρογγύλευσης είναι περίπου 10^{-14} ή εάν ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος των εξισώσεων είναι μικρός.

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθούν τα μέτρα L_1 , L_2 (φασματικό μέτρο) και L_∞ του διανύσματος

$$\mathbf{v} = [1 \quad -3 \quad 2]^T$$

και του μητρώου:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Επίσης, να υπολογισθούν η φασματική ακτίνα, ο αριθμός κατάστασης του μητρώου $\mathbf{A}$ και ο αριθμός των ψηφίων του αποτελέσματος που είναι ακριβή.

Λύση

Από τη σχέση (14) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\infty} &= 3 & \|\mathbf{v}\|_1 &= 1 + 3 + 2 = 6 \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = 5 + 4 + 7 = 16$$

$$\|\mathbf{A}\|_{\infty} = 5 + 4 + 7 = 16$$

Για να υπολογισθεί το $\|\mathbf{A}\|_2$ πρέπει πρώτα να υπολογισθεί η ποσότητα $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Έχουμε:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = 18 \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τώρα τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathbf{A}$, $p(\lambda)$, είναι:

$$p(\lambda) = \det 18 \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -3 & 0 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 18(2 - \lambda)^2(8 - \lambda)$$

Το πολυώνυμο αυτό είναι τρίτης τάξεως και συνεπώς το μητρώο $\mathbf{A}$ έχει τρεις ιδιοτιμές (+36, +36, +144). Άρα,

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{144} = 12$$

Από τις ιδιοτιμές του μητρώου A έχουμε $\rho(A)=144$ και $\text{cond}(A)=144/36=4$. Εάν οι πράξεις γίνουν με ακρίβεια 6 ψηφίων τότε η λύση θα έχει ακρίβεια

$$s \geq 6 - \log_{10}(4,0) = 5,398 \quad \text{ή } 5 \text{ ψηφίων}$$

5. Εξέλιξη πλέγματος κατά διάστημα (h) και κατά βαθμό πολωνύμου (p)

Δύο από τις σύγχρονες μεθόδους εξέλιξης πλεγμάτων²¹ είναι οι κατά διάστημα (h) και κατά βαθμό πολωνύμου (p). Θα αναφέρουμε παρακάτω τις βασικές αρχές των μεθόδων αυτών. Και οι δύο μέθοδοι αποβλέπουν στη πρόσθεση βαθμών ελευθερίας κατά τρόπο ώστε να περιορίζεται το σφάλμα διακριτοποίησης σε επόμενη ανάλυση.

Στην εξέλιξη κατά διάστημα (h) ελαττώνεται το χαρακτηριστικό μήκος των στοιχείων (h) υποδιαιρώντας τα υπάρχοντα στοιχεία χωρίς όμως να αλλάζει το είδος των στοιχείων. Στην εξέλιξη κατά βαθμό πολωνύμου p αυξάνεται ο βαθμός των πλήρων πολωνύμων (p) με την πρόσθεση κόμβων ή και βαθμών ελευθερίας στα στοιχεία χωρίς όμως να αλλάζουν η διάταξη και ο αριθμός των στοιχείων. Μία σειρά διαδοχικά εξελισσόμενων πλεγμάτων οδεύει προς ακριβέστερα αποτελέσματα η δε διαδικασία αυτή καλείται *σύγκλιση κατά διάστημα* ή *σύγκλιση κατά βαθμό πολωνύμου*.

Ένα πρόγραμμα καλείται *προσαρμοζόμενο*²² εάν η πρόσθεση βαθμών ελευθερίας και η επανάληψη της διαδικασίας επίλυσης επιτυγχάνονται με την ελάχιστη απαιτούμενη παρεμβολή του χρήστη.

Το πρόγραμμα καλείται *αυτοπροσαρμοζόμενο*²³ αν:

1. Έχει ενσωματωθεί σε αυτό κάποιο κριτήριο ανάγκης πρόσθετων βαθμών ελευθερίας με βάση προκαθορισμένο βαθμό ακρίβειας.
2. Αν σε συνέχεια το πρόγραμμα είναι σε θέση να επιτελεί την ανάλυση και να ελέγχει την ακρίβεια, και τέλος,
3. Να συνεχίζεται η παραπάνω διαδικασία μέχρις ότου η ακρίβεια είναι εντός των αποδεκτών ορίων.

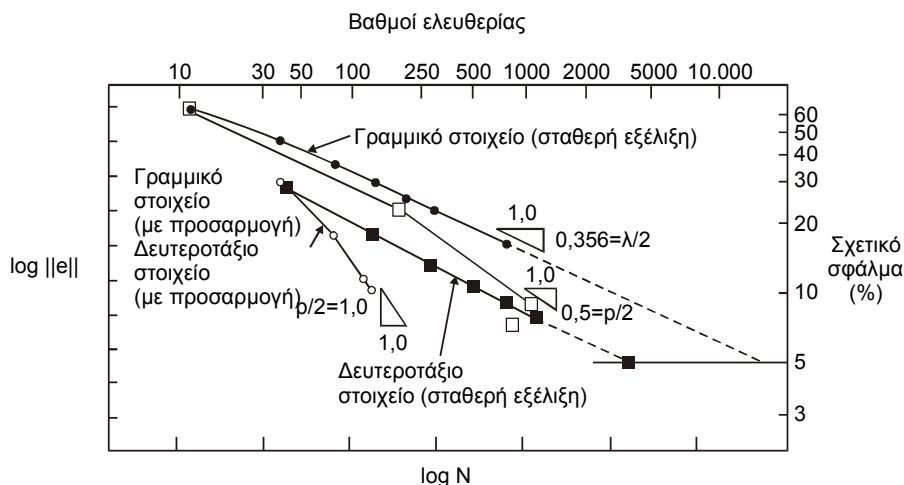
Είναι δυνατό να περιορίσουμε τον αριθμό των απαιτούμενων υπολογισμών με κατάλληλο προγραμματισμό, ακολουθώντας τις παρακάτω αρχές:

- α) Εισάγοντας νέα στοιχεία του ίδιου τύπου με τα αρχικά αλλά μικρότερων διαστάσεων
- β) Για τα ίδια στοιχεία, αυξάνοντας την τάξη των πολωνύμων προσθέτοντας νέους κόμβους και
- γ) Με συνδυασμό των (α) και (β)

²¹ εξέλιξη πλέγματος = mesh refinement

²² προσαρμοζόμενο πλέγμα = adaptive mesh

²³ αυτοπροσαρμοζόμενο = self-adaptive



Σχήμα 3 Ρυθμοί σύγκλισης προβλήματος προβόλου με εξέλιξη κατά βαθμό πολωνύμου

Στο Σχήμα 3 εικονίζονται οι διαδικασίες (α) και (β) αντίστοιχα ενώ τα αποτελέσματα μίας μελέτης σύγκλισης ακολουθώντας συμβατική (γραμμική) εξέλιξη και εξέλιξη πλέγματος κατά βαθμό πολωνύμου περιλαμβάνονται στο Σχήμα 4.

Γενικά η σύγκλιση κατά βαθμό πολωνύμου είναι ταχύτερη απ' ό,τι η κατά διάστημα. Ο προσδιορισμός του σφάλματος για τις διαδικασίες αυτές μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την σύνταξη κωδικών αυτόματης εφαρμογής τους και περιγράφεται στο βιβλίο των Zienkiewicz και Taylor [10].

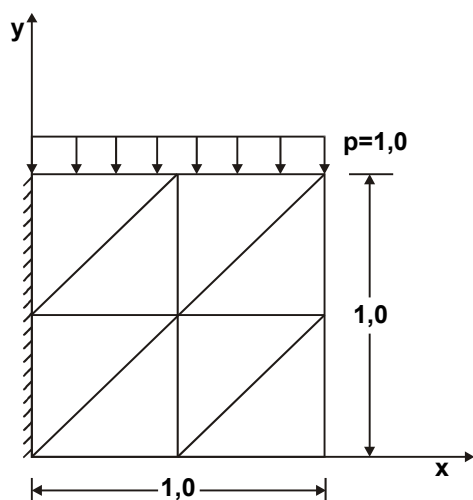
Ο προσδιορισμός του σφάλματος και η μονοτονική σύγκλιση διαδοχικών λύσεων είναι εφικτά με απόλυτα κανονική εξέλιξη πλέγματος - μία τέτοια διαδικασία καλείται *ιεραρχική*²⁴. Σε πλέγματα που αποκτώνται ως αποτέλεσμα ιεραρχικών εξελίξεων οι μετατοπίσεις των λιγότερο εξελεγμένων πλεγμάτων αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της τελικής λύσης.

