

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Δυναμική χαλάρωση.

1. Εισαγωγή

Πολλά προβλήματα αντοχής διατυπώνονται με διαφορικές εξισώσεις, είτε κανονικές (διάτμηση, ροπές, μετατοπίσεις, λυγισμός δοκών), είτε μερικές (ελάσματα, κελύφη). Λύσεις κλειστής μορφής αποκτώνται μόνο σε ορισμένες περιπτώσεις στις οποίες οι οριακές συνθήκες και οι φορτίσεις εκφράζονται με σχετικά απλές μαθηματικές σχέσεις. Γενικές λύσεις αποκτώνται μόνο με τη χρήση προσεγγιστικών αριθμητικών μεθόδων.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών υπήρξε η πρώτη αριθμητική διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση προβλημάτων αντοχής κατασκευών. Η πρώτη εφαρμογή σε προβλήματα λεπτότοιχων ελασμάτων χρονολογείται από το 1921, όταν ο Hencky επέλυσε τις εξισώσεις ορθογωνίων ελασμάτων στο πεδίο των μεγάλων μετατοπίσεων. Η σημασία της μεθόδου είχε αναγνωρισθεί από τότε αλλά μόνο με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά την μεταπολεμική περίοδο άρχισε να βρίσκει ευρεία εφαρμογή. Οι λύσεις που αποκτώνται δεν έχουν την απόλυτη ακρίβεια των αναλυτικών λύσεων καθόσον σύμφωνα με την βασική παραδοχή της μεθόδου η κατασκευή που είναι ένα συνεχές μέσο αντικαθίσταται από ένα αντίστοιχο διακριτό, στους κόμβους του οποίου επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας. Η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης εξαρτάται λοιπόν από το κατά πόσο η προσομοίωση προσεγγίζει τις αναλυτικές εξισώσεις ισορροπίας. Σημαντικοί παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια της μεθόδου είναι η συμπεριφορά του υλικού και η πύκνωση των κόμβων.

Όταν χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι οι παράγωγοι εκφράζονται με σχέσεις διαφορών των συναρτήσεων σε καθορισμένα διαστήματα (στο χώρο ή και στο χρόνο). Σε κάθε κόμβο η εξίσωση ισορροπίας εκφράζεται σε μορφή πεπερασμένων διαφορών. Σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες, ορίζεται σύστημα εξισώσεων για τις επί μέρους λύσεις της εξίσωσης ισορροπίας στους κόμβους. Η αντιστροφή του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας γίνεται εύκολα με έτοιμες διαδικασίες σε μικρο-υπολογιστές (απαλοιφή κατά Gauss, Gauss-Seidel, κλπ).

Στην περίπτωση προβλημάτων δοκών και λεπτότοιχων ελασμάτων έχει βρεθεί ότι η χρήση γραμμικών σχέσεων για τις πεπερασμένες διαφορές σε συνδυασμό με ικανό αριθμό κόμβων αποδίδει επαρκή ακρίβεια. Η πύκνωση των κόμβων εξαρτάται από τον τρόπο αστοχίας της κατασκευής. Για παράδειγμα, αν μία δοκός αστοχεί με δύο ημικύματα κατά μήκος του άξονά της, και αν θεωρήσουμε ότι απαιτούνται τουλάχιστον τέσσερις κόμβοι για κάθε ημικύμα, ο συνολικός αριθμός

των κόμβων θα είναι τότε οκτώ. εάν αυξήσουμε τον αριθμό των κόμβων η λύση θα έχει μεγαλύτερη βέβαια ακρίβεια. Η χρήση διαφορών υψηλότερης τάξης για τέτοια προβλήματα είναι λοιπόν περιορισμένη και δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν κεφάλαιο.

2. Χρήση πεπερασμένων διαφορών

Οι πρώτες και δεύτερες παράγωγοι της συνάρτησης $f(x)$ ορίζονται ως μεταβολές της f ή των παραγώγων της ως προς x και εκφράζονται αντίστοιχα ως εξής:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta f}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1\beta)$$

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 1, όταν το διάστημα Δx δεν πλησιάζει την μηδενική τιμή αλλά διατηρεί πεπερασμένη τιμή h οι παράγωγοι στο σημείο $x=x_n$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

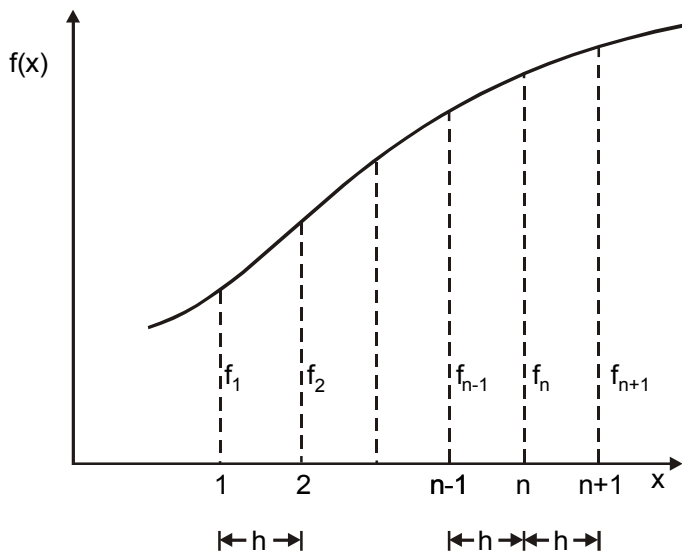
$$\left[\frac{\Delta f}{\Delta x} \right]_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{f_n - f_{n-1}}{h} \quad (2\alpha)$$

$$\left[\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} \right]_n = \frac{(f_{n+1} - f_n)/h - (f_n - f_{n-1})/h}{h} = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{h^2} \quad (2\beta)$$

Οι διαφορές υψηλότερης τάξης δίνονται από ανάλογες σχέσεις. Το σύμβολο Δ καλείται *τελεστής διαφορών*. Η πρώτη διαφορά Δf είναι $(f_n - f_{n-1})$ και η δεύτερη διαφορά $\Delta^2 f$ είναι $(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})$. Οι παράγωγοι df/dx , $d^2 f/dx^2$ κλπ παριστάνονται με αντίστοιχες πεπερασμένες διαφορές Δf , $\Delta^2 f$, κλπ διαιρούμενες με h , h^2 , κλπ. Κάνοντας χρήση διαφορετικών κόμβων, οι πεπερασμένες διαφορές εκφράζονται κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους.

2.1 Προηγούμενες διαφορές

Οι προηγούμενες διαφορές οποιασδήποτε τάξης εκφράζονται με τιμές στο σημείο i και σε σημεία προηγούμενα αυτού, δηλαδή σε σημεία με τετμημένη μικρότερη της τετμημένης f_n . Έχουμε:



Σχήμα 1 Διατύπωση πεπερασμένων διαφορών

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} \quad \Delta^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \quad (3\alpha-\beta)$$

Η γενική σχέση των προηγούμενων διαφορών δίνεται σε πινακοποιημένη μορφή στο Σχήμα 2. Στο αριστερό σκέλος του σχήματος δίνεται σχηματικά η διαδικασία αναγωγής σε διαφορές υψηλότερης τάξης. Για παράδειγμα, η σχέση

$$\Delta^2 f_n = \Delta f_n - \Delta f_{n-1}$$

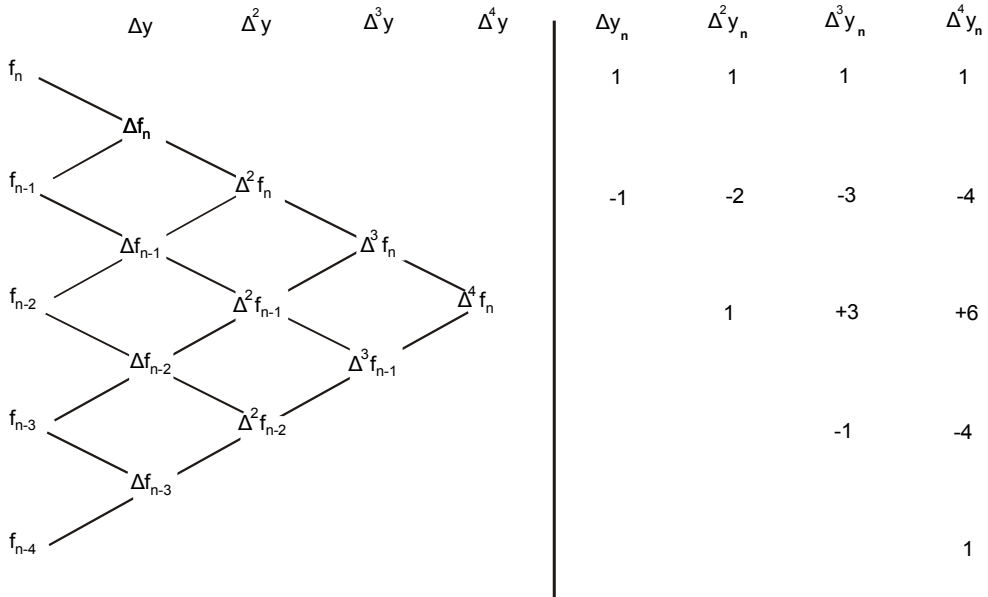
παριστάνεται με τις δύο γραμμές που συνδέουν το $\Delta^2 f_n$ με το Δf_n και το Δf_{n-1} , τα οποία με τη σειρά τους συνδέονται με τα f_n, f_{n-1} και f_{n-1}, f_{n-2} αντίστοιχα, ώστε έχουμε:

$$\Delta f_n = f_n - f_{n-1} \quad \Delta f_{n-1} = f_{n-1} - f_{n-2}$$

$$\text{Συνεπώς,} \quad \Delta^2 f_n = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} \quad (4)$$

Στο δεξιό σκέλος του Σχήματος 2 οι διαφορές $\Delta f_n, \Delta^2 f_n$ κλπ εκφράζονται ως άθροισμα των γινομένων των συντελεστών κάτω από αυτές τις διαφορές και τις αντίστοιχες συντεταγμένες f_n, f_{n-1} κλπ. Έτσι,

