6

Το θεωρητικό υπόβαθρο της ΜΠΣ. Η μέθοδος *Rayleigh-Ritz.*

1. Εισαγωγή

Το πρώτο στάδιο της ανάλυσης ενός μηχανικού συστήματος συνίσταται στη μαθηματική προσομοίωσή του. Σε δεύτερη φάση διατυπώνονται και επιλύονται οι εξισώσεις ισορροπίας του ισοδύναμου συστήματος και τέλος ακολουθεί η ερμηνεία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Τα μηχανικά συστήματα διακρίνονται σε *διακριτά* και σε *συνεχή*, η δε απόκριση των διακριτών συστημάτων περιγράφεται από την επίλυση ενός πεπερασμένου αριθμού μεταβλητών. Τα σημαντικότερα είδη διακριτών συστημάτων είναι

α) *Σταθερής κατάστασης*, τα οποία είναι ανεξάρτητα του χρόνου (για παράδειγμα ελαστικό ελατήριο με σταθερή φόρτιση, σύστημα σταθερής μετάδοσης θερμότητας, υδραυλικό δίκτυο, δίκτυο συνεχούς ρεύματος, ελατήριο με μη-γραμμική απόκριση)

β) *Μετάδοσης* ή *δυναμικά*. Η απόκριση των συστημάτων αυτών εξαρτάται από τον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή η ανάλυση συνίσταται στον προσδιορισμό των τιμών των μεταβλητών για κάθε χρόνο t (για παράδειγμα έλασμα υπό κρουστικό φορτίο, μετάδοση θερμότητας σε κλειστό σύστημα με διάφορους τρόπους, κλπ).

γ) *Ιδιοτιμών*. Στα προβλήματα ιδιοτιμών περιλαμβάνονται περιπτώσεις που υπάγονται και στις δύο παραπάνω κατηγορίες και χαρακτηρίζονται από την μετάβαση του συστήματος από μία αρχική κατάσταση ισορροπίας σε μία δεύτερη ή τρίτη, κάθε μία από τις οποίες επίσης αποτελεί μέρος της γενικής λύσης του προβλήματος. Τα προβλήματα ιδιοτιμών χαρακτηρίζονται γενικά από την ύπαρξη πολλών λύσεων, συνήθως όμως για πρακτικούς λόγους μας ενδιαφέρει μόνο μία από αυτές (για παράδειγμα λυγισμός δοκών, ελασμάτων, συχνότητες ιδιοταλάντωσης ηλεκτρικού πεδίου).

Η απόκριση των συνεχών συστημάτων εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις οι οποίες επιλύονται μόνο σε ορισμένες απλές περιπτώσεις οριακών συνθηκών. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι με τις οποίες αποκτώνται (προσεγγιστικές) λύσεις με την αναγωγή των συνεχών προβλημάτων σε διακριτά.

Η επιτυχία της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) έγκειται στο ότι η συστηματική προσομοίωση επιτρέπει την εφαρμογή των συμβατικών μεθόδων ανάλυσης σε πολύ σύνθετα προβλήματα.

Τα διακριτά συστήματα χαρακτηρίζονται από πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, η δε διαδικασία ανάλυσης ακολουθεί τα παρακάτω βήματα

1. Προσομοίωση συστήματος με ένα σύνολο στοιχείων
2. Εξασφάλιση συνθηκών ισορροπίας στο εσωτερικό κάθε στοιχείου, για κάθε κατηγορία στοιχείων
3. Συγκρότηση του συνόλου των στοιχείων με βάση τις απαιτήσεις της ισορροπίας μεταξύ των στοιχείων, για τη διατύπωση του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας
4. Επίλυση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες της ισορροπίας στο εσωτερικό των στοιχείων.

Η παραπάνω διαδικασία ισχύει για όλα τα είδη των διακριτών συστημάτων. Στην περίπτωση των συνεχών συστημάτων τα στάδια επίλυσης είναι τα ίδια με τα παραπάνω, τώρα όμως γίνεται αναφορά σε ένα ή περισσότερα στοιχεία για να αποκτηθούν οι συνθήκες ισορροπίας στο εσωτερικό κάθε στοιχείου, του συμβιβαστού και των απαιτήσεων της ισορροπίας μεταξύ των στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις πρέπει να ισχύουν σε όλο το χώρο και να πληρούν τις οριακές συνθήκες. Στα δυναμικά προβλήματα πρέπει επίσης να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες.

Η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται με δύο τρόπους:

1. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες στατικής (ή δυναμικής) ισορροπίας, και θεωρώντας τις δυνάμεις (ροπές) που ασκούνται στην κατασκευή ή
2. Με χρήση του λογισμού των μεταβολών

Η πρώτη μέθοδος οδηγεί σε διαφορικές εξισώσεις οι οποίες επιλύονται με ανάλογες διαδικασίες. Η γενική μορφή της δευτεροβάθμιας μερικής διαφορικής εξίσωσης στο επίπεδο (x, y) είναι:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1}$$

όπου u είναι άγνωστη, εξαρτημένη, καταστατική μεταβλητή. Η εξίσωση καλείται *ελλειπτική*, *παραβολική* ή *υπερβολική*, αναλόγως των τιμών των συντελεστών A, B και C, δηλαδή:

$$B^2 - 4AC \quad \begin{cases} <0 \Rightarrow & \text{ελλειπτική} \\ =0 \Rightarrow & \text{παραβολική} \\ >0 \Rightarrow & \text{υπερβολική} \end{cases}$$

Παραδείγματα αποτελούν οι εξισώσεις Laplace, μετάδοσης θερμότητας και μετάδοσης κυμάτων (ηχητικών, τασικών) αντίστοιχα.

2. Η μέθοδος του λογισμού των μεταβολών

Η αρχή της *στάσιμης δυναμικής ενέργειας* ισχύει για συντηρητικά συστήματα και ορίζει ότι:

> *από τις επιτρεπόμενες διατάξεις ενός συντηρητικού συστήματος, υφίσταται στάσιμο της δυναμικής ενέργειας για εκείνες που ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, εφόσον οι μεταβολές των μετατοπίσεων είναι επιτρεπτές*

Ένα σύστημα καλείται *συντηρητικό* εάν η εσωτερική (παραμορφωσιακή) ενέργεια και το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων είναι ανεξάρτητα της τελικής μετατόπισής του. Θα πρέπει δηλαδή και τα δύο μεγέθη να είναι συντηρητικά για να εξασφαλισθεί ότι το σύστημα είναι συντηρητικό. Παράδειγμα συντηρητικού συστήματος είναι ελαστικό ελατήριο πακτωμένο στο ένα άκρο και το οποίο φέρει φορτίο F στο άλλο. Εάν μετά την επιβολή του φορτίου παραμένουν μόνιμες παραμορφώσεις το σύστημα είναι μη-συντηρητικό.

Κατά τη θεωρία των μεταβολών υπολογίζεται το *συναρτησιακό Π* του συστήματος και προσδιορίζεται το στάσιμο όπου $\delta\Pi=0$. Στη γραμμική ελαστική ανάλυση παραμορφώσιμων σωμάτων υπό την επίδραση γενικευμένων εξωτερικών φορτίων το συναρτησιακό Π εκφράζει τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος και δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = U - W \tag{2}$$

Στην παραπάνω σχέση U είναι η *ενέργεια παραμόρφωσης* και W είναι το *δυναμικό των εξωτερικών φορτίων*. Εάν εφαρμοσθεί η αρχή της στάσιμης δυναμικής ενέργειας σε σύστημα με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας ισχύει:

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_1} dU_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} dU_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial U_n} dU_n = 0 \tag{3}$$

όπου U_1, U_2,…U_n είναι καταστατικές μεταβλητές (μετατοπίσεις, περιστροφές) αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας. Το σώμα ισορροπεί όταν δΠ=0 για κάθε επιτρεπόμενη μεταβολή της διάταξης. Αυτό είναι εφικτό μόνον όταν οι συντελεστές των dU_i μηδενίζονται για κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Άρα, για i=1, 2, 3, ...n,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{U}}\right] = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

Η συνθήκη η οποία απαιτείται για την εύρεση των συναρτήσεων μπορεί να γραφεί και ως:

$$\delta \Pi = 0 \tag{5}$$

όπου το δ συμβολίζει *τυχαία δυνατή μεταβολή* της καταστατικής μεταβλητής (που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες). Οι δεύτερες παράγωγοι του συναρτησιακού Π ως προς τις καταστατικές μεταβλητές αντιστοιχούν σε *ακρότατα*. Η μέθοδος του λογισμού των μεταβολών αποτελεί ισχυρό όπλο για την επίλυση πολλών προβλημάτων επειδή οι οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε δυνάμεις και (ή) ροπές περιλαμβάνονται στη διατύπωση της λύσης. Οι οριακές συνθήκες διακρίνονται σε:

- *Αναγκαίες (ή ουσιώδεις)* δηλ. μετατοπίσεις και περιστροφές
- *Φυσικές (ή δυνάμεων)* δηλ. δυνάμεις και ροπές

Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση του λογισμού των μεταβολών ακολουθεί την εξής διαδικασία:

1. Διατυπώνεται το συναρτησιακό Π

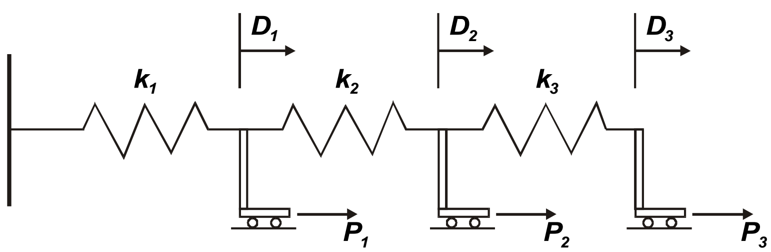
2. Προσδιορίζονται οι γεωμετρικές οριακές συνθήκες

3. Εφαρμόζεται η συνθήκη $\delta\Pi=0$ (ή $\partial\Pi/\partial U_i=0$), για να ληφθούν οι διαφορικές εξισώσεις και οι φυσικές οριακές συνθήκες του προβλήματος

Στα παραδείγματα που ακολουθούν διατυπώνονται τα συναρτησιακά και οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας σε μητρωική μορφή.

Παράδειγμα 1

Να αποκτηθεί η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής του σχήματος με τη μέθοδο των μεταβολών.