6. Σύγκλιση λύσεων ΜΠΣ

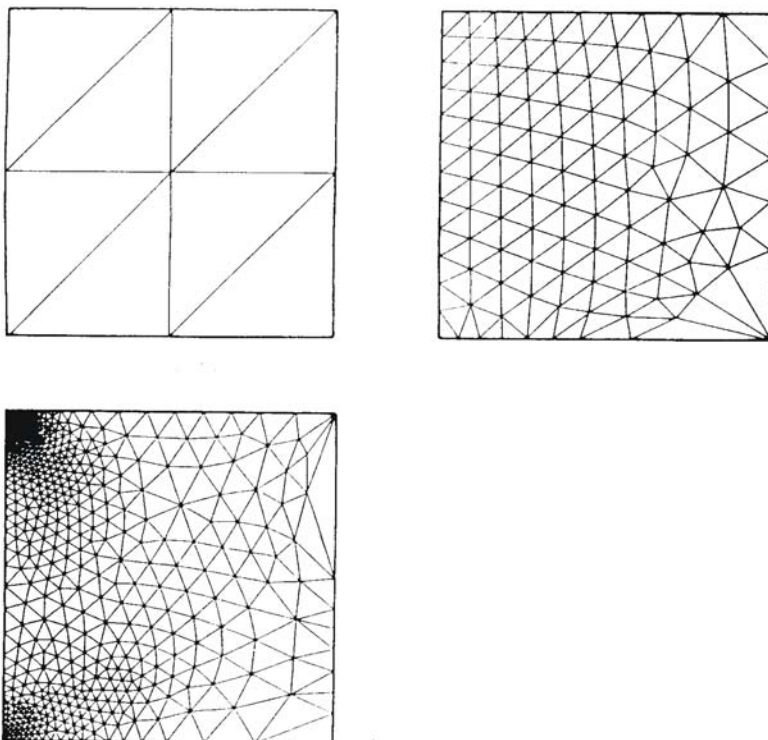
Η *σύγκλιση*²⁵ είναι έννοια στενά συνυφασμένη με τη θεωρία των αριθμητικών μεθόδων καθώς αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα των προσεγγιστικών διαδικασιών, στις οποίες είτε υποδιαιρείται (διακριτοποιείται) σταδιακά η κατασκευή, είτε χρησιμοποιείται επαναληπτική μέθοδος για να επιτευχθεί προσέγγιση στο ακριβές αποτέλεσμα. Αμέσως παρακάτω θα μας απασχολήσει η πρώτη περίπτωση, ενώ σε μεταγενέστερο στάδιο θα αναφερθούμε στη σύγκλιση επαναληπτικών λύσεων πεπερασμένων διαφορών.

²⁴ ιεραρχική διαδικασία = hierarchical process

²⁵ σύγκλιση = convergence



(α) Κατασκευή, οριακές συνθήκες, φόρτιση και σύστημα αναφοράς



(β) Προσαρμοζόμενα πλέγματα γραμμικών τριγωνικών στοιχείων

Σχήμα 4 Διακριτοποίηση προβόλου

Όπως είδαμε προηγουμένως, η ακριβής λύση προσεγγίζεται είτε με αλλαγές στις ιδιότητες των στοιχείων (εξέλιξη κατά βαθμό πολωνύμου) είτε με αλλαγές στη διακριτοποίηση. Κατά κανόνα, η αύξηση του αριθμού των στοιχείων βελτιώνει την ακρίβεια της λύσης. Για να υπάρξει (μονοτονική) σύγκλιση όμως στο ακριβές αποτέλεσμα πρέπει να ικανοποιούνται και οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- α) Τα στοιχεία πρέπει να είναι *πλήρη*²⁶
- β) Τα στοιχεία πρέπει να είναι *συμβατά*²⁷

Όταν ικανοποιούνται οι δύο αυτές προϋποθέσεις τότε τα στοιχεία καλούνται *σύμμορφα*²⁸: διαφορετικά καλούνται *ασύμμορφα*.²⁹ Η απαίτηση της πληρότητας συνεπάγεται ότι τα στοιχεία θα πρέπει να αναπαριστούν α) τις κινήσεις των στοιχείων ως άκαμπτα σώματα και β) να υφίστανται σταθερές παραμορφωσιακές καταστάσεις. Οι κινήσεις άκαμπτου σώματος προκύπτουν όταν δεν αναπτύσσονται τάσεις στο εσωτερικό των στοιχείων ενώ οι σταθερές παραμορφωσιακές καταστάσεις είναι στην ουσία το όριο διακριτοποίησης της κατασκευής. Περαιτέρω διακριτοποίηση δεν επιφέρει δηλαδή αλλαγές διότι η αναπαράστασή τους έχει απόλυτη ακρίβεια.

Η συμβατότητα μεταξύ των στοιχείων προϋποθέτει την *συνέχεια μετατοπίσεων* στο εσωτερικό αλλά και στα σύνορα των στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η αποφυγή κενών μεταξύ τους. Όταν οι βαθμοί ελευθερίας περιλαμβάνουν μόνο μετατοπίσεις, τότε απαιτείται συνέχεια μόνο σε αυτούς. Όταν όμως ορίζονται και οι κλίσεις στα όρια των στοιχείων τότε πρέπει να υπάρχει συνέχεια και στις πρώτες παραγώγους τους (για παράδειγμα στα στοιχεία-ελάσματα). Στην περίπτωση των στοιχείων-ράβδων και των στοιχείων-δοκών η συμβατότητα εξασφαλίζεται αυτόματα.

Σε προβλήματα όπου χρησιμοποιούνται διαφόρων ειδών στοιχεία δεν ικανοποιείται πάντοτε η συνθήκη της συμβατότητας. Αυτό όμως δεν εμποδίζει την απόκτηση αποτελεσμάτων με επαρκή ακρίβεια. Η εξασφάλιση συμβατότητας των μετατοπίσεων δεν συνεπάγεται όμως και τη συμβατότητα των εντατικών πεδίων γειτονικών στοιχείων. Οι τάσεις υπολογίζονται από τις καταστατικές εξισώσεις και τις σχέσεις $\sigma = E\varepsilon + \sigma^p$. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται προσοχή, και για την βελτίωση των αποτελεσμάτων αποκτώνται μέσες τιμές κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων. Διαφορετικά, οι κατανομές των τάσεων σχεδιάζονται κάνοντας χρήση των τιμών στο εσωτερικό των στοιχείων και μόνο.

Παράδειγμα 5

Να διερευνηθεί εάν το τετράπλευρο επίπεδο στοιχείο του οποίου τα πεδία των μετατοπίσεων είναι:

²⁶ πλήρης = complete

²⁷ συμβατός = compatible

²⁸ σύμμορφος = conforming

²⁹ ασύμμορφος = non-conforming

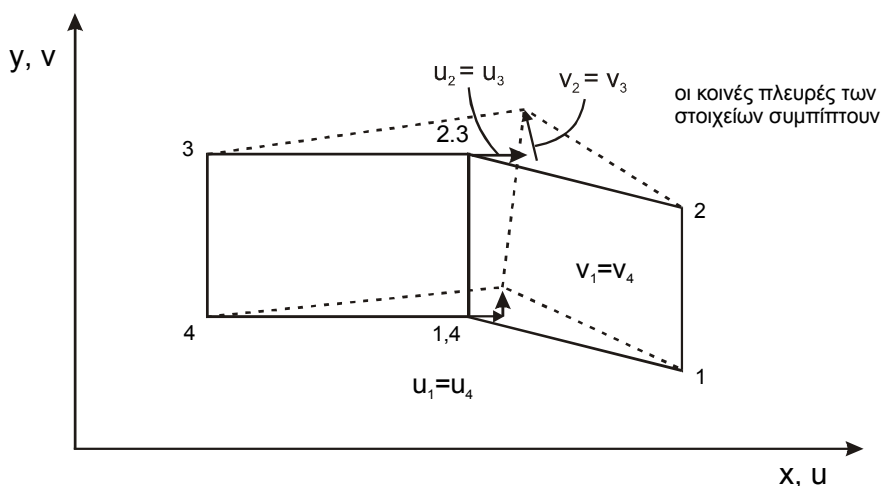
$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2x + \beta_3y + \beta_4xy$$

ικανοποιεί τις συνθήκες συμβατότητας και πληρότητας.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό του στοιχείου είναι συνεχείς και συνεπώς απαιτείται να ελεγχθεί η συμβατότητα μόνο στα σύνορά τους. Θεωρούμε δύο στοιχεία που συνδέονται σε δύο κόμβους, (2-3), (1-4), στους οποίους επιβάλλονται αυθαίρετες μετατοπίσεις. Από τις σχέσεις που προτείνονται για τα πεδία των μετατοπίσεων βλέπουμε ότι τα σημεία των συνόρων μετατοπίζονται γραμμικά και συνεπώς εξασφαλίζεται συνέχεια και κατά μήκος της κοινής πλευράς. Άρα το στοιχείο είναι συμβατό.

