

Ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία

1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε πεπερασμένα στοιχεία για τα οποία οι συναρτήσεις παρεμβολής (που περιλαμβάνονται στο μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων $\mathbf{H}$) εκφράζονται με βάση τις γενικευμένες συντεταγμένες a_i . Επιπλέον, είδαμε ότι η μέθοδος υπολογισμού των a_i από τις κομβικές μετατοπίσεις $\hat{u}$ απαιτεί την αντιστροφή του μητρώου συνεκτικότητας $\mathbf{A}$. Είναι προφανές ότι για μία κατασκευή η οποία αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό στοιχείων, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την αντιστροφή όλων των αντιστοίχων μητρώων είναι σημαντικός και ότι αυτό καθιστά την διαδικασία αυτή λιγότερο ελκυστική. Ας σημειωθεί επίσης ότι για πιο σύνθετα στοιχεία είναι δυνατό, για ορισμένους συνδυασμούς των συντεταγμένων των κόμβων των στοιχείων, να μην είναι δυνατή η αντιστροφή του μητρώου συνεκτικότητας $\mathbf{A}$. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν στη αναζήτηση μεθόδων ώστε να ορισθεί απευθείας η συσχέτιση των μετατοπίσεων $u(x, y)$ με τις αντίστοιχες κομβικές μετατοπίσεις, χωρίς να υπολογίζεται το μητρώο $\mathbf{A}^{-1}$. Οι μέθοδοι αυτές αναφέρονται ως σύγχρονοι τρόποι διατύπωσης πεπερασμένων στοιχείων και βασίζονται στην χρήση τοπικών συντεταγμένων οι οποίες καλούνται *φυσικές* συντεταγμένες. Οι φυσικές συντεταγμένες επιλέγονται με βάση την γεωμετρία ενός στοιχείου και συνήθως παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1 ή μεταξύ -1 και +1. Η εύρεση των ζητούμενων συναρτήσεων παρεμβολής διευκολύνεται σημαντικά κάνοντας χρήση των φυσικών συντεταγμένων.

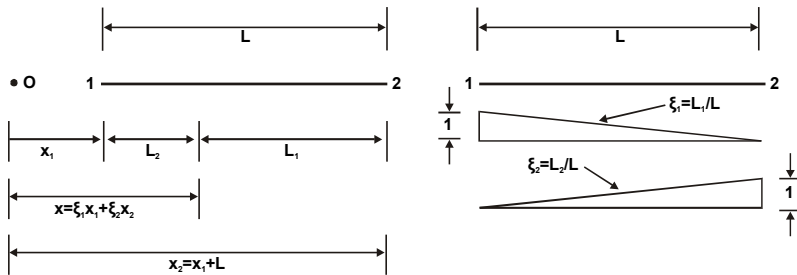
2. Οι φυσικές συντεταγμένες και η χρήση τους

2.1 Μια διάσταση

Η εισαγωγή φυσικών συντεταγμένων κατά τη διατύπωση των μητρώων ακαμψίας των πεπερασμένων στοιχείων είναι μία απλή υπόθεση που διευκολύνει τη διατύπωση των χαρακτηριστικών μητρώων των στοιχείων.

Ας δούμε όμως πως χρησιμοποιούνται οι φυσικές συντεταγμένες στην περίπτωση του στοιχείου-ράβδου (Σχήμα 1). Οι φυσικές συντεταγμένες ξ_1 και ξ_2 ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \qquad \xi_2 = \frac{L_2}{L} \qquad (1\alpha-\beta)$$



Σχήμα 1 Φυσικές συντεταγμένες ξ_1 και ξ_2 κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Εφόσον $L_1 + L_2 = L$, οι συντεταγμένες ξ_1 και ξ_2 είναι εξαρτημένες και ικανοποιούν την σχέση:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \quad (2)$$

Οι συντεταγμένες ξ_1 και ξ_2 έχουν μέγεθος 1 ή 0 στα σημεία 1 και 2, οι δε σχέσεις (1α), (1β) είναι ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς. Η απόσταση x ενός τυχαίου σημείου P εκφράζεται συναρτήσει των ξ_1 και ξ_2 με τη σχέση:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \quad (3)$$

Για παράδειγμα, το σημείο διχοτόμησης της ευθείας 1-2 ορίζεται από τις τιμές $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 1/2$, όπου $x = (x_1 + x_2)/2$. Οι σχέσεις (2) και (3) και οι αντίστροφές τους, που εκφράζουν τις ξ_1 και ξ_2 συναρτήσει της x , γράφονται ως:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (4\alpha)$$

$$\text{και} \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \quad (4\beta)$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν γραμμική απεικόνιση των δύο συστημάτων αναφοράς. Παρεμβολή κατά μήκος της ευθείας 1-2 μπορεί τώρα να γίνει με τις φυσικές συντεταγμένες.