Σχήμα 1 Κατασκευή με τρεις βαθμούς ελευθερίας

Λύση

Για την εικονιζόμενη κατασκευή, το συναρτησιακό γράφεται:

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 D_1^2 + \frac{1}{2}k_2\left(D_2 - D_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(D_3 - D_2\right)^2 - P_1 D_1 - P_2 D_2 - P_3 D_3$$

Από τη σχέση (4) και το συναρτησιακό Π έχουμε:

$$\boldsymbol{k_1 D_1 - k_2\left(D_2 - D_1\right) - P_1 = 0} \tag{6α}$$

$$\boldsymbol{k_2\left(D_2 - D_1\right) - k_3\left(D_3 - D_2\right) - P_2 = 0} \tag{6β}$$

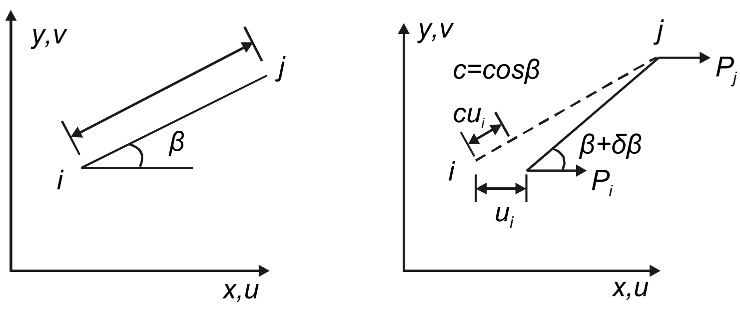
$$\boldsymbol{k_3\left(D_3 - D_2\right) - P_3 = 0} \tag{6γ}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται σε μητρωική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_1 + k_2} & \boldsymbol{-k_2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-k_2} & \boldsymbol{k_2 + k_3} & \boldsymbol{-k_3} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-k_3} & \boldsymbol{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D_1} \\ \boldsymbol{D_2} \\ \boldsymbol{D_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P_1} \\ \boldsymbol{P_2} \\ \boldsymbol{P_3} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Παράδειγμα 2

Να διατυπωθεί η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής του σχήματος με τη μέθοδο των μεταβολών.



Σχήμα 2 Διδιάστατη κατασκευή κεκλιμένη προς το σύστημα αναφοράς *Oxy*

Λύση

$$\Pi = \frac{1}{2}ke^2 - p_i u_i - q_i v_i - p_j u_j - q_j v_j \tag{8}$$

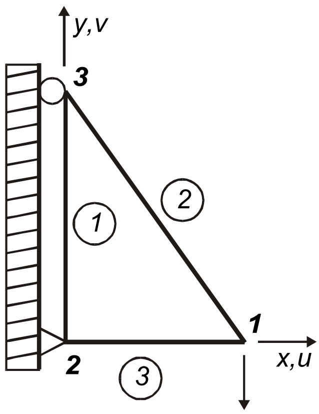
όταν $k = EA/L$ και $e = \left(u_j - u_i\right) cos\,\beta + \left(v_j - v_i\right) sin\,\beta$

Θέτοντας $\partial \Pi / \partial u_i = \partial \Pi / \partial u_j = \partial \Pi / \partial v_i = \partial \Pi / \partial v_j = 0$ λαμβάνονται οι εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες διατυπώνονται σε μητρωική μορφή:

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\sin\beta \\ \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta & -\cos\beta\sin\beta & -\sin^2\beta \\ -cos^2\beta & -\cos\beta\sin\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\sin\beta \\ -cos\,\beta\,sin\,\beta & -\sin^2\beta & \cos\beta\sin\beta & \sin^2\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{u_i} \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \\ p_j \\ q_j \end{bmatrix} \tag{9}$$

Παράδειγμα 3

Να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής του σχήματος.



Σχήμα 3 Κατασκευή τριών βαθμών ελευθερίας

Λύση

$$\Pi = \frac{1}{2}k_3 u_1^2 + \frac{1}{2}k_1 v_3^2 + \frac{1}{2}k_2\left[\left(0 - u_1\right)\left(-0.6\right) + \left(v_3 - v_1\right)\left(0.8\right)\right]^2 + P v_1$$

Για αποδεκτές μετατοπίσεις των κόμβων ισχύει:

$$\partial \Pi / \partial u_1 = \partial \Pi / \partial v_1 = \partial \Pi / \partial v_3 = 0$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας γράφονται:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k_3} + 0{,}36\boldsymbol{k_2} & -0{,}48\boldsymbol{k_2} & 0{,}48\boldsymbol{k_2} \\ -0{,}48\boldsymbol{k_2} & 0{,}64\boldsymbol{k_2} & -0{,}64\boldsymbol{k_2} \\ 0{,}48\boldsymbol{k_2} & -0{,}64\boldsymbol{k_2} & \boldsymbol{k_1} + 0{,}64\boldsymbol{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{11}$$

2.1 Η αρχή του στάσιμου της δυναμικής ενέργειας και η αρχή των δυνατών έργων

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε για ένα γραμμικό ελαστικό συνεχές μέσο ότι η αρχή των δυνατών έργων οδηγεί σε ταυτόσημη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας με αυτή της αρχής του στάσιμου της δυναμικής ενέργειας, η χρήση της οποίας περιγράφηκε προηγουμένως.

Το συναρτησιακό Π γραμμικού ελαστικού μέσου δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int_V \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{f}^B\,\mathrm{d}V - \int_S \boldsymbol{U}^{ST} \boldsymbol{f}^S\,\mathrm{d}S - \sum_i \boldsymbol{U}^{iT}\boldsymbol{F}^i \tag{12}$$

και $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E\varepsilon}$. Θέτουμε $\partial\Pi / \partial U_i = 0$ (ή $\delta\Pi$=0) και εφόσον το $\boldsymbol{E}$ είναι συμμετρικό μητρώο έχουμε:

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \int_V \delta\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{f}^B\,\mathrm{d}V + \int_S \delta\boldsymbol{U}^{ST} \boldsymbol{f}^S\,\mathrm{d}S + \sum_i \delta\boldsymbol{U}^{iT}\boldsymbol{F}^i \tag{13}$$

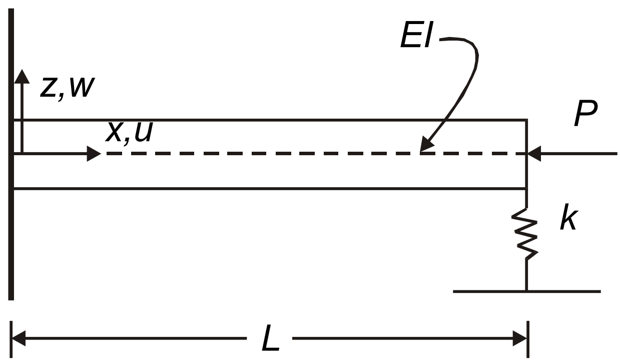
Για να υπολογισθεί το Π στην (12) οι μετατοπίσεις πρέπει να πληρούν τις γεωμετρικές (αναγκαίες) οριακές συνθήκες. Άρα στην (13) θεωρούνται μεταβολές των μετατοπίσεων οι οποίες ικανοποιούν τις αναγκαίες οριακές συνθήκες όπως και οι αντίστοιχες μεταβολές των παραμορφώσεων. Συνεπώς η θεώρηση του στάσιμου του συναρτησιακού Π είναι αντίστοιχη με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων και μπορούμε να θέσουμε:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \delta\boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{U}}, \quad \delta\boldsymbol{U}^S = \overline{\boldsymbol{U}}^S, \quad \delta\boldsymbol{U}^i = \overline{\boldsymbol{U}}^i \tag{14}$$

και επομένως η σχέση (13) ταυτίζεται με την αρχή των δυνατών έργων (Κεφάλαιο 1). Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί ότι οι δυνατές παραμορφώσεις που περιλαμβάνονται στη σχέση (13) αντιστοιχούν στις επιβαλλόμενες σωματειακές και επιφανειακές δυνατές μετατοπίσεις, και ότι αυτές μπορούν να είναι οποιοδήποτε σύνολο συμβιβαστών μετατοπίσεων που ικανοποιουνν τις γεωμετρικές οριακές συνθήκες. Η σχέση (13) εκφράζει την γενική συνθήκη ισορροπίας και για διάφορες δυνατές μετατοπίσεις λαμβάνονται διαφορετικές εξισώσεις ισορροπίας. Η σχέση αυτή περιλαμβάνει όμως και τις συνθήκες του γεωμετρικού συμβιβαστού και τις καταστατικές εξισώσεις του υλικού, εφόσον εφαρμοσθεί κατάλληλα η αρχή των δυνατών έργων. Οι μετατοπίσεις δηλαδή πρέπει να είναι συνεχείς και συμβιβαστές και πρέπει επίσης να ικανοποιούν όλες τις οριακές συνθήκες, οι δε τάσεις πρέπει να δίνονται από τις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις για δεδομένες παραμορφώσεις. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αρχή των δυνατών έργων περικλείει όλες τις (αναγκαίες) συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για την επίλυση των προβλημάτων μηχανικής.

Παράδειγμα 4

Να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής του Σχήματος 4 με τη μέθοδο του λογισμού των μεταβολών.



Σχήμα 4 Πρόβολος με αξονικό φορτίο

Λύση

Θεωρούμε τον πρόβολο του σχήματος ο οποίος φέρει αξονικό φορτίο P στο ένα άκρο. Το δυναμικό των φορτίων αναφέρεται στη δράση του φορτίου P και αποκτάται θεωρώντας ένα στοιχείο της δοκού. Σε απόσταση x από το άκρο η κλίση τομής της δοκού είναι $\partial w/\partial x$. Άρα η μετατόπιση σε σχέση με τομή σε απόσταση δx θα είναι $(\partial w/\partial x)\delta x$. Η συνιστώσα του φορτίου P κάθετα στη επιφάνεια τομής της δοκού είναι $P\partial w/\partial x$. Άρα το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων σε στοιχείο μήκους δx είναι $(1/2)P(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial x)\delta x$. Ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της δοκού έχουμε:

$$W-\left(-P/2\right)\int_0^L\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 dx \qquad (15)$$

Η παραμορφωσιακή ενέργεια λαμβάνεται θεωρώντας την καμπτική συμπεριφορά της δοκού. Η εσωτερική παραμορφωσιακή ενέργεια dU για στοιχείο της δοκού ισούται με $(1/2)M\varphi$ όπου:

$$M = -EI\left(\partial^2 w / \partial x^2\right) \tag{16}$$

και $\phi = -\left(\partial^2 w / \partial x^2\right)$

Αντικαθιστώντας και ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της δοκού έχουμε:

$$U = (1/2)\int_0^L EI\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{17}$$

Προσθέτουμε την παραμορφωσιακή ενέργεια που οφείλεται στη δράση του ελατηρίου $(1/2)kw_L^2$ και αντικαθιστούμε στη σχέση (2):

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 dx - \frac{P}{2}\int_0^L \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 dx + \frac{1}{2}kw_L^2 \tag{18}$$