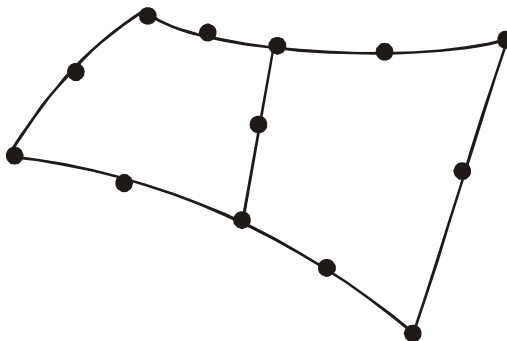


Σχήμα 5 Συμβατότητα στοιχείου επίπεδης εντατικής κατάστασης

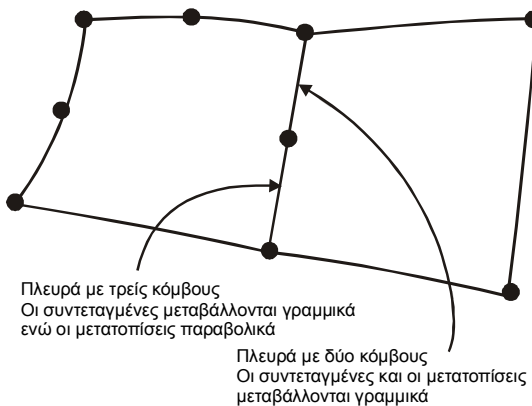
Όσον αφορά την πληρότητα τα πεδία των μετατοπίσεων δείχνουν ότι η μετατόπιση ως άκαμπτο σώμα κατά μήκος της διεύθυνσης x προκύπτει εάν $a_1 \neq 0$. Παρόμοια, μετατοπίσεις ως άκαμπτο σώμα στην διεύθυνση y προκύπτουν όταν $\beta_1 \neq 0$, ενώ οι αντίστοιχες περιστροφές θα πρέπει $a_3 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$ και $a_3 + \beta_2 \neq 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας το μητρώο $\mathbf{E}$, όπου (Παράδειγμα 3, Κεφάλαιο 3):

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}$$

Οι συντεταγμένες και οι μετατοπίσεις
μεταβάλλονται παραβολικά κατά μήκος
των δύο πλευρών



(α) συμβατά στοιχεία



(β) ασύμβατα στοιχεία

Σχήμα 6 Συμβατά και ασύμβατα ισοπαραμετρικά στοιχεία

και $\mathbf{B}=\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1}$. Από το μητρώο $\mathbf{E}$ επιβεβαιώνεται επίσης ότι καταστάσεις σταθερών παραμορφώσεων είναι εφικτές και συνεπώς το στοιχείο είναι πλήρες και συμβατό. Άρα είναι και σύμμορφο.

7. Σύγκλιση ισοπαραμετρικών στοιχείων

Προηγουμένως αναφέρθηκαν οι γενικές προϋποθέσεις για να υπάρχει μονοτονική σύγκλιση. Κατά τη διερεύνηση της συμβατότητας των ισοπαραμετρικών στοιχείων, θεωρούμε την πλευρά που είναι κοινή για δύο γειτονικά στοιχεία (Σχήμα 6). Εάν κατά μήκος της πλευράς αυτής οι συντεταγμένες των κόμβων και οι μετατοπίσεις ταυτίζονται, τότε ικανοποιείται η συνθήκη της συμβατότητας. Αυτό ισχύει όταν τα

στοιχεία έχουν κοινούς κόμβους, οι δε συντεταγμένες και μετατοπίσεις κατά μήκος της κοινής πλευράς ορίζονται με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής (Σχήμα 6).

Στην περίπτωση των ισοπαραμετρικών στοιχείων το πεδίο των μετατοπίσεων, όπως αυτό έχει ορισθεί στο τοπικό σύστημα αναφοράς, θα πρέπει να ισχύει και στην ισοπαραμετρική διατύπωση.

Για διδιάστατα στοιχεία, το πεδίο ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$u = a_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y \quad (31\alpha)$$

$$v = a_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y \quad (31\beta)$$

όπου a_j, β_j, γ_j ($j = 1, 2$) είναι σταθερές. Οι μετατοπίσεις των κόμβων θα είναι τότε:

$$u_i = a_1 + \beta_1 x_i + \gamma_1 y_i \quad (32\alpha)$$

$$v_i = a_2 + \beta_2 x_i + \gamma_2 y_i \quad (32\beta)$$

όπου $i = 1, \dots, q$ και q είναι ο αριθμός των κόμβων. Για να δείξουμε ότι ισχύει το πεδίο των μετατοπίσεων όπως ορίζουν οι σχέσεις (31α), (31β) και στην ισοπαραμετρική διατύπωση, θεωρούμε ότι οι μετατοπίσεις των κόμβων δίνονται από τις (32α), (32β). Θα πρέπει τότε, εάν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις αυτές να καταλήξουμε στις (31α), (31β) για τις μετατοπίσεις. Στην ισοπαραμετρική διατύπωση έχουμε:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i \quad (33\alpha)$$

$$v = \sum_{i=1}^q h_i v_i \quad (33\beta)$$

Αντικαθιστώντας από τις (28α), (28β) έχουμε:

$$u = a_1 \sum_{i=1}^q h_i + \beta_1 \sum_{i=1}^q h_i x_i + \gamma_1 \sum_{i=1}^q h_i y_i \quad (34\alpha)$$

$$v = a_2 \sum_{i=1}^q h_i + \beta_2 \sum_{i=1}^q h_i x_i + \gamma_2 \sum_{i=1}^q h_i y_i \quad (34\beta)$$

Οι μετατοπίσεις που εκφράζουν οι σχέσεις (34α) και (34β) είναι ίδιες με αυτές των (31α) και (31β) εφόσον:

$$\sum_{i=1}^q h_i = 1 \quad (35)$$

για οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου. Άρα, η σχέση (35) είναι επαρκής συνθήκη για την ικανοποίηση της συνθήκης πληρότητας. Η συνθήκη αυτή ισχύει για όλα τα ισοπαραμετρικά στοιχεία.

Η εξέταση της σύγκλισης λύσεων της ΜΠΣ υπό το πρίσμα της μεθόδου Ritz απαιτεί καταρχήν την σαφή διατύπωση της έννοιας της σύγκλισης. Μπορούμε να πούμε ότι, εάν ισχύει η συνθήκη:

$$\int_V L(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n) S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n) dV \rightarrow 0 \quad (36)$$

τότε η λύση Ritz συγκλίνει. Οι τελεστές L και S ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = L \left\{ \sum_i a_i f_i \right\} \quad (37\alpha)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = S \left\{ \sum_i a_i f_i \right\} \quad (37\beta)$$

Από τις σχέσεις (37α), (37β) αποκτώνται οι παραμορφώσεις και τάσεις συναρτήσεων των συναρτήσεων Ritz, $\mathbf{u}$ είναι η ακριβής λύση, $\mathbf{u}^n$ είναι η αντίστοιχη προσέγγιση με n συναρτήσεις Ritz. Υπενθυμίζεται ότι ισχύει η σχέση $\sum a_i f_i = \mathbf{u}$. Η συνθήκη αυτή (σχέση (36)) αφορά τη σύγκλιση ενέργειας, επειδή το μέτρο ενέργειας των υπολοίπων των μετατοπίσεων, $(\mathbf{u} - \mathbf{u}^n)$, συγκλίνει στο μηδέν. Ο ανάλογος ορισμός της σύγκλισης για την ΜΠΣ είναι:

$$\int_V L(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) dV \rightarrow 0 \quad \text{για } h \rightarrow 0 \quad (38)$$

h είναι το μέγιστο διάστημα στοιχείου, ποσότητα ανάλογη με τον αριθμό συναρτήσεων Ritz, n . Για να συγκλίνει μία λύση Ritz, οι συναρτήσεις που θα επιλεγούν θα πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω απαιτήσεις:

- α) Να μην προκύπτουν ασυνέχειες κατά τον υπολογισμό των στοιχείων $\mathbf{k}_{ij}$ του γενικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής. Τα στοιχεία $\mathbf{k}_{ij}$ δίνονται από τη σχέση:

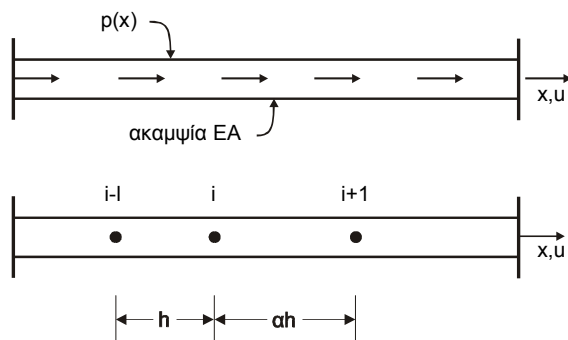
$$\mathbf{k}_{ij} = \int L(f_i) S(f_j)$$

Κατά συνέπεια, απαιτείται συνέχεια των παραγώγων των συναρτήσεων Ritz με βαθμό έως και $m-1$. Διαφορετικά, η m -οστή παράγωγος θα είναι μοναδιαία στα σημεία ασυνέχειας του στοιχείου.

- β) Την ικανοποίηση των γεωμετρικών μόνο οριακών συνθηκών. Εάν ικανοποιούνται και οι οριακές συνθήκες των δυνάμεων, βελτιώνεται η αριθμητική συμπεριφορά της λύσης.

Παράδειγμα 6

Να διερευνηθεί η σύγκλιση της λύσης προβλήματος δοκού σταθερής διατομής που φέρει φορτίο $p(x)$ ανά μέτρο μήκους, με τη ΜΠΣ. Να υποθεθεί ότι η δοκός διακριτοποιείται σε τμήματα με διαφορετικά μήκη και ότι το φορτίο παραλαμβάνεται μόνο μέσω των κόμβων του πλέγματος. Το μέγεθος του φορτίου σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί στα φορτία που φέρουν τα δύο γειτονικά τμήματα.



