

Η χρήση της ΜΠΣ κατά τη μελέτη των κατασκευών

1. Επιλογή υπολογιστικού εργαλείου

Κατά την πρώτη περίοδο εφαρμογής της, η ΜΠΣ χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά για την ανάλυση της συμπεριφοράς των κατασκευών, σε προβλήματα στα οποία οι συμβατικές μέθοδοι δεν ήταν σε θέση να αποδώσουν λύσεις με επαρκή ακρίβεια, ή είχαν αποδειχθεί ακατάλληλες. Οι πραγματικές κατασκευές λειτουργούν υπό συνθήκες που δύσκολα προσομοιώνονται με μαθηματικό μοντέλο. Η ικανότητα του μελετητή έγκειται τότε στον προσδιορισμό εκείνων των χαρακτηριστικών της συμπεριφοράς που κυριαρχούν, και στην απόδοσή τους με επαρκή ακρίβεια.

Τα τελευταία χρόνια, η ΜΠΣ μπορεί πλέον να συνδυασθεί και με άλλα εργαλεία (π.χ. προγράμματα σχεδιασμού όπως το AutoCad, κώδικες βελτιστοποίησης, κώδικες αξιοπιστίας) για χρήση στο σχεδιασμό κατασκευών. Έτσι, ο σύγχρονος μελετητής έχει τη δυνατότητα να κάνει αποδοτικά συστηματική χρήση των προχωρημένων υπολογιστικών εργαλείων και στο στάδιο του σχεδιασμού της κατασκευής. Στο παρόν κεφάλαιο θα αρκεσθούμε στην περιγραφή της χρήσης των προγραμμάτων ΠΣ στη μελέτη κατασκευών στο ελαστικό, στατικό πεδίο απόκρισης. Πολλά όμως από αυτά που θα αναφερθούν αφορούν τη μελέτη των κατασκευών γενικότερα (θερμικά πεδία, μη-γραμμική απόκριση, δυναμική απόκριση, κλπ).

Απάντηση στο ερώτημα για το αν θα πρέπει να γίνει χρήση κάποιου διαθέσιμου κώδικα ή θα πρέπει να συνταχθεί νέος κώδικας, δίνεται εύκολα για την πλειοψηφία των περιπτώσεων. Κατά κανόνα, ο μελετητής ενδιαφέρεται για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς μιας υπάρχουσας κατασκευής ή για το σχεδιασμό μιας νέας κατασκευής, που πιθανόν να διαθέτει και κάποια στοιχεία καινοτομίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι διαθέσιμοι κώδικες καλύπτουν τις απαιτήσεις, και το ζήτημα μετατίθεται τότε στην επιλογή ενός κατάλληλου κώδικα. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε παρακάτω. Στην περίπτωση όμως που το ζητούμενο είναι η διερεύνηση κάποιου εξειδικευμένου προβλήματος για το οποίο οι διαθέσιμοι κώδικες έχουν αποδειχθεί ανεπαρκείς, θα πρέπει να ληφθεί η απόφαση σύνταξης νέου κώδικα. Ο μελετητής που θα ακολουθήσει αυτό το δρόμο θα πρέπει να διαθέτει σοβαρή κατάρτιση στο συγκεκριμένο πρόβλημα καθώς επίσης και στη θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η σύνταξη ενός νέου κώδικα είναι μια επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία που απαιτεί διεξοδικούς ελέγχους αξιοπιστίας και ακρίβειας σε κάθε στάδιο εξέλιξής του.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι οι κώδικες που αναπτύχθηκαν τα τελευταία χρόνια καλύπτουν πλέον ένα ευρύ φάσμα των απαιτήσεων του επαγγελματία μηχανι-

κού, σε πολλές δε περιπτώσεις δίνουν τη δυνατότητα ενασχόλησης με θέματα που στο παρελθόν ήσαν απρόσιτα στο επίπεδο του μελετητικού γραφείου.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι μια λύση στην οποία καταφεύγουμε όταν τα διαθέσιμα εργαλεία είτε α) δεν είναι σε θέση να προσφέρουν την απαιτούμενη ακρίβεια είτε β) δεν είναι σε θέση να δώσουν λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Παραδείγματα αυτών είναι αντίστοιχα α) τα εντατικά πεδία που αναπτύσσονται στις υπερκατασκευές των πλοίων, λόγω της πολυπλοκότητας της κατασκευής αλλά και της φόρτισης των υπερκατασκευών κατά μήκος των σημείων στήριξης στο κατάστρωμα αντοχής και β) το εντατικό πεδίο στη περιοχή γωνίας αμπαριού πλοίου όταν υπάρχει και θερμικό πεδίο, λόγω της μη-γραμμικής επίδρασης του κάθε ενός πεδίου στα υπόλοιπα (θερμικές τάσεις, τάσεις λόγω διαμήκους κάμψης του πλοίου, τάσεις λόγω στρέβλωσης της εγκάρσιας τομής, επίδρασης της μορφολογίας σε τοπικό επίπεδο κ.ά.).

2. Κώδικες για τη γραμμική ελαστική μελέτη των κατασκευών

Ο αριθμός των διαθέσιμων κωδίκων που κρίνονται κατάλληλοι για τη μελέτη κατασκευών στη γραμμική ελαστική περιοχή είναι σήμερα πολύ μεγάλος. Ο ενδιαφερόμενος αγοραστής μπορεί να συμβουλευθεί:

- α) Πληροφορίες από προμηθευτές
- β) Διευθύνσεις στο διαδίκτυο, όπως οι παρακάτω:

http://www.engr.usask.ca/%7Emacphed/finite/fe_resources/fe_resources.html

<http://ohio.ikp.liu.se/fe/publ.html>

<http://www.nafems.org/>

Επειδή οι διευθύνσεις στο διαδίκτυο αλλάζουν συχνά αλλά και επειδή ο αριθμός τους αυξάνεται συνεχώς, δεν κρίνεται σκόπιμο να δοθεί κατάλογος εδώ.

- γ) Αξιολογήσεις κωδίκων από φορείς όπως το National Association for Finite Element Methods and Standards (NAFEMS). Το NAFEMS έχει καταρτίσει τυποποιημένους ελέγχους επίδοσης κωδίκων και δημοσιεύει σε τακτά χρονικά διαστήματα τα αποτελέσματα των ελέγχων αυτών (benchmark studies). Μερικές άλλες αξιολογήσεις κωδίκων περιλαμβάνονται στα άρθρα [1-7] της βιβλιογραφίας.
- δ) Περιγραφές συγκεκριμένων κωδίκων σε βιβλία και άρθρα δημοσιευμένα σε έγκριτα επιστημονικά περιοδικά, όπως π.χ. το [8].

Για τη γραμμική ελαστική ανάλυση κατασκευών μπορούμε να πούμε ότι οι κώδικες είναι γενικά αξιόπιστοι και ακριβείς, και η προσοχή του αγοραστή εστιάζεται στις δυνατότητες παρουσίασης των αποτελεσμάτων (γραφικά εργαλεία) και την ευκολία χρήσης.

3. Καθορισμός του προβλήματος

Ο μελετητής της συμπεριφοράς μιας κατασκευής ή γενικότερα, ενός φαινομένου που διέπεται από τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, απαιτείται να διαθέτει μια σε βάθος γνώση του αντίστοιχου φυσικού φαινομένου. Έτσι, για τη μελέτη των κατασκευών απαιτείται υπόβαθρο στη μηχανική των κατασκευών ενώ σε προβλήματα ρευστών απαιτείται αντίστοιχο υπόβαθρο στη μηχανική των ρευστών. Μόνο τότε μπορούν να τεθούν τα απαραίτητα ερωτήματα που αφορούν το είδος της απαιτούμενης μελέτης (π.χ. χρονική εξάρτηση της συμπεριφοράς, επάρκεια ελαστικής ανάλυσης, επίδραση θερμικού πεδίου, φύση οριακών συνθηκών κλπ) αλλά και να γίνει η κατάλληλη αξιολόγηση των αποτελεσμάτων που θα επακολουθήσει. Δεν αρκεί δηλαδή η ανάπτυξη ενός πλέγματος και η λειτουργία ενός διαθέσιμου προγράμματος.

Η ικανότητα του χρήστη έγκειται λοιπόν στην κατανόηση του φυσικού προβλήματος και στην κατάλληλη χρήση των υπολογιστικών εργαλείων που διατίθενται. Παρακάτω θα περιγραφεί η διαδικασία εκπόνησης μιας τυπικής μελέτης με διαθέσιμο κώδικα, επισημαίνοντας τα κυριότερα σημεία στα οποία θα πρέπει να δοθεί προσοχή από το χρήστη, είτε αυτός είναι έμπειρος είτε όχι.

Είναι απαραίτητο ο χρήστης να γνωρίζει τις βασικές παραδοχές των θεωριών που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της συμπεριφοράς των διαφόρων στοιχείων της κατασκευής, διότι έτσι είναι σε θέση αφενός μεν να τη χρησιμοποιεί κατάλληλα αφετέρου δε να επιλέγει το κατάλληλο στοιχείο για την προσομοίωση της συμπεριφοράς της. Έτσι, καθίσταται απαραίτητη η εξοικείωση με την κλασσική θεωρία της μηχανικής των κατασκευών, συμπεριλαμβανομένων και των αρχικών παραδοχών που γίνονται σε κάθε περίπτωση.

Κατά τη χρήση προγραμμάτων ΠΣ, απαιτείται προσεκτική εξοικείωση με τη λειτουργία τους μέσω των εγχειριδίων, για να γίνει κατανοητή η συμπεριφορά των διαφόρων αριθμητικών εργαλείων. Διαφορετικά, η άκριτη χρήση του λογισμικού ή η χρήση παραδοχών που δεν αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη περίπτωση θα έχει οδυνηρές επιπτώσεις κατά την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων.

Κλείνουμε στο σημείο αυτό με την παρατήρηση ότι η επιτυχής χρήση της ΜΠΣ απαιτεί όχι μόνο το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο αλλά και πείρα, η οποία συμβάλλει στην αποδοτική χρήση και την αποφυγή λαθών. Σε αυτή την κατεύθυνση θα συμβάλλει και το περιεχόμενο του παρόντος κεφαλαίου, που εστιάζεται στη παράθεση τεχνικών που θα διευκολύνουν την αποτελεσματική χρήση της μεθόδου.

4. Ανάπτυξη και διάταξη του πλέγματος

Θα πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι η πραγματική κατασκευή και το περιβάλλον λειτουργίας της (συνοριακές συνθήκες, φορτίσεις) αντικαθίστανται από ένα μαθηματικό πρότυπο, οι λύσεις του οποίου αναμένεται ότι θα είναι αντίστοιχες με τη συμπεριφορά της κατασκευής. Στην πραγματικότητα όμως, η κατασκευή δεν είναι

ένα άθροισμα στοιχείων, ούτε στηρίζεται σε πακτώσεις και απλές εδράσεις, ούτε τέλος φέρει σημειακές ή άλλου είδους ιδεατές φορτίσεις.

Κατά την επίλυση προβλημάτων με τη ΜΠΣ, ο μελετητής αντιμετωπίζει αντιτιθέμενες απαιτήσεις. Από τη μια πλευρά ζητιέται επαρκής ακρίβεια ενώ από την άλλη, περάτωση της μελέτης σε αποδεκτά χρονικά όρια. Η κρίση και εμπειρία του μελετητή παίζουν τότε σημαντικό ρόλο στην κατάστρωση της διαδικασίας επίλυσης του προβλήματος και στην ταυτόχρονη διασφάλιση επαρκούς ακρίβειας.

Στα αρχικά στάδια μιας μελέτης είναι φρόνιμο να δημιουργείται ένα αραιό πλέγμα, που μπορεί να μην έχει την τελική απαιτούμενη ακρίβεια, αλλά που μπορεί να αναπτυχθεί περαιτέρω κατά τον ενδεικνυόμενο τρόπο. Θα πρέπει δηλαδή ο μελετητής να είναι έτοιμος να αναθεωρεί τα αποτελέσματά του όσο προχωρεί η μελέτη. Η κάθε μια διακριτοποίηση περιέχει πληροφορίες που τον καθοδηγούν ως προς το πως θα προκύψει περαιτέρω βελτίωση. Έτσι, όταν παρατηρούνται ραγδαίες μεταβολές στις τιμές κάποιας μεταβλητής (π.χ. τάσεις), επιβάλλεται περαιτέρω διακριτοποίηση στις περιοχές αυτές του πλέγματος, για να περιγραφεί με την απαιτούμενη ακρίβεια η πραγματική συμπεριφορά.

Επίσης, θα πρέπει να εξετάζεται η δυνατότητα χρήσης απλουστευτικών παραδοχών ως προς τη συμπεριφορά της κατασκευής και αντίστοιχα και των πεπερασμένων στοιχείων, που επιφέρει μείωση του χρόνου τρεξίματος αλλά και των πιθανών σφαλμάτων κατά την εκπόνηση και αξιολόγηση της μελέτης. Για παράδειγμα, η χρήση της επίπεδης εντατικής κατάστασης έχει ευρεία εφαρμογή στις λεπτότοιχες κατασκευές. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγεται η χρήση σύνθετων στοιχείων στα οποία λαμβάνονται υπόψη τα τριαξονικά εντατικά πεδία, που επηρεάζουν τη συμπεριφορά σε ειδικές μόνο περιπτώσεις.