Οι γεωμετρικές οριακές συνθήκες είναι:

$$w\big|_{x=0} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \tag{19}$$

Εφαρμόζεται η συνθήκη $\delta\Pi$=0. Για τον πρώτο και δεύτερο όρο του συναρτησιακού έχουμε αντίστοιχα:

$$\delta\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 = 2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 2w''\delta w'' \tag{20α}$$

$$\delta\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]^2 = 2\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]\delta\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right] = 2w'\delta w' \tag{20β}$$

Αντικαθιστώντας,

$$\int_0^L EIw''\delta w'' dx - P\int_0^L w'\delta w' dx + kw_L\delta w_L = 0 \tag{21}$$

όπου $w'=dw/dx$ κ.ο.κ. Επειδή $\delta w''=\delta(\delta w')/dx$ και η ακαμψία EI είναι σταθερή, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον πρώτο όρο έχουμε:

$$\int_0^L EIw''\delta w''dx = EI\left[w''\delta w'\right]_0^L - EI\int_0^L w'''\delta w' dx =$$
$$= EI\left[w''\delta w'\right]_{x=L} - EI\left[w''\delta w'\right]_{x=0} - EI\left[w'''\delta w\right]_{x=L} + EI\left[w'''\right]_{x=0} +$$
$$+ EI\left[w'''\right]_{x=0} + EI\left[w''\right]_{x=0} + EI\int_0^L w''''\delta x dx \tag{22}$$

Για το δεύτερο όρο έχουμε:

$$\int_0^L w'\delta w'' dx = \left[w''\delta w\right]_{x=L} - \left[w''\delta w\right]_{x=0} - \int_0^L w''\delta w dx \tag{23}$$

Καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\int_0^L \left(EIw'''' + Pw''\right)\delta w dx + \left[EIw''\delta w'\right]_L - \left[EIw''\delta w'\right]_0$$
$$-\left[\left(EIw''' + Pw'\right)\delta w\right]_{x=L} + \left\{\left(EIw''' + Pw'\right)\delta w\right\}_{x=0} + kw_L\delta w_L = 0 \tag{24}$$

Επειδή οι μεταβολές δw και $\delta w'$ πρέπει να ικανοποιούν τις γεωμετρικές οριακές συνθήκες, έχουμε $\delta w|_{x=0}=0$ και $\delta w'|_{x=0}=0$. Ο τρίτος και ο πέμπτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι συνεπώς ίσοι με το μηδέν. Θεωρούμε τώρα τους υπόλοιπους όρους. Υποθέτουμε ότι δw είναι διάφορο του μηδενός σε όλα τα σημεία της δοκού (εκτός του σημείου x=0). Τότε, για να ισχύει η σχέση (24) θα πρέπει:

$$EIw'''' + Pw'' = 0 \tag{25α}$$
$$EIw''\big|_{x=L} = 0 \tag{25β}$$
$$\left[EIw''' + Pw' - kw\right]_{x=L} = 0 \tag{25γ}$$

Η διαφορική εξίσωση του προβλήματος είναι η σχέση (25α) ενώ οι (25β) και (25γ) εκφράζουν τις φυσικές οριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι τελευταίες αντιστοιχούν στην ισορροπία ροπών και τεμνουσών δυνάμεων στο άκρο $x=L$ της δοκού.

2.2 Ιδιότητες του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής

Από τα παραδείγματα που προηγήθηκαν συμπεραίνονται τα παρακάτω:

1. Συστήματα με γραμμική σχέση φορτίου-μετατόπισης έχουν συμμετρικό μητρώο ακαμψίας, $\boldsymbol{K}_{ij}=\boldsymbol{K}_{ji}$. Αυτό προκύπτει από το ότι κάθε ζεύγος όρων του μητρώου

ακαμψίας που είναι συμμετρικά διατεταγμένο ως προς την κύρια διαγώνιο προέρχεται από τον ίδιο όρο του συναρτησιακού *Π*. Οι όροι αυτοί έχουν μορφή (σταθερά)($\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{U}_j$). Άρα,

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \partial^2 \Pi / \partial \boldsymbol{U}_i \partial \boldsymbol{U}_j = \partial^2 \Pi / \partial \boldsymbol{U}_j \partial \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{K}_{ji}$$

2. Εάν $\boldsymbol{U}_i$ είναι κομβικές μετατοπίσεις (ή περιστροφές) οι σχέσεις:

$$\partial \Pi / \partial \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{0}$$

συνιστούν εξισώσεις ισορροπίας κόμβων στην κατεύθυνση $\boldsymbol{U}_i$.

3. Η στατική αοριστία δεν επηρεάζει την διαδικασία ούτε περιπλέκει την επίλυση του προβλήματος.

4. Εάν η παραμορφωσιακή ενέργεια *U* είναι μηδέν τότε είτε $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$ είτε έχομε συμπεριφορά άκαμπτου σώματος. Εάν αποκλεισθεί το δεύτερο, τότε:

$$(1/2)\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{U} > 0$$

για $\boldsymbol{U}$ διάφορο του μηδενός. Άρα το $\boldsymbol{K}$ είναι θετικά ορισμένο μητρώο.

5. Οι αναγκαίες συνθήκες περιλαμβάνονται στο συναρτησιακό ενώ οι φυσικές συνθήκες απορρέουν από την τελική λύση του προβλήματος.

Εκτός της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας της οποίας έγινε χρήση στα προηγούμενα παραδείγματα, η διατύπωση του συναρτησιακού για προβλήματα μηχανικής μπορεί να γίνει με βάση τις παρακάτω μεταβολικής αρχές:

- Την αρχή της ελάχιστης συμπληρωματικής ενέργειας,
- Την αρχή των Hellinger-Reissner και
- Την αρχή των Hu-Washizu

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δυνατόν να ισχύουν περισσότερες από μία μεταβολικές αρχές.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου των μεταβολών σε σύγκριση με τη διαφορική διατύπωση είναι ότι για προσεγγιστικές λύσεις, μπορεί να γίνει χρήση μεγαλύτερου αριθμού δοκιμαστικών συναρτήσεων (μετατοπίσεων). Αυτό συμβαίνει διότι δεν απαιτείται οι συναρτήσεις αυτές να πληρούν το σύνολο των οριακών συνθηκών.

3. Η μέθοδος Rayleigh-Ritz

Περί το 1870 ο Rayleigh έκανε χρήση προσεγγιστικού πεδίου ενός βαθμού ελευθερίας για να προσδιορίσει τις μετατοπίσεις ταλαντευόμενου σώματος, ενώ το 1909 ο Ritz ανέπτυξε ένα ακριβέστερο προσεγγιστικό πεδίο κάνοντας χρήση περισσοτέρων συναρτήσεων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται και οι αναγκαίες οριακές συνθήκες. Παρακάτω θα περιγραφεί η εφαρμογή της μεθόδου για σώμα υπό στατική φόρτιση.

Θεωρούμε ελαστικό σώμα επί του οποίου ασκούνται φορτία και αναπτύσσονται πεδία τάσεων και μετατοπίσεων. Η μετατόπιση κάθε ενός σημείου του σώματος περιγράφεται από τις συνισταμένες της u, v και w στις κατευθύνσεις του συστήματος αναφοράς, Ox, Oy και Oz. Μία λύση Rayleigh-Ritz βασίζεται σε προσεγγίσεις των πεδίων των μετατοπίσεων με απειροστές σειρές, κάθε δε όρος της σειράς είναι συνάρτηση των συντεταγμένων του σημείου και έχει άγνωστο μέγεθος a_i. Τα a_i θεωρούνται *γενικευμένες συντεταγμένες*. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{l} a_i f_i \\
v &= \sum_{i=l+1}^{m} a_i f_i \\
w &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i f_i
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Οι συναρτήσεις f_i πρέπει να είναι *επιτρεπτές*, πρέπει δηλαδή να πληρούν τις συνθήκες γεωμετρικού συμβιβαστού και τις αναγκαίες οριακές συνθήκες. Κατά κανόνα οι συναρτήσεις αυτές εκφράζονται με πολυωνυμική μορφή και για τη διατύπωση μίας συγκεκριμένης λύσης χρησιμοποιείται ένας πεπερασμένος αριθμός όρων κάθε σειράς. Οι βαθμοί ελευθερίας του προβλήματος αντιστοιχούν στα μεγέθη a_i, τα οποία υπολογίζονται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (12) στις σχέσεις γεωμετρικού συμβιβαστού:

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial \mathrm{y} \\ \partial/\partial y & \partial/\partial \mathrm{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}
\tag{28}
$$

απ' όπου υπολογίζονται οι παραμορφώσεις $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ακολούθως χρησιμοποιείται το συναρτησιακό Π, το οποίο εξαρτάται πλέον από τις τιμές των συντελεστών a_i.

Κάνοντας χρήση της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας η ισορροπία του σώματος ορίζεται από το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \qquad \text{για } i = 1, 2, \ldots n \tag{29}$$

Επιλύνοντας τις εξισώσεις (29) για συγκεκριμένες τιμές των a_i αποκτώνται τα πεδία των μετατοπίσεων $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, και $\boldsymbol{w}$. Η παραγώγιση των πεδίων $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, και $\boldsymbol{w}$ οδηγεί σε σχέσεις για τις παραμορφώσεις, και από αυτές αποκτώνται τα πεδία των τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος. Για προβλήματα μηχανικής οι σχέσεις (29) κατά κανόνα διατυπώνονται ως μητρωικές εξισώσεις.

Οι λύσεις που αποκτώνται με τη μέθοδο Rayleigh-Ritz είναι προσεγγιστικές διότι οι συναρτήσεις κατά κανόνα δεν είναι ικανές να αναπαραστήσουν με απόλυτη ακρίβεια τις πραγματικές μετατοπίσεις. Η διαδικασία επίλυσης συνίσταται α) στην επιλογή της κατηγορίας των δοκιμαστικών συναρτήσεων με επιτρεπτές λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα και β) την εφαρμογή κριτηρίου για την επιλογή της βέλτιστης μορφής των δοκιμαστικών συναρτήσεων. Για προβλήματα μηχανικής θέτουμε $\delta\Pi=0$.

Το συναρτησιακό Π εκφράζει την ενεργειακή ισορροπία ελαστικού σώματος υπό την επίδραση κατανεμημένων και συγκεντρωμένων φορτίων:

$$\Pi = \int_V \left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_o \right] dV - \int_V \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{f}^b dV - \int_S \boldsymbol{U}_S^T \boldsymbol{f}^S dS - \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{F} \tag{15}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση αντιστοιχεί στην παραμορφωσιακή ενέργεια ανά μονάδα όγκου του σώματος, και περιλαμβάνει την παραμορφωσιακή ενέργεια που οφείλεται στις εξωτερικές φορτίσεις και αυτήν που οφείλεται στα αρχικά παραμορφωσιακά και εντατικά πεδία. Το δεύτερο ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στο έργο αδρανειακών φορτίων (κίνηση άκαμπτου σώματος) ενώ το τρίτο ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στο έργο επιφανειακών φορτίων. Ο τελευταίος όρος αντιστοιχεί στο έργο των συγκεντρωμένων φορτίων, $\boldsymbol{F}$.