Λύση

Το μητρώο ακαμψίας στοιχείου-ράβδου μήκους h είναι:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

και η αντίστοιχη εξίσωση ισορροπίας στον κόμβο i είναι:

$$\frac{EA}{h} [-u_{i-1} + u_i] + \frac{EA}{ah} [u_i - u_{i+1}] = \frac{p_i h(1+a)}{2} \quad (40)$$

Η εξίσωση ισορροπίας στον κόμβο i λαμβάνεται από το ανάπτυγμα κατά Taylor των σχέσεων που δίνουν τις μετατοπίσεις στους κόμβους $i-1$ και $i+1$ περί τον κόμβο i . Έχουμε:

$$u_{i+1} = u_i + u'_i(ah) + u''_i \frac{(ah)^2}{2} + u'''_i \frac{(ah)^3}{6} + \dots \quad (41\alpha)$$

$$u_{i-1} = u_i - u'_i(h) - u''_i \frac{(h)^2}{2} - u'''_i \frac{(h)^3}{6} + \dots \quad (41\beta)$$

Αντικαθιστώντας την (40) στην (39) λαμβάνουμε:

$$u''_i - \frac{h}{3}(1-a)u'''_i + \frac{h^2}{12} \frac{1+\alpha^3}{1+a} u^{iv}_i + \dots + \frac{p_i}{EA} = 0 \quad (42)$$

Η διαφορική εξίσωση (ακριβής λύση) στο σημείο i είναι:

$$u''_i + \frac{p_i}{EA} = 0 \quad (43)$$

Συνεπώς, η λύση της ΜΠΣ συγκλίνει στην ακριβή λύση εφόσον $h \rightarrow 0$. Επίσης, για $\alpha \neq 1$ η σύγκλιση είναι γραμμική ενώ για $\alpha=1$ η σύγκλιση είναι δευτεροτάξια. Βλέπουμε δηλαδή ότι ο ρυθμός σύγκλισης της λύσης εξαρτάται και από τη μορφολογία του πλέγματος.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί επίσης να λυθεί και με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Κάνοντας χρήση μέσων διαφορών και σταθερού διαστήματος, η εξίσωση ισορροπίας γράφεται:

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{p_i}{EA} = 0 \quad (44)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι ίδια με την (40), για $\alpha=1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών μπορούν να θεωρηθούν και σαν σχέσεις ακαμμίας, ανάλογες προς αυτές της ΜΠΣ.

Η κύρια δυσκολία που έχει η ΜΠΔ σε σχέση με την ΜΠΣ από θεωρητικής πλευράς είναι η ανάγκη διατύπωσης όλων των οριακών συνθηκών, δηλ. γεωμετρικών αλλά και δυνάμεων. Στη ΜΠΣ αντιθέτως, λόγω της μεταβολικής φύσης των περισσότερων προβλημάτων, απαιτούνται μόνο οι γεωμετρικές οριακές συνθήκες. Μία διατύπωση της ΜΠΔ που έχει βάση μεταβολική διατύπωση ξεπερνά το πρόβλημα αυτό (ενεργειακή μέθοδος πεπερασμένων διαφορών - ΕΜΠΔ). Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία.

8. Κριτήρια συμπεριφοράς αλγορίθμων πεπερασμένων διαφορών

Στο Κεφάλαιο 11 συναντήσαμε τη χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση μη-γραμμικών προβλημάτων μέσω της αριθμητικής (προσεγγιστικής) επίλυσης των αντίστοιχων εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές κατατάσσονται γενικά στην κατηγορία των μερικών διαφορικών εξισώσεων για τις οποίες υπάρχουν ελάχιστες αναλυτικές λύσεις. Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί το πεδίο της αριθμητικής επίλυσης των ΜΔΕ που με τη χρήση H/Y αποτελεί μία από τις πλέον ραγδαία αναπτυσσόμενες περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών την τελευταία πεντηκονταετία.

Η χρήση των μεθόδων αυτών απαιτεί την υπενθύμιση ορισμένων εννοιών της θεωρίας της αριθμητικής ανάλυσης, οι οποίες και θα συνοψισθούν παρακάτω. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης συνιστάται όμως να κάνει χρήση της υπάρχουσας διεθνούς βιβλιογραφίας η οποία είναι εκτενέστατη. Ορισμένοι τίτλοι αναφέρονται ενδεικτικά στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου [].

Αριθμητικές λύσεις γενικά αποκτώνται με δύο κατηγορίες μεθόδων:

1. Τις *άμεσες*,³⁰ στις οποίες εκτελείται ένας προκαθορισμένος αριθμός αριθμητικών πράξεων που εξαρτάται από το μέγεθος του προβλήματος (αριθμός βαθμών ελευθερίας) και
2. Τις *επαναληπτικές*,³¹ στις οποίες η λύση προσεγγίζεται με σταδιακά ακριβέστερη λύση του αντίστοιχου μητρωικού προβλήματος.

Παραδείγματα άμεσων μεθόδων είναι η απαλοιφή κατά Gauss και η μέθοδος Cholesky ενώ επαναληπτικές μέθοδοι είναι η Gauss-Seidel, η Jacobi, η *διαδοχική υπερχαλάρωση*³² και η *δυναμική χαλάρωση*³³. Στην πράξη μπορούμε να πούμε πως προτιμότερες είναι οι άμεσες μέθοδοι όταν:

- α) Ζητείται η λύση ενός σχετικά μεγάλου αριθμού εξισώσεων με το ίδιο μητρώο συντελεστών (ακαμψιών) αλλά με διαφορετικά διανύσματα εξωτερικών φορτίσεων.
- β) Το μητρώο είναι σχεδόν μοναδιαίο. Στην περίπτωση αυτή μικρά υπόλοιπα δεν συνεπάγονται μικρά σφάλματα στη λύση και συνεπώς προτιμώνται οι άμεσες μέθοδοι διότι στην περίπτωση αυτή είναι ακριβέστερες.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι αποδοτικότερες όταν προκύπτουν αραιά συστήματα εξισώσεων, δηλαδή αυτά στα οποία οι μη-μηδενικοί όροι είναι συγκεντρωμένοι περί την κύρια διαγώνιο. Τέτοια συστήματα συναντώνται συχνά σε προβλήματα της μηχανικής των κατασκευών.

³⁰ άμεση = direct

³¹ επαναληπτική μέθοδος = iterative method

³² διαδοχική υπερχαλάρωση = successive over-relaxation

³³ δυναμική χαλάρωση = dynamic relaxation

Για το λόγο αυτό θα εξετάσουμε ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της αριθμητικής συμπεριφοράς των μεθόδων αυτών, δίνοντας έμφαση στη μέθοδο της δυναμικής χαλάρωσης που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 11.

Στις επαναληπτικές μεθόδους αποκτάται μία σειρά διανυσμάτων με αρχικό διάνυσμα x_i έτσι ώστε:

$$x_{i+1} = F_i[x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}] \quad (45)$$

όπου ο δείκτης i της συνάρτησης F υποδηλώνει ότι η F ενδέχεται να αλλάξει σε διαδοχικές επαναλήψεις. Όταν η F παραμένει αμετάβλητη τότε η επαναληπτική διαδικασία καλείται στάσιμη. Οι επαναληπτικές διαδικασίες που θα μας απασχολήσουν είναι όλες στάσιμες.

8.1 Η έννοια της αριθμητικής ευστάθειας

Σε προηγούμενα εδάφια αναφέρθηκαν πιθανές πηγές απόκλισης των αριθμητικών λύσεων από τις αντίστοιχες ακριβείς (αναλυτικές) λύσεις. Μεταξύ αυτών αναφέρθηκε το σφάλμα αποκοπής, το σφάλμα στρογγύλευσης και το υπολογιστικό σφάλμα που προκύπτει κατά την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Στις επαναληπτικές μεθόδους, για να αποκτηθεί λύση με επαρκή ακρίβεια πρέπει πρώτα απ' όλα να εξασφαλισθεί αριθμητική ευστάθεια και σε συνέχεια να συγκλίνει η λύση στο επιθυμητό αποτέλεσμα, μετά από έναν αποδεκτό αριθμό επαναλήψεων.

Η *αριθμητική ευστάθεια*³⁴ είναι μία από τις σημαντικότερες έννοιες της αριθμητικής ανάλυσης και αποτελεί γόνιμο πεδίο έρευνας και εφαρμογής νέων μεθόδων. Ο έλεγχος της ευστάθειας ενός αριθμητικού αλγορίθμου είναι ένα από τα κύρια στάδια μελέτης για την χρήση του σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα. Για το λόγο αυτό έχει αναπτυχθεί μία πληθώρα μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της ευστάθειας των αριθμητικών αλγορίθμων.