$$\Delta^4 f_n = f_n - 4f_{n-1} + 6f_{n-2} - 4f_{n-3} + f_{n-4}$$



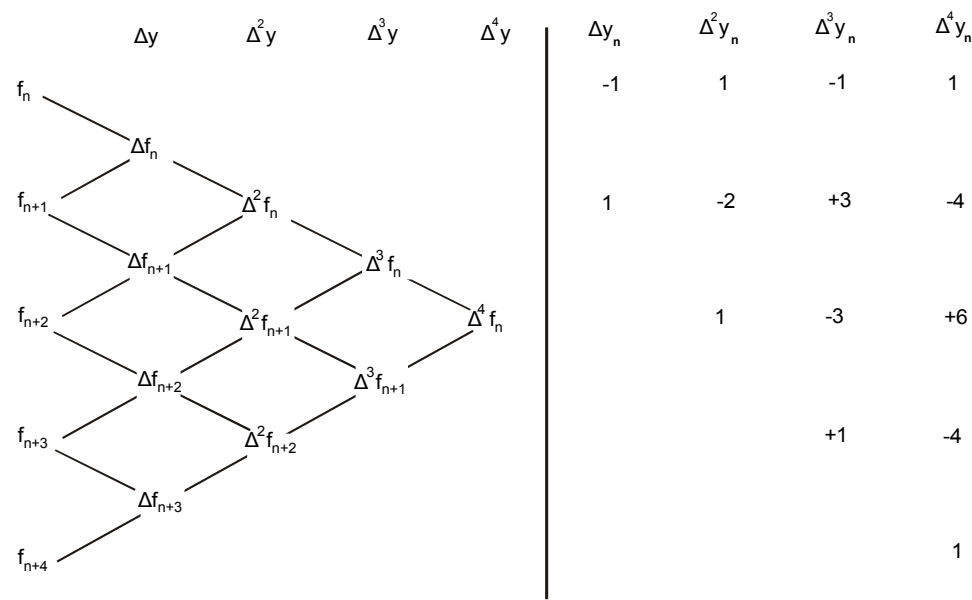
Σχήμα 2 Προηγούμενες διαφορές

2.2 Μέσες και επόμενες διαφορές

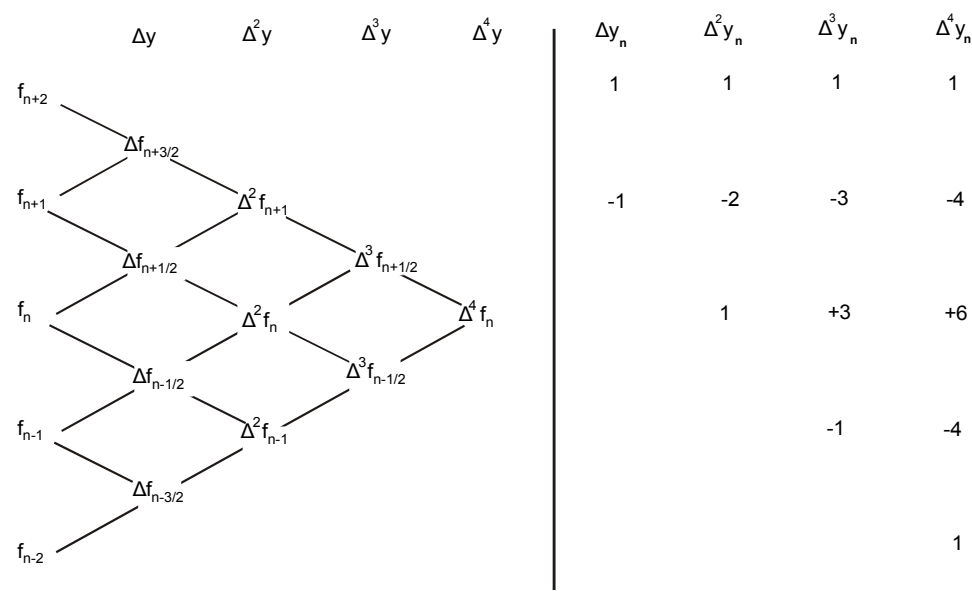
Οι τετμημένες των σημείων που χρησιμοποιούνται στις επόμενες διαφορές είναι μεγαλύτερες του κόμβου αναφοράς ενώ οι μέσες διαφορές κάνουν χρήση συμμετρικά διατεταγμένων σημείων. Ακολουθούν πίνακες και για τις δύο κατηγορίες.

Η ποσότητα $\Delta f_{n+3/2}$ είναι η διαφορά σε σημείο που ισαπέχει από τους κόμβους $x=x_{n+1}$ και $x=x_{n+2}$. Γενικά, οι συντελεστές των τεταγμένων της n -οστής διαφοράς είναι οι συντελεστές του διωνύμου $(a-b)^n$ για τις επόμενες και τις προηγούμενες διαφορές και για τις μέσες διαφορές άρτιας τάξης. Οι περιττές μέσες διαφορές (n) αποκτώνται από τη διαφορά (με διάστημα ίσο με $2h$) της $(n-1)$ -οστής διαφοράς των σημείων f_{n+1} και f_{n-1} . Οι τεταγμένες των διαφορών τρίτης τάξης είναι συνεπώς:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \right]_n &= \frac{(\Delta^2 y_{n+1})/h^2 - (\Delta^2 y_{n-1})/h^2}{2h} = \\
 &= \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_{n-1} - y_{n-2}}{2h^3}
 \end{aligned} \quad (6)$$



Σχήμα 3 Επόμενες διαφορές



Σχήμα 4 Μέσες διαφορές

3. Επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων

Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, οι κυριότερες κατηγορίες των οποίων είναι:

- Απαλοιφή κατά Gauss
- Αναγωγή Gauss-Jordan
- Μέθοδος Gauss-Seidel
- Μέθοδοι Cholesky, Doolittle, Crout
- Χαλάρωση

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι περιγράφονται στη βιβλιογραφία της αριθμητικής ανάλυσης. Στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου περιγράφεται μια μέθοδος επαναληπτικής χαλάρωσης.

Η μέθοδος της χαλάρωσης έχει συμβάλει σημαντικά στη λύση διαφορικών εξισώσεων και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην αντοχή υλικών από τον Richardson. Παρακάτω περιγράφεται μία από τις νεότερες μορφές των μεθόδων χαλάρωσης, η *δυναμική χαλάρωση*¹, η οποία έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα επιτυχής στην επίλυση εξισώσεων κατασκευών με μη-γραμμική συμπεριφορά. Το χαρακτηριστικό των μεθόδων χαλάρωσης είναι ότι δεν απαιτείται αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας αλλά ακολουθείται σταδιακή προσέγγιση στην ακριβή λύση με επαναληπτική διαδικασία.

4. Διακριτοποίηση κατασκευών με πεπερασμένες διαφορές

4.1 Μονοδιάστατα προβλήματα

Η εξίσωση ισορροπίας δοκού υπό κατανεμημένο φορτίο είναι η παρακάτω:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad \text{ή} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (7)$$

όπου M = καμπτική ροπή (θετική όταν θλίβεται η άνω ίνα)

y = μετατόπιση (θετική προς τα άνω)

Οι παραπάνω εξισώσεις εκφράζονται ως πεπερασμένες διαφορές με την παρακάτω μορφή:

$$M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1} = h^2 q_i \quad (8a)$$

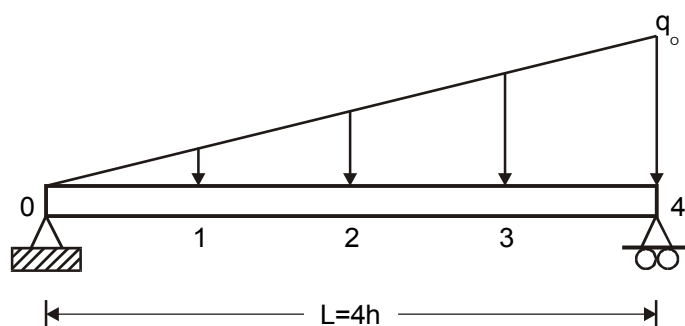
¹ δυναμική χαλάρωση = dynamic relaxation

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 \frac{M_i}{EI} \quad (8\beta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις και οι οριακές συνθήκες θα συνδυασθούν ώστε να διατυπωθεί ένα σύστημα εξισώσεων με αριθμό ίσο προς τον αριθμό των αγνώστων.

Παράδειγμα

Η δοκός του σχήματος έχει μήκος L και φέρει γραμμικά αυξανόμενο κατανεμημένο φορτίο με ελάχιστη τιμή 0 και μέγιστη τιμή q_0 στο δεξιό άκρο. Να αποκτηθούν οι κατανομές των καμπτικών ροπών και των μετατοπίσεων.



Σχήμα 5 Αμφίερστη δοκός υπό κατανεμημένο φορτίο

Λύση

(α) Η δοκός υποδιαιρείται σε τέσσερα διαστήματα. Οι οριακές συνθήκες των δυνάμεων είναι $M_0=M_4=0$. Η διατύπωση των σχέσεων για την ισορροπία στα σημεία $x=h$, $2h$, και $3h$ οδηγεί στο παρακάτω σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους:

$$0 - 2M_1 + M_2 = -h^2 \frac{q_0}{4} \quad (9\alpha)$$

$$M_1 - 2M_2 + M_3 = -h^2 \frac{q_0}{2} \quad (9\beta)$$

$$0 - 2M_3 + M_2 = -h^2 \frac{3q_0}{4} \quad (9\gamma)$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει τις εξής τιμές:

$$M_1 = 0,625q_0h^2 \quad (10\alpha)$$

$$M_2 = q_0h^2 \quad (10\beta)$$

$$M_3 = 0,873q_0h^2 \quad (10\gamma)$$

Το σφάλμα των παραπάνω τιμών είναι μηδενικό, διότι μόνο για την τέταρτη παράγωγο και ανώτερες προκύπτει αριθμητικό σφάλμα. Στην περίπτωση αυτή οι παράγωγοι αυτές είναι μηδέν.

(β) Για να αποκτηθούν οι μετατοπίσεις καταστρώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες των μετατοπίσεων ($y_0=y_4=0$). Άρα,

$$-2y_1 + y_2 = \frac{h^2}{EI}(0,625q_0h^2) \quad (11\alpha)$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{h^2}{EI}(q_0h^2) \quad (11\beta)$$

$$y_2 - 2y_3 = \frac{h^2}{EI}(0,873q_0h^2) \quad (11\gamma)$$

Επιλύοντας, αποκτώνται οι μετατοπίσεις της δοκού:

$$y_1 = -0,00463(q_0L^4/EI) \quad (12\alpha)$$

$$y_2 = -0,00682(q_0L^4/EI) \quad (12\beta)$$

$$y_3 = -0,00513(q_0L^4/EI) \quad (12\gamma)$$

Τα αποτελέσματα της αντίστοιχης θεωρητικής λύσης του προβλήματος είναι:

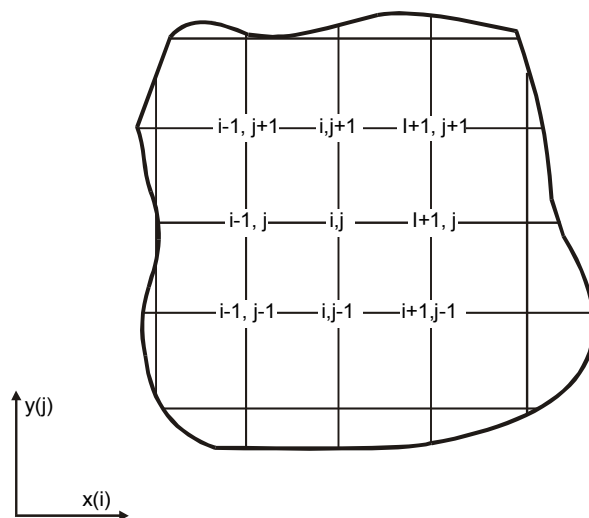
$$y_1 = -0,00443(q_0L^4/EI) \quad (13\alpha)$$

$$y_2 = -0,00652(q_0L^4/EI) \quad (13\beta)$$

$$y_3 = -0,00486(q_0L^4/EI) \quad (13\gamma)$$

4.2 Πεπερασμένες διαφορές σε δύο διαστάσεις

Έστω συνάρτηση f , όπου $f=f(x, y)$. Οι τιμές των πεπερασμένων διαφορών της f στο σημείο (i, j) του πλέγματος του Σχήματος 6 θα εξαρτηθούν από τις τιμές που λαμβάνει η f σε πεπερασμένες αποστάσεις από το σημείο i, j στις διευθύνσεις x, y . Το πλέγμα αυτό είναι ορθογώνιο, δύο διαστάσεων και τα διαστήματα Δx και Δy στις δύο κατευθύνσεις είναι ίσα.



Σχήμα 6 Ορθογώνιο πλέγμα με ίσα διαστήματα ($\Delta x = \Delta y$)

Οι μέσες διαφορές που αντιστοιχούν στο σημείο (i, j) είναι:

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x} = \frac{f(i+1, j) - f(i-1, j)}{2\Delta x} \quad (14\alpha)$$

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta y} = \frac{f(i, j+1) - f(i, j-1)}{2\Delta y} \quad (14\beta)$$

$$\frac{\Delta^2 f_i}{\Delta x^2} = \frac{f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j)}{2\Delta x^2} \quad (14\gamma)$$

$$\frac{\Delta^2 f_i}{\Delta y^2} = \frac{f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{2\Delta y^2} \quad (14\delta)$$

Η εξίσωση Laplace και η διαρμονική εξίσωση της συνάρτησης $f(x, y)$ είναι:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

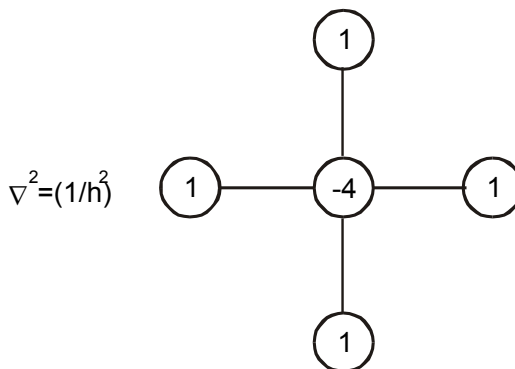
Αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (14γ) και (14δ) η εξίσωση Laplace εκφράζεται με πεπερασμένες διαφορές ως εξής:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &\approx \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 f}{\Delta y^2} = \\ &= \frac{f(i+1, j) - 2f(i, j) + f(i-1, j) + f(i, j+1) - 2f(i, j) + f(i, j-1)}{h^2}\end{aligned}\quad (15)$$

εάν $h=\Delta x=\Delta y$. Το σφάλμα είναι τάξεως h^2 . Ένας εναλλακτικός τρόπος παρουσίασης της παραπάνω σχέσης δίνεται παρακάτω:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (16)$$

Αντίστοιχα, οι συντελεστές των διαφορών της διαρμονικής εξίσωσης και η χωρική αντιστοιχία τους δίνονται από το παρακάτω σκαρίφημα.