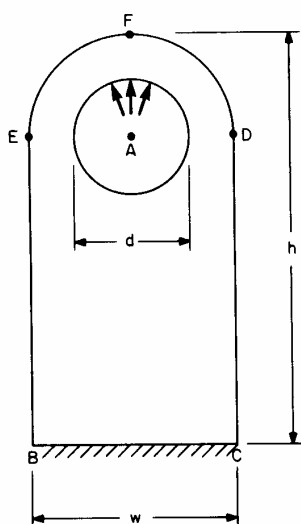
Η διακριτοποίηση της κατασκευής είναι μια διαδικασία που πρέπει να γίνεται στο χαρτί, πριν πλησιάσουμε τον υπολογιστή. Η διαδικασία περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

1. Καθορισμός γεωμετρίας, φορτίων, και στηρίξεων
2. Επιλογή κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων
3. Καθορισμός και αρίθμηση κόμβων και στοιχείων
4. Καθορισμός ιδιοτήτων γεωμετρίας και υλικού
5. Επιβολή οριακών συνθηκών και εξωτερικών φορτίσεων
6. Δημιουργία μοντέλου (προτύπου) στον υπολογιστή

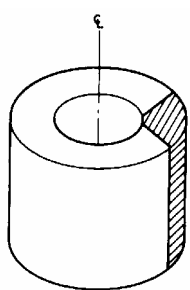
Παρακάτω θα αναφερθούμε σε κάθε ένα από τα στάδια αυτά ξεχωριστά.

4.1 Καθορισμός γεωμετρίας, φορτίων, και στηρίξεων

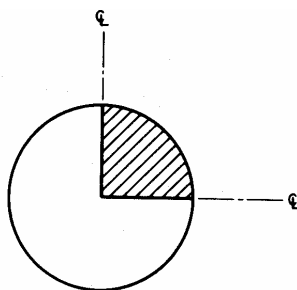
Η μορφή του προτύπου της κατασκευής και των πεπερασμένων στοιχείων ορίζονται αποκλειστικά με τις θέσεις των κόμβων του πλέγματος. Έτσι, θα πρέπει να εξασφαλισθεί ότι οι θέσεις των κόμβων περιγράφουν με τη δέουσα ακρίβεια τη μορφή της πραγματικής κατασκευής, (ιδιαίτερα τις καμπύλες επιφάνειες και τις περιοχές με ασυνέχειες).



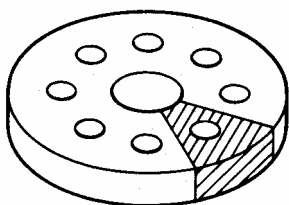
Σχήμα 1 Αρχικό σκαρίφημα κατασκευής (κρίκος)



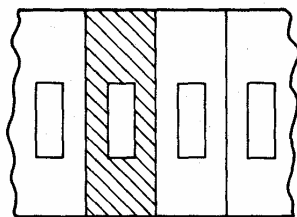
(α) Αξονική συμμετρία



(β) Επίπεδη συμμετρία



(γ) Συμμετρία εκ περιστροφής



(δ) Επαναληπτική συμμετρία

Σχήμα 2 Τα τέσσερα είδη συμμετρίας [8]

Αρχικά λοιπόν σχεδιάζεται ένα σκαρίφημα στο οποίο δείχνονται οι γωνίες, οι ασυνέχειες, τα σημεία στήριξης, τα σημεία και γενικά οι περιοχές επιβολής εξωτερικών φορτίσεων. Στο Σχήμα 1 δείχνεται ένα τέτοιο σκαρίφημα.

Σε δεύτερο στάδιο εξετάζεται η δυνατότητα χρήσης συνθηκών συμμετρίας.

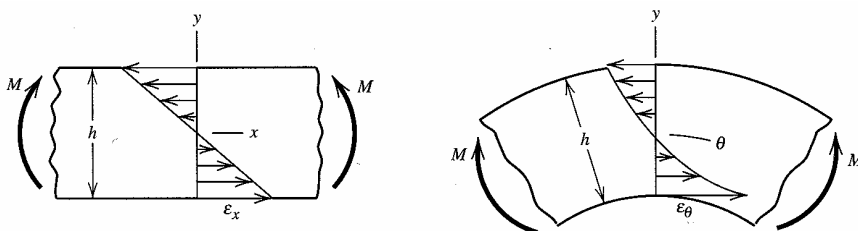
Τα είδη συμμετρίας περιγράφονται στο Σχήμα 2.

Η χρήση συνθηκών συμμετρίας θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και κατά την επιβολή της εξωτερικής φόρτισης και των οριακών συνθηκών.

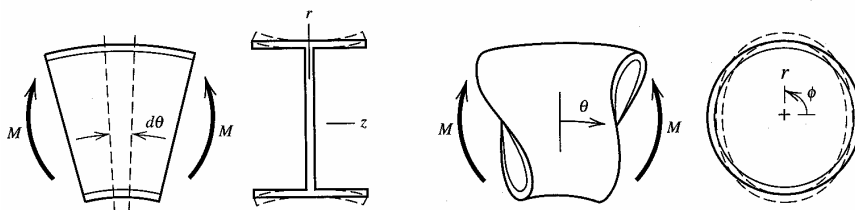
Στο επόμενο στάδιο, θα πρέπει να καθορίζεται το γενικό σύστημα αναφοράς και η αρχή των αξόνων. Η κατάλληλη επιλογή σημείου αρχής των αξόνων μπορεί να απλοποιήσει σε σημαντικό βαθμό την αρίθμηση των κόμβων και των στοιχείων. Για προβλήματα που διαθέτουν συμμετρία, η αρχή θα πρέπει να συμπίπτει με άξονα συμμετρίας. Σε προβλήματα με εκ περιστροφής και ορθογώνια συμμετρία εξυπηρετεί η αρχή των αξόνων να συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας, και έτσι αποφεύγεται η χρήση τοπικού συστήματος αναφοράς. Η επιλογή συστήματος αναφοράς γενικά εξαρτάται από το χρήστη, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις οι κώδικες έχουν συγκεκριμένες απαιτήσεις.

Όταν δείχνονται οι οριακές συνθήκες στο αρχικό σκαρίφημα, εξυπηρετεί η χρήση κάποιας αναγνωρισμένης γραφικής σύμβασης (π.χ. στο Σχήμα 1, η πακτωμένη στήριξη δείχνεται σκιαγραφημένη).

4.2 Επιλογή κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων



Σχήμα 3 Κατανομή παραμορφώσεων σε ευθύγραμμη διατομή και σε καμπύλη διατομή λόγω κάμψης



Σχήμα 4 Τοπική συμπεριφορά καμπύλης δοκού υπό κάμψη

Η επιλογή των κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί κατανόηση της συμπεριφοράς της κατασκευής αλλά και των διατιθέμενων στοιχείων. Ας εξετάσουμε ένα απλό παράδειγμα που αφορά την καθαρή κάμψη μιας πρισματικής διατομής. Γνωρίζουμε ότι στην ευθύγραμμη διατομή οι παραμορφώσεις μεταβάλλονται γραμμικά κατά το πάχος. Είναι γνωστό επίσης ότι τα τριγωνικά στοιχεία σταθερής

παραμόρφωσης¹ δεν είναι κατάλληλα, σε αντίθεση με τα ορθογωνικά στοιχεία $Q6$ και $Q8$ που διαθέτουν απόλυτη ακρίβεια. Στην περίπτωση της καμπύλης διατομής, η παραμόρφωση δεν μεταβάλλεται γραμμικά κατά το πάχος. Τα στοιχεία $Q6$ έχουν τότε μεγαλύτερο σφάλμα από τα στοιχεία $Q8$, διότι στα στοιχεία $Q8$ η παραμόρφωση ε_θ έχει δευτεροτάξια μεταβολή και όχι γραμμική όπως στα $Q6$.

Η επιλογή μεταξύ στοιχείου-ελάσματος και στοιχείου-κελύφους για εκτεταμένες κατασκευές δεν είναι πάντοτε ξεκάθαρη, ειδικά σε περιπτώσεις που προκύπτει κάμψη. Στα μεμβρανικά στοιχεία-ελάσματα δε λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή της τάσης κατά το πάχος του ελάσματος. Η παραδοχή αυτή ισχύει εφόσον το πάχος είναι μικρότερο των άλλων διαστάσεων. Στην περίπτωση των δοχείων και των κυλινδρικών διατομών, απαιτούνται στοιχεία-κελύφη όταν $r_o/t > 10$, όπου r_o είναι η εξωτερική ακτίνα και t είναι το πάχος. Εάν $r_o/t \leq 10$, πρέπει να χρησιμοποιούνται στοιχεία παχιά κελύφη ή τρισδιάστατα στοιχεία. Γενικά, τα στοιχεία-ελάσματα χρησιμοποιούνται όταν $b/t > 10$, όπου b είναι η μικρότερη διάσταση του στοιχείου.

Θα πρέπει επίσης να λαμβάνεται υπόψη και η μορφή των διαφόρων τμημάτων που απαρτίζουν την κατασκευή. Έτσι, κατασκευές που αποτελούνται από πρισματικές δοκούς και ραβδωτούς φορείς, πρέπει να αναπαριστώνται με στοιχεία-δοκούς. Στην περίπτωση των ραβδωτών φορέων οι ροπές στα άκρα των στοιχείων-δοκών μηδενίζονται. Στην περίπτωση όμως της πλατύπελμης δοκού, που συναντιέται σε μεγάλη έκταση στις ναυπηγικές κατασκευές, προκύπτει το φαινόμενο της υστέρησης διάτμησης, που προκαλεί αποκλίσεις στην κατανομή των ορθών τάσεων από τη γραμμική συμπεριφορά². Για να μπορέσει το αριθμητικό μοντέλο να αναπαραστήσει τη μη-γραμμικότητα στην κατανομή των ορθών τάσεων θα πρέπει η πρισματική διατομή να διακριτοποιηθεί με στοιχεία-ελάσματα δύο διαστάσεων έτσι ώστε να προκύψει διατμητική τάση κατά μήκος του άξονα σύνδεσης του κορμού με το πέλμα.

Στην περίπτωση καμπύλης δοκού με διατομή H , (Σχήμα 4), τα πέλματα μετατοπίζονται στην ακτινική κατεύθυνση κατά την κάμψη. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να εξηγηθεί εξετάζοντας ένα στοιχείο της διατομής γωνίας $d\theta$. Η τάση κατά την κατεύθυνση της περιφέρειας σ_θ έχει μια συνιστώσα κατά μήκος της ακτίνας η οποία ωθεί το εξωτερικό πέλμα προς τα έξω ενώ έλκεται το έσω πέλμα. Το αντίθετο συμβαίνει όταν αλλάζει η φορά της εξωτερικής καμπτικής ροπής. Σε κάθε περίπτωση, αναπτύσσονται διαμήκεις καμπτικές τάσεις σ_z κάθετα στο πέλμα. Οι τάσεις αυτές μπορεί να είναι μεγαλύτερες και της σ_θ . Η συμπεριφορά της κατασκευής δεν μπορεί να αναπαρασταθεί με στοιχεία-κελύφη, που διαθέτουν μεμβρανική αλλά και καμπτική ακαμψία. Αντίστοιχη συμπεριφορά επιδεικνύει και μία λεπτότοιχη κυλινδρική διατομή. Η διατομή παραμορφώνεται κατά την κάμψη και απαιτούνται στοιχεία-κελύφη για τη σωστή μελέτη τους. Το πρόβλημα σε αυτή την περίπτωση επιλύεται με χρήση ειδικά συνταγμένων στοιχείων-σωλήνων³. Γενικά ο χρήστης προγραμμάτων ΠΣ θα πρέπει να είναι εξοικειωμένος με τη θεωρία κε-

¹ τριγωνικό στοιχείο σταθερής παραμόρφωσης = constant strain triangle element (CST)

² για την περιγραφή του φαινομένου της υστέρησης διάτμησης βλέπε: Π. Α. Καρύδη *Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου. Θέματα Τοπικής Αντοχής*, Αθήνα 2000 (Κεφ. 3).

³ στοιχείο σωλήνας = pipe bending element

λυφών στο βαθμό που να αναγνωρίζει τότε οι διαμήκεις καμπτικές τάσεις⁴ είναι υπολογίσιμες.

Μη-γραμμικά φαινόμενα προκύπτουν όταν η επιφάνεια που παραλαμβάνει το φορτίο παραμορφώνεται σε μη-αναπτυκτική επιφάνεια. Σε αυτή την περίπτωση απαιτούνται στοιχεία-κελύφη. Η απόκριση είναι μη-γραμμική επίσης όταν ένας πρισματικός φορέας που φέρει αξονικό θλιπτικό φορτίο έχει ατέλειες, ή φορτίζεται έκκεντρα.

Εάν δεν είναι κατάλληλα τα στοιχεία-δοκοί και τα στοιχεία-ελάσματα, θα πρέπει να εξετασθεί η δυνατότητα χρήσης απλουστευτικών παραδοχών (επίπεδη εντατική κατάσταση, αξονική συμμετρία κλπ). Εάν μπορούν να γίνουν αντίστοιχες παραδοχές, μπορεί να αναπαρασταθεί η κατασκευή σε δύο διαστάσεις κάνοντας χρήση στοιχείων-ελασμάτων ή αξονο-συμμετρικών στοιχείων.

Εκτός όμως της μορφής των στοιχείων ανακύπτουν και άλλα εξ' ίσου σημαντικά θέματα όπως ο αριθμός και οι θέσεις των κόμβων σε κάθε στοιχείο, καθώς επίσης και οι τρόποι παραμόρφωσης των στοιχείων, που καθορίζονται από τα πεδία μετατοπίσεων στα οποία θεμελιώνεται η συμπεριφορά τους. Το τελευταίο ζήτημα έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς ορίζει το πως μπορεί και πως δεν μπορεί να συμπεριφερθεί ένα συγκεκριμένο στοιχείο. Όσον αφορά τις θέσεις των κόμβων, γενικά μπορούμε να πούμε ότι για εκτεταμένα στοιχεία, (ελάσματα, κελύφη), όταν υπάρχουν κόμβοι στα σημεία που διχοτομούν τις πλευρές καθώς επίσης και στο εσωτερικό, βελτιώνεται η συμπεριφορά τους και δεν επηρεάζονται από μεγάλους λόγους πλευρών ή οξείες (αμβλείες) γωνίες.

Για να αναπαρασταθούν τα σημεία στήριξης πιθανόν να χρειασθούν στοιχεία ελατήρια ή στοιχεία ακαμψίας. Εάν είναι γνωστή η ακαμψία των σημείων στήριξης, θα πρέπει να καταγράφεται στο αρχικό σκαρίφημα της κατασκευής.