Πριν αναφερθούμε στις μεθόδους αυτές πρέπει να καθορίσουμε με κάποια σαφήνεια την έννοια της ευστάθειας. Το πρόβλημα της ευστάθειας ανακύπτει στις επαναληπτικές μεθόδους, διότι εάν το σφάλμα που προκύπτει σε κάθε βήμα αυξάνεται, τότε το αποτέλεσμα δεν θα περιέχει απλά και μόνο ένα σφάλμα με μέγεθος συγκρίσιμο με αυτό του ζητούμενου αποτελέσματος, αλλά θα αποκτηθεί λύση με τελείως διαφορετική συμπεριφορά, η οποία συνήθως χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις (διακυμάνσεις) αυξανόμενου εύρους. Οι ασταθείς λύσεις δεν αποτελούν προσέγγιση στη ακριβή λύση του μαθηματικού προβλήματος και είναι συνεπώς άχρηστες. Σημειώνεται ότι η αριθμητική αστάθεια δεν έχει σχέση με τη φυσική συμπεριφορά του συστήματος αλλά αποτελεί γνώρισμα του αριθμητικού αλγορίθμου και μόνο.

Για να γίνει όμως κατανοητή η επίδραση της αριθμητικής αστάθειας στη λύση ενός προβλήματος, ας εξετάσουμε το παρακάτω πρόβλημα.

³⁴ αριθμητική ευστάθεια = numerical stability

Παράδειγμα 7

Να διερευνηθεί η ευστάθεια της αριθμητικής λύσης της κανονικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

της οποίας η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$y = Ae^x + (x+1)$$

όπου A είναι η σταθερά ολοκλήρωσης ενώ η αρχική συνθήκη είναι $y(0)=1$.

Λύση

Από την αρχική συνθήκη έχουμε $A=0$ και συνεπώς η ακριβής λύση αποτελείται από ένα όρο που αυξάνεται γραμμικά και σχετικά αργά, σε σύγκριση με τον εκθετικό όρο. Σε προσεγγιστικές λύσεις όμως εμφανίζεται και ο εκθετικός όρος λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης. Εάν για $x=\zeta$ το σφάλμα ισούται με η τότε για $x=\zeta+5$ το σφάλμα θα είναι ηe^5 . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο όρος που περιέχει το σφάλμα γρήγορα θα κυριαρχήσει και η λύση θα ακολουθήσει εσφαλμένη πορεία.

Οι αριθμητικές λύσεις που επιτρέπουν την αύξηση του σφάλματος είναι γενικά ασταθείς. Η αστάθεια είναι όμως δυνατό να περιορισθεί με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με την ελάττωση του βήματος h (χώρος, χρόνος).

Ας προχωρήσουμε όμως και σε ένα ακριβέστερο ορισμό της αριθμητικής ευστάθειας. Επειδή η μαθηματική διατύπωση του δεν είναι εύκολη, επιζητούμε τον καθορισμό της θέτοντας άνω φράγματα στις αποκλίσεις από την ακριβή λύση.

Εάν $y_i(\eta, t)$ είναι η λύση προβλήματος στο πεδίο t (έστω χρόνος), υποθέτουμε ότι η λύση $y_o(\eta_o, t_o)$ αντικαθίσταται από την $y_o(\eta_o, t_o)+e$ στο σημείο (η_o, t_o) . Εφόσον το σφάλμα e οφείλεται σε στρογγύλευση ή σε ολίσθημα και εάν συνεχισθεί η λύση και δεν προκύψουν σφάλματα σε μεταγενέστερα βήματα, τότε για τη λύση $y_i^*(\eta, t)$ το μέγεθος

$$y_i^*(\eta, t) - y_i(\eta, t)$$

καλείται *απόκλιση της λύσης* λόγω του αριθμητικού σφάλματος e . Για σφάλματα σε περισσότερα σημεία έχουμε *αθροιστική απόκλιση*³⁵ που οφείλεται στο σύνολο των σφαλμάτων αυτών ενώ σε γραμμικά προβλήματα η συνολική απόκλιση είναι το αλγεβρικό άθροισμα των επί μέρους συνιστωσών [5].

³⁵ αθροιστική απόκλιση = cumulative divergence

Εάν η απόλυτη τιμή του μέγιστου σφάλματος είναι δ , έχουμε δηλαδή $|e(\eta, t)| < \delta$, και το βήμα είναι η , τότε η διαδικασία καλείται **σημειακά ευσταθής**³⁶ εάν η αθροιστική απόκλιση τείνει στο μηδέν για $\delta \rightarrow 0$ και δεν αυξάνει ταχύτερα από κάποια δύναμη του h^{-1} καθώς $h \rightarrow 0$ [6].

Όταν η λύση του συνεχούς προβλήματος παραμένει φραγμένη³⁷,

η διαδικασία στον (ημιαπειροστό) χώρο $\{0 < x < 1, t > 0\}$ καλείται **ασταθής κατά βήμα**³⁸ εάν για δεδομένη διακριτοποίηση και αμετάβλητες ομογενείς οριακές συνθήκες υφίστανται αρχικές διαταραχές για τις οποίες οι αριθμητικές λύσεις απειρίζονται καθώς $j \rightarrow \infty$ [6].

Ας εξετάσουμε όπως ένα δεύτερο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

με οριακή συνθήκη $y(0)=1$ για $x \geq 0$, κάνοντας χρήση της προσέγγισης:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = -y(x)$$

Λύση

Υποθέτουμε ότι για το αριθμητικό σφάλμα e που προκύπτει σε κάθε βήμα ισχύει $|e(x)| \leq \delta$. Η αποκτώμενη λύση είναι τότε:

$$y(x+h) - y(x) = -hy(x) + e(x+h) \quad (46)$$

Η οριακή συνθήκη είναι τότε $y^*(0)=1+e$, ενώ η απόκλιση:

$$\mathbf{x}_i^*(\eta, t) - \mathbf{x}_i(\eta, t) = \omega(\eta, t)$$

με $\omega(0) = e(0)$ είναι η λύση του παρακάτω προβλήματος:

$$\omega(x+h) - \omega(x) = -h\omega(x) + e(x+h) \quad (47)$$

³⁶ σημειακά ευσταθής = locally stable

³⁷ φραγμένος = bounded

³⁸ ασταθής κατά βήμα = stepwise unstable

$$\text{Τότε } |\omega(x+h)|^2(1-h)\omega(x) + \delta \quad |\omega(0)| \leq \delta \quad (48)$$

Άρα λύση του προβλήματος

$$\omega(x+h) = (1-h)|\omega(x)| + \delta \quad |\omega(0)| \leq \delta \quad (49)$$

είναι το άνω φράγμα της απόκλισης $|\omega(x)|$. Η εξίσωση (49) λύνεται με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιείται στη λύση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές. Η πλήρης μορφή της λύσης είναι:

$$\omega(x) = \frac{\delta}{h} \left[1 - (1-h)^{1+\frac{x}{h}} \right] \quad (50)$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι $\omega(x) \rightarrow 0$ για $\delta \rightarrow 0$. Η σχέση των $\omega(x)$ και δ είναι όμως γραμμική, και για $h \rightarrow 0$ η απόκλιση της αριθμητικής λύσης θα μεγαλώσει. Βλέπουμε λοιπόν ότι η επιλογή μικρού βήματος, που περιορίζει το σφάλμα διακριτοποίησης, προσδίδει αύξηση στην απόκλιση της λύσης από την ακριβή λύση λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης.

Για κάθε αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει συνεπώς να διερευνηθεί η βέλτιστη τιμή του βήματος για να περιορισθεί το αριθμητικό σφάλμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν να ελαττωθεί απεριόριστα το αριθμητικό σφάλμα, αλλά υπάρχουν άνω και κάτω φράγματα στο πεδίο τιμών των αριθμητικών λύσεων.

Οι Forsythe και Wasow [10] επισημαίνουν ότι η έννοια της ευστάθειας δεν πρέπει να τεθεί ως επάρκεια ή ανεπάρκεια αυτής αλλά ποσοτικά, δηλαδή ως περισσότερη ή λιγότερη ευστάθεια. Ως μέτρο αυτής προτείνεται το όριο της αθροιστικής απόκλισης της αριθμητικής λύσης, καθώς $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$:

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \sum \omega(x) \quad (51)$$

Συνήθως η σημαντικότερη από τις δύο ποσότητες $[\delta, h]$ είναι το βήμα h , και έτσι ο κανόνας που εφαρμόζεται είναι ότι, εάν $\omega(x) \rightarrow 0$ για $\delta \rightarrow 0$ και δεν παρατηρείται αύξηση κάποιας δύναμης του $(1/h)$ για $h \rightarrow 0$, η διαδικασία είναι ευσταθής. Στις περισσότερες λύσεις δηλαδή που εμπειρικά μπορούν να χαρακτηρισθούν ως ευσταθείς η τάξη μεγέθους της απόκλισης $\omega(x)$ είναι μία μικρή δύναμη του h^{-1} .

Στην περίπτωση των ασταθών λύσεων όμως είναι εκθετική συνάρτηση του h^{-1} . Παρατηρείται δηλαδή όντως μία ποιοτική διαφορά μεταξύ των ευσταθών και των ασταθών λύσεων.

8.2 Ευστάθεια αριθμητικών αλγορίθμων

Οι δύο σημαντικότερες μέθοδοι ελέγχου ευστάθειας είναι η *μέθοδος του von Neumann* (με χρήση σειρών Fourier) και η *μητρική μέθοδος*. Οι δύο αυτές μέθοδοι

βρίσκουν εφαρμογή σε γραμμικά προβλήματα ενώ σε μη-γραμμικά πρέπει να προηγηθεί γραμμικοποίηση.