Σχήμα 2 Δευτεροτάξιες συναρτήσεις μορφής με φυσικές συντεταγμένες ξ_1 και ξ_2 σε μήκος L , όπου ο κόμβος 3 διχοτομεί το διάστημα 1-2

Η γραμμική παρεμβολή συνάρτησης με τιμές φ_1, φ_2 στους κόμβους, επιτυγχάνεται με χρήση της σχέσης:

$$\phi = N \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad N = [\xi_1 \quad \xi_2] \quad (5)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση $N_1 = \xi_1$ και $N_2 = \xi_2$. Εάν θέλουμε να κάνουμε δευτεροβάθμια παρεμβολή μεταξύ τιμών φ_1 στο $\xi_1 = 1$, φ_2 στο $\xi_2 = 1$ και φ_3 στο $\xi_1 = \xi_2 = 1/2$, θα έχουμε:

$$\phi = \xi_1(2\xi_1 - 1)\phi_1 + \xi_2(2\xi_2 - 1)\phi_2 + 4\xi_1\xi_2\phi_3 \quad (6)$$

Η σχέση (6) μπορεί να αποκτηθεί με δύο τρόπους: (α) από την γενικής μορφής δευτεροτάξια συνάρτηση $\phi = a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2$, όπου υπολογίζουμε τους συντελεστές a_i από τις ισχύουσες συνθήκες στους κόμβους, όπως $\phi = \varphi_1$ για $\xi_1 = 1$, σε συνδυασμό με την σχέση (2), και (β) από τις ισχύουσες συνθήκες στους κόμβους και συγκρίνοντας τις αντίστοιχες καμπύλες που περιλαμβάνονται στα Σχήματα 1 και 2, απ' όπου προκύπτει ότι:

$$N_1 = \xi_1 - N_3/2$$

$$\text{και} \quad N_2 = \xi_2 - N_3/2$$

Το μητρώο ακαμψίας διατυπώνεται συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων ως εξής: θεωρούμε ότι η ευθεία 1-2 συνιστά στοιχείο-ράβδο δύο κόμβων με σταθερό εμβαδόν διατομής A και μέτρο ελαστικότητας E . Από τη σχέση (5) με $\phi = u$ η μετατόπιση κατά μήκος του άξονα είναι $u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2$. Συνεπώς, η αξονική παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = u_1 \left[-\frac{1}{L} \right] + u_2 \left[\frac{1}{L} \right] \quad (7)$$

όπου οι όροι $\pm 1/L$ αποκτώνται από τη σχέση (4β). Δηλαδή,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x_2 - x}{L} \right] = -\frac{1}{L} \quad (8\alpha)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x - x_1}{L} \right] = \frac{1}{L} \quad (8\beta)$$

Το μητρώο ακαμψίας των u_1 και u_2 είναι:

$$k = \int_{x_1}^{x_1+L} AE B^T B dx$$

όπου $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ (9)

Αντικαθιστώντας αποκτάται αμέσως η γνωστή σχέση για το μητρώο ακαμψίας k μιας ράβδου.