Γενικά πάντως ο μελετητής θα πρέπει να ακολουθεί τις δυνατότητες που παρέχει ο κώδικας που έχει επιλεγεί. Για το λόγο αυτό κατά την επιλογή του κώδικα θα πρέπει να εξετάζονται και οι δυνατότητες αναπαράστασης των διαφόρων κατασκευών.

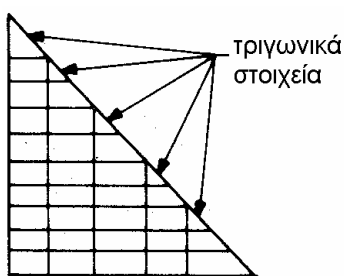
Τα παραπάνω παραδείγματα υπογραμμίζουν το γεγονός ότι απαιτείται σε βάθος κατανόηση της συμπεριφοράς των κατασκευών. Όλα τα τμήματα από τα οποία αποτελούνται οι κατασκευές εκτείνονται στον τρισδιάστατο χώρο και έτσι η χρήση διδιάστατων ή μονοδιάστατων προσεγγίσεων απαιτεί τη δέουσα προσοχή.

4.3 Κόμβοι και στοιχεία

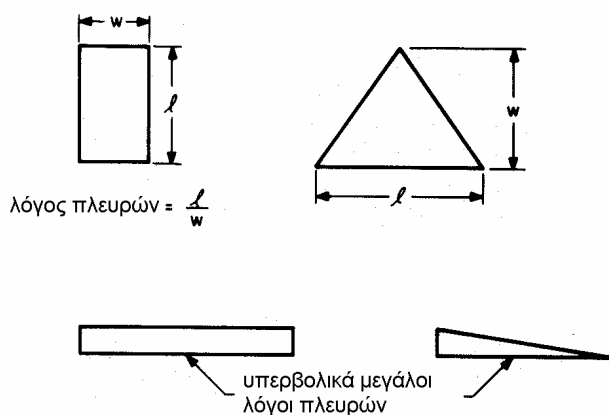
Στο στάδιο αυτό δεν διαθέτουμε παρά ένα αρχικό σκαρίφημα που περιλαμβάνει ορισμένες βασικές πληροφορίες σχετικά με το υπό μελέτη πρόβλημα. Έχουμε επίσης επιλέξει τα είδη των στοιχείων που κρίνονται κατάλληλα. Θα πρέπει συνεπώς άμεσα να καθορίσουμε τη διάταξη των κόμβων που ταιριάζει με τα στοιχεία που επιλέχθηκαν και που διασφαλίζει επαρκή διακριτοποίηση για το ζητούμενο βαθμό ακρίβειας. Παρακάτω δίνονται ορισμένες κατευθύνσεις που συνιστούν καλή πρακτική.

⁴ διαμήκης καμπτική τάση = flexural stress

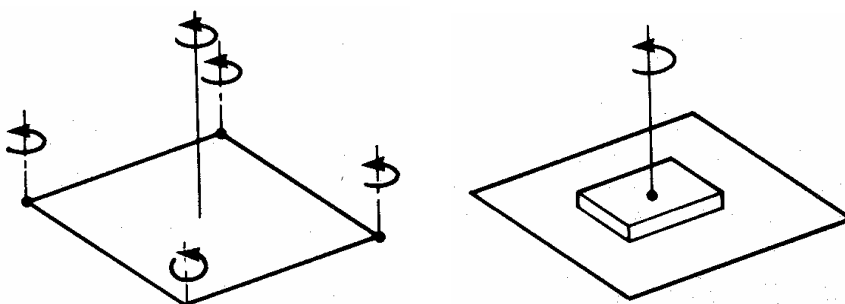
1. Στις περιπτώσεις που ασκούνται σημειακές φορτίσεις ή έχει ασυνέχειες η κατασκευή, εφαρμόζεται η αρχή του Saint Venant για να εκτιμηθεί η έκταση του πυκνού πλέγματος που θα απαιτηθεί στην περιοχή του φορτίου ή της ασυνέχειας.
2. Κατά κανόνα, απαιτείται πιο πυκνό πλέγμα κατά την ανάλυση των τάσεων απ' ό,τι για την ανάλυση των πεδίων των μετατοπίσεων. Σε ορισμένες περιπτώσεις απαιτείται επίσης και μελέτη σύγκλισης.
3. Θέτουμε κόμβους στα σημεία στήριξης, στα σημεία επιβολής φορτίου και σε άλλα σημεία όπου απαιτούνται αποτελέσματα όπως π.χ. μετατοπίσεις, θερμοκρασία κλπ. Εάν εκπονείται μελέτη ταλαντώσεων, θα πρέπει να υπάρχει επαρκής αριθμός κόμβων για την αναπαράσταση των αναμενόμενων ιδιομορφών ταλάντωσης.
4. Όπου είναι εφικτό, χρησιμοποιούμε πλέγμα σταθερών ισαποστάσεων μεταξύ των κόμβων. Κατά τη μεταβολή των ισαποστάσεων δεν θα πρέπει να υπερδιπλασιάζονται ή να υποδιπλασιάζονται οι αποστάσεις των κόμβων.
5. Όταν χρησιμοποιούνται στοιχεία-ελάσματα ή στοιχεία-κελύφη, προτιμώνται τα αντίστοιχα τετράπλευρα, διότι έχουν περισσότερη ακρίβεια από τα τριγωνικά, η χρήση των οποίων πρέπει να περιορίζεται σε μεταβατικές περιοχές του πλέγματος (Σχήμα 5).
6. Στα τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία, ο λόγος πλευρών θα πρέπει να πλησιάζει τη μονάδα, όσο αυτό είναι εφικτό. Γενικά επιτρέπονται λόγοι πλευρών μικρότεροι του 3 (Σχήμα 6).
7. Τα τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία δεν θα πρέπει να έχουν πολύ οξείες ή αμβλείες γωνίες. Κρίνονται αποδεκτές αποκλίσεις έως 30^0 από το βέλτιστο ισοσκελές τρίγωνο και το ορθογώνιο τρίγωνο (Σχήμα 6).
8. Κατά την αναπαράσταση καμπύλων επιφανειών επιτρέπεται η χρήση επίπεδων στοιχείων, η γωνία όμως μεταξύ γειτονικών στοιχείων δεν θα πρέπει να υπερβαίνει τις 15^0 . Στα στοιχεία-ελάσματα οι κόμβοι θα πρέπει να είναι στο ίδιο επίπεδο.
9. Ο λόγος του Poisson θα πρέπει να είναι μικρότερος του 0,5.
10. Τα μήκη και τα εμβαδά γραμμικών (ράβδων, δοκών) και εκτεταμένων στοιχείων (ελάσματα, κελύφη) θα πρέπει να είναι διάφορα του μηδενός.
11. Τα στοιχεία δεν θα πρέπει να εκτείνονται εκατέρωθεν των ασυνεχειών ή μεταβολών πάχους. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτούνται περισσότεροι κόμβοι και μικρότερα στοιχεία.
12. Τα επίπεδα στοιχεία-ελάσματα δεν διαθέτουν στρεπτική ακαμψία στο επίπεδο του ελάσματος. Για να ληφθεί υπόψη η στρέψη στο επίπεδο ενός επίπεδου ελάσματος θα πρέπει να περιορισθούν οι βαθμοί ελευθερίας περιστροφής στο επίπεδο του ελάσματος (Σχήμα 7).



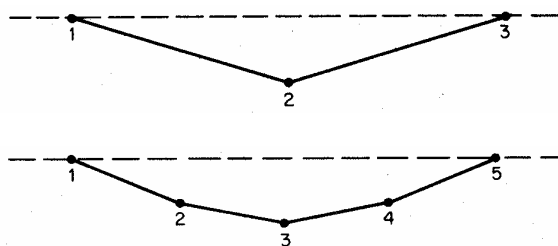
Σχήμα 5 Χρήση τριγωνικών στοιχείων



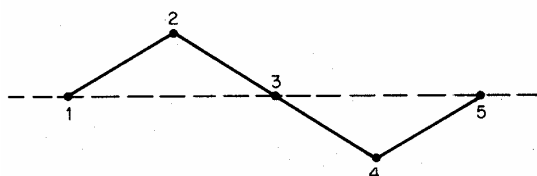
Σχήμα 6 Προτεινόμενοι λόγοι πλευρών στοιχείων



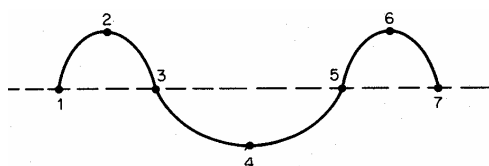
Σχήμα 7 Ομοεπίπεδοι βαθμοί ελευθερίας στροφής ελάσματος



(α) Πρώτη ιδιομορφή

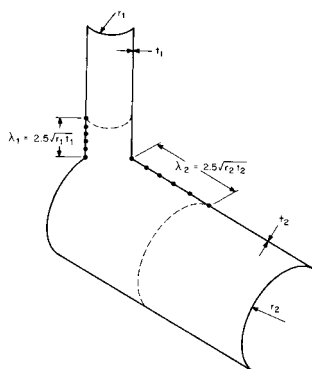


(β) Δεύτερη ιδιομορφή

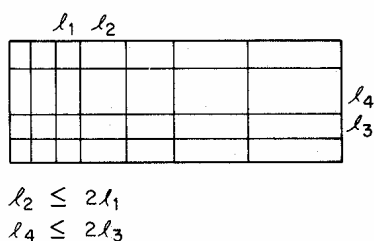


(γ) Τρίτη ιδιομορφή

Σχήμα 8 Απαιτούμενοι κόμβοι για την αναπαράσταση ιδιομορφών ταλάντωσης κατασκευής



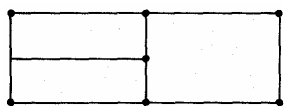
Σχήμα 9 Διαστήματα εξασθένησης σε σύνδεση κυλινδρικών διατομών

**Σχήμα 10** Σταδιακή μεταβολή ισαποστάσεων κόμβων

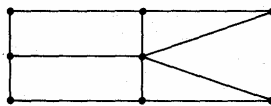
Αρχικά θα πρέπει να καθορισθεί η έκταση της περιοχής της κατασκευής που θα πρέπει να αναπαρασταθεί. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτή θα συμπέσει με τις συνολικές διαστάσεις της κατασκευής. Σε ορισμένα όμως προβλήματα, ενδιαφέρει μόνο η απόκριση σε κάποια περιοχή της όπου ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο κλπ. Το ζητούμενο είναι τότε σε τι έκταση θα επεκταθεί το πλέγμα. Για να γίνει αυτό μπορεί να γίνει χρήση της αρχής του Saint Venant (βλ. 1 παραπάνω). Η απόσταση στην οποία η επίδραση της τοπικής φόρτισης γίνεται αμελητέα καλείται τότε *διάστημα εξασθένισης*⁵. Διάφοροι κανονισμοί δίνουν τιμές για τα διαστήματα εξασθένισης σε διάφορες κατασκευές (κύλινδροι, δίκτυα, δοχεία υπό πίεση κλπ).

Τα διαστήματα αυτά χρησιμοποιούνται ως ελάχιστες διαστάσεις για το μοντέλο που θα κατασκευασθεί. Σε αποστάσεις μικρότερες του διαστήματος εξασθένισης, απαιτούνται 5 στοιχεία. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις, θα πρέπει να αυξηθούν σταδιακά οι ισαποστάσεις των κόμβων λαμβάνοντας υπόψη την παρατήρηση 4 παραπάνω. Δεν μπορούν λοιπόν να δοθούν γενικές οδηγίες ως προς το πως θα προχωρήσει η διακριτοποίηση στην υπόλοιπη κατασκευή. Η αρχική διακριτοποίηση θα βασισθεί στην κρίση του μελετητή που βασίζεται στη συμπεριφορά της κατασκευής.

Στο παράδειγμα του Σχήματος 9, το εντατικό πεδίο μεταβάλλεται σημαντικά στην περιοχή του ανοίγματος και ένα αραιό πλέγμα στην περιοχή αυτή δεν θα επαρκούσε. Σε σταδιακά μεγαλύτερες αποστάσεις από το χείλος του ανοίγματος, το εντατικό πεδίο γίνεται πιο σταθερό και επιτρέπεται τότε πιο αραιό πλέγμα (Σχήμα 8).



(α) Εσφαλμένη σύνδεση κόμβων



(β) Σωστή σύνδεση κόμβων

Σχήμα 11 Διατάξεις κόμβων και συνδέσεις εσωτερικών κόμβων

⁵ διάστημα εξασθένισης = attenuation length

Εάν εξετάζεται η δυναμική συμπεριφορά μιας κατασκευής (μελέτη ταλαντώσεων), για να αναπαρασταθεί ικανοποιητικά το κάθε ημι-κύμα απαιτούνται τουλάχιστον δύο κόμβοι για την υψηλότερη ιδιομορφή ταλάντωσης (Σχήμα 10).

Στο στάδιο που ακολουθεί θα πρέπει να σχεδιασθεί το πλέγμα με βάση τα παραπάνω. Θα πρέπει δε να συνδέονται μεταξύ τους οι κόμβοι έτσι ώστε να μην προκύψει ασυμβατότητα σε κάποιο στοιχείο (Σχήμα 11).

Στο επόμενο στάδιο αριθμούνται οι κόμβοι. Σκόπιμο είναι να ακολουθούνται οι οδηγίες του χρησιμοποιούμενου προγράμματος. Ανάλογα με τη μέθοδο επίλυσης της μητρωικής εξίσωσης ισορροπίας της κατασκευής η σειρά αρίθμησης των κόμβων και των στοιχείων μπορεί να επηρεάσει το εύρος λωρίδας του μητρώου ακαμψίας. Ένας χρήσιμος κανόνας αρίθμησης των στοιχείων είναι, το πρώτο στοιχείο που συνδέεται με ένα συγκεκριμένο κόμβο να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην αρίθμηση με το τελευταίο στοιχείο που συνδέεται με τον κόμβο. Γεγονός είναι πάντως ότι πολλά σύγχρονα προγράμματα περιέχουν αλγόριθμους αρίθμησης στοιχείων και κόμβων για να ελαχιστοποιηθεί το εύρος λωρίδας.