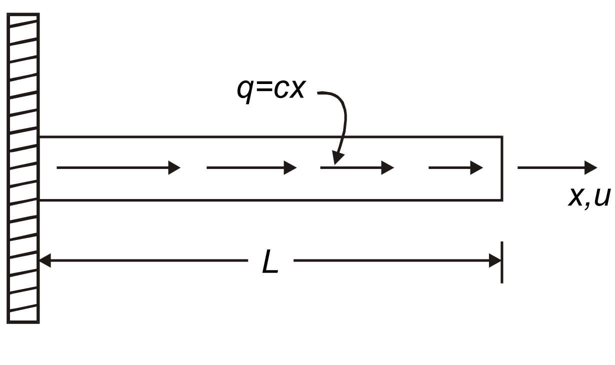
Συνήθως επιλέγονται πολυωνυμικές μορφές για τα προσεγγιστικά πεδία ενώ μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ημιτονικές ή συνημιτονικές συναρτήσεις. Για να προσδιορισθεί ο καλύτερος συνδυασμός δοκιμαστικών συναρτήσεων πρέπει να γίνουν προκαταρκτικοί υπολογισμοί διότι δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες. Εάν για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα αποκτάται μία σειρά λύσεων, για κάθε μία από τις οποίες προστίθεται ένας όρος στο προσεγγιστικό πεδίο, αναμένουμε σύγκλιση των αποτελεσμάτων στη ακριβή λύση (Π, μετατοπίσεις, τάσεις). Αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την σύγκλιση των αποτελεσμάτων η σειρά των όρων να είναι *πλήρης*. Η πληρότητα εξασφαλίζεται εάν οι ακριβείς μετατοπίσεις και οι παράγωγοί τους που περιλαμβάνονται στο συναρτησιακό Π προσεγγίζονται κατά βούληση προσθέτοντας νέους όρους στη δοκιμαστική συνάρτηση. Οι πολυωνυμικές σειρές είναι πλήρεις εάν η τάξη τους είναι επαρκώς υψηλή και δεν λείπουν όροι. Για να εξασφαλίζεται πληρότητα πρέπει να περιλαμβάνονται και οι όροι χαμηλότερης τάξης, διότι διαφορετικά δεν θα επιτευχθεί προσέγγιση στο σωστό πεδίο τιμών όσο μεγάλος και να είναι ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων όρων. Πρέπει επίσης να μην παραλείπονται όροι.

Η λύση που προκύπτει είτε είναι απόλυτα ακριβής είτε προσδίδει στην κατασκευή πλεονάζουσα ακαμψία. Αυτό συμβαίνει διότι το μαθηματικό πρότυπο επιτρέπει την παραμόρφωση της κατασκευής με ένα περιορισμένο αριθμό μορφών, που εξαρτώνται από την υπέρθεση του πεπερασμένου αριθμού των επιλεγμένων συναρτήσεων f_i που περιλαμβάνονται στο υποτιθέμενο πεδίο. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι το δοκιμαστικό πεδίο υποχρεώνει την κατασκευή να παραμορφωθεί σύμφωνα με τις μορφές που περιέχει. Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που αυξάνει σταδιακά από το μηδέν στο $\boldsymbol{F}$ δίνεται από τη σχέση $W=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}/2$ εάν η συμπεριφορά είναι γραμμική ελαστική. Το προσεγγιστικό πεδίο $\boldsymbol{U}$ είναι τέτοιο ώστε το έργο W να είναι λιγότερο της προσδοκώμενης (θεωρητικής) τιμής. Αυτό δεν σημαίνει ότι γίνεται υποεκτίμηση για κάθε U_i, στην περίπτωση όμως που το εξωτερικό φορτίο είναι συγκεντρωμένο, η προκύπτουσα μετατόπιση συνιστά κάτω όριο της σωστής τιμής.

Από τη σχέση $U=W$ συμπεραίνουμε ότι στην προσεγγιστική λύση γίνεται υποεκτίμηση της παραμορφωσιακής ενέργειας (όταν επιβάλλονται φορτία). Στην περίπτωση όμως που επιβάλλονται μετατοπίσεις, γίνεται υπερεκτίμηση της παραμορφωσιακής ενέργειας διότι πρόσθετο φορτίο απαιτείται για την επίτευξη των προδιαγραφόμενων μετατοπίσεων. Όταν προδιαγράφονται μετατοπίσεις και δυνάμεις η παραμορφωσιακή ενέργεια μπορεί να υπερεκτιμάται ή να υποεκτιμάται. Επειδή οι τάσεις υπολογίζονται από τις μετατοπίσεις, για την άκαμπτη κατασκευή οι τάσεις κατά κανόνα θα υποεκτιμώνται. Εάν όμως εξετάσουμε τα αποτελέσματα του επόμενου παραδείγματος βλέπουμε ότι σε άλλα σημεία της κατασκευής οι τάσεις είναι μικρότερες των πραγματικών ενώ σε άλλα είναι μεγαλύτερα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι γενικός κανόνας δεν υπάρχει για την επίδραση του προσεγγιστικού πεδίου στις τάσεις.

Παράδειγμα 5

Να υπολογισθούν οι τάσεις και μετατοπίσεις της δοκού του σχήματος με τη μέθοδο Rayleigh-Ritz.



Σχήμα 5 Δοκός με μεταβαλλόμενο αξονικό φορτίο

Λύση

Το συναρτησιακό Π για το πρόβλημα αυτό (μονοδιάστατη εντατική κατάσταση) γράφεται:

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}_x^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_x \boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}_o + \boldsymbol{\varepsilon}_x \sigma_o \right) A dx - \int_0^L \boldsymbol{u}\boldsymbol{F}_x A dx - \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{P} \tag{31}$$

Εφόσον $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \partial u / \partial x$ και $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$, το συναρτησιακό Π γίνεται:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 AEdx - \int_0^L u(cx)dx \tag{32}$$

Οι σχέσεις των πεδίων u, v, w γράφονται με την παρακάτω πολυωνυμική μορφή:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \tag{33}$$

Η περίπτωση $u=a_0$ δεν είναι επιτρεπτή λύση επειδή παραβιάζεται η αναγκαία γεωμετρική συνθήκη (για x=0, u=0). Άρα a_0=0 και εάν θέσουμε $u=a_1x$, από τις σχέσεις (3) έχουμε:

$$\Pi = \frac{AEL}{2} a_1^2 - \frac{cL^3}{3} a_1 \tag{34}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \qquad \text{άρα} \qquad a_1 = \frac{cL^2}{3AE} \tag{35}$$

συνεπώς,

$$u = \frac{cL^2}{3AE} x \tag{36α}$$

και $$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{cL^3}{3A} \tag{36β}$$

Εάν θέσουμε $u = a_1 x + a_2 x^2$, αντικαταστήσουμε στο συναρτησιακό Π και θέσουμε:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

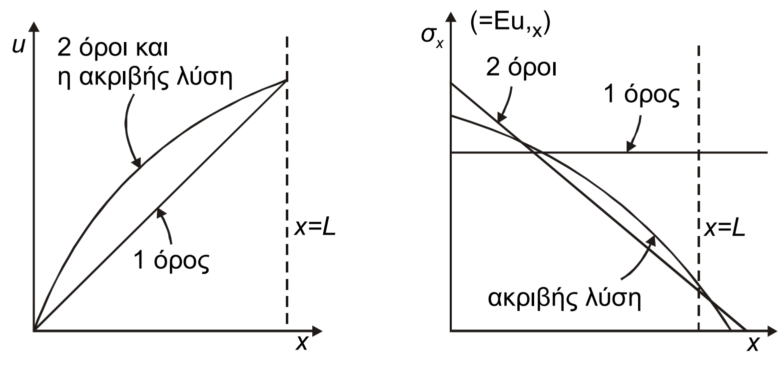
έχουμε:

$$AEL\begin{bmatrix} 1 & L \\ L & 4L^2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = cL^3/12 \begin{bmatrix} 4 \\ L \end{bmatrix} \tag{37}$$

ή $$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{cL}{12AE} \begin{bmatrix} 7L \\ -3 \end{bmatrix} \tag{37'}$$

άρα, $$u = cL/12AE\left(7Lx - 3x^2\right) \tag{38α}$$

και $$\sigma_x = E\partial u/\partial x = cL/12A\left(7L - 6x\right) \tag{38β}$$



Σχήμα 6 Ακρίβεια λύσεων κατά Rayleigh-Ritz

Γενικά η μέθοδος Rayleigh-Ritz αποδίδει την ακριβή λύση όταν τα προσεγγιστικά πεδία αναπαριστούν το ακριβές πεδίο με κατάλληλη επιλογή των βαθμών ελευθερίας a_i. Αυτό συμβαίνει σπανίως.

4. Συναρτησιακά, εξισώσεις Euler και πεπερασμένα στοιχεία

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι σε προβλήματα μηχανικής για την διατύπωση του συναρτησιακού μπορεί να γίνει χρήση περισσοτέρων της μίας μεταβολικής αρχής (αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, αρχή της ελάχιστης συμπληρωματικής ενέργειας, αρχή του Reissner κ.ά.).

Για το συναρτησιακό Π δύο εξαρτημένων μεταβλητών $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ με ανεξάρτητες μεταβλητές x και y (καρτεσιανές συντεταγμένες) που εκφράζεται γενικά με τη μορφή:

$$\Pi = \iint F\left(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, \ldots v_{,yy}\right) dxdy \tag{39}$$

υποθέτουμε ότι η F δεν περιλαμβάνει παραγώγους με βαθμό μεγαλύτερο του δεύτερου. Τότε, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένας ίσος αριθμός εξισώσεων με τον αριθμό των εξαρτημένων μεταβλητών πεδίου. Οι εξισώσεις αυτές καλούνται εξισώσεις Euler και συνιστούν τις διαφορικές εξισώσεις του φυσικού προβλήματος. Οι εξισώσεις Euler αποκτώνται με τη μέθοδο των μεταβολών[1] και για το γενικευμένο συναρτησιακό Π της σχέσης (39) έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_{,y}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial u_{,xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u_{,yy}} = 0 \tag{40α}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_{,y}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial v_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial v_{,xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v_{,yy}} = 0 \tag{40β}$$

Η σχέση (39) καλείται *ασθενής μορφή*[2] ενώ οι σχέσεις (40α-β) καλούνται *ισχυρή ή κύρια μορφή* διατύπωσης του φυσικού προβλήματος.