Κατά τη μέθοδο του von Neumann εξετάζεται η επίδραση της μετάδοσης ενός σφάλματος το οποίο παριστάνεται με πεπερασμένη σειρά της μορφής:

$$\sum_i A_i e^{j\lambda_i x}$$

στην οποία ο αριθμός των όρων είναι ίσος με τον αριθμό των βημάτων κατά μήκος του άξονα μετάδοσης του σφάλματος. Κατά κανόνα εξετάζεται η επίδραση ενός μόνον όρου, έστω $\exp[j\lambda x]$ όπου λ είναι πραγματικός αριθμός. Η επίδραση των υπόλοιπων όρων αποκτάται με γραμμική υπέρθεση. Εάν υποθέσουμε ότι ο όρος αυτός αντιστοιχεί στο βήμα $t=0$, τότε για να εξετάσουμε την μετάδοση του σφάλματος για αυξανόμενο t πρέπει να βρούμε τη λύση της εξίσωσης πεπερασμένων διαφορών που περιορίζεται στο $\exp[j\lambda x]$ όταν $t=0$. Έστω ότι η λύση αυτή είναι $\exp[\alpha t]\exp[i\beta x]$, όπου $\alpha=\alpha(\beta)$ (μιγαδικός). Το αρχικό σφάλμα $\exp[j\lambda x]$ δεν θα αυξηθεί εάν:

$$|\exp[\alpha k]| \leq 1 \quad \text{για κάθε } \alpha \quad (52)$$

Αυτό είναι το κριτήριο *ευστάθειας* του von Neumann. Η μέθοδος αυτή αγνοεί την επίδραση των οριακών συνθηκών και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε προβλήματα αρχικών τιμών. Στην περίπτωση που οι οριακές συνθήκες επηρεάζουν τη λύση χρησιμοποιείται η μητρική μέθοδος η οποία δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία [5-9].

Ας δούμε όμως πως εφαρμόζεται η μέθοδος του Neumann σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Παράδειγμα 9

Να διερευνηθούν οι συνθήκες *ευστάθειας* του αλγορίθμου:

$$u_m^{n+1} = (1-2r)u_m^n + r(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)$$

ο οποίος χρησιμοποιείται για τη λύση της εξίσωσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad [1 \geq x \geq 0, t \geq 0]$$

Λύση

Θέτουμε $Mh=1$. Τα σφάλματα στους κόμβους του διαστήματος $1 \geq x \geq 0$ για $t=0$ είναι τότε $Z(mh)=Z_m^0$ ($m=0, 1, \dots, M$). Τότε, από τα προηγούμενα,

$$Z_m^0 = \sum_{j=0}^M A_j \exp[i\beta_j m h] \quad (m=0, 1, \dots, M) \quad (53)$$

απ' όπου ορίζονται οι άγνωστοι A_j . Στο πρόβλημα αυτό ο αριθμός των αρμονικών αντιστοιχεί στον αριθμό των κομβικών σημείων για οποιοδήποτε χρόνο t και έτσι ο αριθμός αυτός αυξάνεται όταν το διάστημα μεταξύ των κόμβων ελαττώνεται. Εφόσον Z_m^0 ικανοποιεί την αρχική εξίσωση διαφορών έχουμε:

$$Z_m^{n+1} = (1-2r)Z_m^n + r(Z_{m+1}^n + Z_{m-1}^n) \quad (54)$$

Αντικαθιστώντας,

$$Z_m^n = e^{ank} e^{i\beta\beta m} = \zeta^n e^{i\beta\beta m} \quad (55)$$

όπου $\zeta = e^{ak}$ η σχέση (55) δίνει:

$$\zeta^{n+1} e^{i\beta\beta m} = \zeta^n [(1-2r)e^{i\beta\beta m} + r(e^{i\beta(m+1)h} + e^{i\beta(m-1)h})] \quad (56)$$

Απαλοίφοντας τον όρο $\zeta^n e^{i\beta\beta m}$ καταλήγουμε στη μορφή:

$$\begin{aligned} \xi &= (1-2r) + r(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) = 1 - 2r(1 - \cos \beta h) = \\ &= 1 - 4r \sin^2(\beta h / 2) \end{aligned} \quad (57)$$

Η ποσότητα ξ καλείται *συντελεστής μεγέθυνσης*. Για ευστάθεια, $|\xi| \leq 1$ για κάθε βh και συνεπώς:

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2 \frac{\beta h}{2} \leq +1 \quad (58)$$

Το δεξί σκέλος της ανισότητας ικανοποιείται για $r > 0$ ενώ το αριστερό ικανοποιείται για:

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta h / 2)} \quad (59)$$

δηλαδή,

$$0 \leq r \leq 1/2 \quad (60)$$

8.3 Σύγκλιση αριθμητικών λύσεων. Το θεώρημα ισοδυναμίας του Lax

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα που ανακύπτει κατά την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές διαδικασίες είναι η εξασφάλιση της σύγκλισης της αριθμητικής λύσης στη λύση της αρχικής μ.δ. εξίσωσης. Εάν U είναι η ακριβής λύση της μ.δ.ε. η οποία έχει ανεξάρτητες μεταβλητές x , t και u είναι η ακριβής λύση της αριθμητικής διαδικασίας, τότε η διαδικασία συγκλίνει όταν $u \rightarrow U$ σε ένα καθορισμένο σημείο ή άξονα ($t = \text{σταθερό}$) ενώ $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Οι προϋποθέσεις για σύγκλιση των γραμμικών μ.δ.ε. δευτέρου βαθμού είναι γνωστές, στη περίπτωση όμως των μη-γραμμικών δ.ε. δεν έχουν καθορισθεί παρά μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις.

Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνει αναφορά στο *θεώρημα ισοδυναμίας του Lax*, το οποίο συμβάλλει σημαντικά στην διερεύνηση της συμπεριφοράς των αριθμητικών λύσεων³⁹. Το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Για ένα καλώς τεθειμένο γραμμικό πρόβλημα αρχικών τιμών και μία γραμμική προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών σε αυτό, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη συμβατότητας, αναγκαία και επαρκής συνθήκη για να συγκλίνει η διαδικασία είναι η ευστάθειά της.

Δεν θα προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, η οποία δίνεται στη βιβλιογραφία. Βλέπουμε ότι σε προβλήματα αρχικών τιμών (μετάδοσης γενικά) αρκεί να διερευνηθεί το πρόβλημα της ευστάθειας του αλγορίθμου για να εξασφαλισθεί η σύγκλιση στη λύση της αρχικής δ.ε. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα της μετάδοσης θερμότητας, της δυναμικής απόκρισης κατασκευών σε δυναμικά επιβαλλόμενες φορτίσεις, κλπ.

Κατά τον Hadamard, ένα πρόβλημα μαθηματικής φυσικής είναι *καλώς τεθειμένο*⁴⁰ εάν:

1. Η λύση υπάρχει
2. Η λύση είναι μοναδική, εφόσον υπάρχει
3. Η εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα είναι συνεχής (ευστάθεια)

Η συνθήκη συμβατότητας που αναφέρθηκε στο θεώρημα του Lax αφορά τη σύγκλιση της αριθμητικής λύσης στην λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης και όχι σε κάποια άλλη. Παρακάτω θα δοθεί ο γενικός ορισμός της συμβατότητας.

Έστω $L(U)=0$ η μ.δ.ε. με ανεξάρτητες μεταβλητές x και t , της οποίας η ακριβής λύση είναι U . Έστω επίσης ότι $F(u)=0$ είναι η προσεγγιστική λύση πεπερασμένων διαφορών με ακριβή λύση u .

Εάν v είναι συνεχής συνάρτηση των x και t με επαρκή αριθμό συνεχών παραγώγων έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός της $L(v)$ στο σημείο (ih, ik) , τότε, το σφάλμα αποκοπής $T_{ij}(v)$ στο σημείο (ih, ik) ορίζεται από τη σχέση:

³⁹ θεώρημα ισοδυναμίας του Lax = Lax' equivalence theorem

⁴⁰ καλώς τεθειμένο = well posed

$$T_{ij}(v) = F_{ij}(v) - L(v_{ij}) \quad (61)$$

Εάν $T_{ij}(v) \rightarrow 0$ καθώς $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$, η εξίσωση διαφορών είναι συμβατή με την αρχική διαφορική εξίσωση. Το σφάλμα αποκοπής είναι λοιπόν μέτρο του σφάλματος που προκύπτει από την αντικατάσταση της $L(v_{ij})$ από την $F_{ij}(v)$. Εάν θέσουμε $v=U$, εφόσον $L(U)=0$, τότε $T_{ij}(v)=F_{ij}(v)$ και το σφάλμα αποκοπής συμπίπτει με το τοπικό σφάλμα αποκοπής. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση διαφορών είναι συμβατή εάν η οριακή τιμή του τοπικού σφάλματος αποκοπής ισούται με το μηδέν καθώς $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$. Το τοπικό σφάλμα αποκοπής⁴¹ είναι η διαφορά της προσεγγιστικής λύσης από την ακριβή λύση σε ένα συγκεκριμένο κόμβο του πλέγματος (πεπερασμένων διαφορών) [8].