2.2 Δύο διαστάσεις

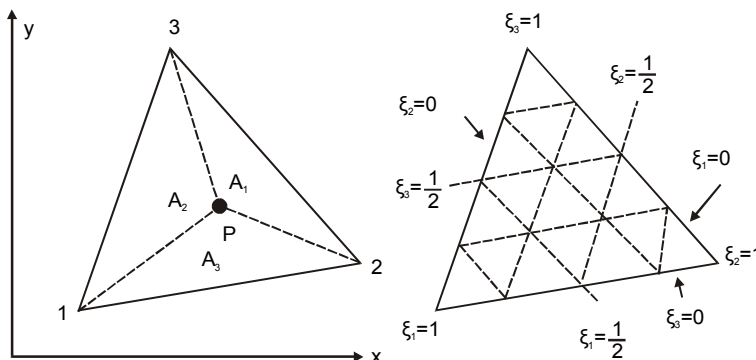
Είδαμε ότι στην περίπτωση της ευθείας γραμμής, οι φυσικές συντεταγμένες ορίζονται ως λόγοι μηκών. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε στην περίπτωση διδιάστατων σχημάτων τις φυσικές συντεταγμένες ως λόγους εμβαδών. Στο Σχήμα 3 περιγράφονται τα χαρακτηριστικά του τριγώνου. Το (τυχαίο) σημείο P υποδιαιρεί το εμβαδόν A σε τρεις χώρους, τους A_1 , A_2 και A_3 . Οι συντεταγμένες ορίζονται τώρα ως λόγοι εμβαδών:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (10)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του τριγώνου 1-2-3. Εφόσον $A = A_1 + A_2 + A_3$ οι ξ_i δεν είναι ανεξάρτητες αλλά ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (11)$$

Το κέντρο βάρους του τριγώνου βρίσκεται στο σημείο $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1/3$. Η παραπάνω σχέση (εξίσωση περιορισμού) και η γραμμική σχέση μεταξύ των καρτεσια



Σχήμα 3 Φυσικές συντεταγμένες τριγώνου

νών συντεταγμένων και των συντεταγμένων των εμβαδών εκφράζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (12\alpha-\beta)$$

όπου, εάν $x_{ij} = x_i - x_j$ και $y_{ij} = y_i - y_j$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (13\alpha)$$

$$\text{και} \quad A^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (13\beta)$$

Εύκολα επιβεβαιώνεται με αντικατάσταση για επιλεγμένα σημεία της περιφέρειας του τριγώνου (ακμές) ότι η σχέση (12α) ισχύει. Το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου δίνεται από τη σχέση:

$$2A = \det A = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21} \quad (14)$$

όπου $x_{21}-x_2-x_1$ κλπ. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από αλγεβρικές πράξεις επί της ορίζουσας. Η σχέση (12α) δίνει τις συντεταγμένες κάθε σημείου στο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς για δεδομένες συντεταγμένες εμβαδών, οι οποίες βέβαια πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση περιορισμού (11). Η διατύπωση των μητρώων του στοιχείου βασίζεται στη δυνατότητα παραγωγίσις μίας συνάρτησης φ ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο κανόνας αλληλουχίας, για συνάρτηση $\varphi=\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, δίνει:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial x} \quad (15\alpha)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \frac{\partial \xi_3}{\partial y} \quad (15\beta)$$

Από την σχέση (12β) προκύπτει,

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{y_{23}}{2A} \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{y_{31}}{2A} \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \frac{y_{12}}{2A} \quad (16\alpha-\gamma)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{x_{32}}{2A} \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{x_{13}}{2A} \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \frac{x_{12}}{2A} \quad (16\delta-\sigma\tau)$$

όπου $y_{23}=y_2-y_1$ κ.ο.κ. Οι σχέσεις (16α-στ) ισχύουν για τρίγωνα με ευθύγραμμες πλευρές και κανονικά διατεταγμένους πλευρικούς κόμβους (εφόσον υπάρχουν).

2.3 Πεδία παρεμβολής

Για να αναπτύξουμε πεπερασμένα στοιχεία αναζητούμε συναρτήσεις παρεμβολής (μορφής) όπως $N_i=N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ στη σχέση $\phi=\Sigma(N_i\phi_i)$ όπου οι ϕ_i είναι κομβικοί βαθμοί ελευθερίας. Η χρήση πολυωνύμων που περιέχουν απροσδιόριστες σταθερές a_i είναι ένας τρόπος διατύπωσης των N_i . Εάν $\phi = \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi(x, y)$, όπου η ϕ δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \xi_1^q \xi_2^r \xi_3^s \quad (17)$$

όπου q, r και s είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση $q+r+s=p$ για n δυνατούς συνδυασμούς. Συνεπώς η ϕ είναι πλήρες πολυώνυμο βαθμού p στο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς. Για παράδειγμα, για το τρίγωνο δευτέρου βαθμού του Σχήματος 5, $n=6, p=2$ και

$$\phi = a_1 \xi_1^2 + a_2 \xi_2^2 + a_3 \xi_3^2 + a_4 \xi_1 \xi_2 + a_5 \xi_2 \xi_3 + a_6 \xi_3 \xi_1 \quad (18)$$