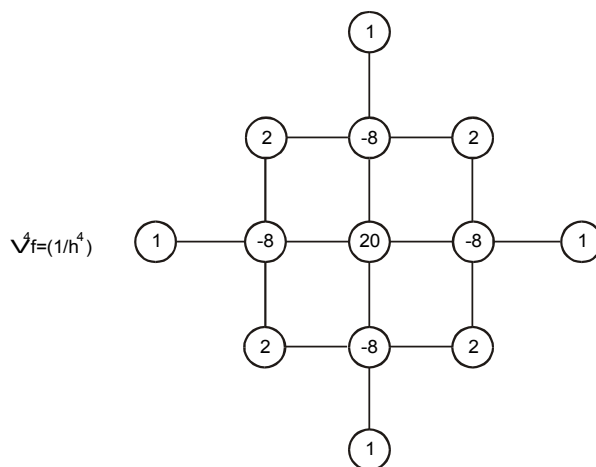
4.2.1 Λεπτά ορθογώνια ελάσματα υπό κάθετη (καμπτική) φόρτιση

Η εξίσωση ισορροπίας λεπτών ορθογωνίων ελασμάτων υπό κάθετη φόρτιση $q(x)$ ανά μέτρο επιφάνειας είναι $D\nabla^4 w = q$ όπου:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (17)$$

κατά τη θεωρία των μικρών μετατοπίσεων. Στην παραπάνω σχέση D είναι ο συντελεστής καμπτικής ακαμψίας ενώ w είναι η μετατόπιση κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος. Οι καμπτικές ροπές M_x , M_y και οι τέμνουσες δυνάμεις Q_x , Q_y ανά μέτρο μήκους πλευράς δίνονται από τις σχέσεις που περιλαμβάνονται στο

βιβλίο *Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου. Θέματα Τοπικής Αντοχής* (Κεφάλαιο 4).



Η εξίσωση διαφορών δίνεται από το παραπάνω πλέγμα. Στην παρούσα περίπτωση ο σταθερός όρος ισούται με $h^4 q_0/D$, όπου h είναι το διάστημα στις δύο κατευθύνσεις.

Η λύση του προβλήματος αποκτάται με την διατύπωση ενός συστήματος εξισώσεων το οποίο επιλύεται για συγκεκριμένες οριακές συνθήκες στα σύνορα του ελάσματος. Αποκτώνται έτσι οι τιμές των μετατοπίσεων σε όλους τους κόμβους. Οι καμπτικές ροπές και οι τέμνουσες δυνάμεις αποκτώνται από τις αντίστοιχες σχέσεις, εκφρασμένες ως εξισώσεις διαφορών.

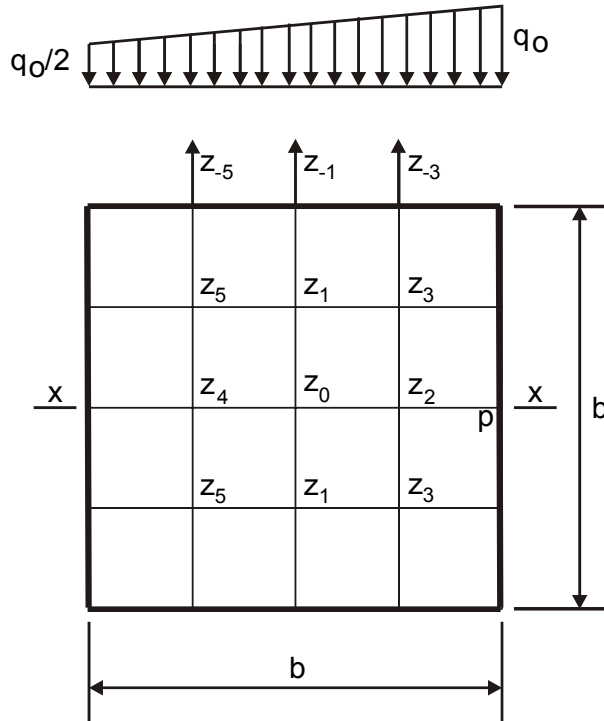
Παράδειγμα 1

Ένα απλά εδρασμένο τετράγωνο έλασμα πλευράς b φέρει φορτίο τραπεζοειδούς κατανομής (Σχήμα 7). Το έλασμα υποδιαιρείται σε τέσσερα διαστήματα σε κάθε κατεύθυνση, με διάστημα $h=b/4$. Να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις και οι καμπτικές ροπές στους κόμβους του ελάσματος.

Λύση

Λόγω συμμετρίας, οι κόμβοι αριθμούνται όπως δείχνει το Σχήμα 7. Για κάθε εσωτερικό κόμβο, καταστρώνεται μία εξίσωση διαφορών. Σημειώνεται ότι απαιτούνται και κόμβοι εκτός των συνόρων του ελάσματος (*πλασματικοί*) για τον ορισμό των οριακών συνθηκών. Οι κόμβοι αυτοί συμβολίζονται $w_{ext}(1)$, $w_{ext}(2)$ κλπ, ενώ οι αντίστοιχοι εσωτερικοί $w_{int}(1)$, $w_{int}(2)$ κλπ. Οι οριακές συνθήκες στα άκρα του ελάσματος είναι:

1. $w_b=0$ για $x=0, b$ και $y=0, b$
2. $M_x=0$ για $x=0, b$
3. $M_y=0$ για $y=0, b$



Σχήμα 7 Απλά εδρασμένο έλασμα υπό κατανεμημένο φορτίο $q(x)$

Από τη συνθήκη 2 έχουμε $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ για το σημείο p . Συνεπώς,

$$w_{int}(2) - 2w_b + w_{ext}(20) = 0$$

Άρα $w_{ext}(2) = -w_{int}(2)$ (απλή έδραση). Βλέπουμε ότι, για απλά εδρασμένες πλευρές, η πλασματική μετατόπιση έχει το ίδιο μέγεθος αλλά αντίθετο πρόσημο με την αντίστοιχη μετατόπιση στο εσωτερικό του ελάσματος. Για πακτωμένες πλευρές, ισχύει $w_{ext} = w_{int}$. Για το παρόν πρόβλημα, οι εξισώσεις διαφορών που συνιστούν το σύστημα προς επίλυση είναι:

$$\begin{aligned} 20w_0 - 8(2w_1 + w_2 + w_4) + 2(2w_3 + 2w_5) &= 0,75q_0h^4/D \\ 20w_1 - 8(w_3 + w_0 + w_5) + 2(w_2 + w_4) + 1(w_1 - w_1) &= 0,75q_0h^4/D \\ 20w_2 - 8(2w_3 + w_0) + 2(w_1 + w_1) + 1(w_4 - w_2) &= 0,875q_0h^4/D \\ 20w_3 - 8(w_1 + w_2) + 2(w_0) + 1(w_3 + w_5 - w_3 - w_3) &= 0,875q_0h^4/D \\ 20w_4 - 8(w_0 + 2w_5) + 2(w_1 + w_1) + 1(w_2 - w_4) &= 0,625q_0h^4/D \\ 20w_5 - 8(w_1 + w_4) + 2(w_0) + 1(w_5 - w_5 + w_3 - w_3) &= 0,625q_0h^4/D \end{aligned}$$

$$\text{ή,} \quad \begin{matrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{matrix}$$

$$[w] = q_0 \frac{h^4}{D} \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 0,875 \\ 0,875 \\ 0,625 \\ 0,625 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & -16 & -8 & +4 & -8 & +4 \\ -8 & 0 & +2 & -8 & +2 & -8 \\ -8 & +4 & +19 & -16 & +1 & 0 \\ +2 & -8 & -8 & +19 & 0 & +1 \\ -8 & +4 & +1 & 0 & +19 & -16 \\ +2 & -8 & 0 & +1 & -8 & +19 \end{bmatrix}$$

Οι μετατοπίσεις $w = [w_0, w_1, \dots, w_5]^T$ υπολογίζονται επιλύνοντας το παραπάνω σύστημα. Οι σχέσεις διαφορών που απαιτούνται για να ευρεθούν οι καμπτικές ροπές και οι τέμνουσες δυνάμεις είναι:

$$M_x = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]$$

$$Q_x = -D \left[\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} + \frac{\Delta^3 w}{\Delta x \Delta y^2} \right]$$

$$Q_y = -D \left[\frac{\Delta^3 w}{\Delta y^3} + \frac{\Delta^3 w}{\Delta y \Delta x^2} \right]$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} &= \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right] = \\ &= \left[\frac{w(i+1, j) - w(i, j)}{h} - \frac{w(i, j) - w(i-1, j)}{h} \right] / h = \\ &= \frac{w(i+1, j) - 2w(i, j) + w(i-1, j)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} &= \frac{\Delta}{\Delta y} \left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right] = \\ &= \left[\frac{w(i, j+1) - w(i, j)}{h} - \frac{w(i, j) - w(i, j-1)}{h} \right] / h = \\ &= \frac{w(i, j+1) - 2w(i, j) + w(i, j-1)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\text{και} \quad \frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} = \frac{\Delta}{\Delta x} \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]$$

$$\frac{\Delta^3 w}{\Delta y^3} = \frac{\Delta}{\Delta y} \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]$$

Παράδειγμα 2

Το έλασμα του σχήματος φέρει ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q N/m². Να διακριτοποιηθεί η κατασκευή με διαστήματα διαστάσεων 5m, να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας και να αποκτηθούν σχέσεις για τις καμπτικές ροπές M_x και M_y , M_{xy} , και M_{yx} στο σημείο H, συναρτήσει των μετατοπίσεων.

Λύση

Η ελαστική στήριξη κατά μήκος της πλευράς $ΓΔ$ περιορίζει πλήρως τις μετατοπίσεις κάθετα στην πλευρά ενώ αναπτύσσεται καμπτική ροπή k Nm ανά μέτρο πλευράς ανά ακτίνιο περιστροφής της πλευράς. Στο σημείο Θ περιορίζεται επίσης η κάθετη μετατόπιση του ελάσματος λόγω της παρουσίας στύλου. Η καμπτική ακαμψία της πλευράς ισούται με D Nm.

Η εξίσωση ισορροπίας είναι $D\nabla^4 w = q$. Η εξίσωση αυτή ισχύει σε όλα τα σημεία του ελάσματος και συνεπώς στο σημείο 5 θα έχουμε:

$$20w_5 - 8(w_6 + w_{10} + w_b + w_c) + 2(w_b + w_\Theta + w_b + w_A) + (w_7 + w_{14} + w_4 + w_1) = qh^4 / D$$

Εφόσον $w_b = w_\Theta = w_A = 0$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$20w_5 - 8(w_6 + w_{10}) + (w_7 + w_{14} + w_4 + w_1) = qh^4 / D$$

Η εξίσωση ισορροπίας εφαρμόζεται σε όλους τους υπόλοιπους δέκα εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος, δηλ. τα σημεία 6, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 21 και 22. Αποκτάται έτσι ένα σύστημα 11 εξισώσεων ισορροπίας που περιλαμβάνουν όμως και άλλους 14 πλασματικούς κόμβους. Έχουμε λοιπόν συνολικά 25 αγνώστους και απαιτούνται επομένως άλλες 14 σχέσεις που ορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Πακτωμένες πλευρές. Κατά μήκος των πλευρών AB και $BΓ$ οι μετατοπίσεις και οι κλίσεις είναι ίσες με το μηδέν, δηλαδή,

$$w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

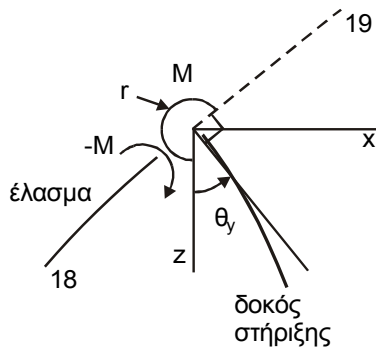
δηλ. $w_{εσ} - w_{εζ} = 0$

Η ίδια σχέση ισχύει για οκτώ σημεία κατά μήκος των πλευρών AB και $BΓ$.