8.4 Ευστάθεια και σύγκλιση επαναληπτικών λύσεων

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των στάσιμων γραμμικών επαναληπτικών διαδικασιών και σε συνέχεια θα επεκταθούμε στη διερεύνηση της συμπεριφοράς του αλγόριθμου της δυναμικής χαλάρωσης. Οι επαναληπτικές διαδικασίες είναι από τις πρώτες μεθόδους που εφαρμόστηκαν για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων διότι ο αριθμός των αριθμητικών πράξεων είναι μικρότερος αυτού των άμεσων λύσεων. Συγκεκριμένα, για την απαλοιφή κατά Gauss απαιτούνται $ST^3/3$ πράξεις ενώ για επαναληπτικές λύσεις απαιτούνται περίπου ST^2 πράξεις. Πιο σύγχρονες άμεσες μέθοδοι που εκμεταλλεύονται τις ιδιότητες των αραιών μητρώων είναι βέβαια ταχύτερες. Η γενική μορφή του αλγόριθμου επαναληπτικών λύσεων είναι:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{H} \mathbf{x}^n + \mathbf{c} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

Από το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}^n$ αποκτάται μέσω του μητρώου $\mathbf{H}$ και του διανύσματος $\mathbf{c}$ το νέο διάνυσμα $\mathbf{x}^{n+1}$. Με τον ίδιο τρόπο αποκτώνται και οι επακόλουθοι όροι της σειράς. Εάν ο όρος $\mathbf{x}^{n+1}$ εξαρτάται μόνο από τον αμέσως προηγούμενό του, δηλαδή τον $\mathbf{x}^n$, τότε η διαδικασία χαρακτηρίζεται ως ενός βήματος ή πρώτου βαθμού. Το μητρώο $\mathbf{H}$ είναι το χαρακτηριστικό μητρώο της επαναληπτικής διαδικασίας και διαφέρει για κάθε μέθοδο (Gauss-Seidel, Jacobi κλπ).

Το αρχικό πρόβλημα για το οποίο απαιτείται λύση είναι η μητρική εξίσωση $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Εάν $\mathbf{A}$ είναι μη-μοναδιαίο, $\det[\mathbf{A}] \neq 0$ και η επαναληπτική διαδικασία είναι συμβατή με την $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ εάν:

$$\mathbf{c} = \{\mathbf{I} - \mathbf{H}\} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (63)$$

Το ότι ισχύει η σχέση αυτή προκύπτει εάν θεωρήσουμε ότι μετά τη σύγκλιση της διαδικασίας θα έχουμε:

⁴¹ τοπικό σφάλμα αποκοπής = local round-off error

$$\mathbf{x}^\infty = \mathbf{H} \mathbf{x}^\infty + \mathbf{c} \quad (64)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{c} = \{\mathbf{I} - \mathbf{H}\} \mathbf{x}^\infty \quad (65)$$

Εάν $\mathbf{x}^\infty$ είναι η λύση της $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, δηλαδή $\mathbf{x}^\infty = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, τότε προκύπτει αμέσως η (65). Εάν $\{\mathbf{I} - \mathbf{H}\}$ είναι μη-μοναδιαίο, η επαναληπτική διαδικασία είναι συμβατή εάν:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\{\mathbf{I} - \mathbf{H}^{-1}\}\mathbf{c} \quad \det\{\mathbf{I} - \mathbf{H}\} \neq 0 \quad (66)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τα δύο σκέλη της εξίσωσης $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ με $\mathbf{HD}^{-1}$, όπου $\mathbf{D}^{-1}$ είναι της ίδιας τάξης με το $\mathbf{K}$ και περιλαμβάνει μόνο τους διαγώνιους όρους του $\mathbf{K}$, θα έχουμε:

$$\mathbf{HD}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\text{και} \quad \mathbf{x} + \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{x} + \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{b}$$

Προκύπτει αμέσως η επαναληπτική διαδικασία [12]:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^n \quad (67)$$

όπου $\mathbf{H}$ είναι το χαρακτηριστικό μητρώο της. Αφαιρώντας κατά μέλη τη σχέση $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ από τη (67) αποκτάται η:

$$\mathbf{e}^{n+1} = \mathbf{M} \mathbf{e}^n \quad (68)$$

όπου $\mathbf{e}^n = \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^*$ και $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{HD}^{-1}\mathbf{A}$. Η σχέση αυτή συνδέει το σφάλμα σε διαδοχικά βήματα της διαδικασίας. Μέτρο σύγκλισης της διαδικασίας θεωρείται ο βαθμός ελάττωσης του διανύσματος σφάλματος $\mathbf{e}$. Εάν εκφράσουμε το βαθμό αυτό από τη σχέση:

$$\mathbf{e}^{n+1} = \lambda \mathbf{e}^n \quad (69)$$

τότε, αντικαθιστώντας τη σχέση (69) στην (68) έχουμε το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}]\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (70)$$

Εάν το $\mathbf{M}$ είναι διαστάσεων $N \times N$ έχουμε N ιδιοτιμές λ_i και N ιδιοδιανύσματα που καθορίζουν τον τρόπο σύγκλισης του διανύσματος $\mathbf{e}$ στο μηδέν. Μόνο το

σφάλμα που εξαρτάται από τη μέγιστη ιδιοτιμή θα μας απασχολήσει διότι αυτό καθορίζει και τον ασυμπτωτικό ρυθμό σύγκλισης της διαδικασίας.

8.5 Ο αλγόριθμος της δυναμικής χαλάρωσης

Ας ξαναθυμηθούμε τώρα τη διαδικασία της δυναμικής χαλάρωσης. Εάν αντικαταστήσουμε τη σχέση (14) στην σχέση (15) (Κεφάλαιο 11), θα έχουμε:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + a(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}) + \gamma(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}^n) \quad (71)$$

$$\text{όπου } a = \frac{2 - (ch / \rho)}{2 + (ch / \rho)} \quad (72\alpha)$$

$$\gamma = \frac{2h^2 / \rho}{2 + (ch / \rho)} \quad (72\beta)$$

Αφαιρώντας τη σχέση $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, από την (71), όπως προηγουμένως, βρίσκουμε το διάνυσμα του σφάλματος:

$$\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n = a\mathbf{e}^n - a\mathbf{e}^{n-1} - \gamma \mathbf{B}\mathbf{e}^n \quad (73)$$

όπου $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{A}$. Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως:

$$\mathbf{e}^{n+1} = [\beta \mathbf{I} - \gamma \mathbf{B}]\mathbf{e}^n - a\mathbf{e}^{n-1} \quad (74)$$

και $\beta = \alpha + 1$. Η (74) γράφεται και ως:

$$\mathbf{e}^{n+1} = \lambda_{DR} \mathbf{e}^n = \lambda_{DR}^2 \mathbf{e}^{n-1} \quad (75)$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το πρόβλημα διερεύνησης των συνθηκών ευστάθειας του αλγορίθμου με τη μορφή ανεύρεσης ιδιοτιμών, εάν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις αυτές στην (74),

$$\left[\left[\frac{\lambda_{DR}^2 - \lambda_{DR}^2 \beta + a}{\lambda_{DR} \gamma} \right] \mathbf{I} + \mathbf{B} \right] \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (76)$$

Εάν λ_{iB} είναι οι N ιδιοτιμές του $\mathbf{B}$ που δίνονται από την:

$$[\lambda_B \mathbf{I} - \mathbf{B}] \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (77)$$

τότε από τις σχέσεις (76) και (77) προκύπτει:

$$\lambda_{DR}^2 - (\beta - \gamma \lambda_B) \lambda_{DR} + a = 0 \quad (78)$$

Οι ρίζες της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

- (α) Συζυγείς μιγαδικές εάν $(\beta - \gamma \lambda_B)/2 < \alpha$
- (β) Δύο πραγματικές ίσες εάν $(\beta - \gamma \lambda_B)/2 = \alpha$
- (γ) Δύο πραγματικές άνισες εάν $(\beta - \gamma \lambda_B)/2 > \alpha$

Στην περίπτωση (α) το απόλυτο μέγεθος $|\lambda_{DR}|$ είναι ανεξάρτητο της λ_{DR} και δίνεται από τη σχέση:

$$|\lambda_{DR}| = \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2 - (ch/\rho)}{2 + (ch/\rho)}} \quad (79)$$

Οι ρίζες θα είναι πραγματικές εάν:

$$\left[\frac{ch}{\rho} \right]^2 = \frac{\lambda_{Bh}^2}{\rho} \left[4 - \frac{\lambda_{Bh}^2}{\rho} \right] \quad (80)$$

ενώ για δύο άνισες πραγματικές ρίζες το απόλυτο μέγεθος της μεγαλύτερης των δύο δίνεται από τη σχέση:

$$|\lambda_{DR}| = \left[\frac{1}{2 + \frac{ch}{\rho}} \left| 2 - \frac{\lambda_B h^2}{\rho} \right| + \sqrt{\frac{\lambda_B^2 h^4}{\rho} - \frac{4\lambda_B h^2}{\rho} + \frac{c^2 h^2}{\rho^2}} \right] \quad (81)$$