4.4 Ιδιότητες γεωμετρίας και υλικού

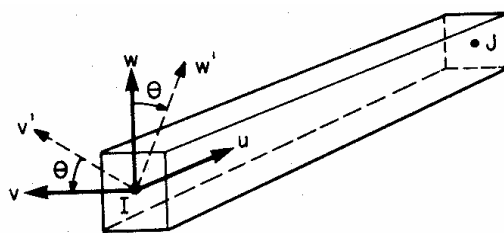
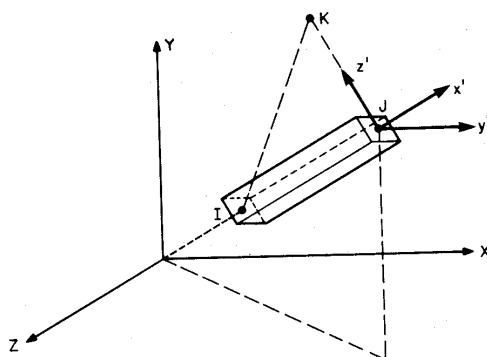
Έχοντας καθορίσει τις συντεταγμένες των κόμβων, την αρίθμηση των κόμβων και των στοιχείων, απομένει να ορισθεί το πάχος για την πλήρη περιγραφή της γεωμετρίας των στοιχείων. Αυτό ισχύει για τα στοιχεία-ελάσματα και τα στοιχεία-κελύφη. Στην περίπτωση όμως των στοιχείων-δοκών, απαιτείται προσοχή κατά τον προσανατολισμό του στοιχείου σε σχέση με τις ροπές αδράνειας. Οι γεωμετρικές ιδιότητες ορίζονται με βάση το τοπικό σύστημα αναφοράς κάθε στοιχείου. Στην περίπτωση των στοιχείων-δοκών, ακολουθούνται δύο τρόποι για τον ορισμό του συστήματος αναφοράς. Κατά τον πρώτο, ορίζεται γωνία περιστροφής για έναναπό τους άξονες που είναι κάθετος στον κεντροβαρικό άξονα της διατομής. Ο δεύτερος τρόπος κάνει χρήση ενός πρόσθετου, νοητού κόμβου ο οποίος καλείται *κόμβος K*. Ο κόμβος αυτός με τους δύο κόμβους του στοιχείου κείτονται σε ένα επίπεδο που ορίζει το σύστημα αναφοράς του στοιχείου (Σχήμα 12).

Οι ιδιότητες που απαιτούνται για την περιγραφή του υλικού περιλαμβάνουν:

- Την πυκνότητα
- Το μέτρο ελαστικότητας
- Το λόγο Poisson
- Την τάση διαρροής

Στη μελέτη θερμικών πεδίων, απαιτούνται και οι παρακάτω σταθερές:

- Συντελεστής θερμικής διαστολής
- Θερμική αγωγιμότητα
- Ειδική θερμότητα

(α) Περιστροφή κατά γωνία θ 

(β) Χρήση κόμβου K

Σχήμα 12 Προσανατολισμός στοιχείου-δοκού

- Θερμική διαχυτότητα⁶

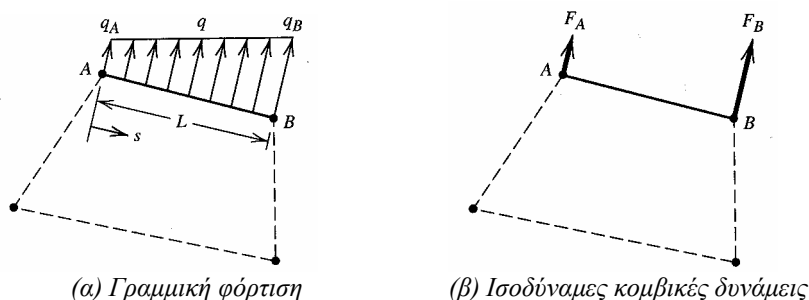
Σε πολλές περιπτώσεις, το βάρος μιας κατασκευής είναι αμελητέο σε σχέση με το μέγεθος των εξωτερικών φορτίσεων που ασκούνται σε αυτή. Μπορούμε τότε, όταν εκπονείται στατική ανάλυση, να θέσουμε την πυκνότητα του υλικού ίση με το μηδέν. Αυξάνεται τότε η υπολογιστική ταχύτητα του προγράμματος. Σε αναλύσεις δυναμικής απόκρισης θα πρέπει να χρησιμοποιείται η σωστή τιμή της πυκνότητας του υλικού.

4.5 Εξωτερικές φορτίσεις

Όταν ορίζονται οι πιέσεις και δυνάμεις που ασκούνται στην κατασκευή απαιτείται προσοχή κατά τον ορισμό του πρόσημου. Θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη το τοπικό αλλά και το γενικό σύστημα αναφοράς.

Οι συγκεντρωμένες φορτίσεις επιφανειακών στοιχείων πρέπει να επιβάλλονται σε δύο ή τρεις παραπλήσιους κόμβους. Το φορτίο τότε ασκείται σε επιφάνεια που έχει πεπερασμένο εμβαδόν. Με βάση τις κλασικές θεωρίες δοκών, ελασμάτων και

⁶ διαχυτότητα = diffusivity



Σχήμα 13 Γραμμικά μεταβαλλόμενη φόρτιση σε στοιχείο με γραμμική μεταβολή των μετατοπίσεων

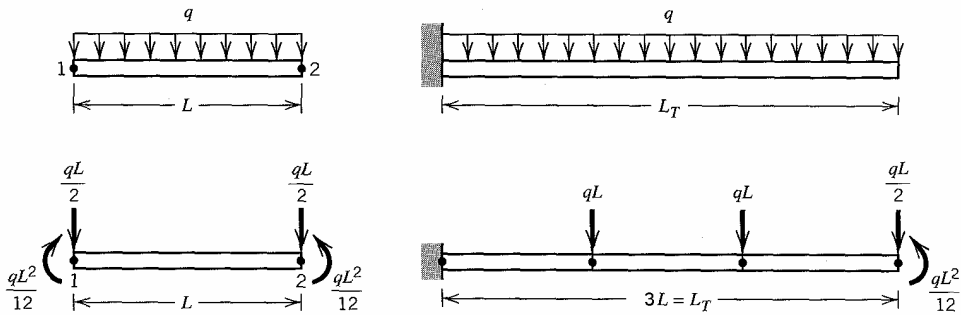
στερεών σωμάτων (θεωρία ελαστικότητας), στο σημείο που ασκείται ένα σημειακό φορτίο προκύπτουν αντίστοιχα:

- Πεπερασμένη μετατόπιση και πεπερασμένη τάση (θεωρία δοκών)
- Πεπερασμένη μετατόπιση και άπειρη τάση (θεωρία λεπτών ελασμάτων)
- Άπειρη μετατόπιση και άπειρη τάση (θεωρία ελαστικότητας)

Τα διάφορα αυτά αποτελέσματα οφείλονται στις διαφορετικές παραδοχές που γίνονται σχετικά με τη φύση των εντατικών πεδίων σε κάθε μια από τις παραπάνω θεωρίες. Στη πράξη, ούτε υπάρχουν πραγματικά σημειακά φορτία, ούτε μπορεί ένα πρόγραμμα ΠΣ να προβλέψει άπειρη τάση. Από την άλλη, η τάση στο σημείο επιβολής συγκεντρωμένου φορτίου αυξάνεται όσο πιο πυκνό γίνεται το πλέγμα στην περιοχή του σημείου. Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν και στην περίπτωση των κατανεμημένων φορτίων. Οι γραμμικές φορτίσεις σε στοιχεία-δοκούς ασκούνται κάθετα στο φορέα, σύμφωνα με το σύστημα αναφοράς του στοιχείου, όπως αυτό ορίζεται με τον κόμβο K ή τις συντεταγμένες του στοιχείου. Κατά κανόνα, οι κατανεμημένες φορτίσεις επιβάλλονται στους κόμβους του πλέγματος ως *κινηματικά ισοδύναμες κομβικές φορτίσεις*. Στην περίπτωση των εκτεταμένων στοιχείων (στοιχεία-ελάσματα, στοιχεία-κελύφη), ασκούνται συγκεντρωμένα φορτίσεις, αδρανειακές δυνάμεις και πλάγιες δυνάμεις⁷. Οι δυνάμεις αυτές αναλύονται σε συνιστώσες κάθετες προς και στο επίπεδο του στοιχείου. Ένας τύπος πλάγιας δύναμης είναι και η υδροστατική πίεση, που ασκείται πάντοτε κάθετα στην επιφάνεια-σύνορο του ρευστού.

Στο Σχήμα 13 δείχνεται πλάγια δύναμη q που μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ των κόμβων στα άκρα του στοιχείου. Η πλάγια δύναμη αντικαθίσταται τότε στο αριθμητικό μοντέλο από δυνάμεις F_A , F_B στους κόμβους έτσι ώστε το έργο της πλάγιας κατανεμημένης φόρτισης να είναι ίσο με αυτό των δυνάμεων που ασκούνται στους κόμβους. Εάν τότε η συνιστώσα της μετατόπισης κάθετα στο επίπεδο του στοιχείου κατά μήκος του φορέα είναι $v(s)$, θα πρέπει:

⁷ πλάγια (επιφανειακή) δύναμη = (surface) traction force



Σχήμα 14 Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε στοιχείο-δοκό και ισοδύναμη φόρτιση με χρήση κομβικών δυνάμεων

$$F_A v'_A + F_B v'_B = \int_0^L v' (q ds) \quad (1)$$

όπου

$$v' = (L-s) \frac{v'_A}{L} + s \frac{v'_B}{L} \quad (2)$$

για κάθε τιμή που λαμβάνουν οι μετατοπίσεις v'_A και v'_B . Εάν τότε η φόρτιση q και οι μετατοπίσεις των κόμβων μεταβάλλονται γραμμικά, η διάταξη του πλέγματος και το πεδίο των μετατοπίσεων στο εσωτερικό του στοιχείου δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα και έτσι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

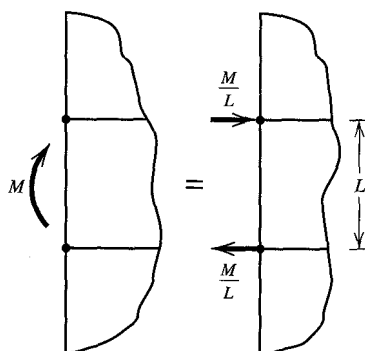
$$\begin{bmatrix} F_A \\ F_B \end{bmatrix} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \end{bmatrix} \quad (3)$$

Στους κόμβους στους οποίους ορίζονται οριακές συνθήκες δεν ασκούνται εξωτερικές φορτίσεις διότι αυτές μεταβιβάζονται απευθείας στις αντίστοιχες στηρίξεις (Σχήμα 14). Στο Κεφάλαιο 2 (εδάφιο 6) αναφέρονται τα στάδια επίλυσης κατασκευής στην οποία έχουν ασκηθεί κομβικές φορτίσεις αλλά και κατανεμημένες φορτίσεις.

Στα στοιχεία που δεν διαθέτουν βαθμούς ελευθερίας περιστροφών, οι εξωτερικές ροπές μπορούν να επιβληθούν ως ζεύγη δυνάμεων ($M=FL$) όπου L = απόσταση κόμβων και $F=M/L$ (Σχήμα 15).

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι τα προγράμματα ΠΣ διαθέτουν συνήθως τη δυνατότητα μετατροπής των κατανεμημένων φορτίσεων σε δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους του πλέγματος.

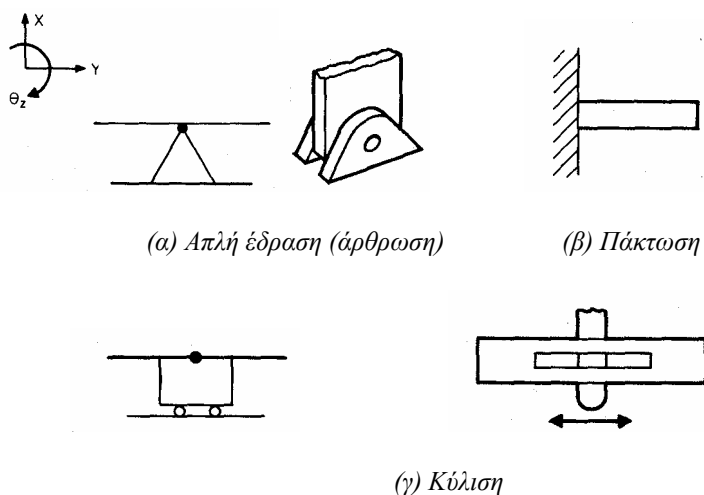
Σε προβλήματα γραμμικής ανάλυσης η κατεύθυνση των εξωτερικών φορτίσεων παραμένει σταθερή. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που αλλάζει η κατεύθυνση, όπως π.χ. στην περίπτωση της υδροστατικής πίεσης όταν η πίεση έχει ως αποτέλε



Σχήμα 15 Επιβολή ροπής σε στοιχεία που δεν διαθέτουν βαθμούς ελευθερίας περιστροφών

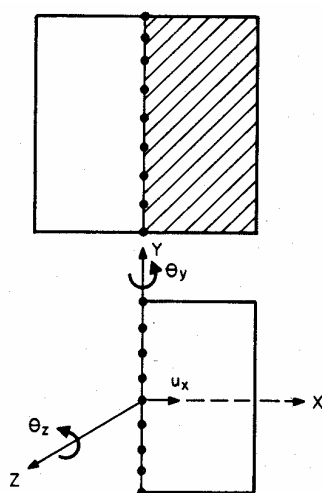
σμα σημαντική παραμόρφωση της κατασκευής. Εάν λοιπόν η παραμόρφωση της κατασκευής είναι σημαντική, θα πρέπει να εκπονηθεί μη-γραμμική ανάλυση που να λαμβάνει υπόψη την αλλαγή της διεύθυνσης της φόρτισης.