Βλέπουμε λοιπόν ότι είναι δυνατό να διατυπωθεί η λύση ενός φυσικού προβλήματος ακολουθώντας τη μέθοδο Rayleigh-Ritz έτσι ώστε το συναρτησιακό Π που περιγράφει το πρόβλημα να συνδυασθεί με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά κάθε στοιχείου (πεδία μετατοπίσεων). Συνδυάζοντας κατάλληλα τα παραπάνω αποκτώνται οι ιδιότητες των στοιχείων για το συγκεκριμένο πρόβλημα και οι εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά του σώματος. Για να αποκτηθούν τέλος αριθμητικά αποτελέσματα πρέπει να επιλεγούν:

- Η μορφή του στοιχείου (επίπεδο, στερεό, τριγωνικό, τετράπλευρο κλπ)
- Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο
- Η κατανομή των κόμβων σε κάθε στοιχείο
- Η συνάρτηση μορφής του στοιχείου

Παράδειγμα 6

Να αποκτηθούν οι διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος της προηγούμενης άσκησης κάνοντας χρήση των αντίστοιχων εξισώσεων Euler.

---

[1] Μια πλήρης απόδειξη παρατίθεται στο βιβλίο του F. Bleich *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw Hill Book Inc, New York, 1952.

[2] ασθενής μορφή = weak form

Λύση

Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει μία ανεξάρτητη μεταβλητή, μία εξαρτημένη και καμία δεύτερη παράγωγο. Η μία εξίσωση Euler είναι:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{du_{,xx}} = 0 \tag{41}$$

όπου:

$$F = \frac{1}{2} AEu_{,x}^2 - u(cx)$$

και $\quad \dfrac{\partial F}{\partial u} = -cx \qquad \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial u_{,x}} = \dfrac{d}{dx} AEu_{,x} = AEu_{,xx}$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{cx}{A} = 0 \tag{42}$$

ή, $\quad AE\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - cx = 0 \qquad (42)'$

Παράδειγμα 7

Να διατυπωθεί η εξίσωση του θερμικού πεδίου η ολοκληρωτική συνάρτηση του οποίου έχει την παρακάτω μορφή:

$$F = \frac{1}{2}k\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2}k\left[\frac{\partial T}{\partial y}\right]^2 - QT + \rho c T\frac{\partial T}{\partial t} \tag{43}$$

όπου T = θερμοκρασία
k = θερμική αγωγιμότητα
Q = εσωτερική θερμική ροή
ρ = πυκνότητα και
c = ειδική θερμότητα

Το πάχος θεωρείται μοναδιαίο.

Λύση

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε μία εξαρτημένη μεταβλητή, T, και μία εξίσωση Euler, ως εξής:

$$\frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial T_{,x}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial T_{,y}} = 0 \tag{44}$$

όπου F είναι η ολοκληρωτική συνάρτηση που περιλαμβάνεται στο συναρτησιακό:

$$\Pi = \iint F dxdy \tag{45}$$

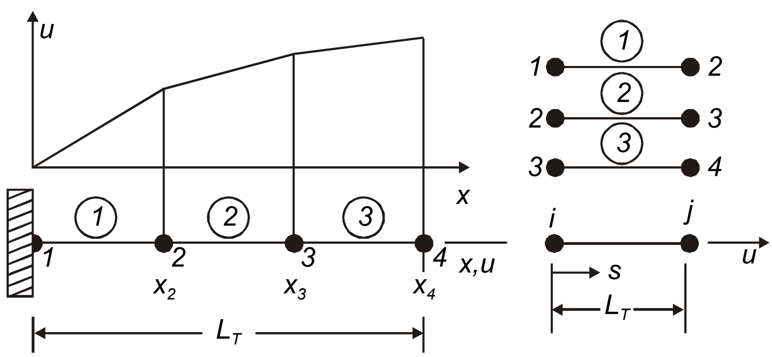
Από τις σχέσεις (44) και (45) έχουμε:

$$k = \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right] + Q - \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{46}$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση περιγράφει το ζητούμενο θερμικό πεδίο.

5. Πολυωνυμικά πεδία με συνέχεια κατά τμήματα

Θα επιδιώξουμε τώρα να δείξουμε πως μπορούμε να διατυπώσουμε το πεδίο των μετατοπίσεων με μετατοπίσεις u αντί των συντελεστών a_i. Η χρήση των u σε συνάρτηση με πολυωνυμικά πεδία με τμηματική συνέχεια καταλήγει σε μία διατύπωση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων που μπορεί εύκολα να κωδικοποιηθεί σε υπολογιστή.



(α) Δοκός με αξονικό φορτίο *(β) Γενεσιουργό στοιχείο*

Σχήμα 7 Πεδία μετατοπίσεων σε δοκό υποδιαιρεμένη σε τρία στοιχεία

Αρχικά κάνουμε χρήση των a_i και μετά τις αντικαθιστούμε με συναρτήσεις των βαθμών ελευθερίας u στους κόμβους της κατασκευής. Θεωρούμε τη δοκό του Σχήματος 7.

Το επιβαλλόμενο φορτίο ασκείται κατά μήκος του άξονα της δοκού. Οι επαγόμενες μετατοπίσεις u στο διάστημα x=0 έως x=L δίνονται προσεγγιστικά ως τρία γραμμικά πεδία:

$$u = a_1 + a_2 x \qquad 0 \le x \le x_2 \tag{47α}$$

$$u = a_3 + a_4 x \qquad x_2 \le x \le x_3 \tag{47β}$$

$$u = a_5 + a_6 x \qquad x_3 \le x \le x_4 \tag{47γ}$$

όπου οι a_i είναι βαθμοί ελευθερίας που πρέπει να προσδιορισθούν. Για να είναι επιτρεπτό το παραπάνω πεδίο θα πρέπει u=0 για x=0, επίσης δε πρέπει η μετατόπιση u που προκύπτει από τις σχέσεις (47α) και (47β) να είναι η ίδια στο σημείο x_2 η δε μετατόπιση που προκύπτει από τις σχέσεις (47β) και (47γ) να είναι η ίδια με αυτή στο σημείο x_3. Από τις τρεις αυτές συνθήκες προκύπτει ότι a_1=0, a_3=(a_2-a_4)x_2, και a_5=(a_2-a_4)x_2+(a_4-a_6)x_3. Άρα,

$$u = a_2 x \qquad 0 \le x \le x_2 \tag{48α}$$

$$u = a_2 x_2 + a_4 (x - x_2) \qquad x_2 \le x \le x_3 \tag{48β}$$

$$u = a_2 x_2 + a_4 (x_3 - x_4) + a_6 (x - x_3) \qquad x_3 \le x \le x_4 \tag{48γ}$$

Η παραπάνω διαδικασία έχει μειονεκτήματα. Κατά πρώτο, οι συντελεστές a_i δεν έχουν φυσική έννοια και κατά δεύτερο η μετάβαση από τις σχέσεις (48α) στις σχέσεις (48β) και ο προσδιορισμός των συντελεστών a_i από τις σχέσεις $\partial \Pi / \partial a_i$=0 δεν κωδικοποιείται εύκολα στον υπολογιστή. Τα μειονεκτήματα αυτά αποφεύγονται εάν εκφρασθούν τα προσεγγιστικά πεδία συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας στους κόμβους. Η διαδικασία περιγράφεται παρακάτω.

Μητρώο συνάρτησης μορφής

Θεωρούμε το γενεσιουργό στοιχείο του Σχήματος 7β. Η μετατόπιση u θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά με τη συντεταγμένη s. Το πεδίο των μετατοπίσεων πρέπει να αποδίδει τις τιμές u=u_{i} και u=u_{j} στα δύο άκρα. Μπορούμε τότε να συντάξουμε την παρακάτω σχέση:

$$u = \frac{L-s}{L} u_i + \frac{s}{L} u_j$$

ή $\qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{u}$

όπου $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{L-s}{L} & \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{L}} \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$

Το μητρώο $\boldsymbol{N}$ καλείται *μητρώο συνάρτησης μορφής*[3] ενώ οι όροι του καλούνται *συναρτήσεις μορφής* ή *παρεμβολής*[4] και περιγράφουν πως μεταβάλλονται οι μετατοπίσεις *u* όταν ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας είναι ίσος με τη μονάδα ενώ οι άλλοι είναι ίσοι με το μηδέν, συναρτήσει της ανεξάρτητης μεταβλητής *x*. Στις πιο απλές περιπτώσεις μπορούμε συνήθως να συντάξουμε απ' ευθείας τις συναρτήσεις μορφής.

Ας θεωρήσουμε ξανά το γενεσιουργό στοιχείο του σχήματος. Επιλέγουμε το γραμμικό πεδίο:

$$u = a_1 + a_2 s$$

ή $$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Το πεδίο αυτό πρέπει να λάβει τιμές $u=u_\mathrm{i}$ για $s=0$ και $u=u_\mathrm{j}$ για $s=L$.

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

ή $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \tag{52}$$

Επιλύνοντας ως προς *a* και αντικαθιστώντας στην *ε* καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}^{-1}\, \boldsymbol{u} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \tag{53}$$

Το μητρώο συνάρτησης μορφής $\boldsymbol{N}$ είναι τότε:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L-s}{L} & \dfrac{s}{L} \end{bmatrix} \tag{54}$$

Σε όλα τα στοιχεία οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά δεν έχουν όμως τις ίδιες τιμές διότι οι συντεταγμένες των άκρων και τα μήκη *L* διαφέρουν για κάθε στοιχείο.

[3] μητρώο συνάρτησης μορφής = shape function matrix

[4] συνάρτηση μορφής (παρεμβολής) = shape (interpolation) function

6. Η ΜΠΣ βασιζόμενη στη μέθοδο Rayleigh-Ritz

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να θεωρηθεί ως μια εφαρμογή της μεθόδου Rayleigh-Ritz, όταν το προσεγγιστικό πεδίο παρεμβάλλεται τμηματικά μεταξύ βαθμών ελευθερίας που αποτελούν κομβικές τιμές του πεδίου. Ο τρόπος διατύπωσης της λύσης θα δειχθεί με βάση το προηγούμενο παράδειγμα. Όπως και προηγουμένως, συντάσσουμε το συναρτησιακό Π ($=U-W$), θεωρούμε $\delta\Pi=0$ και σε συνέχεια επιλύνουμε τις εξισώσεις $\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{F}$ ως προς τις μετατοπίσεις $\boldsymbol{U}$. Στα προγράμματα Η/Υ η παραπάνω μητρωική εξίσωση συντάσσεται απευθείας, χωρίς να γίνει χρήση του συναρτησιακού.