Απλά εδρασμένες πλευρές. Για τις απλά εδρασμένες πλευρές αποκτάται μία αντίστοιχη σχέση, $w_{εζ} = w_{εσ}$ εφόσον $M_{x(y)} = 0$ για τις πλευρές AZ , EZ . Συνολικά πέντε σημεία βρίσκονται κατά μήκος των δύο αυτών πλευρών.

Ελαστική στήριξη. Η συνθήκη της ελαστικής στήριξης ορίζεται από σχέση της μορφής:

$$M = -k \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{k}{2h} (w_{19} - w_{18})$$



Σχήμα 9 Ελαστικά στήριζόμενο έλασμα

Η θετική φορά της ροπής M_x είναι:

$$M_x = -D \left(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu \partial^2 w / \partial y^2 \right) = -D \partial^2 w / \partial x^2$$

εφόσον $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι οι φορές των ροπών που ασκούνται στο έλασμα και στη δοκό στήριξης έχουν αντίθετα πρόσημα. Άρα,

$$-\frac{k}{2h} (w_{19} - w_{18}) = D \frac{w_{19} + w_{18}}{h^2}$$

εφόσον $w_b = 0$, δηλαδή,

$$w_{19} = w_{18} \left[\frac{1 - 2D / kh}{1 + 2D / kh} \right]$$

Αποκτώνται έτσι άλλες δύο εξισώσεις, που προστιθέμενες στις υπόλοιπες συμπληρώνουν τον απαιτούμενο αριθμό των 25. Το σύστημα αυτό επιλύεται με

υπολογιστική διαδικασία και προσδιορίζονται οι μετατοπίσεις σε όλη την επιφάνεια του ελάσματος. Από τις μετατοπίσεις μπορούμε να αντικαταστήσουμε στις σχέσεις που εκφράζουν τις καμπτικές ροπές στο σημείο Θ και να τις υπολογίσουμε άμεσα.

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_H \text{ Nm ανά μέτρο πλάτους πλευράς}$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_H \text{ Nm ανά μέτρο πλάτους πλευράς}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M_{yx} \text{ Nm ανά μέτρο πλάτους πλευράς}$$

Οι σχέσεις (14γ) και (14δ) δίνουν:

$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_H \cong \frac{1}{h^2} \{w_6 - 2w_5 + w_b\} = \frac{1}{h^2} \{w_6 - 2w_5\}$$

$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]_H \cong \frac{1}{h^2} \{w_{10} - 2w_5\}$$

Οι μέσες διαφορές στο σημείο Η είναι:

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right]_H \cong \frac{1}{2h} \{w_{10} - w_b\}$$

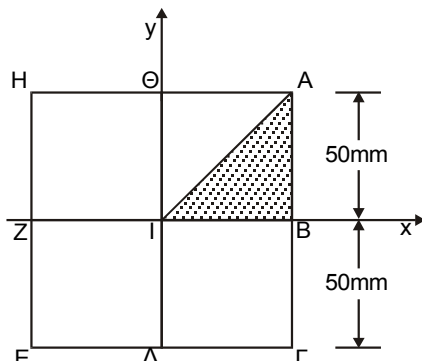
$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x \Delta y} \right]_H \cong \frac{1}{4h^2} \{(w_Q - w_b) - (w_b - w_A)\} = 0$$

$$\text{Άρα, } M_y = -\frac{D}{h^2} \{\nu(w_{10} - 2w_5) + (w_6 - 2w_5)\} \text{ (Nm/m)}$$

$$M_x = -\frac{D}{h^2} \{(w_{10} - 2w_5) + \nu(w_6 - 2w_5)\} \text{ (Nm/m)}$$

$$\text{και } M_{xy} = M_{yx} = 0$$

Παράδειγμα 3



Σχήμα 10 Διατομή τετράγωνης δοκού

Σε δοκό με τετράγωνη διατομή πλευράς 100 mm ασκείται στρεπτική ροπή 100 kNm. Να διακριτοποιηθεί η διατομή με πλέγμα πεπερασμένων διαφορών και να:

- (α) Διατυπωθεί η εξίσωση Laplace $\nabla^2 \varphi = -2$ ως σύστημα εξισώσεων και να υπολογισθούν οι τιμές της συνάρτησης στρέψης φ σε όλους τους κόμβους.
- (β) Υπολογισθεί η σταθερά στρέψης St Venant της διατομής (J).
- (γ) Υπολογισθεί η γωνία στρέψης θ , εάν $G=80000 \text{ N/mm}^2$.
- (δ) Υπολογισθούν οι διατμητικές τάσεις στα σημεία A , B , I και Θ .

Λύση

(α) Αν λάβουμε υπόψη τις συμμετρίες γεωμετρίας και φόρτισης μπορούμε να περιορίσουμε την ανάλυση στο ένα όγδοο της διατομής. Επιλέγουμε διάστημα 10 mm και υποδιαιρούμε τη διατομή όπως δείχνει το Σχήμα 11. Ακόλουθα αριθμούμε τους κόμβους. Η εξίσωση Laplace σε πεπερασμένη μορφή δίνεται από τη σχέση (15), όπου $h=10 \text{ mm}$. Εάν εφαρμόσουμε την εξίσωση Laplace $\nabla^2 \varphi = -2$ στον κόμβο (2, 2), έχουμε:

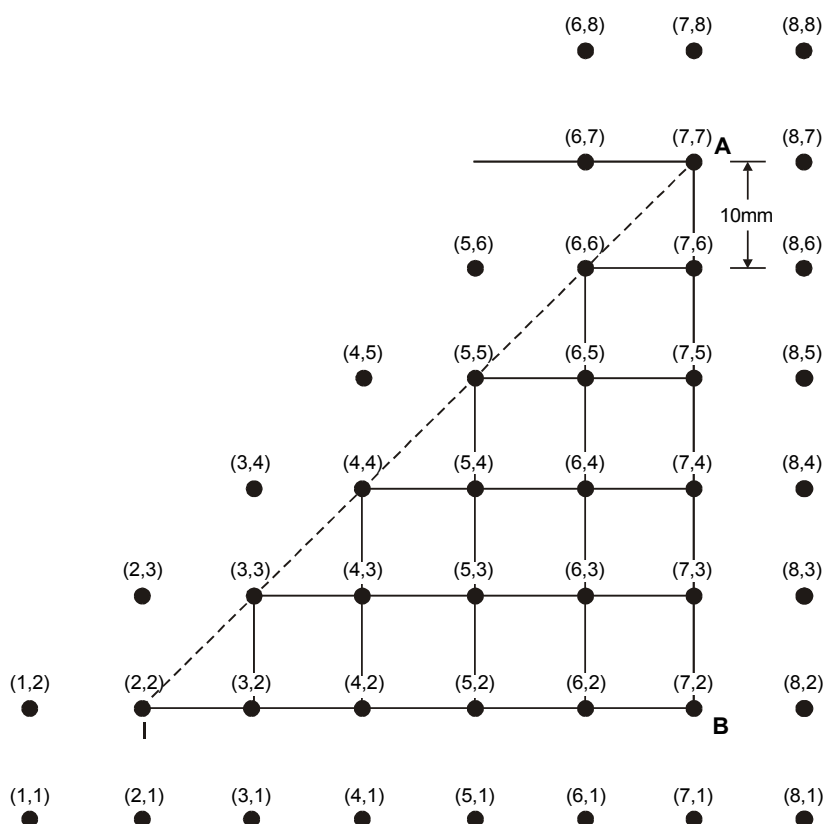
$$\varphi(3,2) + \varphi(1,2) + \varphi(2,3) + \varphi(2,1) - 4\varphi(2,2) = -2h^2 = -200$$

Κατά μήκος των πλευρών AB και $A\Theta$ ισχύει $\varphi=0$. Επίσης, λόγω συμμετρίας, $\varphi(1,2)=\varphi(2,3)=\varphi(2,1)=\varphi(3,2)$. Συνεπώς,

$$4\varphi(3,2) - 4\varphi(2,2) = -200$$

Παρόμοια, $\varphi(3,4)=\varphi(4,3)$ και $\varphi(4,5)=\varphi(5,4)$. Εάν εφαρμόσουμε την εξίσωση Laplace σε όλους τους κόμβους ((2, 2) έως (6, 6)) αποκτάμε σύστημα 15 εξισώσεων με αγνώστους τις τιμές της συνάρτησης στρέψης. Η αντίστοιχη μη-τρωική εξίσωση είναι $A\varphi=B$, η οποία δίνεται αναλυτικά στην επόμενη σελίδα. Σε

435



Σχήμα 11 Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών σε ένα όγκοο της διατομής

συνέχεια γίνεται αντιστροφή του μητρώου A με μία από τις συνηθισμένες μεθόδους (για παράδειγμα απαλοιφή κατά Gauss) για να αποκτηθεί η παρακάτω λύση:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 14,6 & 13,6 & 14,1 & 10,9 & 12,2 & 12,6 & 6,86 & 8,59 & 9,56 & 9,86 & 2,56 & 4,13 \\ 5,08 & 5,60 & 5,77 \end{bmatrix}$$

(β) Η σταθερά J δίνεται από τη σχέση:

$$J = 2 \int \varphi dA$$

της διατομής δοκού και συνεπώς απαιτείται να υπολογισθεί ο όγκος του χώρου που ορίζεται από τις συντεταγμένες της συνάρτησης φ . Εάν η περιοχή ABI υποδιαιρεθεί σε τρίγωνα, η σταθερά J θα βρεθεί με άθροιση των επί μέρους όγκων των τριγώνων. Η σταθερά στρέψης J όλης της διατομής ισούται με 8 φορές τη σταθερά που αντιστοιχεί στο τρίγωνο ABI .

Ο όγκος ενός στοιχείου του χώρου θα είναι τότε ίσος με το εμβαδόν της βάσης επί το μέσο ύψος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το εμβαδόν της βάσης ισούται με $10^2/2$, και συνεπώς για το τρίγωνο με ακμές στους κόμβους (2,2), (3, 2) και (3, 3) ο όγκος θα είναι:

$$(100/6)(\varphi(2, 2)+\varphi(3, 2)+\varphi(3, 3))/3$$

Για τα τρίγωνα με ακμές στους κόμβους (3, 2), (4, 2), (4, 3) και (3, 3), (4, 3) (3, 2) οι αντίστοιχοι όγκοι είναι:

$$\text{Όγκος} = (100/6)(\varphi(3,2)+\varphi(4,2)+\varphi(4,3))/3$$

$$\text{Όγκος} = (100/6)(\varphi(3,3)+\varphi(4,3)+\varphi(3,2))/3$$

Το άθροισμα των μερικών όγκων ισούται με το συνολικό όγκο στο χώρο ABI . Όγκος χώρου ABI :

$$V_{ABI} = \frac{100}{6} (\varphi(2, 2) + 3\varphi(3, 3) + 3\varphi(3, 2) + 3\varphi(4, 4) + \dots + 6\varphi(6, 3) + 3\varphi(6, 2))$$

Για ολόκληρη τη διατομή,

$$J = 2 \int \varphi dA = (16) V_{ABI} = (1,36)(10^7) \text{ mm}^4$$

(γ) Η γωνία στρέψης κατά St.Venant δίνεται από τη σχέση:

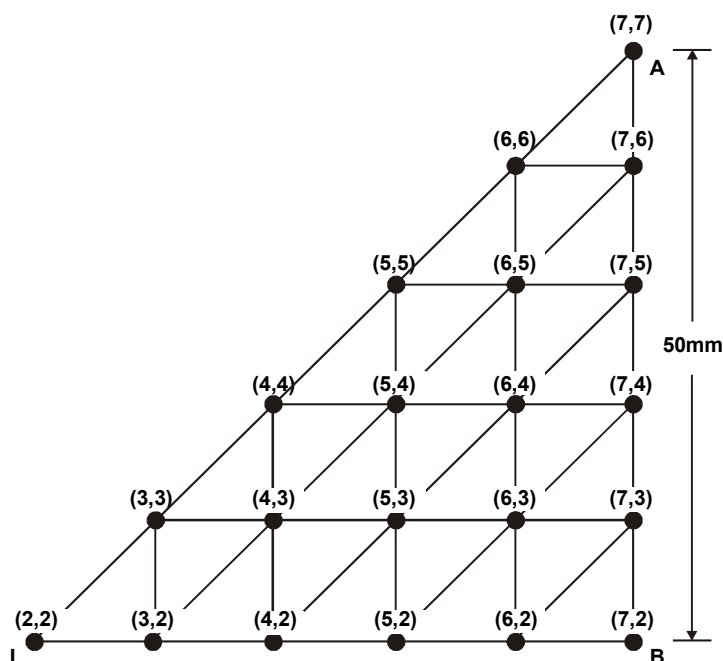
$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T}{GJ} = 100.000(\text{Nmm}) / (80.000)(\text{N/mm}^2)(1,36)(10)^7(\text{mm}^4) = \\ &= 9,16 \times 10^{-8} \text{ rad/mm} \end{aligned}$$

(δ) Οι διατμητικές τάσεις στα σημεία A , B , I και Θ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tau_{zx} = \frac{T \partial \varphi}{J \partial y}$$

Στο σημείο B $\tau_{zx}=0$ διότι $\partial \varphi / \partial y = 0$

$$\begin{aligned} \tau_{zy}(B) &\approx - (T/J)(\varphi(B)-\varphi(B)-\varphi(6,2))/h = \\ &= -(100000/(1,36)(10)^7(10))(0-9,86)(100) = \\ &= +0,725 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$



Σχήμα 12 Τριγωνικό πλέγμα για τον υπολογισμό της φ

Το θετικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η τ_{zy} έχει θετική φορά περί τον άξονα y , δηλαδή η φορά της εξωτερικής ροπής T είναι θετική, όπως υποθέσαμε αρχικά. (Η θετική φορά για τη στρεπτική ροπή είναι αντίθετα εκείνης των δεικτών του ρολογιού.) Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι τάσεις στα σημεία A και I .