4.6 Συνοριακές συνθήκες



Σχήμα 16 Οριακές συνθήκες και αντίστοιχοι περιορισμοί βαθμών ελευθερίας

Συνοριακές συνθήκες απαιτούνται για να επιτευχθεί η σωστή αναπαράσταση της συμπεριφοράς της κατασκευής. Από πλευράς επίλυσης της μητρωκής εξίσωσης ισορροπίας, είναι απαραίτητες διότι χωρίς την επιβολή τους το μητρώο ακαμψίας καθίσταται μοναδιαίο, με απειρία λύσεων. Το φυσικό αντίστοιχο αυτού είναι η μετακίνηση της κατασκευής ως άκαμπτο σώμα με μηδενικό εσωτερικό εντατικό πεδίο.



Σχήμα 17 Οριακές συνθήκες σε άξονα συμμετρίας

Η θεμελίωση της ΜΠΣ στις αρχές της θεωρίας μεταβολών δείχνει ότι οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ορισθούν αφορούν τις γενικευμένες μετατοπίσεις. Έτσι, προσλαμβάνουν τη μορφή περιορισμών κάποιων βαθμών ελευθερίας στους ενδεδειγμένους κόμβους.

Οι συνήθεις οριακές συνθήκες δείχνονται στο Σχήμα 16.

Μια αρθρωτή κατασκευή στηρίζεται σε ένα κόμβο έτσι ώστε να μην προκύψει μετατόπιση κάθετα στο επίπεδο της κατασκευής. Η κατασκευή μπορεί τότε να περιστραφεί ελεύθερα περί το σημείο στήριξης της χωρίς να αναπτύσσονται οι αντίστοιχες καμπτικές ροπές. Στο Σχήμα 16 δείχνεται ότι οι περιορισμοί του κόμβου αφορούν μετατοπίσεις σε δύο κατευθύνσεις ($u = v = 0$). Ο περιορισμός των μετατοπίσεων στο επίπεδο της κατασκευής αφορά τη δυνατότητα κύλισης της κατασκευής. Όταν η κύλιση κάθετα στο σύνορο της κατασκευής επιτρέπεται, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μετατόπιση του συνόρου και την παραλαβή των εξωτερικών φορτίων κυρίων με καμπτικές τάσεις. Εάν όμως περιορίζεται η κύλιση του συνόρου της κατασκευής, αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ομοεπίπεδων τάσεων που συμβάλλουν στην παραλαβή της εξωτερικής φόρτισης. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης είναι τότε αρκετά διαφορετικό από αυτό στην προηγούμενη περίπτωση. Απαιτείται λοιπόν προσοχή κατά την επιλογή των βαθμών ελευθερίας που θα περιορισθούν.

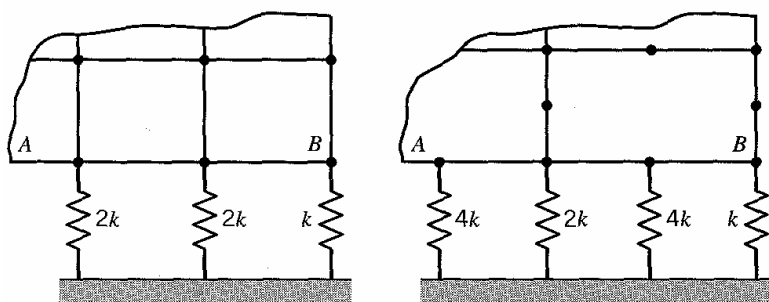
Εκτός της άρθρωσης, μια δεύτερη σημαντική κατηγορία περιορισμών αφορά την πάκτωση. Αυτή η περίπτωση χαρακτηρίζεται από περιορισμό της περιστροφής περί τον άξονα του συνόρου της κατασκευής. Έτσι, στο συνοριακό κόμβο αναπτύσσονται καμπτικές ροπές που περιορίζουν την περιστροφή.

Οι παραπάνω περιπτώσεις αφορούν την επιβολή συνθηκών έτσι ώστε να επιτευχθεί η σωστή αναπαράσταση της συμπεριφοράς της πραγματικής κατασκευής. Οι οριακές συνθήκες όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαρασταθούν:

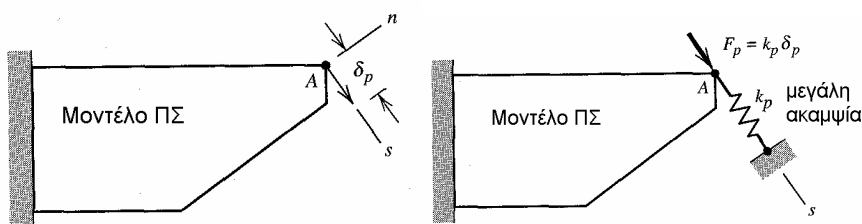
- Η επιβαλλόμενη φόρτιση
- Η συμμετρία της κατασκευής και της φόρτισης
- Η συμπεριφορά της στήριξης
- Η σύνδεση στοιχείων οι ιδιότητες των οποίων διαφέρουν (διαφορετικοί βαθμοί ελευθερίας)

Η τρίτη περίπτωση αφορά τη δυνατότητα να προκύψει υποχώρηση ή μετατόπιση της γειτονικής κατασκευής. Η επιβολή συνθήκης συμμετρίας περιγράφεται στο Σχήμα 17. Παρατηρούμε ότι περιορίζεται η μετατόπιση της κατασκευής κάθετα στο σύνορο.

Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι ο τρόπος επιβολής των οριακών συνθηκών εξαρτάται σε ορισμένες περιπτώσεις και από το συγκεκριμένο πρόγραμμα ΠΣ.



Σχήμα 18 Χρήση ελατηρίων ως στήριξεις σε κανονικά διατεταγμένους κόμβους



Σχήμα 19 Εφαρμογή μεθόδου ποινής για την επιβολή συγκεκριμένης μετατόπισης του κόμβου A

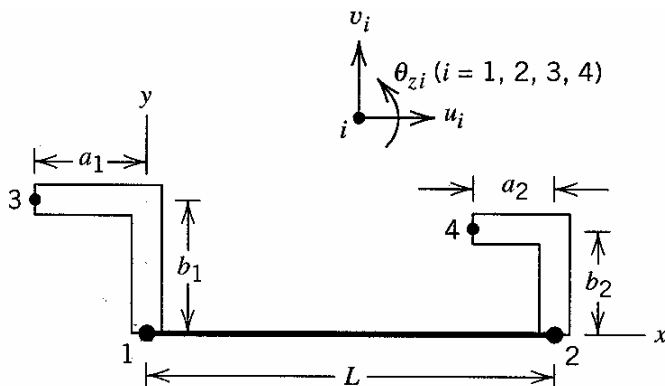
Κατά την εισαγωγή των δεδομένων στο πρόγραμμα απαιτείται προσοχή για την αποφυγή λαθών. Ένας τρόπος ελέγχου των δεδομένων είναι η χρήση γραφικών εργαλείων για την απεικόνιση των οριακών συνθηκών. Συνιστάται όπως αυτό χρησιμοποιείται συστηματικά, ιδιαίτερα σε πολύπλοκες κατασκευές και σε διακριτοποιήσεις με πυκνό πλέγμα. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την πραγματική οριακή συνθήκη. Είναι τότε δυνατόν να εξετασθεί η κατασκευή για δύο περιπτώσεις οριακών συνθηκών που αποτελούν άνω και

κάτω όριο περιορισμού για τους συγκεκριμένους βαθμούς ελευθερίας. Σε άλλες περιπτώσεις, ένα πλέγμα κατασκευής συνδέεται με άλλο πλέγμα ή με στηρίξεις μέσω ελατηρίων (Σχήμα 18).

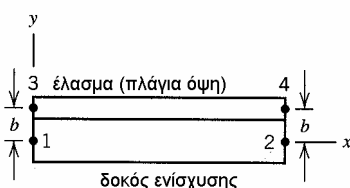
Κατά κανόνα, η στήριξη μέσω ελατηρίων θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε το εντατικό πεδίο που αναπτύσσεται στην κατασκευή για σταθερή μετατόπιση να είναι σταθερό. Εάν τότε οι κόμβοι βρίσκονται σε σταθερές αποστάσεις μεταξύ τους, οι ακαμψίες των ελατηρίων θα πρέπει να είναι αυτές που δείχνονται στο σχήμα. Στην περίπτωση που ένα μοντέλο τρισδιάστατης κατασκευής στηρίζεται μέσω ελατηρίων, απαιτείται προσοχή διότι η συμπεριφορά του στοιχείου μπορεί να μην είναι η αναμενόμενη. Για παράδειγμα, στα άκρα ενός ορθογωνίου ελάσματος, αναπτύσσονται δυνάμεις κάθετα στο επίπεδο του ελάσματος με φορά αντίθετη των δυνάμεων στήριξης κατά μήκος των πλευρών⁸. Η απαιτούμενη ακαμψία των ελατηρίων θα πρέπει να έχει τότε αρνητικό πρόσημο.

Σε ορισμένες περιπτώσεις απαιτείται η επιβολή μη-μηδενικής μετατόπισης ή περιστροφής. Εάν το πρόγραμμα δέχεται μόνο μηδενικές τιμές, μπορούμε να καταφύγουμε στην μέθοδο που περιγράφεται στο Σχήμα 19. Στο παράδειγμα αυτό, το σημείο αυτό μετατοπίζεται κατά δ_p στην κατεύθυνση s . Η συνισταμένη της μετατόπισης του κόμβου A στη κατεύθυνση n είναι τότε το ζητούμενο. Προσθέτουμε τότε ένα ελατήριο με πολύ μεγάλη ακαμψία k_p , π.χ. 10^6 φορές μεγαλύτερη του μεγαλύτερου όρου της κύριας διαγωνίου του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής. Επιβάλλεται τότε μεγάλη δύναμη, $F_p = k_p \delta_p$ στην κατεύθυνση s . Η δύναμη F_p παραλαμβάνεται τότε από το ελατήριο και τη σχετικά ελαφριά κατασκευή. Το σημείο A θα μετατοπισθεί τότε στην κατεύθυνση s λίγο λιγότερο από την μετατόπιση δ_p . Απαιτείται προσοχή κατά τη χρήση τεχνικών όπως αυτή (μέθοδος ποινής) διότι μπορεί να προκύψουν αριθμητικά σφάλματα.

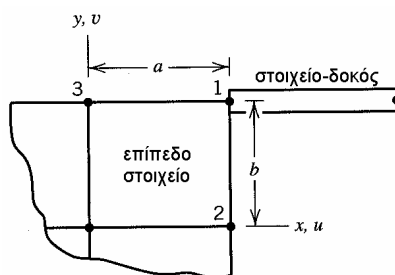
4.6.1 Ακαμπτοι σύνδεσμοι και εξισώσεις περιορισμού



⁸ βλέπε κλασσική θεωρία κάμψης των ορθογωνίων ελασμάτων π.χ. Καρύδη Π.Α. *Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου. Θέματα Τοπικής Αντοχής*, Αθήνα 2000 ή Timoshenko S.P., Woinowsky Krieger *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Co, New York.



Σχήμα 20 Σύνδεση κόμβων με άκαμπτους συνδέσμους



Σχήμα 21 Σύνδεση επίπεδου τετράπλευρου στοιχείου με στοιχείο-δοκό

Σε ορισμένες περιπτώσεις συνδέονται μεταξύ τους στοιχεία διαφορετικών ειδών που διαθέτουν διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας. Προκύπτει τότε ασυμβατότητα η οποία θα προκαλέσει αναστολή της λύσης του προβλήματος.

Σε άλλες περιπτώσεις απαιτείται να διατηρείται απόλυτα σταθερή η απόσταση μεταξύ συγκεκριμένων κόμβων του πλέγματος, όπως για παράδειγμα στις συνδέσεις κόμβων στοιχείου-δοκού και στοιχείου-ελάσματος. Στη δεύτερη περίπτωση οι κόμβοι του στοιχείου-δοκού υποχρεώνονται να ακολουθήσουν τη συμπεριφορά των κόμβων του στοιχείου-ελάσματος. Η διαδικασία γίνεται αυτόματα από το πρόγραμμα με επίκληση του χρήστη. Στο Σχήμα 20 δείχνεται η σχετική διάταξη.

Στο Σχήμα 20 δεχόμαστε ότι το στοιχείο μεταξύ των κόμβων 1 και 2 παραλαμβάνει καμπτικές αλλά και αξονικές φορτίσεις. Οι κόμβοι 1 και 2 συνδέονται με τους κόμβους 3 και 4 με *άκαμπτους συνδέσμους*⁹.

Τα διαστήματα a_i και b_i , ορίζουν τις αποστάσεις στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα μεταξύ των κόμβων.

Οι σχέσεις των βαθμών ελευθερίας των κόμβων είναι τότε, σε μητρωική μορφή:

⁹ άκαμπτος σύνδεσμος = rigid link

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & b_1 & & & \\ & 1 & a_1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & b_2 & \\ & & & & 1 & a_2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_{z3} \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_{z4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

όπου τα κενά αντιπροσωπεύουν μηδενικές τιμές. Στην δεύτερη περίπτωση του Σχήματος 20, $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=b$. Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου-δοκού που αφορά τους κόμβους 1 και 2 είναι το $\mathbf{k}'$. Το μητρώο αυτό μετασχηματίζεται τότε σε μητρώο $\mathbf{k}$ που αφορά τους κόμβους 3 και 4 επιτελούμε το μετασχηματισμό $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}' \mathbf{T}$. Σε συνέχεια, το μητρώο συντίθεται στο γενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, $\mathbf{K}$. Δεν εμφανίζονται τότε οι βαθμοί ελευθερίας 1 και 2 στο διάνυσμα των γενικευμένων μετατοπίσεων $\mathbf{U}$, παρά μόνο κατά την μετεπεξεργασία για να αποκτηθούν οι τάσεις στο στοιχείο-δοκό (τοπική ανάλυση).