Μητρώο ακαμψίας στοιχείου

Θεωρούμε ένα στοιχείο-δοκό μήκους L που κείται στον άξονα Ox. Η παραμόρφωση ισούται με $\varepsilon_x=\partial u/\partial x=\partial u/\partial s$. Τότε, από τη σχέση (49),

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{Bu}$$

όπου $$\boldsymbol{B} = \frac{d}{ds}\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & \frac{1}{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \tag{55}$$

Το $\boldsymbol{B}$ είναι το *μητρώο γεωμετρικού συμβιβαστού*.[5] Από το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (30), όπου $L=L_T$ και $\mathrm{d}x=\mathrm{d}s$ η ενέργεια παραμόρφωσης ενός στοιχείου είναι:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E\boldsymbol{\varepsilon}_x^2 A ds = \frac{1}{2}\int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}_x^T AE\boldsymbol{\varepsilon}_x ds \tag{56}$$

Γράφουμε το γινόμενο $\boldsymbol{\varepsilon}_x^2$ ως $\boldsymbol{\varepsilon}_x\boldsymbol{\varepsilon}_x^T$ για διευκόλυνση της παραγώγισης μητρώων που ακολουθεί. Από τις σχέσεις (55) και (56)[6],

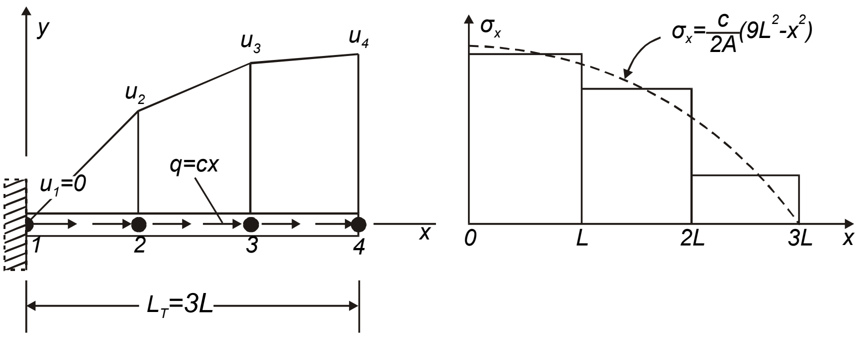
$$U = (1/2)\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{ku}$$

όπου $$\boldsymbol{k} = \int_0^L \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{EABds} \tag{57}$$

Εάν EA = σταθερά, το μητρώο ακαμψίας 2x2 είναι ταυτόσημο με αυτό του στοιχείου-δοκού.

[5] μητρώο γεωμετρικού συμβιβαστού (ή συμβιβαστού των παραμορφώσεων)= geometrical compatibility matrix

[6] και τη μητρωική σχέση $\boldsymbol{Nu}=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{N}^T$



Σχήμα 8 Προσεγγιστική και ακριβής λύση στο πρόβλημα της δοκού

Φορτία

Το δυναμικό των εξωτερικών φορτίων είναι (σχέση (30)):

$$W = -\int_0^L \boldsymbol{u}\boldsymbol{F}_x A ds = -\int_0^L \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{q} ds \tag{58}$$

Από τις σχέσεις (49) και (58)

$$W = -\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{f}_e \qquad \text{όπου} \qquad \boldsymbol{f}_e = \int_0^L \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{q} ds \tag{59}$$

Το μητρώο $\boldsymbol{f}_e$ καλείται *μητρώο συμβατών δυνάμεων*[7] και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο τα κατανεμημένα φορτία ασκούνται στους κόμβους έτσι ώστε να είναι συμβατά με το πεδίο των μετατοπίσεων.

Προς το παρόν μπορούμε να δούμε πως διατυπώνεται το μητρώο f_e αναφερόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε λοιπόν ότι $q=cx$ (γραμμική μεταβολή του εξωτερικού φορτίου). Στα στοιχεία 1, 2 και 3 $q=cx$, $q=c(x_2+s)$ και $q=c(x_3+s)$. Εάν τα στοιχεία έχουν όλα μήκος $L_T/3$,

$$f_{e1} = \frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \tag{60α}$$

$$f_{e2} = \frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \tag{60β}$$

$$f_{e3} = \frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix} \tag{60γ}$$

[7] μητρώο συμβατών δυνάμεων = compatible force matrix

Εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής

Το ολικό δυναμικό της κατασκευής είναι το άθροισμα των συναρτησιακών των τριών στοιχείων,

$$\Pi = U - W = U_1 + U_2 + U_3 - W_1 - W_2 - W_3 \tag{61}$$

Διευρύνονται τα μητρώα κάθε στοιχείου στο επίπεδο της κατασκευής έτσι ώστε το μητρώο των μετατοπίσεων ***u*** αντικαθίσταται από το μητρώο ***U***, που περιλαμβάνει όλους τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής.

$$\Pi = \frac{1}{2}U^T\left[\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right]U - U^T\left[\frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{cL^2}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \tag{62}$$

όπου F_1 είναι η αντίδραση στο σημείο στήριξης x=0. Οι τέσσερις συνθήκες $\partial\Pi/\partial \boldsymbol{U}_i$=0 αποδίδουν τέσσερις μητρωικές εξισώσεις ***KU=F***. Οι σχέσεις αυτές αποκτώνται με τους κανόνες παραγώγισης της μητρωικής άλγεβρας. Οι τέσσερις αυτές σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

Η αναγκαία οριακή συνθήκη U_I=0 επιβάλλεται αφαιρώντας την πρώτη σειρά και την πρώτη στήλη, όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2. Επιλύνοντας τις υπόλοιπες εξισώσεις αποκτώνται λύσεις για τους υπόλοιπους βαθμούς ελευθερίας U_2, U_3 και U_4. Το διάνυσμα των λύσεων είναι:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \frac{cL^3}{3EA} \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ 23 \\ 27 \end{bmatrix} \tag{64}$$

Οι μετατοπίσεις αυτές αντιστοιχούν στα σημεία x=0, L, 2L, 3L και δείχνονται στο Σχήμα 8. Συγκρίνοντας με την ακριβή λύση βλέπουμε ότι οι μετατοπίσεις στους κόμβους συμπίπτουν με την ακριβή λύση. Στα περισσότερα προβλήματα όμως αυτό δεν συμβαίνει. Μεταξύ των κόμβων η προσεγγιστική λύση δεν συμπίπτει με την ακριβή λύση, διότι η μεν πρώτη βασίζεται σε γραμμική παρεμβολή ενώ η δεύτερη είναι τρίτου βαθμού. Για παράδειγμα, στο σημείο $x=3L/2$ έχουμε $U=6cL^3/EA$ και $U=6{,}1875cL^3/EA$ για την προσεγγιστική και την ακριβή λύση αντίστοιχα.

Η κατανομή των τάσεων αποκτάται κάνοντας χρήση της σχέσης (55). Έχουμε:

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \boldsymbol{E\varepsilon}_x = \boldsymbol{EBu} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{65}$$

Η παραπάνω σχέση εφαρμοζόμενη στα τρία στοιχεία αποδίδει τα πεδία των τάσεων που περιλαμβάνονται στο Σχήμα 8. Παρατηρούμε τις απότομες αλλαγές και την σχετικά μεγαλύτερη έλλειψη ακρίβειας σε σχέση με τις μετατοπίσεις. Οι απότομες αυτές αλλαγές παρατηρούνται πάντοτε όταν το προσεγγιστικό πεδίο των μετατοπίσεων είναι γραμμικό.

7. Διατύπωση της ΜΠΣ από συναρτησιακό

Στο προηγούμενο παράδειγμα αποκτήθηκε λύση με πεπερασμένα στοιχεία βασιζόμενη σε ένα στοιχείο-δοκό με δύο κόμβους που αποκτήθηκε από το συναρτησιακό Π της δυναμικής ενέργειας. Παρακάτω θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα θερμικού πεδίου χωρίς να απαιτηθεί το στοιχείο να έχει συγκεκριμένο σχήμα ή αριθμό κόμβων.

Έστω $\boldsymbol{T}$ η θερμοκρασία στο εσωτερικό επίπεδου στοιχείου η οποία παρεμβάλλεται μεταξύ n τιμών θερμοκρασίας σε κόμβους $\boldsymbol{T}_e$.

$$\boldsymbol{T} = \underset{[1\mathrm{x}n]}{\boldsymbol{N}}\;\underset{[n\mathrm{x}1]}{\boldsymbol{T}_e} \tag{66}$$

όπου κάθε μία από τις συναρτήσεις μορφής $\boldsymbol{N}$ είναι συνάρτηση των x και y. Εάν τα στοιχεία έχουν κόμβους στα άκρα, τότε n=3 για τρίγωνο, n=4 για παραλληλόγραμμο κ.ο.κ. Το συναρτησιακό επίπεδης μετάδοσης θερμότητας δίνεται στο παράδειγμα.

Εάν $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial T^T}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

και $$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial T^T}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Τότε,

$$\Pi=\iint\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{T}_{,x}^T\boldsymbol{T}_{,x}\right)+\left(\boldsymbol{T}_{,y}^T\boldsymbol{T}_{,y}\right)dxdy-\iint\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{Q}dxdy+\iint\boldsymbol{T}^T\dot{\boldsymbol{T}}\rho c dxdy \tag{67}$$

Όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιείται το ανάστροφο του μητρώου $\boldsymbol{T}$ για να γίνει ευχερέστερα η παραγώγιση των μητρωικών σχέσεων. Παραγωγίζοντας τη σχέση (66) έχουμε:

$$\boldsymbol{T}_{,x}=\boldsymbol{N}_{,x}\boldsymbol{T}_e \tag{68α}$$

$$\boldsymbol{T}_{,y}=\boldsymbol{N}_{,y}\boldsymbol{T}_e \tag{68β}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{T}}_e \tag{68γ}$$

όπου για παράδειγμα,

$$\boldsymbol{N}_{,x}=\left[\boldsymbol{N}_{1,x}\quad \boldsymbol{N}_{2,\mathrm{x}}\ldots\boldsymbol{N}_{\mathrm{n,x}}\right]$$

Παρατηρούμε ότι οι θερμοκρασίες στους κόμβους είναι συναρτήσεις του χρόνου ενώ οι $\boldsymbol{N}_i$ δεν είναι. Άρα $\boldsymbol{T}$ και $\partial\boldsymbol{T}/\partial t$ παρεμβάλλονται από τις αντίστοιχες τιμές στους κόμβους $\boldsymbol{T}_{\mathrm{e}}$ και $\partial\boldsymbol{T}_e/\partial t$ με το ίδιο μητρώο παρεμβολής $\boldsymbol{N}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (68α-γ) στη σχέση (67) έχουμε:

$$\Pi=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{k}\boldsymbol{T}_e+\boldsymbol{T}_e^T c\partial\boldsymbol{T}/\partial t-\boldsymbol{T}_e^T\boldsymbol{r}_Q \tag{69}$$

όπου:

$$\boldsymbol{k}=\iint k\left[\boldsymbol{N}_{,x}^T\boldsymbol{N}_{,x}+\boldsymbol{N}_{,y}^T\boldsymbol{N}_{,y}\right]dxdy \tag{70α}$$

$$c = \iint \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} \rho x c \, dxdy \tag{70β}$$

$$\boldsymbol{r}_Q = \iint \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{Q} \, \mathrm{dxdy} \tag{70γ}$$

Οι εξισώσεις πεπερασμένων στοιχείων αποκτώνται θέτοντας:

$$\partial \Pi / \partial \boldsymbol{T}_e = 0$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{T}_e + c\partial \boldsymbol{T}_e / \partial T = \boldsymbol{r}_Q \tag{71}$$

Η συνάθροιση όλων των στοιχείων οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση που περιλαμβάνει τις θερμοκρασίες σε όλους τους κόμβους του πλέγματος:

$$\left[\sum \boldsymbol{k}\right]\boldsymbol{T} + \left[\sum c\right]\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} = \sum \boldsymbol{r}_Q \tag{72}$$

Το μητρώο $\boldsymbol{k}$ μπορούμε να το διατυπώσουμε και με τη μορφή που το συναντήσαμε σε προβλήματα της μηχανικής γενικεύοντας με αυτό τον τρόπο τη μεθοδολογία του παραπάνω προβλήματος.