4.3.2 Βελτίωση της απόδοσης λύσεων με πεπερασμένες διαφορές

Τα σφάλματα που προκύπτουν κατά την διακριτοποίηση μιας κατασκευής με πεπερασμένες διαφορές περιγράφονται στο Κεφάλαιο 12. Εάν θελήσουμε να περιορίσουμε τα σφάλματα αυτά πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διατύπωση των σχέσεων διαφορών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του Παραδείγματος 1 γράφεται ως εξής:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left[\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} \right]_i = \frac{1}{EI} M_i \quad (18)$$

$$\text{ή} \quad y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{EI} M_i + \frac{1}{12} (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (19)$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε τη σχέση (14δ) με αυτήν. Εάν συμπεριλάβουμε τον όρο του σφάλματος:

$$(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2})/12$$

στο σημείο 2 και για τα δύο σημεία 1 και 3, το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας γίνεται:

$$-1,667y_1 + 0,5y_2 + 0,333y_3 = \frac{h^2}{EI} (0,625q_0h^2) \quad (20\alpha)$$

$$1,337y_1 - 2,5y_2 + 1,333y_3 = \frac{h^2}{EI} (q_0h^2) \quad (20\beta)$$

$$0,333y_1 + 0,5y_2 - 1,667y_3 = \frac{h^2}{EI} (0,873q_0h^2) \quad (20\gamma)$$

Οι λύσεις που προκύπτουν είναι:

$$y_1 = -0,00444(q_0L^4 / EI) \quad (21\alpha)$$

$$y_2 = -0,00650(q_0L^4 / EI) \quad (21\beta)$$

$$y_3 = -0,00484(q_0L^4 / EI) \quad (21\gamma)$$

και συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης, (σχέσεις 13α-γ), παρατηρούμε ότι το σφάλμα έχει περιορισθεί σημαντικά.

Όταν γίνεται χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων είναι ευκολότερο να υπολογίζεται ο διορθωτικός όρος από την προηγούμενη λύση. Η διαδικασία αυτή καλείται *σταδιακή προσέγγιση*.

Έστω τώρα ότι δεν έχουμε σταθερό διάστημα h , αλλά μεταβαλλόμενο διάστημα. Τότε, για την παρακάτω διάταξη,



τα αναπτύγματα Taylor είναι:

$$f(x+ah) = f(x) + ahf'(x) + \frac{(ah)^2}{2!} f''(x) + \frac{(ah)^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (22)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (23)$$

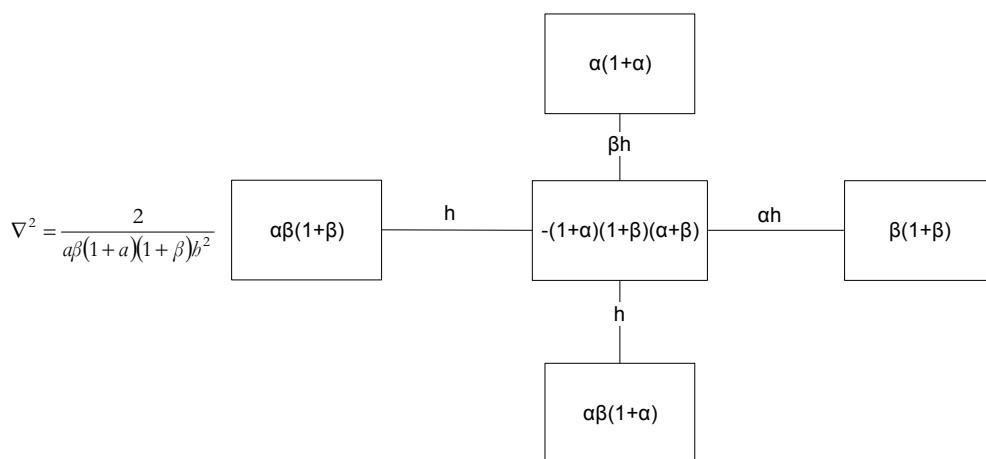
Επιλύνοντας ως προς $f''(x)$ και αντικαθιστώντας τον όρο $h^2 f''(x)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{a(1+a)h} [f(x+ah) - (1-a^2)f(x) - a^2 f(x-h)] + \text{σφάλμα τάξης } h^2 \quad (24)$$

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε:

$$f''(x) = \frac{1}{a(1+a)h^2} [f(x+ah) - (1+a)f(x) - af(x-h)] + \text{σφάλμα τάξης } h \text{ (για } a \neq 1) \quad (25)$$

Σε δύο διαστάσεις, το πλέγμα της εξίσωσης Laplace είναι:



Το σφάλμα είναι της τάξης h . Για ορθογώνιο πλέγμα με διαστήματα h στην διεύθυνση Ox και διαστήματα ah στην διεύθυνση Oy οι σχέσεις και γράφονται:

$$\frac{1}{h^4} \delta_x^4 f(i) = \frac{1}{h^4} [f(9) - 4f(1) + 6f(i) - 4f(3) + f(11)] \quad (26\alpha)$$

$$\frac{1}{(ah)^4} \delta_y^4 f(i) = \frac{1}{(ah)^4} [f(10) - 4f(2) + 6f(i) - 4f(4) + f(12)] \quad (26\beta)$$

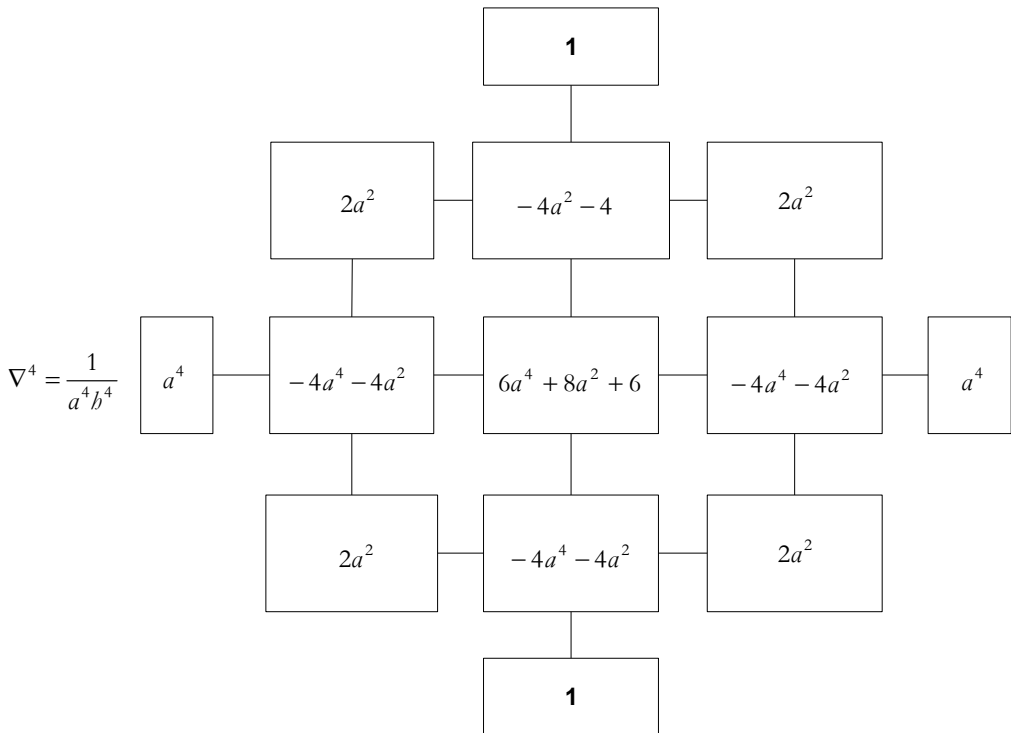
Εάν θέσουμε:

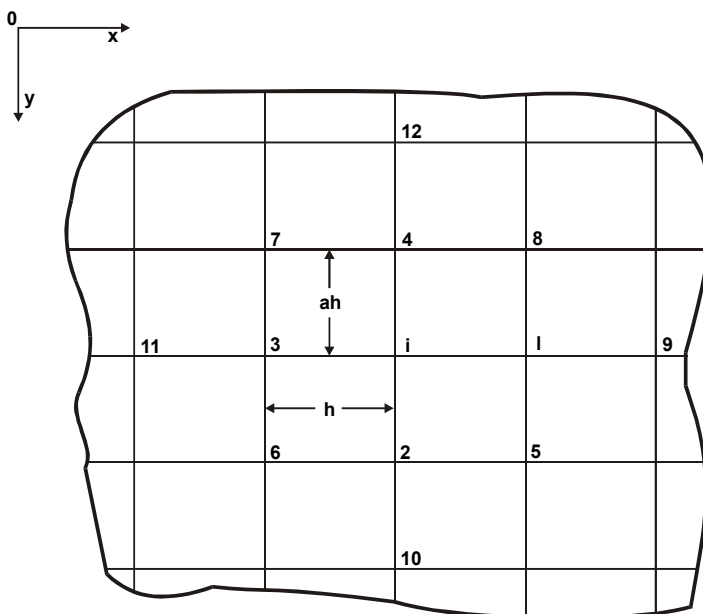
$$\delta_x^2 f(i) = f(1) - 2f(i) + f(3)$$

και $\delta_y^2 f(i) = f(2) - 2f(i) + f(4),$

$$\begin{aligned} \text{τότε, } \left[\frac{\delta_x^2}{h^2} \right] \left[\frac{\delta_y^2}{(ah)^2} \right] &= \frac{\delta_x^2}{h^2} \frac{1}{(ah)^2} [f(2) + 2f(i) + f(4)] = \\ &= \frac{1}{a^2 h^4} [\delta_x^2 f(2) - 2\delta_x^2(i) + \delta_x^2 f(4)] = \\ &= \frac{1}{a^2 h^4} \{ [f(5) - 2f(2) + f(6)] \\ &\quad - 2[f(1) - 2f(i) + f(3)] + [f(8) - 2f(4) + f(7)] \} \end{aligned} \quad (27)$$

Ο διαρμονικός τελεστής του πλέγματος του Σχήματος 13 είναι τότε:





Σχήμα 13 Πεπερασμένες διαφορές σε δύο διαστάσεις με διαφορετικά διαστήματα

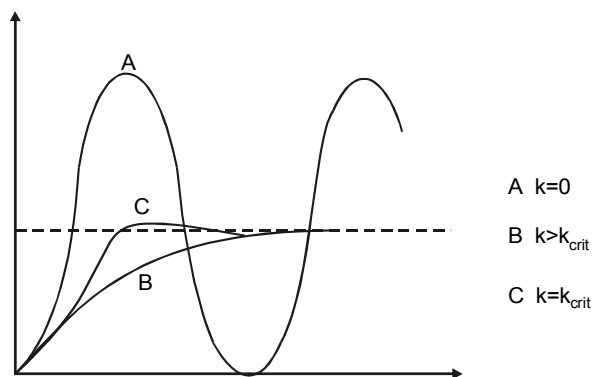
5. Η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης. Γενικές παρατηρήσεις

Η δυναμική χαλάρωση είναι μία επαναληπτική διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Αναπτύχθηκε την περίοδο 1965-75 και έχει βρει εφαρμογή στη μελέτη της μη-γραμμικής συμπεριφοράς κατασκευών. Η μέθοδος βασίζεται στη χρήση των εξισώσεων ισορροπίας και συμβιβαστού (γεωμετρίας, υλικού), οι οποίες διατυπώνονται σε πεπερασμένη μορφή. Οι οριακές συνθήκες επίσης διατυπώνονται ως διαφορές και εκφράζονται είτε ως σχέσεις μετατοπίσεων είτε ως σχέσεις φορτίων (δυνάμεων) κατά μήκος των άκρων της κατασκευής.