Η σχέση αυτή για την περίπτωση ενός τριγώνου με ευθύγραμμες πλευρές αντιστοιχεί με την σχέση:

$$\phi = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 \quad (19)$$

όπου οι όροι b_i είναι σταθερές που συνδέονται με τις σταθερές a_i της εξίσωσης (18). Οι συναρτήσεις μορφής λαμβάνονται από τη σχέση (17) εκφράζοντας τους συντελεστές a_i συναρτήσει των κομβικών βαθμών ελευθερίας ϕ_i . Ας θεωρήσουμε πάλι το τρίγωνο δευτέρου βαθμού. Ο πλευρικός κόμβος 4 κείται στο σημείο $\xi_1=\xi_2=1/2$ και $\xi_3=0$, ο πλευρικός κόμβος 5 κείται στο σημείο $\xi_1=\xi_2=1/2$ και $\xi_3=0$ και ο πλευρικός κόμβος 6 κείται στο σημείο $\xi_3=\xi_1=1/2$ και $\xi_2=0$. Μπορούμε λοιπόν να επιλύσουμε για κάθε πλευρά του τριγώνου ως προς τους αντίστοιχους συντελε-

στές a_i και να αποκτήσουμε τις συναρτήσεις μορφής, οι οποίες και θα είναι οι συντελεστές των φ_1 . Συνεπώς για το τρίγωνο δευτέρου βαθμού βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) & N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) & N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \\ N_4 &= 4\xi_1\xi_2 & N_5 &= 4\xi_2\xi_3 & N_6 &= 4\xi_3\xi_1 \end{aligned}$$

Θα επανεξετάσουμε το τρίγωνο σταθερών παραμορφώσεων που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3. Στην περίπτωση αυτή τα πεδία μετατοπίσεων $u(x, y)$, $v(x, y)$ παρεμβάλλονται μεταξύ των τιμών των μετατοπίσεων στους κόμβους, u_i , v_i . Έχουμε λοιπόν $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]$ και

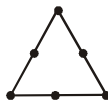
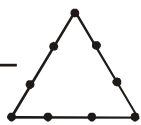
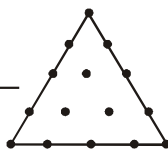
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}$$

$$\text{όπου } \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

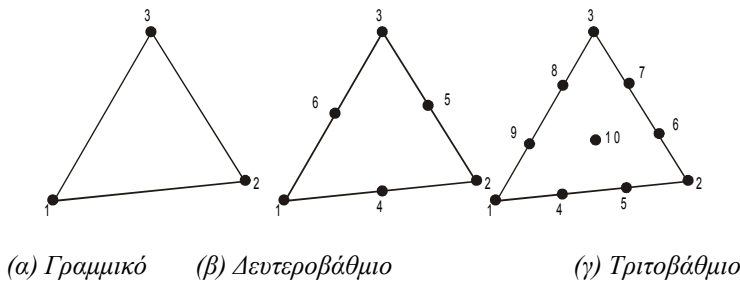
Οι παραμορφώσεις $\varepsilon = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$ υπολογίζονται από την σχέση $\mathbf{B} = \partial \mathbf{H}$ (Κεφάλαιο 3). Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{H} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{23} & 0 & \mathcal{J}_{31} & 0 & \mathcal{J}_{12} & 0 \\ 0 & \mathcal{X}_{32} & 0 & \mathcal{X}_{13} & 0 & \mathcal{X}_{21} \\ \mathcal{X}_{32} & \mathcal{J}_{23} & \mathcal{X}_{13} & \mathcal{J}_{31} & \mathcal{X}_{21} & \mathcal{J}_{12} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Το γραμμικό τρίγωνο

Τρίγωνο Pascal	Βαθμός πολυωνύμου	Αριθμός όρων	Τριγωνικό στοιχείο (αριθμ. κόμβων=αριθμ. όρων)
1	0	1	$n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$
x y	1	3	
x ² xy y ²	2	6	
x ³ x ² y xy ² y ³	3	10	
x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	4	15	

Σχήμα 4 Τρίγωνα και αντίστοιχοι συντελεστές πολωνύμων παρεμβολής



Σχήμα 5 Τριγωνικά στοιχεία

Για δεδομένο μητρώο ελαστικότητας $\mathbf{E}$ αποκτάται το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (22)$$