Από τα παραπάνω αντλούμε το σημαντικό συμπέρασμα ότι *η διατύπωση ενός προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να γίνει με δύο μόνο παραδοχές: το συναρτησιακό και τη συνάρτηση μορφής,* που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των ιδιοτήτων των στοιχείων. Από τα παραπάνω αποκτώνται οι υπόλοιπες ιδιότητες του στοιχείου και οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής.

Για να εφαρμοσθεί η μέθοδος αυτή πρέπει να επιλεγούν επίσης:

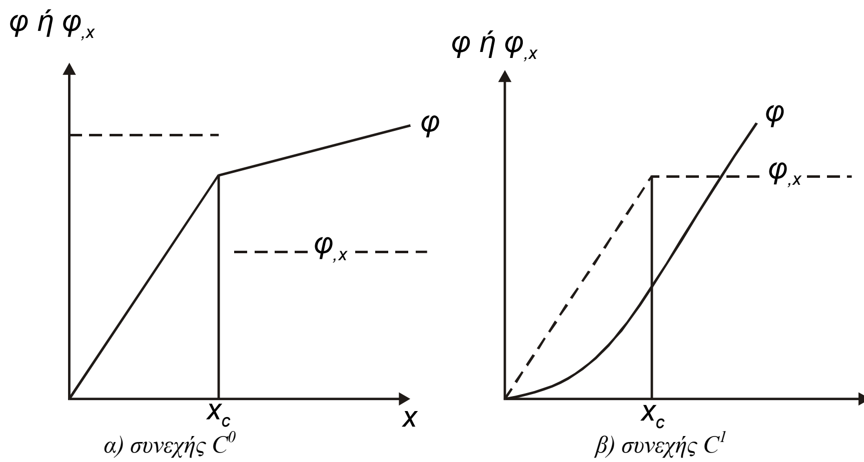
- Η μορφή του στοιχείου
- Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας
- Η κατανομή των βαθμών ελευθερίας στο στοιχείο

Οι παραπάνω επιλογές επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό την αποτελεσματικότητα και την ακρίβεια των υπολογισμών.

8. Παρεμβολή

Παρεμβολή[8] γίνεται όταν θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή μίας συνάρτησης μεταξύ γνωστών τιμών κάνοντας χρήση των τιμών αυτών αλλά με συνάρτηση διά

[8] παρεμβολή = interpolation



Σχήμα 9 Συναρτήσεις παρεμβολής $\varphi(\xi)$

φορη της αρχικής. Μπορούμε να θεωρήσουμε την παρεμβολή ως το βασικό κίνητρο της ΜΠΣ, εφόσον μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα επαρκώς μικρό τμήμα ενός πολύπλοκου πεδίου με ένα απλούστερο πεδίο παρεμβολής. Η γραμμική παρεμβολή επαρκεί εφόσον χρησιμοποιείται επαρκής αριθμός στοιχείων. Στοιχεία με δευτεροτάξια ή τριτοτάξια συνάρτηση παρεμβολής έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και συνεπώς απαιτείται μικρότερος αριθμός στοιχείων για να εξασφαλισθεί η ίδια ακρίβεια. Στο όριο γίνεται χρήση ενός στοιχείου με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, λύση που ταυτίζεται με αυτή της κλασσικής μεθόδου Rayleigh-Ritz.

Στο ερώτημα: λίγα πολύπλοκα, ή πολλά απλά στοιχεία; δεν μπορεί να δοθεί μια εύκολη απάντηση. Ο μελετητής πρέπει να γνωρίζει τις ιδιότητες των διαφόρων στοιχείων και να επιλέγει για το κάθε πρόβλημα το στοιχείο που ταιριάζει καλύτερα στην απόκριση του μοντέλου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μη-γραμμικών αναλύσεων μπορούμε να επιλέξουμε σχετικά απλά στοιχεία διότι έτσι περιορίζεται το κόστος της μελέτης, που περιλαμβάνει πολλούς (επαναληπτικούς) υπολογισμούς.

Τα στοιχεία διαιρούνται ανάλογα με το βαθμό συνέχειας του προσεγγιστικού πεδίου. Εισάγεται ο ακόλουθος συμβολισμός:

Ένα στοιχείο έχει συνέχεια C^m εάν οι παράγωγοι τάξεως m και μικρότερης είναι συνεχείς.

Ένα πεδίο $\varphi = \varphi(x)$ έχει συνέχεια C^0 εάν η φ είναι συνεχής, η $\varphi_{,x}$ όμως δεν είναι. Παραδείγματα συνέχειας C^0 και C^1 δίνονται στο Σχήμα 9. Κατά κανόνα πρέπει οι παράγωγοι της συνάρτησης φ τάξης m να χρησιμοποιούνται ως βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους για να έχει συνέχεια C^m το ζητούμενο προσεγγιστικό πεδίο.

9. Συναρτήσεις μορφής στοιχείων συνέχειας C^0

Για αυτή την κατηγορία στοιχείων το προσεγγιστικό πεδίο της μεταβλητής φ είναι συνεχές, παρουσιάζονται όμως ασυνέχειες στις ποσότητες φ', φ'', κλπ κατά μήκος των συνόρων.

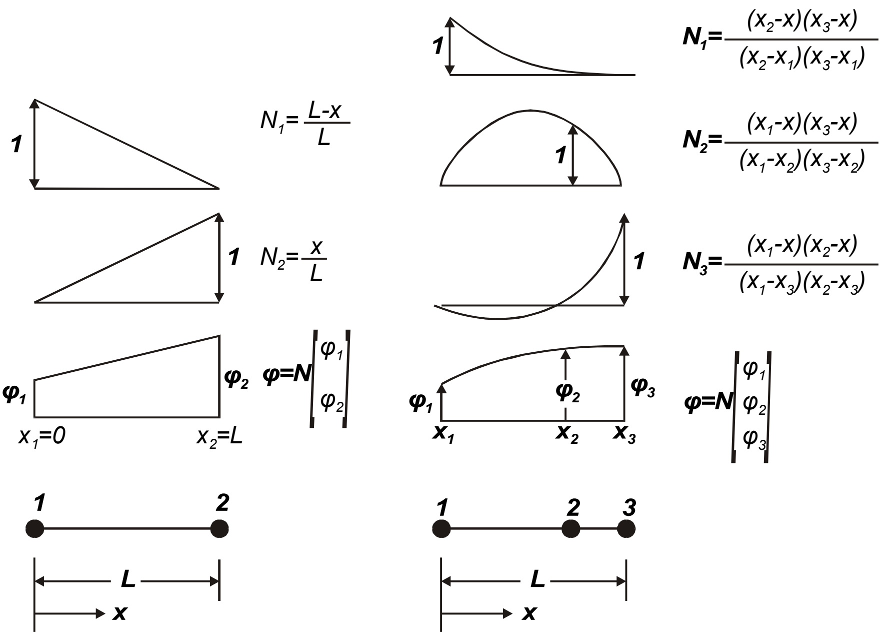
Ένα πεδίο φ παρεμβάλλεται στο εσωτερικό ενός στοιχείου από n κομβικές τιμές $\boldsymbol{\varphi_e}=[\varphi_1\ \varphi_2\ ...\ \varphi_n]^T$ όπως ορίζει η σχέση:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\varphi_e} \qquad \text{δηλ.} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N_i \varphi_i} \tag{73}$$

όπου οι $\boldsymbol{N}_i$ είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων. Η συνάρτηση μορφής $\boldsymbol{N}_i$ ορίζει την κατανομή της $\boldsymbol{\varphi}$ στο εσωτερικό του στοιχείου όταν ο i-οστός βαθμός ελευθερίας φ_i είναι ίσος με τη μονάδα και οι τιμές όλων των υπόλοιπων συναρτήσεων φ είναι ίσες με το μηδέν. Παρακάτω θα εξετάσουμε τα χαρακτηριστικά ορισμένων απλών στοιχείων.

Σε μονοδιάστατα στοιχεία η απλούστερη περίπτωση είναι της γραμμικής παρεμβολής, όπως δείχνουν τα Σχήματα 10α, 10β.

Η παρεμβαλλόμενη συνάρτηση $\varphi(x)$ λαμβάνει τιμές φ_1 για $x=x_1$ και φ_2 για $x=x_2$. Τα δύο αυτά σημεία ορίζουν γραμμικό πολυώνυμο $\varphi=a_1+a_2x$. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως, αποκτάται η συνάρτηση μορφής.



(α) Γραμμική παρεμβολή (β) Δευτεροτάξια παρεμβολή

Σχήμα 10 Συναρτήσεις μορφής

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{L - x}{L} & \dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}} \end{bmatrix} \tag{74}$$

Η δευτεροτάξια παρεμβολή εικονίζεται στο Σχήμα 10β. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται τρία σημεία τα οποία ορίζουν την παραβολή $\varphi=a_1+a_2x+a_3x^2$ που θα πρέπει να λαμβάνει τις τιμές $\varphi=\varphi_1$ $\varphi=\varphi_2$ και $\varphi=\varphi_3$ στα σημεία $x=x_1$, $x=x_2$ και $x=x_3$ αντίστοιχα. Οι τιμές των x_{i} δεν απαιτείται να είναι σε ισαπόσταση μεταξύ τους. Οι τιμές των συντελεστών $\mathrm{a_i}$ μπορούν να υπολογισθούν όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων.