Ας επανέλθουμε στην πρώτη περίπτωση που αναφέραμε παραπάνω, δηλαδή την ασυμβατότητα μεταξύ γειτονικών στοιχείων. Στο Σχήμα 21 δείχνεται σύνδεση στοιχείου δοκού με ένα τετράπλευρο επίπεδο στοιχείο. Το στοιχείο-δοκός διαθέτει βαθμό ελευθερίας περιστροφής ενώ το επίπεδο στοιχείο όχι. Επιδιώκουμε τότε να εισάγουμε συμβατότητα περιστροφών, (δηλαδή μεταφορά ροπής) στον κόμβο 1 έτσι ώστε να μην λειτουργεί πλέον μόνο ως απλή άρθρωση. Ένας τρόπος είναι να επιβάλλουμε στον κόμβο 1 και στην πλευρά 1-2 να υποστούν την ίδια περιστροφή, δηλαδή,

$$\theta_{z1} = (u_2 - u_1)/b \quad (5)$$

Η εξίσωση περιορισμού¹⁰ είναι τότε:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 & 1 & -\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \mathbf{D} = 0 \quad (6)$$

όπου το διάνυσμα των μετατοπίσεων

$$\mathbf{D} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_{z2} \quad u_3 \quad \dots] \quad (7)$$

περιλαμβάνει όλους τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας στο γενικό επίπεδο. Θα μπορούσαμε να επιβάλλουμε ισότητα περιστροφής του κόμβου 1 και της πλευράς

¹⁰ εξίσωση περιορισμού = constraint equation

1-3, οπότε συντάσσεται διαφορετική εξίσωση περιορισμού. Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν διάφοροι τρόποι επιβολής αυτών των περιορισμών.

Η γενική μορφή εξίσωσης περιορισμού είναι:

$$CD - Q = 0 \quad (8)$$

όπου C είναι μητρώο διαστάσεων m, n , (m είναι ο αριθμός των εξισώσεων περιορισμού και n είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας στο διάνυσμα των μετατοπίσεων).

Παρακάτω θα περιγραφούν δύο τρόποι επιβολής εξίσωσης περιορισμού.

4.6.2 Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

Μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους επιβολής περιορισμών στα σύνορα πεπερασμένων στοιχείων είναι με τη χρήση πολλαπλασιαστών *Lagrange*, η οποία έχει απόλυτη ακρίβεια. Μια δεύτερη, προσεγγιστική μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η μέθοδος των ποινών¹¹.

Εισάγουμε ως πρόσθετες μεταβλητές τους πολλαπλασιαστές *Lagrange*:

$$\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T \quad (9)$$

Κάθε εξίσωση περιορισμού γράφεται τότε σε ομογενή μορφή και πολλαπλασιάζεται με τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστή λ_i , δίνοντας $\lambda^T \{CD - Q\} = 0$. Το συναρτησιακό της εξίσωσης ισορροπίας είναι τότε:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F + \lambda^T \{CD - Q\} \quad (10)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης, ο δεύτερος στο έργο των εξωτερικών δυνάμεων και ο τρίτος στο έργο λόγω επιβαλλόμενων περιορισμών στα σύνορα στοιχείων. Θεωρούμε τις σχέσεις:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (11)$$

και αποκτάται η παρακάτω μητρική εξίσωση:

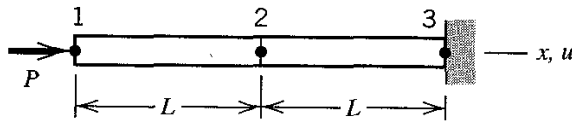
$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (12)$$

¹¹ μέθοδος των ποινών = penalty method

Με αυτό τον τρόπο οι αρχικές εξισώσεις ισορροπίας μετατρέπονται σε μορφή στην οποία περιλαμβάνονται και οι αναγκαίοι περιορισμοί. Η κάτω διαχώριση είναι ταυτόσημη με την εξίσωση περιορισμού και περιλαμβάνει τις m συνθήκες περιορισμού. Εάν $m=0$, καταλήγουμε στο γνωστό αποτέλεσμα $KU=F$. Το ανωτέρω σύστημα μητρικών εξισώσεων επιλύεται ως προς U και λ . Πρόβλημα λόγω της παρουσίας του μηδενικού υπομητρώου $\mathbf{0}$ δεν προκύπτει διότι κατά τη διαδικασία απαλοιφής εισάγονται μη-μηδενικοί όροι στην κύρια διαγώνιο.

Παράδειγμα 1

Επιβάλλουμε τον περιορισμό $u_1=u_2$ στην κατασκευή του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 22 Ράβδος αποτελούμενη από δύο στοιχεία

Η μητρική εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής, μετά την επιβολή οριακών συνθηκών αλλά όχι και των περιορισμών γράφεται:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Η εξίσωση περιορισμού είναι τότε:

$$\mathbf{C} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{όπου } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας γράφεται τότε:

$$\begin{bmatrix} k & -k & 1 \\ -k & 2k & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Επιλύοντας βρίσκουμε $u_1=u_2=P/k$, $\lambda=P$. Το μέγεθος του πολλαπλασιαστή λ είναι μέτρο της δύναμης που απαιτείται για την επιβολή των περιορισμών.

5. Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά της ΜΠΣ είναι ο όγκος των αποτελεσμάτων που αποκτώνται, καθώς επίσης και οι διάφοροι τρόποι παρουσίασής τους. Για να είναι αποτελεσματική η χρήση ενός προγράμματος ΠΣ θα πρέπει να ακολουθείται μια συστηματική διαδικασία ελέγχου των αποτελεσμάτων και να μην περιορίζεται κανείς σε μια σύντομη επισκόπηση επιλεγμένων πληροφοριών που έχουν άμεσο ενδιαφέρον. Ορισμένες μελέτες απαιτούν περισσότερη προσπάθεια απ' ότι άλλες, λόγω των ιδιοτήτων των χρησιμοποιούμενων στοιχείων, της πολυπλοκότητας του πλέγματος, της απόκρισης της κατασκευής κλπ.

5.1 Γραφικά και αριθμητικά αποτελέσματα

Το κύριο αποτέλεσμα της μελέτης μιας κατασκευής με πρόγραμμα ΠΣ είναι οι μετατοπίσεις στους κόμβους του πλέγματος που έχει χρησιμοποιηθεί, καθώς προκύπτουν άμεσα από την επίλυση της μητρικής εξίσωσης ισορροπίας της κατασκευής. Με πίσω-αντικατάσταση, υπολογίζονται οι εσωτερικές δυνάμεις στους κόμβους και σε συνέχεια οι εσωτερικές τάσεις και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις. Ανάλογα με το είδος της μελέτης, μπορεί να απαιτηθούν τάσεις, ιδιοσυχνότητες, ιδιομορφές κ.ά. Κατά κανόνα, οι τάσεις που δίνονται αντιστοιχούν στο κέντρο βάρους κάθε στοιχείου. Σε πολλά προγράμματα δίνονται και οι μέσες τάσεις στους κόμβους.

Τα αποτελέσματα δίνονται σε αριθμητική και γραφική μορφή. Τα γραφικά αποτελέσματα είναι πολύ πιο εύκολα αναγνώσιμα, δεν εμπεριέχουν όμως τον ίδιο βαθμό ακρίβειας με τα αντίστοιχα αριθμητικά. Οι γραφικές παραστάσεις δίνουν την ευκαιρία στο χρήστη να επιτύχει μια γρήγορη επισκόπηση η οποία θα πρέπει να συνοδεύεται από συστηματικό έλεγχο των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Το πρώτο αποτέλεσμα λοιπόν που θα πρέπει να ελεγχθεί είναι η γραφική παράσταση των μετατοπίσεων των κόμβων της κατασκευής. Σε ορισμένες περιπτώσεις βοηθάει η υπέρθεση του διαγράμματος της παραμορφωμένης κατασκευής στην αρχική κατασκευή. Η μορφή της κατασκευής υπό την επίδραση φορτίων σε συνάρτηση με τις επικρατούσες οριακές συνθήκες θα δώσει μια πρώτη εικόνα των αποτελεσμάτων.

Στο επόμενο στάδιο, ελέγχεται το διάγραμμα των ισοτασικών καμπυλών. Τα προγράμματα διαθέτουν τη δυνατότητα παρουσίασης διαγραμμάτων των ορθών τάσεων, των διατμητικών τάσεων και των ισοδύναμων τάσεων (τάσεων von Mises), που υπολογίζονται από το κριτήριο στροφικής ενέργειας. Από τις δυνατότητες αυτές εξυπηρετεί σε πρώτη φάση ο έλεγχος των ορθών τάσεων στην κύρια κατεύθυνση φόρτισης της κατασκευής καθώς επίσης και των τάσεων von Mises. Η χρήση χρωματικού κώδικα διευκολύνει την ερμηνεία των κύριων εντατικών πεδίων αλλά και την αναγνώριση των κρίσιμων περιοχών της κατασκευής. Τα χαρακτηριστικά ενός ακριβούς εντατικού πεδίου είναι:

- Οι ισοτασικές καμπύλες θα πρέπει να είναι κάθετες στα επίπεδα συμμετρίας (φορτίου και γεωμετρίας)
- Σε ένα ελεύθερο άκρο, η μια από τις κύριες τάσεις θα πρέπει να είναι μηδενική.
- Σε σύνορο που φέρει πίεση p , η μια από τις κύριες τάσεις θα πρέπει να είναι ίση με $-p$.
- Οι κατευθύνσεις των κύριων τάσεων θα πρέπει να είναι κάθετες ή εφαπτόμενες με α) ελεύθερα σύνορα, β) σύνορα που φέρουν μόνο κάθετη πίεση και γ) επίπεδα συμμετρίας.
- Σε αξονο-συμμετρικά προβλήματα, οι τάσεις κατά μήκος της περιφέρειας και της ακτίνας θα πρέπει, στον άξονα συμμετρίας εκ περιστροφής, να είναι ίσες.
- Εάν παρατηρούνται ανεξήγητες (σημαντικές) μεταβολές στο εντατικό πεδίο σε κάποια περιοχή της κατασκευής, αυτό μπορεί να οφείλεται σε σφάλμα κατά την ανάπτυξη του μοντέλου

Μετά τον έλεγχο των γραφικών παραστάσεων, ακολουθεί έλεγχος των αριθμητικών αποτελεσμάτων, που είναι και το κύριο μέτρο ακρίβειας της συγκεκριμένης εφαρμογής. Η αριθμητική ακρίβεια, όπως και η αριθμητική ευστάθεια της λύσης, δεν εκφράζονται απόλυτα αλλά στο βαθμό που επιτυγχάνονται. Ο επιτυχής έλεγχος των αριθμητικών αποτελεσμάτων που περιλαμβάνουν πολλές σελίδες στηλών με αριθμούς υποστηρίζεται με τον εντοπισμό των κρίσιμων περιοχών από πλευράς μετατοπίσεων και τάσεων με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, αλλά και με την σωστή κατανόηση της συμπεριφοράς της κατασκευής. Για παράδειγμα, μπορεί μια περίπλοκη, τρισδιάστατη κατασκευή να φέρει σύνθετη φόρτιση. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να ελέγχονται τα εντατικά πεδία σε διάφορα κρίσιμα επίπεδα ώστε να εντοπισθούν οι πραγματικές κρίσιμες τιμές. Σε πολλά προγράμματα υπάρχει η δυνατότητα απόκρυψης των μη-ορατών επιφανειών. Θα πρέπει λοιπόν να εμφανίζονται σταδιακά τα διάφορα στοιχεία της κατασκευής, παράλληλα με τα κύρια επίπεδα προσανατολισμού της για να αποκτηθεί μια πλήρης εικόνα της απόκρισης της κατασκευής. Ενδεχομένως, ο χρήστης μπορεί να συντάξει και να κάνει χρήση ενός απλού κώδικα εντοπισμού κρίσιμων τιμών τάσεων που περιέχονται στα αρχεία αποθήκευσής τους, έτσι ώστε να γίνεται συστηματικός έλεγχος.

Ένας σχετικά εύκολος έλεγχος συνίσταται στον υπολογισμό των αντιδράσεων στήριξης της κατασκευής. Θα πρέπει το άθροισμα των αντιδράσεων να έχει το ίδιο μέγεθος αλλά αντίθετη φορά με την αντίστοιχη εξωτερική δύναμη που ασκείται στην κατασκευή. Εάν οι αντιδράσεις δεν ισορροπούν την εξωτερική φόρτιση, θα πρέπει να ελεγχθούν τα αρχικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να ελεγχθούν τα πρόσημα και οι τιμές των εξωτερικών φορτίσεων.

Πιο δύσκολος είναι ο έλεγχος των μετατοπίσεων, καθώς αυτό είναι και το κύριο ζητούμενο της μελέτης. Αυτό που είναι εφικτό είναι να υπολογισθούν επιλεγμένες

τιμές κάνοντας χρήση απλής θεωρίας της μηχανικής και διαθέσιμων αποτελεσμάτων¹².

Στις περισσότερες μελέτες, οι τάσεις είναι το πιο σημαντικό κομμάτι της ανάλυσης αλλά και το πιο επιρρεπές σε σφάλματα. Σε πολλές περιπτώσεις, απαιτείται χρήση μετεπεξεργαστή για την απόκτηση τάσεων (μέσων τιμών ή φορτίων) σε συγκεκριμένες περιοχές κάποιας κατασκευής. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός ενισχυμένου ελάσματος υπό θλίψη, για να βρεθεί η μέση τάση που αναπτύσσεται στην εγκάρσια επιφάνεια που θλίβεται, θα πρέπει να γίνει ολοκλήρωση των τιμών που δίνονται σε κόμβους ή σημεία αριθμητικής ολοκλήρωσης (σημεία Gauss).