Ένα από τα βασικά προτερήματα της μεθόδου είναι ότι δεν απαιτούνται αρχικές παραδοχές για το πεδίο των μετατοπίσεων, και έτσι διατηρείται η γενικότητα της λύσης. Επίσης, επειδή η μέθοδος είναι επαναληπτική δεν χρειάζεται να γίνει αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας, η οποία είναι μία χρονοβόρα υπολογιστική διαδικασία (βλ. κλασική διατύπωση πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένα στοιχεία). Το βασικό μειονέκτημα της δυναμικής χαλάρωσης σε σύγκριση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι η έλλειψη γενικότητας του κώδικα. Αυτό άλλωστε χαρακτηρίζει γενικότερα όλες τις μεθόδους που βασίζονται σε πεπερασμένες διαφορές, όπως επίσης και το γεγονός ότι δύσκολα (ή τουλάχιστον δυσκολότερα από τη ΜΠΣ) γίνεται χρήση πλέγματος με μεταβαλλόμενες διαστάσεις. Το μειονέκτημα αυτό δεν επιτρέπει την απόκτηση λύσεων σε πεδία στα οποία η μεταβλητή αλλάζει ραγδαία (π.χ. συγκεντρώσεις τάσεων).

Υπάρχει όμως μία μεγάλη κατηγορία αρκετά περίπλοκων προβλημάτων για τα οποία η δυναμική χαλάρωση επιτρέπει την απόκτηση λύσεων σχετικά εύκολα. Η μέθοδος είχε χρησιμοποιηθεί αρχικά για την επίλυση των εξισώσεων παλιρροιακής κίνησης των θαλασσιών κυμάτων. Η λύση αυτού του προβλήματος έχει τη μορφή αρμονικής ταλάντωσης, βρέθηκε όμως ότι εάν προστεθεί ένας όρος απόσβεσης στην εξίσωση κίνησης αποκτώνται λύσεις για αντίστοιχα στατικά προβλήματα οι οποίες είναι αριθμητικά ευσταθείς. Το γεγονός αυτό δημιούργησε τη δυνατότητα απόκτησης λύσεων για ένα πολύ ευρύτερο φάσμα προβλημάτων. Μέχρι τώρα έχουν αποκτηθεί λύσεις εξισώσεων δοκών, δοκών-κολόνων, ελασμάτων, κελυφών και άλλων παρόμοιων κατασκευών για πολλών ειδών οριακές συνθήκες και φορτίσεις στην γραμμική ελαστική αλλά και στην ελαστο-πλαστική περιοχή.

5.1 Περιγραφή της μεθόδου



Σχήμα 14 Απόκριση γραμμικού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας με διάφορους συντελεστές απόσβεσης

Στο Σχήμα 14 εικονίζεται η δυναμική απόκριση γραμμικού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας. Η καμπύλη A αντιστοιχεί σε ελεύθερη ταλάντωση ενώ οι καμπύλες B και C αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις με απόσβεση. Συγκεκριμένα, η καμπύλη B αντιστοιχεί σε απόσβεση μεγαλύτερη της κρίσιμης ενώ η καμπύλη C αντιστοιχεί σε απόσβεση μικρότερη της κρίσιμης. Η μέθοδος της δυναμικής χαλάρωσης επιζητά την σταθερή (στατική) λύση και γι' αυτό για να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των επαναλήψεων ακολουθείται η καμπύλη C . Η καμπύλη A αποτελεί τη βάση λύσεων δυναμικών προβλημάτων.

Κατά κανόνα η τιμή του συντελεστή απόσβεσης που απαιτείται πρέπει να είναι λίγο μικρότερη της κρίσιμης. Μπορούμε να ελέγξουμε κατά πόσο ο συντελεστής απόσβεσης είναι κοντά στον απαιτούμενο από τα αποτελέσματα της ανάλυσης. Η καμπύλη B αντιστοιχεί σε συμπεριφορά με απόσβεση μεγαλύτερη της κρίσιμης και στην περίπτωση αυτή απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός επαναλήψεων.

5.2 Μαθηματική διατύπωση της μεθόδου

Ως παράδειγμα για τη διατύπωση λύσης με τη μέθοδο της δυναμικής χαλάρωσης θα θεωρήσουμε την εξίσωση ισορροπίας ορθογωνίων ελασμάτων με μικρές μετατοπίσεις. Η εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (28)$$

Εάν υποθέσουμε ότι το έλασμα φέρει δυναμικό φορτίο, τότε το δεξιό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης θα είναι διάφορο του μηδενός και θα ισούται με $p(t)$, (φορτίο), που μεταβάλλεται στο χρόνο. Σε κάθε κόμβο του ελασματος η εξίσωση κίνησης θα είναι:

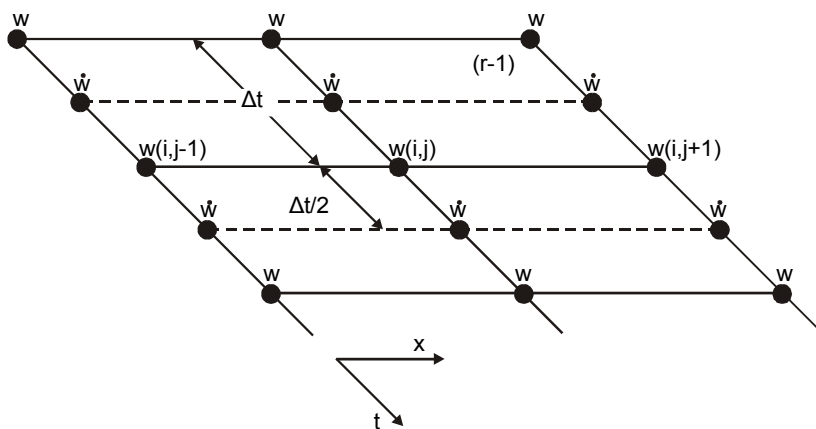
$$\rho \ddot{w} + c \dot{w} = p \quad (29\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \rho \frac{dw}{dt} + c \dot{w} = p(t) \quad (29\beta)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένες διαφορές στο χρόνο και εισάγουμε τον συντελεστή απόσβεσης k σε αδιάστατη μορφή ($k = c\Delta t/\rho$), έχουμε:

$$\varrho \left[\frac{\Delta \dot{w}}{\Delta t} + \frac{k \dot{w}}{\Delta t} \right] = p \quad (30)$$

Οι μετατοπίσεις ορίζονται σε χρόνους $t, t+\Delta t, t+2\Delta t$ κλπ, ενώ οι ταχύτητες ορίζονται σε χρόνους $t+\Delta t/2, t+3\Delta t/2, t+5\Delta t/2$ κλπ. Συνεπώς,



Σχήμα 15 Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών (χρόνος, διάστημα)

$$\Delta \dot{w} = \dot{w}_{r+1} - \dot{w}_r \quad (31\alpha)$$

$$\dot{w} = (\dot{w}_{r+1} + \dot{w}_r) / 2 \quad (31\beta)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με την εξίσωση ισορροπίας έχουμε:

$$\dot{w}_{r+1} = \frac{1-k/2}{1+k/2} \dot{w}_r + \frac{\Delta t}{\rho(1+k/2)} P \quad (32)$$

όπου το φορτίο p υπολογίζεται κάνοντας χρήση των μετατοπίσεων σε χρόνο t . Ολοκληρώνοντας τις ταχύτητες αποκτώνται οι μετατοπίσεις σε χρόνο $t+\Delta t$

$$w_{r+1} = w_r + \dot{w}_{r+1} \Delta t \quad (33)$$

Η σχέση (32) πολλαπλασιάζεται επί Δt :

$$\Delta w_{r+1} = \frac{1-k/2}{1+k/2} \Delta w_r + \frac{(\Delta t)^2}{\rho(1+k/2)} P \quad (34)$$

Η σχέση (33) εκφράζει τον αλγόριθμο της δυναμικής χαλάρωσης με απόσβεση.

5.3 Αριθμητική ευστάθεια και σύγκλιση

Μία από τις επαναληπτικές μεθόδους που δίνονται στη βιβλιογραφία είναι και η δευτεροτάξια διαδικασία του *Richardson* που εκφράζεται από τη σχέση:

$$\Delta w_{r+1} = \left[\frac{\sqrt{\lambda_{min}} - \sqrt{\lambda_{max}}}{\sqrt{\lambda_{min}} + \sqrt{\lambda_{max}}} \right]^2 \Delta w_r + \left[\frac{2}{\sqrt{\lambda_{min}} + \sqrt{\lambda_{max}}} \right]^2 P \quad (35)$$

όπου λ_{min} και λ_{max} είναι οι μικρότερες και μεγαλύτερες ιδιοτιμές του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής αντίστοιχα. Εάν συγκρίνουμε τις σχέσεις (34) και (35) παρατηρούμε ότι είναι ταυτόσημες. Μπορούμε συνεπώς να αποκτήσουμε τιμές για τις σταθερές ευστάθειας και σύγκλισης (Δt , ρ και k) εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο σχέσεων. Έχουμε:

$$\frac{(\Delta t)^2}{\rho} = \frac{4}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \quad (36\alpha)$$

$$k = \frac{4\sqrt{\lambda_{min}\lambda_{max}}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \quad (36\beta)$$

Το *θεώρημα του Gershgorin* μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το άνω όριο για την τιμή της μεγαλύτερης ιδιοτιμής ($b_G \equiv \lambda_{max}$)

$$|b| \leq b_G = \max_i \sum_{j=1}^n |S_{ij}| \quad (37)$$

Η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης στην εξίσωση ισορροπίας πλακών δίνεται στο εδάφιο που ακολουθεί. Η ανάλυση ευστάθειας της εξίσωσης ορθογωνίων λεπτότοιχων ελασμάτων με μικρές μετατοπίσεις (16) περιλαμβάνεται στο εδάφιο 2.5.5. Το αποτέλεσμα είναι:

$$b_G = 16D \left[\frac{1}{\Delta x^4} + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta y^4} \right] \quad (38)$$

και επειδή στα περισσότερα προβλήματα ισχύει $\lambda_{min} \ll \lambda_{max}$, έχουμε:

$$\frac{(\Delta t)^2}{\rho} = \frac{4}{b_G} \quad (39)$$

Από την ανάλυση ευστάθειας παίρνουμε την κρίσιμη τιμή του λόγου $\Delta t^2/\rho$. Γενικά, το όριο Gershgorin (b_G) μεταβάλλεται στον χώρο αλλά και στον χρόνο και συνεπώς για να προσδιορισθεί ο λόγος $\Delta t^2/\rho$ πρέπει είτε α) να χρησιμοποιηθεί η πραγματική τιμή της μάζας ανά μονάδα επιφάνειας (ρ) και να εκφρασθεί το διάστημα χρόνου (Δt) ως συνάρτηση του ορίου Gershgorin είτε β) να χρησιμοποιήσουμε νοητό διάστημα χρόνου (για παράδειγμα ίσο με τη μονάδα) και να θεωρηθεί το μέγεθος της πλασματικής πυκνότητας (μάζα ανά μονάδα επιφάνειας) ως το κριτήριο ευστάθειας.