Επειδή όμως η άλγεβρα είναι κοπιώδης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο παρεμβολής Lagrange, που θα περιγραφεί αμέσως παρακάτω. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)} & \dfrac{(\mathrm{x}_1 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} & \dfrac{(\mathrm{x}_1 - x)(x_2 - x)}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \end{bmatrix} \tag{75}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνονται τα εξής:

1. Όλες οι συναρτήσεις μορφής $\boldsymbol{N}_i$, όπως επίσης και η συνάρτηση φ είναι πολυώνυμα της ίδιας τάξεως
2. Για κάθε συνάρτηση μορφής $\boldsymbol{N}_i$, $\boldsymbol{N}_i=1$ όταν $x=x_i$ και $\boldsymbol{N}_i=0$ όταν $x=x_j$, όπου $i\neq j$.
3. Το άθροισμα των συναρτήσεων μορφής συνέχειας C^0 ισούται με τη μονάδα. Αυτό δεν είναι προφανές αλλά μπορεί να δειχθεί ως εξής. Εάν $\varphi_i=1$ σε όλα τα n σημεία τότε $\varphi=1$ σε όλα τα σημεία της παρεμβαλλόμενης συνάρτησης φ.

Η σχέση (73) γίνεται τότε:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} N_i \tag{76}$$

Για στοιχεία με συνέχεια C^1 στα οποία γίνεται χρήση και των παραγώγων ως βαθμοί ελευθερίας στους κόμβους, ισχύει η σχέση (76) εάν οι N_{i} αντιστοιχούν σε βαθμούς ελευθερίας μετατοπίσεων και μόνο.

Παρεμβολή κατά Lagrange

Η συνάρτηση $\varphi=\varphi(x)$ τάξης n-1 που ορίζεται από n τιμές φ_i σε αντίστοιχες x_i έχει τη μορφή:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i \tag{77}$$

ή $$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + \ldots + N_n\phi_n \tag{77'}$$

όπου οι συναρτήσεις μορφής N_i έχουν κατά Lagrange τις ακόλουθες μορφές:

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)\ldots(x_n - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\ldots(x_n - x_1)} \tag{78α}$$

$$N_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)(x_4 - x)\ldots(x_n - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\ldots(x_n - x_2)} \tag{78β}$$

$$\vdots$$

$$N_n = \frac{(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)(x_3 - x_n)\ldots(x_{n-1} - x)}{(x_1 - x_n)(x_2 - x_n)(x_3 - x_n)\ldots(x_{n-1} - x_n)} \tag{78γ}$$

Σημειώνεται ότι οι συναρτήσεις μορφής N_i έχουν τις χαρακτηριστικές 1 και 2 όπως προαναφέρθηκαν. Οι τιμές των N_i των σχέσεων (74) και (75) αποτελούν ειδικές περιπτώσεις των σχέσεων (78), όπου n=2 και 3 αντίστοιχα.

Δύο διαστάσεις

Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του Σχήματος 11 στο οποίο παρεμβάλλεται η $\varphi=\varphi(x, y)$ μεταξύ των τεσσάρων ακραίων τιμών. Η φ έχει την μορφή:

$$\varphi = a_1+a_2x+a_3y+a_4xy \tag{79}$$

Στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να παρεμβάλλουμε γραμμικά μεταξύ των φ_1 και φ_4 και των τιμών φ_2 και φ_3. Επομένως, στις σχέσεις (78) το y αντικαθιστά το x και n=2.

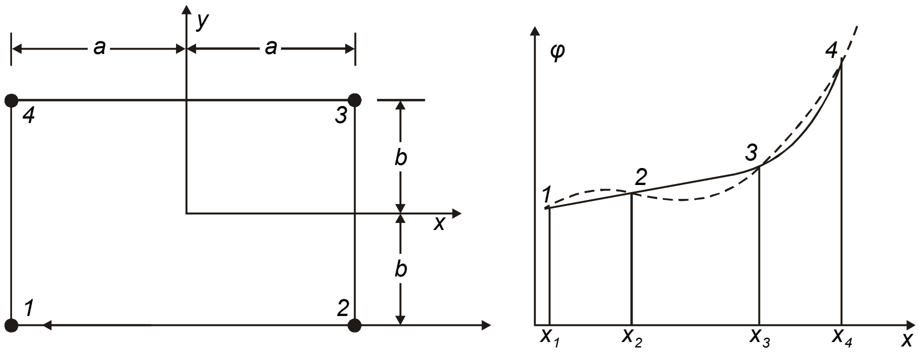
Καλούμε τις ακραίες τιμές φ_{14} και φ_{23}, και έχουμε:

$$\phi_{14} = \frac{b-y}{2b}\phi_1 + \frac{b+y}{2b}\phi_4 \tag{80α}$$

$$\phi_{23} = \frac{b-y}{2b}\phi_2 + \frac{b+y}{2b}\phi_3 \tag{80β}$$

Η γραμμική παρεμβολή στη κατεύθυνση x μεταξύ των τιμών φ_{14} και φ_{23} δίνει:

$$\phi = \frac{a-x}{2a}\phi_{14} + \frac{a+x}{2a}\phi_{23} \tag{81}$$



(α) Τετράκομβο διγραμμικό στοιχείο *(β) Διαφορές μεταξύ πραγματικής καμπύλης και προσέγγισης κατά Lagrange*

Σχήμα 11 Διδιάστατο στοιχείο κατά Lagrange

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις 80α και 80β στη σχέση 81 καταλήγουμε στην $\varphi=\Sigma[N_i\varphi_i]$, όπου:

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \tag{82α}$$

$$N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \tag{82β}$$

$$N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \tag{82γ}$$

$$N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \tag{82δ}$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι σε κάθε περίπτωση N_i=1 στον κόμβο *i* και μηδέν στους υπόλοιπους, ενώ $N_1+N_2+N_3+N_4=1$.

Το στοιχείο που έχει περιγραφεί παραπάνω καλείται *δι-γραμμικό*[9] επειδή οι συναρτήσεις μορφής είναι γινόμενα δύο γραμμικών πολυωνύμων. Επίσης, το στοιχείο με 9 κόμβους (στα άκρα και τα μέσα πλευρών, και στο κέντρο) καλείται *δι-τετράγωνο*, ενώ το στοιχείο με 16 κόμβους από τους οποίους οι 4 είναι εσωτερικοί καλείται *δι-κυβικό,* κ.ο.κ. Οι συναρτήσεις μορφής όλων αυτών των στοιχείων είναι γινόμενα μονοδιάστατων συναρτήσεων παρεμβολής Lagrange και καλούνται *στοιχεία Lagrange*.

[9] δι-γραμμικό = bilinear

10. Συναρτήσεις μορφής στοιχείων με συνέχεια C^1

Στα στοιχεία αυτά υφίσταται συνέχεια της μεταβλητής φ και των πρώτων παραγώγων της, όχι όμως και των παραγώγων ανώτερης τάξης. Παράδειγμα αποτελεί η θεωρία λεπτών ελασμάτων σε κάμψη, στην οποία η μεταβλητή είναι η μετατόπιση κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος και η οποία είναι συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y, των συντεταγμένων της παραμορφωμένης επιφάνειας. Σε στοιχεία-ελάσματα παρέχεται συνέχεια C^1 όχι όμως δευτέρου βαθμού.

Σε μονοδιάστατα στοιχεία η διαδικασία παρεμβολής καμπύλης σε τιμές μεταβλητής και παραγώγων της καλείται *παρεμβολή Hermite*. Η απλούστερη παρεμβολή Hermite γίνεται μεταξύ δύο σημείων για τα οποία είναι γνωστά η τιμή της μεταβλητής και της πρώτης παραγώγου της.

Υποθέτουμε ότι η κλίση $\varphi_{,x}$ είναι μικρή, έτσι ώστε $\theta=\varphi_{,x}$. Τέσσερα δεδομένα ορίζουν μία καμπύλη τρίτου βαθμού $\varphi=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$ ή $\varphi=\boldsymbol{Xa}$ όπου:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{bmatrix} \tag{83}$$

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^T \tag{84}$$

Οι συντελεστές a_i εκφράζονται συναρτήσει συντεταγμένων και κλίσεων στα σημεία x=0 και $x=L$ με τις ακόλουθες αντικαταστάσεις:

$\varphi=\varphi_1$ και $\varphi_{,x}=\theta_1$ για x=0

$\varphi=\varphi_2$ και $\varphi_{,x}=\theta_2$ για $x=L$

Από τη σχέση (83) έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \theta_1\\ \varphi_2\\ \theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & L & L^2 & L^3\\ 0 & 1 & 2L & 3L^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{bmatrix} \tag{85}$$

ή, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Aa}$ (85)’

Άρα, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}$ και η σχέση (83) γίνεται:

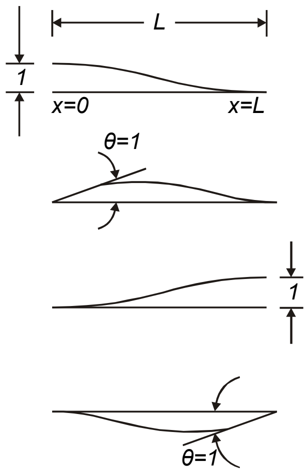
$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{Nu}$$

όπου $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{XA}^{-1}$ (86)

Το μητρώο της συνάρτησης μορφής $\boldsymbol{N}$ έχει διαστάσεις 1x4 όπου οι όροι N_i δίνονται παραπάνω. Όπως αναμένεται, τρεις από τους τέσσερις όρους και τρεις από τις κλίσεις είναι ίσοι με το μηδέν για x=0 ενώ η τέταρτη είναι ίση με τη μονάδα. Το ίδιο ισχύει στο άκρο x=L. Αυτές οι συναρτήσεις μορφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση του μητρώου ακαμψίας στοιχείου-δοκού.

Δύο διαστάσεις

Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση ιδιοτήτων στοιχείων για την ανάλυση απλών ορθογωνίων ελασμάτων υπό κάμψη. Ένας μεγάλος αριθμός τρόπων παρεμβολής μπορεί να χρησιμοποιηθεί, ενώ ορισμένοι από αυτούς περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα.



	$x=0$: N_i	$x=0$: $N_{i,x}$	$x=L$: N_i	$x=L$: $N_{i,x}$
$N_1= 1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}$	1	0	0	0
$N_2= x-\frac{2x^2}{L^2}+\frac{x^3}{L^2}$	0	1	0	0
$N_3=\frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}$	0	0	1	0
$N_4=-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}$	0	0	0	1

Σχήμα 12 Συναρτήσεις μορφής καμπύλης τρίτου βαθμού

Βιβλιογραφία

1. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. Bathe K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982.