Όπως και στην περίπτωση των μετατοπίσεων, απαιτείται να γίνονται ορισμένοι απλοί υπολογισμοί κάνοντας χρήση σχέσεων της μηχανικής για να εξασφαλισθεί ότι οι τιμές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Μια εξοικείωση με τις παραδοχές της θεωρίας που χρησιμοποιείται βοηθάει πολύ στην σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά του προγράμματος. Για παράδειγμα, εάν γίνει χρήση γραμμικής θεωρίας για την πρόβλεψη μετατόπισης στο πεδίο των μεγάλων μετατοπίσεων, αναμένουμε ότι οι αποκλίσεις θα αυξάνονται ανάλογα με το μέγεθος των μετατοπίσεων. Αν δηλαδή το βέλος κάμψης ελάσματος είναι της τάξης μεγέθους του πάχους του στοιχείου, τότε η γραμμική θεωρία υπερεκτιμά το βέλος κάμψης κατά 100%.

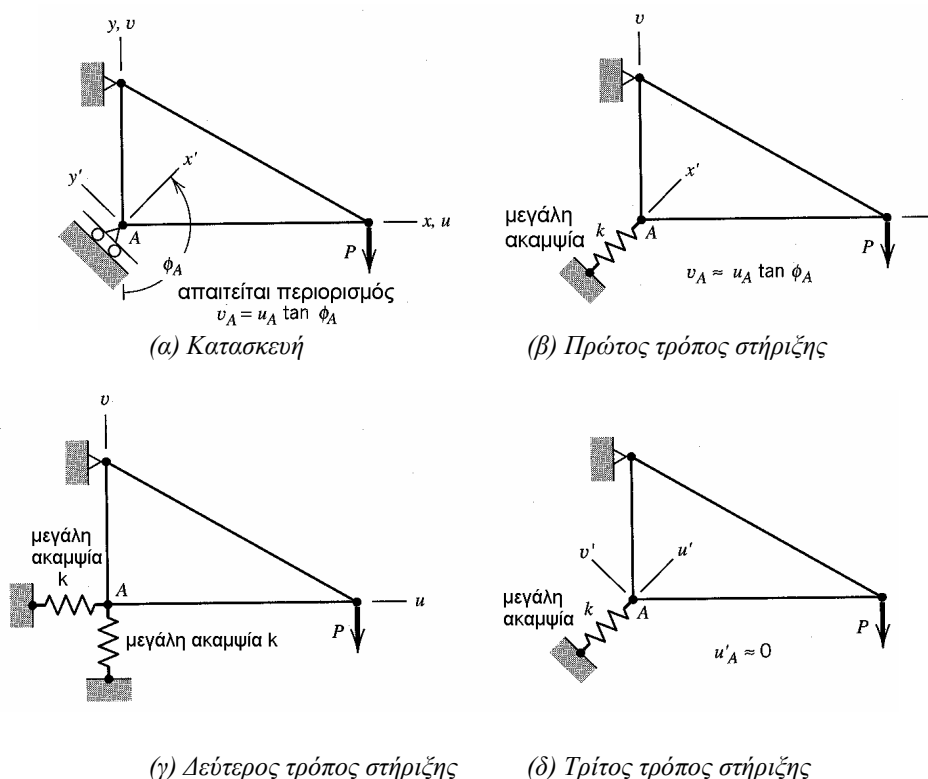
Οι οριακές συνθήκες επηρεάζουν φυσικά τις τάσεις στα σύνορα της κατασκευής. Έτσι λοιπόν, εάν π.χ. παρατηρήσουμε μηδενική καμπτική τάση σε σύνορο στο οποίο υποτίθεται ότι έχει περιορισθεί η περιστροφή περί τον άξονα του συνόρου, θα πρέπει να ελεγχθούν οι οριακές συνθήκες. Θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι παρατηρήσεις που έγιναν όσον αφορά μεγάλες μεταβολές στα εντατικά πεδία. Σε περίπτωση που οι ισοτασικές καμπύλες έχουν πυκνή διάταξη, απαιτείται πιο πυκνό πλέγμα στην συγκεκριμένη περιοχή της κατασκευής. Αυτό υλοποιείται σε επόμενο στάδιο της μελέτης κατά το οποίο εξετάζεται νέα διάταξη του πλέγματος.

5.2 Ακρίβεια και μελέτες σύγκλισης

Στο Κεφάλαιο 12 περιγράφονται εκτενώς οι διάφοροι λόγοι για τους οποίους μπορούν να προκύψουν αποκλίσεις από την ορθή λύση μιας αριθμητικής διαδικασίας. Ο χρήστης ενός προγράμματος ΠΣ θα πρέπει να είναι γνώστης των πιθανών σφαλμάτων που μπορούν να προκύψουν. Μια σωστή αντιμετώπιση θα πρέπει να είναι ότι αποκλίσεις από τη «σωστή» λύση οπωσδήποτε θα προκύψουν και ότι το ζητούμενο είναι να ενσωματωθούν στη διαδικασία χρήσης του αλγορίθμου τρόποι εντοπισμού και διόρθωσής τους. Με προσεκτικό προγραμματισμό της δουλειάς είναι δυνατό να περιορισθούν σε αποδεκτά επίπεδα.

Οι κυριότερες πηγές σφαλμάτων, εκτός αυτών που αφορούν στην εισαγωγή των δεδομένων είναι η κακή κατάσταση της μητρικής εξίσωσης ισορροπίας και η ανεπάρκεια του πλέγματος.

¹² π.χ. από το κείμενο *Formulas for Stress and Strain* των Roark και Young, McGraw-Hill Book Co, New York 1975.



Σχήμα 23 Διάφοροι τρόποι στήριξης κόμβου με κύλιση

Κακή κατάσταση των εξισώσεων ισορροπίας μπορεί να προκύψει όταν μικρές μεταβολές στο μητρώο ακαμψιάς έχουν ως αποτέλεσμα μεγάλες μεταβολές στο διάνυσμα των (ζητούμενων) μετατοπίσεων στους κόμβους του πλέγματος. Κατά κανόνα αυτό προκύπτει όταν ένα στοιχείο με μικρή ακαμψία συνδέεται με ένα στοιχείο που έχει μεγάλη ακαμψία, ιδίως όταν το στοιχείο με μεγάλη ακαμψία στηρίζεται στο στοιχείο με μικρή ακαμψία. Το φυσικό ανάλογο αυτού είναι ότι, αν η διαφορά ακαμψιάς αυξανόταν απεριόριστα, το στοιχείο με χαμηλή ακαμψία δεν θα προσέφερε πλέον ουδεμία στήριξη στο πιο άκαμπτο στοιχείο και δεν θα μπορούσαμε να αποκτήσουμε λύση λόγω ανεπαρκούς στήριξης (κίνηση άκαμπτου σώματος). Ένα σοβαρό πρόβλημα σε αυτές τις λύσεις δεν είναι η πιθανή αριθμητική αστάθεια της λύσης αλλά η απόκτηση λύσης που εμπεριέχει σημαντικό σφάλμα.

Παρακάτω θα περιγράψουμε τρόπους αποφυγής αυτών των καταστάσεων. Στο Σχήμα 23, ο κόμβος A στηρίζεται σε σύνορο στο οποίο επιτρέπεται κύλιση μόνο στην κατεύθυνση Oy' . Μια τέτοια συνθήκη στήριξης εισάγεται χωρίς δυσκολία με εξισώσεις περιορισμού, όπως περιγράφηκε προηγουμένως, ή με πολλαπλασιαστές Lagrange.

Η κατασκευή που εικονίζεται στο Σχήμα 23α μπορεί να στηριχθεί με οποιονδήποτε από τους τρεις τρόπους που ακολουθούν το πρώτο σκαρίφημα. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 23β), έχει προστεθεί ένα άκαμπτο ελατήριο κατά μήκος του άξονα Ox' , επιτρέποντας τη μετατόπιση στην κατεύθυνση Oy' , ενώ περιορίζεται ταυτόχρονα σχεδόν στο μηδέν η μετατόπιση στην κατεύθυνση Ox' .

Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται συνθήκη ποινής που μπορεί να οδηγήσει σε κακή κατάσταση αν η ακαμψία k του ελατηρίου είναι πολύ μεγάλη. Στο Σχήμα 23γ ο κόμβος A στηρίζεται με ισοδύναμο τρόπο, σε αυτήν όμως την περίπτωση δεν προκύπτει πρόβλημα ακόμα και αν κάποια από τις ακαμψίες k_1 και k_2 είναι μεγάλες. Ο λόγος είναι ότι στη δεύτερη περίπτωση εισάγονται μεγάλοι όροι μόνο στην κύρια διαγώνιο και όχι εκτός αυτής. Τέλος μπορούμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με κεκλιμένο ελατήριο, (Σχήμα 23δ), αφού προηγουμένως γίνει περιστροφή του συστήματος αναφοράς του κόμβου A .

Όταν εμφανίζονται στοιχεία με πολύ μεγάλη ακαμψία στο εσωτερικό μιας κατασκευής και όχι στο σύνορό της, υπάρχει πάντοτε το πρόβλημα κακής κατάστασης. Γι' αυτό το λόγο άλλωστε χρησιμοποιούνται οι άκαμπτοι σύνδεσμοι, που περιγράφηκαν προηγουμένως.

Κατά την ανάλυση λεπτότοιχων κατασκευών προκύπτει γενικά πρόβλημα κακής κατάστασης διότι η καμπτική και η μεμβρανική ακαμψία των στοιχείων διαφέρουν σημαντικά. Σημειώνεται δε ότι, όσο μεγαλώνει το μέγεθος του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής, τόσο περισσότερες πιθανότητες υπάρχουν να προκύψει κακή κατάσταση. Για το λόγο αυτό, η χρήση πιο πυκνού πλέγματος μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

Σε ορισμένα προγράμματα χρησιμοποιείται ο έλεγχος απόσβεσης κατά τη διαγώνιο¹³ για να μετασχηματισθεί κατάλληλα το μητρώο ακαμψίας. Πάντως, ο καλύτερος τρόπος αποφυγής προβλημάτων είναι η μετατροπή πολύ άκαμπτων στοιχείων μιας κατασκευής σε απόλυτα άκαμπτα, κάνοντας χρήση εξισώσεων περιορισμού.

Το μητρώο ακαμψίας μπορεί γενικά να καταστεί μοναδιαίο για τους παρακάτω λόγους:

- Οι ιδιότητες του υλικού και της γεωμετρίας δεν έχουν ορισθεί (είναι μηδενικές)
- Ένας ή περισσότεροι κόμβοι δεν είναι συνδεδεμένοι σε κάποιο στοιχείο.
- Δεν έχουν ορισθεί στηρίξεις, ή οι στηρίξεις δεν επαρκούν για την αποφυγή της κίνησης της κατασκευής ως άκαμπτο σώμα.
- Δημιουργείται μηχανισμός γιατί τμήμα της κατασκευής δεν έχει κατάλληλη στήριξη.
- Δημιουργείται μηχανισμός γιατί έχουν απελευθερωθεί¹⁴ περισσότεροι από τους επιτρεπόμενους βαθμοί ελευθερίας σε κάποιο κόμβο της κατασκευής.

¹³ έλεγχος απόσβεσης κατά τη διαγώνιο = diagonal decay test

¹⁴ η απελευθέρωση βαθμών ελευθερίας (release) γίνεται όταν συνδέονται δύο ομοειδή στοιχεία στα οποία ταυτίζονται ορισμένοι βαθμοί ελευθερίας. Μπορούμε τότε να απελευθερώσουμε ορισμένους από αυτούς για να κινηθεί το ένα στοιχείο ανεξάρτητα από το γειτονικό του, εφόσον αυτό απαιτείται.

- Προκύπτουν μεγάλες διαφορές ακαμψίας.
- Τμήμα της κατασκευής έχει υποστεί λυγισμό (εφόσον μπορεί να ληφθεί υπόψη ο λυγισμός στη λύση)
- Κατά τη μη-γραμμική ανάλυση, η ακαμψία των στηρίξεων ή συνδέσεων έχει μειωθεί στο μηδέν, έτσι ώστε είναι ανεπαρκής πλέον η στήριξη της κατασκευής.

Εάν προκύψει ένα από τα παραπάνω, αναστέλλεται η λειτουργία του προγράμματος. Στην περίπτωση που προχωρεί η λύση, τα αποτελέσματα είναι πολύ διαφορετικά από τα αναμενόμενα. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν σφάλματα αλλά που τα αποτελέσματα είναι πιστευτά, η κατάσταση είναι πιο επικίνδυνη. Τέτοια σφάλματα οφείλονται στους παρακάτω λόγους:

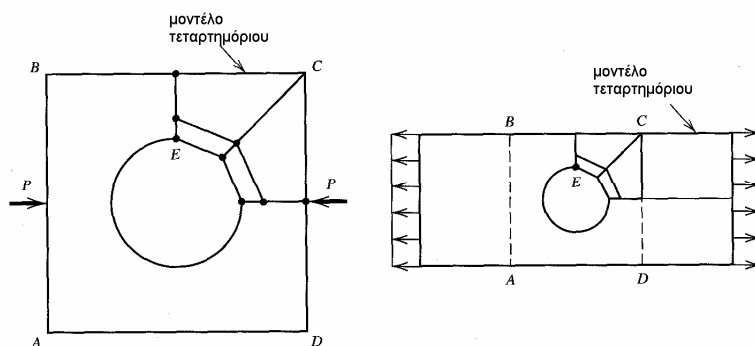
- Χρησιμοποιούνται ακατάλληλα πεπερασμένα στοιχεία
- Έχουν γίνει λάθη στη θέση και στο είδος των στηρίξεων. (Μπορεί να έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερες από τις αναγκαίες στηρίξεις).
- Έχουν γίνει λάθη κατά τον ορισμό των εξωτερικών φορτίσεων (θέσεις, μέγεθος, είδος, κατεύθυνση, φορά). Όταν ασκούνται φορτίσεις σε συμμετρική κατασκευή θα πρέπει να υποδιπλασιάζονται στους κόμβους των αξόνων συμμετρίας.
- Υπάρχει λάθος στα άλλα δεδομένα (ασυμβατότητα μονάδων κλπ).
- Έχει ορισθεί ένα στοιχείο δύο φορές (ο διπλός ορισμός δεν εντοπίζεται εύκολα διότι τα δύο στοιχεία συμπίπτουν).
- Δεν έχει φυσικό νόημα κάποια σύνδεση.