Οι βέλτιστες παράμετροι είναι αυτές που αντιστοιχούν στη βέλτιστη ασυμπτωτική σύγκλιση ή στην ελάχιστη τιμή της $|\lambda_{DR}|$. Από το Σχήμα 7 προκύπτει ότι για μία δεδομένη τιμή του λόγου $\lambda_B h^2/\rho$, η ελάχιστη τιμή της $|\lambda_{DR}|$ αντιστοιχεί σε δύο ίσες πραγματικές ρίζες. Συνεπώς η τιμή του λόγου ch/ρ που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό αντιστοιχεί στην κατάσταση της κρίσιμης απόσβεσης. Στο Σχήμα 8 περιγράφεται γραφικά η σχέση της $|\lambda_{DR}|$ με την ποσότητα $\lambda_B h^2/\rho$. Συμπεραίνουμε ότι για κρίσιμη απόσβεση οι δύο ίσες ρίζες είναι συμμετρικές περί το σημείο $\lambda_B h^2/\rho = 2$. Παρατηρούμε επίσης ότι οι ρίζες αντιστοιχούν στην μέγιστη και στην ελάχιστη ιδιοτιμή του **B**. Άρα, η ποσότητα h^2/ρ επιλέγεται έτσι ώστε οι δύο παράμετροι $\lambda_{Bmax} h^2/\rho$ και $\lambda_{Bmin} h^2/\rho$ να είναι συμμετρικές περί το 2,0. Αυτό επιτυγχάνεται με την παρακάτω σχέση:

$$\left[\frac{h^2}{\rho} \right]_{opt} = \frac{4}{\lambda_{Bmax} + \lambda_{Bmin}} \quad (82)$$

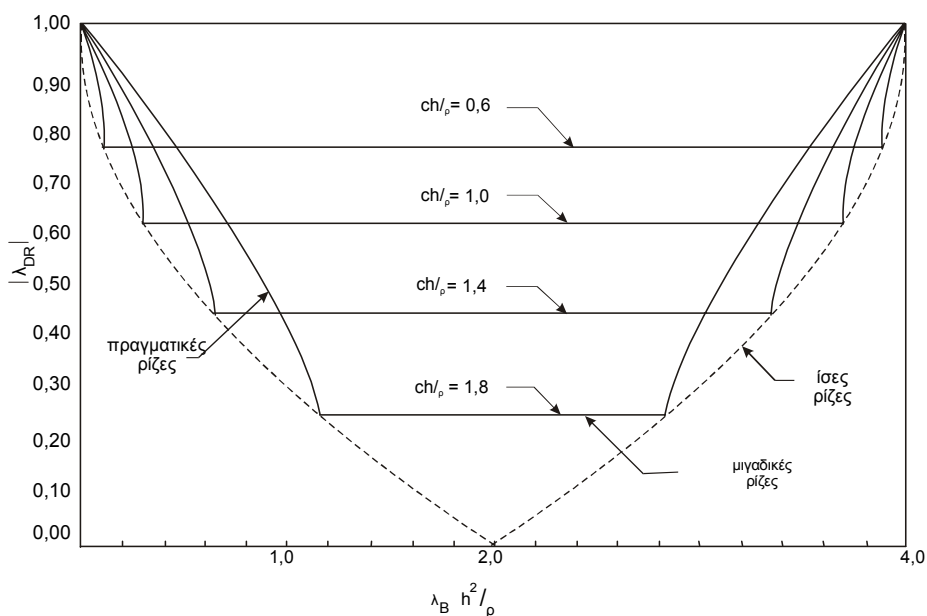
Κάνοντας τότε χρήση της (82), η (80) δίνει τη βέλτιστη τιμή για την παράμετρο ch/ρ :

$$\left[\frac{ch}{\rho} \right]_{opt} = \frac{4\sqrt{\lambda_{Bmax} - \lambda_{Bmin}}}{\lambda_{Bmax} + \lambda_{Bmin}} \quad (83)$$

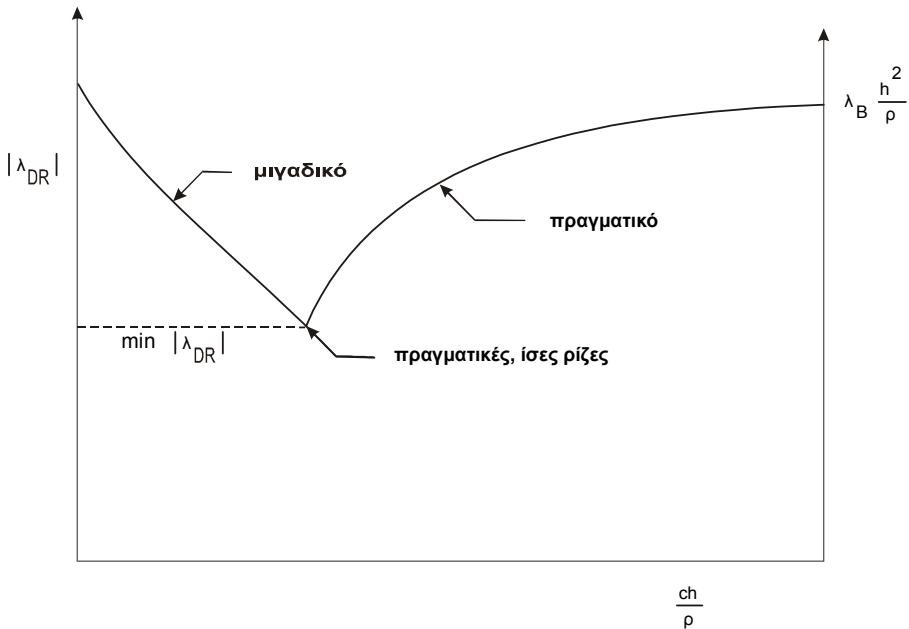
Για αυτή την τιμή του λόγου ch/ρ , ο ρυθμός σύγκλισης όλων των συνιστωσών του σφάλματος θα είναι ο ίδιος. Εάν αντικαταστήσουμε τώρα την τιμή αυτή στην (80) θα έχουμε:

$$|\lambda_{DR}|_{opt} = \left| \frac{\sqrt{p} - 1}{\sqrt{p} + 1} \right| \quad (84)$$

όπου p είναι ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη ιδιοτιμή ($\lambda_{max}/\lambda_{min}$) του μητρώου $\mathbf{B}$ (αριθμός κατάστασής του).



Σχήμα 7 Σχέση ασυμπτωτικής σύγκλισης και $\lambda_B h^2 / \rho$



Σχήμα 8 Κρίσιμη τιμή της $|\lambda_{DR}|$

Η διαδικασία θα είναι ευσταθής εφόσον η μέγιστη τιμή $|\lambda_i|$ της σχέσης (71) είναι μικρότερη της μονάδας. Εάν είναι μεγαλύτερη, αυτό σημαίνει ότι αυξάνεται τουλάχιστον μία από τις συνιστώσες του συνολικού σφάλματος σε κάθε βήμα. Ο αριθμός των βημάτων που θα απαιτηθούν για να γίνει εμφανής η αστάθεια θα εξαρτηθεί από το συνολικό αριθμό των συνιστωσών του ολικού σφάλματος που υπερβαίνουν τη μονάδα, ως επίσης και από τις αρχικές τιμές των συνιστωσών αυτών [12].

Από το Σχήμα 7 φαίνεται ότι $|\lambda_{DR}| < 1$ για κάθε τιμή του ch/ρ ενώ από το Σχήμα 8 συμπεραίνουμε ότι θα προκύψει αστάθεια εάν η παράμετρος h^2/ρ επιλεγεί έτσι ώστε $\lambda_{Bmax} h^2/\rho > 4$. Για να είναι ευσταθής η λύση, η μέγιστη ιδιοτιμή λ_{Bmax} πρέπει να είναι άνω όριο των ιδιοτιμών του μητρώου ακαμψίας $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$. Ένας άλλος τρόπος είναι να ελαττωθεί το μέγεθος του χρονικού βήματος h , ή αντίστοιχα να αυξηθεί ο συντελεστής ρ . Η ελάχιστη ιδιοτιμή λ_{Bmin} δεν επηρεάζει την ευστάθεια και ο υπολογισμός της συμβάλλει απλά στην βέλτιστη σύγκλιση της διαδικασίας.

Βιβλιογραφία

1. Lapidus L., Pinder G.F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. John Wiley & Sons, New York 1982.
2. Smith G.D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. 3rd Edition, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Clarendon Press, Oxford, 1985.

3. Ames W.F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2nd Edition, Academic Press, 1977.
4. Mitchell A.R. *Computational Methods in Partial Differential Equations*. John Wiley & Sons Ltd, London, 1969.
5. Papadrakakis M. *Gradient and Relaxation Nonlinear Techniques for the Analysis of Cable Supported Structures*. Ph.D. Thesis, Dept of Civil Engineering, The City University, London, 1978.
6. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice Hall Inc, 1976.
7. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3rd Ed, J.Wiley & Sons, New York, 1989.
8. Ralston A., Rabinowitz P., *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw Hill International Book Company, Second Edition, 1978.
9. Baran N.M. *Finite Element Analysis on Microcomputers*. McGraw Hill Book Co, New York 1988.
10. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems*. 4th edition, McGraw Hill Book Co, Europe 1989.
11. Forsythe G.E., Wasow W.R. *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. New York: J. Wiley & Sons, 1960.
12. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. 2nd Edition, Wiley Interscience Publishers, 1957.