Έχει βρεθεί ότι η δεύτερη μέθοδος απαιτεί μικρότερο αριθμό επαναλήψεων και συνεπώς προτιμάται σε στατικά προβλήματα. Σε δυναμικά προβλήματα όμως πρέπει να χρησιμοποιηθεί η πραγματική τιμή της μάζας ανά μονάδα επιφάνειας για να αποδοθεί η σωστή απόκριση και συνεπώς ως όριο ευστάθειας λαμβάνουμε το μέγιστο επιτρεπόμενο χρονικό διάστημα. Συνοψίζοντας, για στατικά και δυναμικά προβλήματα τα όρια ευστάθειας είναι:

$$\rho = \frac{b_G}{4} \quad (\text{εάν } \Delta t=1) \quad (40\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \Delta t = \sqrt{\frac{4\rho}{b_G}} \quad (\rho = \text{πυκνότητα υλικού}) \quad (40\beta)$$

αντίστοιχα. Η *ταχύτητα σύγκλισης* εξαρτάται από την τιμή του συντελεστή k . Όταν χρησιμοποιείται πλασματική πυκνότητα (ρ) ο συντελεστής k κείται στο πεδίο $1 > k > 0$ και η ακριβής τιμή του εξαρτάται από τα γενικότερα χαρακτηριστικά της κατασκευής (γεωμετρία, οριακές συνθήκες, διακριτοποίηση) και πιο σημαντικά από το αν η εξίσωση εκφράζει ομοεπίπεδη ή όχι μετατόπιση. Στις εξισώσεις ορθογωνίων ελασμάτων οι μετατοπίσεις u και v είναι ομοεπίπεδες ενώ η w είναι η μετατόπιση κάθετα στο επίπεδο του ελάσματος. Ο συντελεστής απόσβεσης k_w συνήθως δεν υπερβαίνει την τιμή 0,10 ενώ οι συντελεστές k_u και k_v είναι περίπου 0,15-0,25.

Εάν μελετάται η δυναμική συμπεριφορά με κρίσιμη απόσβεση τότε οι τιμές των συντελεστών απόσβεσης βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (41\alpha)$$

$$k_{cr} = 2\omega_o\Delta t = \frac{4\pi}{N} \quad (41\beta)$$

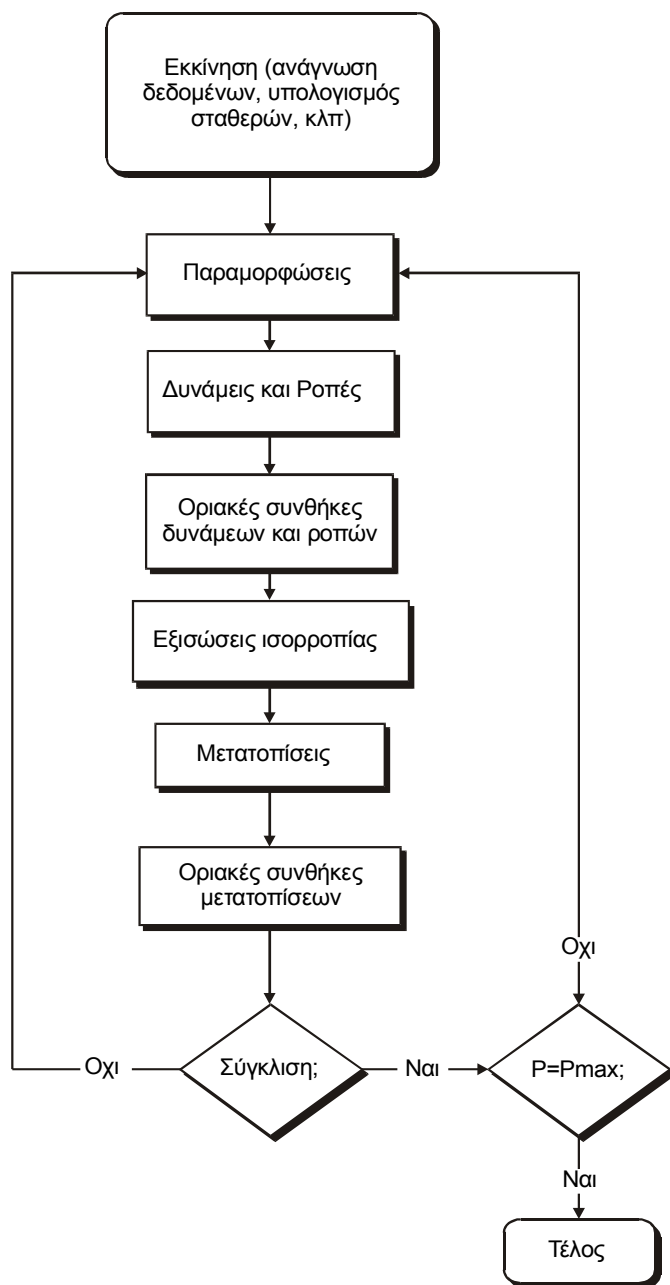
όπου ω_o είναι η κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων της κατασκευής και N είναι ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων για μία πλήρη ταλάντωση.

Έχοντας προσδιορίσει τις συνθήκες αριθμητικής ευστάθειας και σύγκλισης θα εξετάσουμε τον τρόπο επιβολής του εξωτερικού φορτίου στην κατασκευή. Εάν θεωρήσουμε έλασμα με θλιπτικό φορτίο, μπορούμε είτε να ορίσουμε τις τιμές των τάσεων κατά μήκος των πλευρών που θλίβονται, είτε να ορίσουμε τις μετατοπίσεις (μείωση του μήκους) των πλευρών σε κάθε στάδιο φόρτισης. Όταν διεξάγεται μη-γραμμική ανάλυση χρησιμοποιείται μόνο ο δεύτερος τρόπος διότι η κατανομή των τάσεων στις πλευρές που θλίβονται δεν είναι γνωστή. Εάν όμως ορίσουμε τις επιβαλλόμενες μετατοπίσεις, τότε η διαδικασία της χαλάρωσης θα αποδώσει τις κατανομές των τάσεων που αντιστοιχούν.

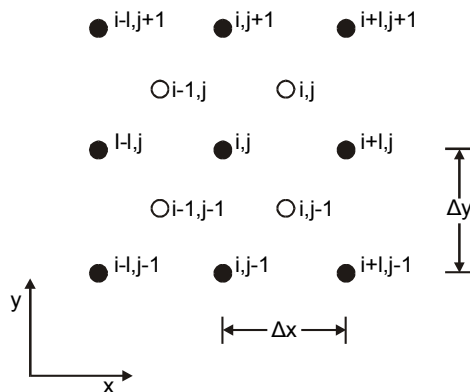
Η εντατική κατάσταση του ελάσματος αντιστοιχεί αρχικά σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της καμπύλης φόρτισης. Εάν αυξήσουμε τις μετατοπίσεις των πλευρών που θλίβονται το έλασμα θα υποστεί ταλαντώσεις οι οποίες θα αποσβεσθούν και το έλασμα θα αποκτήσει νέα εντατική κατάσταση. Κατά τον τρόπο αυτό η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί σε όλο το πεδίο συμπεριφοράς (μη-γραμμική περιοχή, αστοχία, κατάρρευση). Εάν η φόρτιση συνίσταται σε κάθετα κατανεμημένο φορτίο τότε αυτό εισάγεται στη διαδικασία απευθείας από τις εξισώσεις ισορροπίας (π.χ. σχέση (16)).

Η διαδικασία απόσβεσης της δυναμικής συμπεριφοράς (ταλαντώσεων) με τη γνωστή μέθοδο της χαλάρωσης οδήγησε στην ενονομασία της μεθόδου. Όταν επιβάλλεται μία μετατόπιση σε ένα κόμβο της κατασκευής, σε κάθε επανάληψη επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού σε συνδυασμό με τις επικρατούσες οριακές συνθήκες, σε όλους τους κόμβους.

Ισχύει λοιπόν μία δεδομένη εντατική δυναμική κατάσταση και στον συγκεκριμένο κόμβο στο εσωτερικό της κατασκευής δεν επικρατεί στατική ισορροπία. Αυτό εκφράζεται από το ότι το δεξιό σκέλος της σχέσης (28) είναι



Σχήμα 16 Διάγραμμα ροής υπολογισμών δυναμικής χαλάρωσης (ελαστική ανάλυση)



Σχήμα 17 Χρήση σύνθετου πλέγματος

διάφορο του μηδενός ($P \neq 0$). Κατά τη διαδικασία της χαλάρωσης, μετά τις μετατοπίσεις υπολογίζονται οι παραμορφώσεις. Για επίπεδα ελάσματα με μικρές μετατοπίσεις έχουμε $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$. Η σχέση αυτή σε πεπερασμένη μορφή γράφεται:

$$\varepsilon_{x(i,j)} = (u_{(i+1,j)} - u_{(i-1,j)}) / 2\Delta x$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τις παραμορφώσεις ε_y και γ_{xy} . Οι παραμορφώσεις στους κόμβους που αρχικά έχουν μηδενικές μετατοπίσεις γίνονται τώρα μη-μηδενικές. Σε συνέχεια υπολογίζονται οι δυνάμεις και ροπές ανά μονάδα μήκους (N_x , N_y , N_{xy} , M_x , M_y και M_{xy} για ελάσματα) από τις εξισώσεις συμβιβαστού και επιβάλλονται οι οριακές συνθήκες.

Στο επόμενο στάδιο η εξίσωση ισορροπίας συγκροτείται σε πεπερασμένη μορφή και επιλύεται, με βάση τις σχέσεις (32) και (33). Η (33) δίνει τις μετατοπίσεις των κόμβων και τέλος εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες των μετατοπίσεων. Απαιτείται ένας αριθμός επαναλήψεων μέχρις ότου αποκτηθεί η στατική λύση της εξίσωσης ισορροπίας για τη συγκεκριμένη φόρτιση. Η ίδια διαδικασία χαλάρωσης ακολουθείται για κάθε στάδιο φόρτισης p (Σχήμα 16).

5.4 Επιλογή πλέγματος

Έχουμε δει ότι η αναπαράσταση προβλημάτων σε δύο διαστάσεις (χώρος ή χώρος-χρόνος) γίνεται εύκολα με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, παρατίθενται δε στη βιβλιογραφία πολλές τεχνικές για τη βέλτιστη χρήση των πλεγμάτων, όπως άλλωστε και για τη γενικότερη διατύπωση αλγορίθμων για διάφορα προβλήματα. Εάν εξετάσουμε τη διαρμονική εξίσωση ορθογωνίων ελασμάτων θα παρατηρήσουμε ότι εάν χρησιμοποιήσουμε μέσες διαφορές, η διαφορική μορφή του πρώτου και του τρίτου όρου της εξίσωσης έχει σφάλμα της τάξης Δx^2 (ή Δy^2) (βλέπε Σχήμα 4). Για τον δεύτερο όρο της εξίσωσης όμως το σφάλμα είναι της

τάξης $(2\Delta x)(2\Delta y)$. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται στους μαύρους κόμβους του Σχήματος 17. Εάν όμως χρησιμοποιήσουμε πρόσθετους κόμβους σε ενδιάμεσα σημεία για την διαφοροποίηση του δεύτερου όρου, (λευκοί κόμβοι, Σχήμα 17), το σφάλμα γίνεται της ίδιας τάξης $(\Delta x \Delta y)$ με αυτό του πρώτου και του τρίτου όρου. Για να υπολογίσουμε λοιπόν τη διαφοροποιημένη μορφή του όρου $\partial^2 M_{xy} / \partial x \partial y$ στους κόμβους του πρώτου πλέγματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τιμές της στρεπτικής ροπής M_{xy} στους κόμβους του δεύτερου πλέγματος. Οι τιμές αυτές λαμβάνονται από αντίστοιχες τιμές της σχέσης:

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (42)$$

στους λευκούς κόμβους.