6. Τεχνικές βελτίωσης της ακρίβειας

6.1 Συγκεντρώσεις τάσεων

Στις περιοχές που προκύπτει συγκέντρωση τάσεων, το ζητούμενο είναι να υπολογισθεί η μέγιστη τάση. Ένας τρόπος για να γίνει αυτό είναι η σταδιακή πύκνωση του πλέγματος. Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει χρήση συντελεστή συγκέντρωσης τάσης (ΣΣΤ). Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: υπολογίζεται η ονομαστική τάση με το πρόγραμμα ΠΣ και τότε, εφόσον υπάρχει ο κατάλληλος ΣΣΤ για τη συγκεκριμένη γεωμετρία και πεδίο τάσεων, η μέγιστη τάση βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας την ονομαστική τάση με το ΣΣΤ.

Όταν δε διαθέτουμε τιμές για το ΣΣΤ, ακολουθούμε την παρακάτω μέθοδο: η ασυνέχεια αναπαριστάται με αραιό πλέγμα και υπολογίζεται η μέγιστη τάση. Για να ληφθεί υπόψη η αραιότητα του πλέγματος, διαιρείται η μέγιστη τάση με ένα συντελεστή διόρθωσης. Ο συντελεστής διόρθωσης προσδιορίζεται με βάση το ίδιο τοπικό πλέγμα που χρησιμοποιείται για να επιλυθεί ένα δευτερεύον πρόβλημα του οποίου η λύση είναι γνωστή. Ο συντελεστής είναι τότε ίσος με το πηλίκο της ακριβούς τάσης προς την τάση που υπολογίσθηκε στο δευτερεύον πρόβλημα. Η επιτυ



(α) Επίπεδος τετράγωνος χώρος με οπή

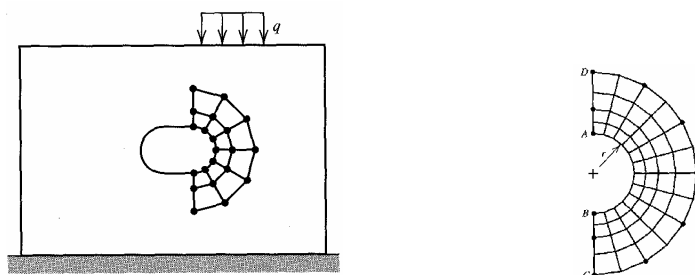
(β) Δευτερεύον πρόβλημα με παρόμοια διάταξη κατασκευής με γνωστή λύση

Σχήμα 24 Υπολογισμός μέγιστης τάσης σε συγκέντρωση τάσεων

χία της μεθόδου έγκειται στη διαθεσιμότητα δευτερεύοντος προβλήματος που να προσεγγίζει το προς επίλυση πρόβλημα, και στην ικανότητα του μελετητή να το αναγνωρίσει.

Θεωρούμε, για παράδειγμα, την τάση στο σημείο *E* της κατασκευής του Σχήματος 24. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή το πλέγμα είναι πολύ αραιό. Το ίδιο πλέγμα εισάγεται σε λωρίδα υπό εφελκυσμό (δευτερεύον πρόβλημα) και βρίσκεται ο ΣΣΤ από πίνακες. Στο σημείο *E*, για την συγκεκριμένη εξωτερική φόρτιση, στη δεύτερη λύση η τάση είναι 130 MPa, (ΣΣΤ) και 92,8 MPa (πρόγραμμα ΠΣ). Άρα ο συντελεστής διόρθωσης ισούται με $130/92,8 = 1,40$. Η τελική τιμή είναι τότε $221(1,40) = 310$ MPa. Η ακριβής τάση που υπολογίζεται με πολύ πυκνό πλέγμα ισούται με 337 MPa. Εάν θέλαμε να αποκτήσουμε την τιμή των 310 MPa θα έπρεπε να αντικαταστήσουμε το πολύ αραιό πλέγμα (2 επί 2) με πλέγμα 8 επί 8.

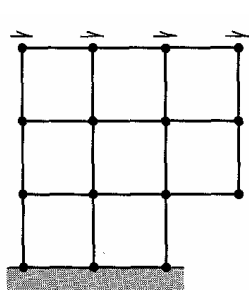
6.2 Χρήση υπομοντέλου



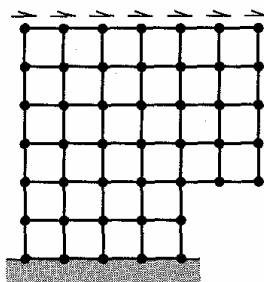
(α) Τμήμα αραιού πλέγματος

(β) Υπομοντέλο

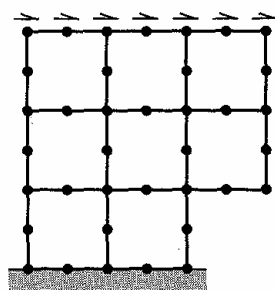
Σχήμα 25 Χρήση υπομοντέλου



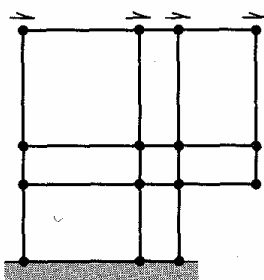
(α) Αρχικό πλέγμα



(β) Σταθερή εξέλιξη (πύκνωση) κατά διάστημα



(γ) Σταθερή εξέλιξη κατά βαθμό πολωνύμου



(δ) Εξέλιξη κατά διάστημα και κατά βαθμό πολωνύμου

Σχήμα 26 Διάφοροι τρόποι πύκνωσης πλέγματος

Η χρήση υπομοντέλων¹⁵ γίνεται για να επιτυγχάνεται η επιλεκτική, τοπική πύκνωση του πλέγματος σε συγκεκριμένες περιοχές της κατασκευής.

Θεωρούμε για παράδειγμα την κατασκευή του Σχήματος 25α. Το πλέγμα που δείχνεται είναι πολύ αραιό για να δώσει ακριβή αποτελέσματα στο σύνορο της οπής, αλλά επαρκές για περιοχές σε κάποια απόσταση από αυτή. Στο Σχήμα 25β δείχνεται η διάταξη ενός υπομοντέλου της κατασκευής. Στους κόμβους του υπομοντέλου αυτού, κατά μήκος των BC , CD και DA ασκούνται προκαθορισμένες μετατοπίσεις¹⁶ οι οποίες λαμβάνονται από το αραιό πλέγμα. Σε ορισμένες περιπτώσεις, απαιτείται παρεμβολή για να αποκτηθούν μετατοπίσεις σε κόμβους του υπομοντέλου οι οποίες δεν δίνονται από το αραιό πλέγμα. Στο υπομοντέλο επιβάλλονται μετατοπίσεις μόνο στους συνοριακούς κόμβους του. Η διαφορά υπομοντέλου και υποκατασκευής έγκειται στο ότι στην περίπτωση του υπομοντέλου δεν απαιτείται να υπάρχει ταύτιση κόμβων στο σύνορο των δύο πλεγμάτων. Επίσης, κατά την επίλυση του υπομοντέλου δεν γίνεται επίλυση του συνολικού συστήματος (αραιό πλέγμα και υπομοντέλο). Έτσι, χρησιμοποιούνται οι ίδιες τιμές για τις κομ-

¹⁵ υπομοντέλο = submodel

¹⁶ προκαθορισμένη μετατόπιση = prescribed displacement

βικές μετατοπίσεις σε κάθε στάδιο εξέλιξης του υπομοντέλου. Μπορούμε να ελέγξουμε την ακρίβεια του υπομοντέλου συγκρίνοντας τις τάσεις στο σύνορο του υπομοντέλου. Εάν οι μεταβολές στις τιμές των συνοριακών τάσεων είναι αμελητέες τότε το υπομοντέλο λειτουργεί σωστά. Γενικά απαιτείται προσοχή και εμπειρία κατά τη χρήση αυτής της τεχνικής.

6.3 Σύγκλιση με σταδιακή πύκνωση του πλέγματος

Η σταδιακή πύκνωση του πλέγματος πρέπει να καταλήξει στην ακριβή λύση του προβλήματος. Η σύγκλιση προσεγγίζει σταδιακά το συγκεκριμένο μαθηματικό μοντέλο, δηλαδή, εάν χρησιμοποιούμε στοιχεία-δοκούς, στη θεωρία δοκών. Κατά κανόνα, το αριθμητικό μοντέλο της κατασκευής συμπεριφέρεται ως πιο άκαμπτο από την πραγματική κατασκευή, δηλαδή οι προβλεπόμενες μετατοπίσεις είναι μικρότερες από αυτές της αντίστοιχης θεωρίας. Εάν, κατά τη σταδιακή πύκνωση του πλέγματος χρησιμοποιούνται όλοι οι υπάρχοντες κόμβοι κάθε φορά, η σύγκλιση είναι μονοτονική.

7. Καταγραφή και παρουσίαση αποτελεσμάτων

Η συστηματική καταγραφή της όλης διαδικασίας μελέτης, συμπεριλαμβανομένων των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της χρήσης της μεθόδου. Σε ένα κατάλληλα οργανωμένο εργασιακό περιβάλλον, η καταγραφή και παρουσίαση της μελέτης θα έχει κωδικοποιηθεί σε ένα μεγάλο βαθμό. Στην περίπτωση όμως που τέτοιες μελέτες γίνονται περιστασιακά υπάρχει ανάγκη να δοθεί ένα περίγραμμα των ζητούμενων. Έχουμε λοιπόν:

1. Περιγραφή των σκοπών της μελέτης. Καταγραφή των πιθανών μορφών αστοχίας ή κριτήρια με βάση τα οποία θα αξιολογηθεί το αποτέλεσμα.
2. Περιγραφή της υπό μελέτη κατασκευής, συμπεριλαμβανομένων των κύριων διαστάσεων, του υλικού, των συνθηκών φόρτισης καθώς επίσης και της λειτουργίας της κατασκευής (ένα σκαρίφημα υποβοηθάει).
3. Σύντομη περιγραφή του προγράμματος ΠΣ και του υπολογιστικού συστήματος που χρησιμοποιήθηκε.
4. Γραφική απεικόνιση του αριθμητικού μοντέλου της κατασκευής, περιγραφή των συνθηκών στήριξης, των εξωτερικών φορτίσεων και των παραδοχών σχετικά με τη συμπεριφορά της κατασκευής.
5. Γραφικές παραστάσεις των μετατοπίσεων, ιδιομορφών, θερμικών και εντατικών πεδίων. Κριτική περιγραφή και ερμηνεία των αποτελεσμάτων της μελέτης.
6. Πίνακας των κρίσιμων τιμών των μετατοπίσεων και τάσεων στην κατασκευή.
7. Πρόχειροι υπολογισμοί που συνοδεύουν την αριθμητική λύση, και κατάλληλες βιβλιογραφικές αναφορές.

8. Συμπεράσματα και προτάσεις. Να περιλαμβάνουν μια περίληψη των αποτελεσμάτων σε σύγκριση με τα κριτήρια αποδοχής ή λειτουργίας της κατασκευής. Προτάσεις για μετατροπές εφόσον βέβαια κρίνονται απαραίτητες.

Η διαδικασία σύνταξης της έκθεσης αναφοράς της μελέτης διασφαλίζει όχι μόνο την καταγραφή της αλλά δίνει και την ευκαιρία στο μελετητή να εντοπίσει τυχόν ελλείψεις που θα πρέπει να αντιμετωπισθούν.

Στην περίπτωση μελέτης ναυπηγικών κατασκευών, συστήνεται η χρήση της μεθοδολογίας που περιγράφεται στο κείμενο *Guidelines for Evaluation of Finite Elements and Results* [11].

Βιβλιογραφία

1. Dewhirst D.L. and Grinsell P.M. (1990) "Investigating Finite Element Codes for a PC". *6th World Cong FEM*, Banff, J. Robinson R&A 63-69.
2. Evans P.S. and Clayton L.D. (1990) "Finite Element Analysis on Desktop Computers. A Detailed Comparison of Alternatives". *Micro-Analytical Publ*, Salt Lake City.
3. Fong H.H. (1994) "A State of the Art Assessment of Composites Analysis Capabilities in Commercial Finite Element Analysis Codes". *3rd World Cong. Comp. Mech.*, Chiba, Japan.
4. Guy G. (1997) "A Review of Four PC Packages for FE Structural Analysis". *Finite Elem. Anal. Design* Vol 28, 105-114.
5. Hornlein H.R.E. and Schittkowski K. (1993) "Software Systems for Structural Optimization". *Birkhauser Verlag*, Basel.
6. Hornlein H.R.E.M and Schittkowski K. (1992). "Software Systems for Structural Optimization". *Birkhauser Verlag*, Basel.
7. Sumi Y. et al "Quasi-static Response", Report of Committee *Proceedings of the 13th International Ship and Offshore Structures Congress*, Vol. 1, Moan T., Berge S. (Ed.), Pergamon Press, 1997.
8. Baran N.M. *Finite Element Analysis on Microcomputers*. McGraw-Hill Book Co, New York, 1988.
9. Rogers C.R. *ANSYS Techniques*, Swanson Analysis Systems Inc, Houston, Pa, 1983.
10. Cook R.D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. John Wiley & Sons, USA, 1995.
11. Basu R.I., Kirkhope K.J., Srinivasan J. "Guidelines for Evaluation of Finite Elements and Results". Ship Structure Committee Report, SSC-387, Dec. 1995, U.S. Coastguard, Washington, U.S.A.