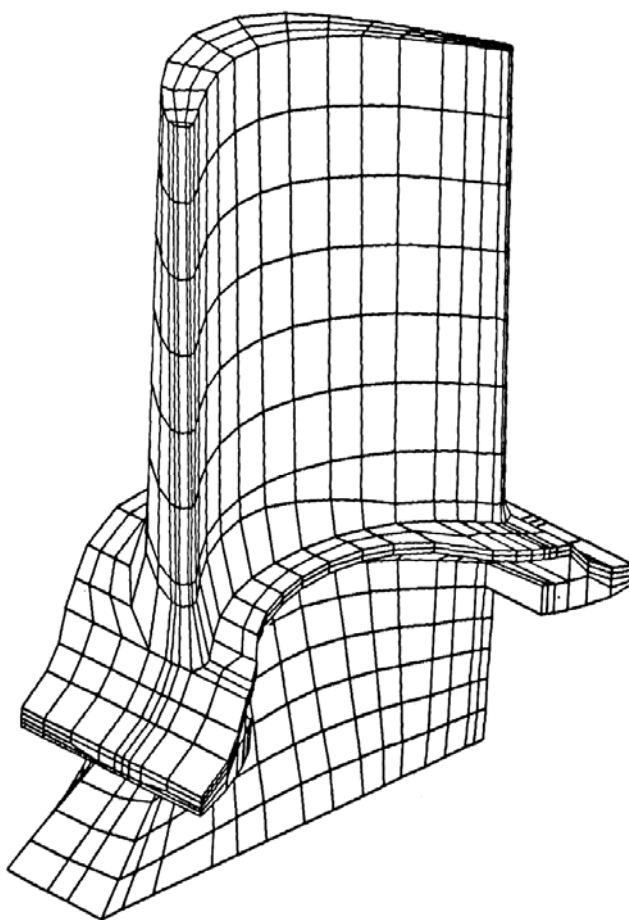
Εάν το μητρώο $\mathbf{E}$ και το πάχος t είναι σταθερά, $\mathbf{k} = t \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι επειδή λείπουν όροι x και y το στοιχείο αυτό δεν έχει αξιόλογη επίδοση σε προβλήματα ομοεπίπεδης κάμψης. Αυτό αντιμετωπίζεται στην πράξη είτε με τη χρήση μεγάλου αριθμού στοιχείων (Κεφάλαιο 3) είτε με τη χρήση στοιχείου που να έχει τους απαιτούμενους βαθμούς ελευθερίας.

3. Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία. Γενικά.

Θα μιλήσουμε τώρα για μία σημαντική κατηγορία στοιχείων που τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους επιτρέπουν την ακριβέστερη περιγραφή της γεωμετρίας πολλών κατασκευών. Τα στοιχεία αυτά βασίζονται στην *ισοπαραμετρική διατύπωση* που δίνει τη δυνατότητα απόκτησης στοιχείων με *καμπυλόγραμμας πλευρές*. Για να εκτιμηθεί η ανάγκη τέτοιων χαρακτηριστικών παρατίθεται το Σχήμα 6 που δείχνει το μοντέλο πτερυγίου στροβίλου. Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα επιπέδων κατασκευών, στερεών κατασκευών, ελασμάτων και κελυφών. Υπάρχουν επίσης στοιχεία για προβλήματα θραυστομηχανικής και στοιχεία για μη-μηχανικά προβλήματα.

Η διατύπωση των ισοπαραμετρικών στοιχείων προϋποθέτει τη χρήση φυσικού συστήματος αναφοράς, οι δε μετατοπίσεις εκφράζονται συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων. Επειδή όμως πρέπει να παραγωγισθούν ως προς το γ.σ.α. απαιτείται να γίνει πρώτα μετασχηματισμός σε αυτό.

Αυτό επιτυγχάνεται με το μητρώο μετασχηματισμού $\mathbf{J}$, το οποίο καλείται *Ιακωβιανό*. Ένα άλλο χαρακτηριστικό των ισοπαραμετρικών στοιχείων είναι το ότι σε μη-ορθογώνια στοιχεία οι ολοκληρώσεις πρέπει να γίνουν αριθμητικά. Αυτό γίνε-



Σχήμα 6 Προσομοίωση πτερυγίου στροβίλου με τρισδιάστατα στοιχεία

ται διότι είτε η αναλυτική ολοκλήρωση οδηγεί σε πολύ σύνθετες αλγεβρικές σχέσεις, είτε διότι δεν είναι δυνατή.