5.5 Υπολογισμός της πλασματικής πυκνότητας της εξίσωσης ορθογωνίων ελασμάτων

Όπως είδαμε, η ευστάθεια των στατικών λύσεων εξασφαλίζεται όταν πληρούνται η συνθήκη (39α). Στο εδάφιο αυτό θα υπολογίσουμε το όριο Gershgorin για την εξίσωση (40α). Εάν συμβολίσουμε το όριο κάθε όρου με παύλα, θα έχουμε:

$$b_G = \frac{\partial^2 \overline{M_x}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \overline{M_{xy}}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \overline{M_y}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \overline{M_x}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \overline{M_{xy}}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \overline{M_y}}{\partial y^2} + \bar{q} \quad (43)$$

$$\text{όπου } \frac{\partial^2 \overline{M_x}}{\partial x^2} = \frac{\| \overline{M_x}(i+1, j) \| - 2 \| \overline{M_x}(i, j) \| + \| \overline{M_x}(i-1, j) \|}{\Delta x^2} \quad (44\alpha)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{M_y}}{\partial y^2} = \frac{\| \overline{M_y}(i, j+1) \| - 2 \| \overline{M_y}(i, j) \| + \| \overline{M_y}(i, j-1) \|}{\Delta y^2} \quad (44\beta)$$

και

$$\frac{\partial^2 \overline{M_{xy}}}{\partial x \partial y} = \frac{\| \overline{M_{xy}}(i, j) \| - \| \overline{M_{xy}}(i, j-1) \| - \| \overline{M_{xy}}(i-1, j) \| + \| \overline{M_{xy}}(i-1, j-1) \|}{\Delta x \Delta y} \quad (44\gamma)$$

Οι σχέσεις (44α-β) υπολογίζονται με βάση τους μαύρους κόμβους του πλέγματος του Σχήματος 17 ενώ η σχέση (44γ) υπολογίζεται από τους λευκούς κόμβους του ίδιου πλέγματος. Άρα,

$$\overline{M_x}(i, j) = -D \left[\overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \right] = \left[-D \left\| \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \nu \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} \right\| \right] \quad (45)$$

$$\text{και} \quad \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} = \frac{\|w(i+1, j)\| - 2\|w(i, j)\| + \|w(i-1, j)\|}{\Delta x^2} = \frac{4}{\Delta x^2} \quad (46\alpha)$$

$$\overline{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} = \frac{4}{\Delta y^2} \quad (46\beta)$$

αντικαθιστώντας τις σχέσεις (46α) και (46β) στην (45) βρίσκουμε το όριο Gershgorin της ροπής M_x :

$$\overline{M_x}(i, j) = D \left[\frac{4}{\Delta x^2} + \nu \frac{4}{\Delta y^2} \right] \quad (47\alpha)$$

$$\text{και} \quad \overline{M_y}(i, j) = D \left[\frac{4}{\Delta y^2} + \nu \frac{4}{\Delta x^2} \right] \quad (47\beta)$$

$$\begin{aligned} \overline{M_{xy}}(i, j) &= \left[D(1-\nu^2) \right] \frac{\overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}}{x \ y} = \\ &= D(1-\nu) \left[\frac{\|w(i+1, j+1)\| - \|w(i, j+1)\| - \|w(i+1, j)\| + \|w(i, j)\|}{\Delta x \Delta y} \right] \\ &= \frac{4D(1-\nu)}{\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (47\gamma)$$

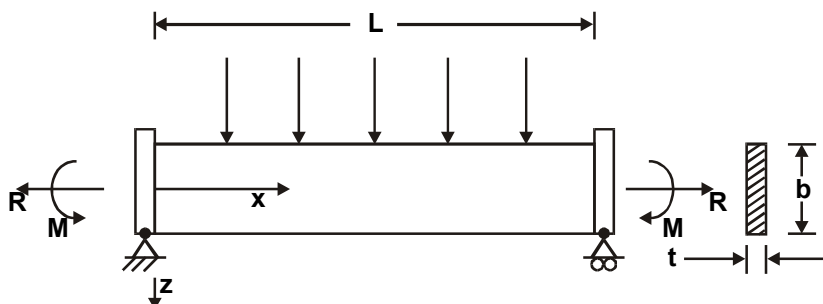
Οι σχέσεις (47α), (47β) και (47γ) αντικαθίστανται στις σχέσεις (44α), (44β) και (44γ) και λαμβάνεται το όριο Gershgorin της εξίσωσης ισορροπίας ορθογωνίων ελασμάτων. Εφόσον τα όρια των ροπών είναι ανεξάρτητα των συντεταγμένων (i, j).

$$b_G = \frac{4\overline{M_x}}{Dx^2} + 2\frac{4\overline{M_{xy}}}{DxDy} + \frac{4\overline{M_y}}{Dy^2} = 16D \left[\frac{1}{\Delta x^4} + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta y^4} \right]$$

5.6 Εφαρμογή της μεθόδου στη μελέτη απλών δοκών (δυναμική απόκριση)

Παράδειγμα

Να συνταχθεί κώδικας επίλυσης της εξίσωσης κίνησης ορθογώνιας δοκού με απλά εδρασμένα άκρα η οποία φέρει ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο. Επίσης, να συγκριθούν τα αριθμητικά αποτελέσματα με αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις του προβλήματος.



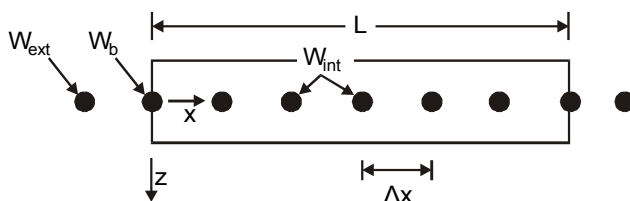
Σχήμα 18 Λεπτή ορθογώνια δοκός υπό απλή κάμψη

Λύση²

Η δοκός θεωρείται απλά εδρασμένη στα άκρα της και επιτρέπεται η κύλιση. Συνεπώς $M=0$ και $R=0$ στα άκρα. Η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \dot{w} \quad (49)$$

$$\text{όπου } M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (50)$$



Σχήμα 19 Διακριτοποίηση της δοκού

² Το πρόγραμμα *dybeam.f* που παρατίθεται στο επόμενο εδάφιο χρησιμοποιείται για την επίλυση της εξίσωσης κίνησης απλών ορθογώνιων δοκών υπό καμπτικό φορτίο στη γραμμική ελαστική περιοχή

Στην σχέση (49) έχουμε $c=0$, εφόσον η εξίσωση εκφράζει *δυναμική απόκριση* χωρίς απόσβεση. Στα άκρα της δοκού $w=0$ και $M=0$. Στο δυναμικό πεδίο η μετατόπιση είναι διπλάσια της αντίστοιχης στατικής:

$$w_{dyn} = 2w_{stat} = 2 \left[\frac{5pL^4}{384EI} \right] \quad (51)$$

όπου p είναι ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο. Η συχνότητα ταλάντωσης της n -οστής αρμονικής είναι:

$$\omega_n = \frac{\mu_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (52)$$

όπου μ_n είναι η αρμονική ταλάντωσης και η περίοδος ταλάντωσης T ισούται με $2\pi/\omega$. Μία εφικτή διακριτοποίηση της κατασκευής παρατίθεται στο παρακάτω σχήμα. Εναπόκειται στον συγγραφέα του προγράμματος η σύνταξη του κώδικα έτσι ώστε να είναι δυνατή η επιλογή του αριθμού των διαστημάτων κατά μήκος της δοκού.

Στο Σχήμα 19 η δοκός έχει υποδιαιρεθεί σε 6 διαστήματα: πιθανόν όμως να είναι ανεπαρκής ο αριθμός αυτός και να χρειασθεί κάποια προσπάθεια προσδιορισμού του βέλτιστου αριθμού των κόμβων (μελέτη σύγκλισης). Στο σχήμα, w_{int} είναι εσωτερικός κόμβος, w_b είναι συνοριακός κόμβος και w_{ext} είναι εξωτερικός (πλασματικός) κόμβος. Οι εξωτερικοί κόμβοι χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό πεπερασμένων ποσοτήτων στα όρια της δοκού.

Για παράδειγμα, η ποσότητα $\partial w / \partial x$ στο σύνορο της κατασκευής δίνεται από τη σχέση:

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_b = \frac{w_{int} - w_{ext}}{2\Delta x}$$

5.7 Το πρόγραμμα *dybeam2.f*

Οι υπολογισμοί που περιέχονται στο πρόγραμμα που ακολουθεί περιγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

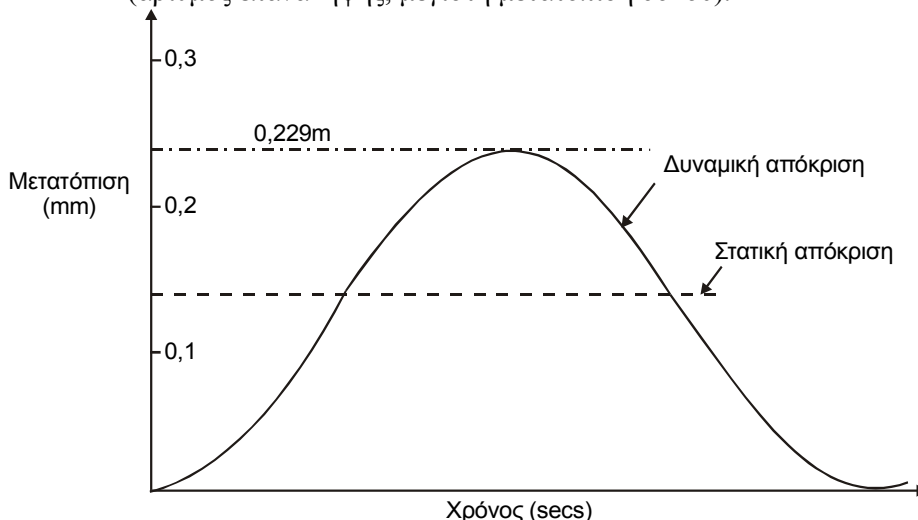
Πίνακας 1 Περίληψη λειτουργιών του προγράμματος *dybeam.f*

α/α	Γραμμές	Υπολογισμοί
1.	8	Ανάγνωση δεδομένων
2.	11-12	Υπολογισμός σταθερών I , A
3.	15-24	Μηδενισμός μητρώων
4.	26-33	Υπολογισμός σταθερών b_G , ρ , Δt

5. 34-38 Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας
6. 39-44 Φορτίο (p)
7. 45-51 Ταχύτητες σε κάθε κόμβο

$$\partial w / \partial t = (\partial w / \partial t) +$$

$$+ (\Delta t^2 / \rho) (M_{i+1} - 2M_{i,j} + M_{i-1}) / \Delta x^2 + q$$
8. 52-56 Μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο $w = w + (\partial w / \partial t) \Delta t$
9. 57-62 Επιβολή οριακών συνθηκών (μετατοπίσεων)
 $w_b = 0, w_{ext} = -w_{int}$
10. 63-67 Καμπτικές ροπές M σε κάθε κόμβο (σε μορφή πεπερασμένων διαφορών)
11. 68-70 Επιβολή οριακών συνθηκών (καμπτικών ροπών) ($M=0$)
12. 71 Χρόνος (=χρόνος+ Δt)
13. 72 Αποστολή αποτελεσμάτων σε αρχείο (ή οθόνη)
 (αριθμός επανάληψης, μέγιστη μετατόπιση δοκού).



Σχήμα 20 Δυναμική απόκριση δοκού υπό σταθερή ομοιόμορφη φόρτιση

Τα αποτελέσματα δίνονται σε γραφική μορφή στο Σχήμα 20. Παρατηρούμε ότι η δοκός συμπεριφέρεται σαν σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Οι ταλαντώσεις συνεχίζονται εφόσον δεν επέλθει μεταβολή της φόρτισης της κατασκευής. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης της αριθμητικής ανάλυσης με την αναλυτική θεωρία περιλαμβάνονται στον Πίνακα 4. Παρατηρούμε ότι οι διαφορές είναι αμελητέες. Θα μπορούσαμε να ελαττώσουμε τον αριθμό των κόμβων και να διατηρήσουμε ένα αποδεκτό επίπεδο ακρίβειας. Για απλά προβλήματα όπως το παρόν οι διαφορές είναι αμελητέες, στην περίπτωση όμως πολύπλοκων κατασκευών η ανάλυση των οποίων απαιτεί πολύ μεγαλύτερους χρόνους τρεξίματος ο παράγοντας αυτός είναι σημαντικός και δεν πρέπει να αγνοείται.

Πίνακας 4 Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής και αναλυτικής λύσης

	Θεωρία (σχέση (51))	Πρόγραμμα	Ποσοστιαίες Διαφορές
Μετατόπιση κέντρου (mm)	0,2288	0,2291	+0,13
Περίοδος ταλάντωσης (secs)	0,00527	0,00523	-0,76

Βιβλιογραφία

1. Wang P.C., *Numerical and matrix methods in structural mechanics*. John Wiley and Sons, Inc, New York.
2. Coates R.C., Coutie M.G., Kong F.K., *Structural Analysis*, Nelson, London, 1972.
3. Caridis P.A. *Flexural-torsional elasto-plastic buckling in flat stiffened plating*, Ph.D. Thesis, University of Glasgow, 1987.
4. Caridis P.A. *Torsional buckling of stringers of flat stiffened plating and ring frames of ring-stiffened cylinders. Report 1. A brief literature review and numerical techniques*. University of Glasgow Report No. NAOE-82-18, June 1982, Glasgow, Scotland.