Ο όρος *ισοπαραμετρικό* αναφέρεται στην χρήση της ίδιας συνάρτησης μορφής για την απόκτηση των πεδίων μετατοπίσεων αλλά και των συντεταγμένων των σημείων στο εσωτερικό κάθε στοιχείου. Έτσι, στην περίπτωση των ισοπαραμετρικών στοιχείων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

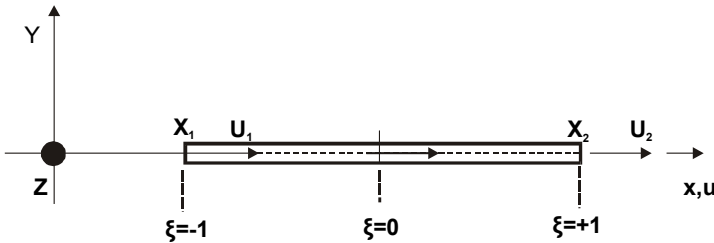
$$u = H\hat{u} \quad x = H'c \quad H \equiv H' \quad (23)$$

όπου $x^T = [x \ y \ z]$ και c είναι το μητρώο των συντεταγμένων των κόμβων. Εάν οι συναρτήσεις μορφής που περιλαμβάνονται στο μητρώο H είναι υψηλότερης τάξης των αντιστοίχων συναρτήσεων στο μητρώο H' τότε το στοιχείο καλείται *υποπαραμετρικό* ενώ εάν συμβαίνει το αντίστροφο τότε καλείται *υπερπαραμετρικό*.

3.1 Μητρώο ακαμψίας ισοπαραμετρικού στοιχείου-ράβδου

Το Σχήμα 7 απεικονίζει το στοιχείο-ράβδος για το οποίο υποθέτουμε, προς απλοποίηση των μαθηματικών σχέσεων, ότι ο άξονας της ράβδου συμπίπτει με τον άξονα Ox στο γενικό σύστημα αναφοράς.

Στο γενικό σύστημα αναφοράς, η συντεταγμένη x εκφράζεται συναρτήσει των συντεταγμένων στο φυσικό σύστημα αναφοράς με τη μεταβλητή ξ , όπου $-1 \leq \xi \leq +1$. Ο μετασχηματισμός αυτός δίνεται από τη σχέση:



Σχήμα 7 Στοιχείο-ράβδος σε γενικό και φυσικό σύστημα συντεταγμένων

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 \quad (24\alpha)$$

$$\text{ή} \quad x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \quad (24\beta)$$

όπου $N_1 = 1/2(1 - \xi)$ και $N_2 = 1/2(1 + \xi)$ είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής. Οι (24) ορίζουν μία και μοναδική σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και της μεταβλητής ξ της ράβδου. Στο γενικό σύστημα αναφοράς οι μετατοπίσεις εκφράζονται όπως και οι συντεταγμένες, δηλαδή,

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i U_i \quad (25)$$

όπου στην περίπτωση αυτή οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά. Η χρήση της ίδιας συνάρτησης για την παρεμβολή των τεταγμένων και των μετατοπίσεων των στοιχείων που ορίζονται στο φυσικό σύστημα αναφοράς, συνιστά το θεμελιώδες γνώρισμα της ισοπαραμετρικής διατύπωσης των πεπερασμένων στοιχείων. Για να υπολογίσουμε το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου πρέπει πρώτα να προσδιορισθούν οι παραμορφώσεις $\varepsilon = du/dx$. Η σχέση γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (26)$$

όπου, από τη σχέση (25) έχουμε:

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{U_2 - U_1}{2} \quad (27)$$

και κάνοντας χρήση της (24β) έχουμε:

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (28)$$

όπου L είναι το μήκος της δοκού. Συνεπώς καταλήγουμε στη γνωστή σχέση:

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (29)$$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων $\mathbf{B}$ που αντιστοιχεί στη σχέση $\varepsilon = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$ είναι συνεπώς:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Το μητρώο αυτό κατά κανόνα είναι συνάρτηση των φυσικών συντεταγμένων και γι' αυτό υπολογίζουμε το μητρώο ακαμψίας (σχέση (22)) ολοκληρώνοντας στο φυσικό σύστημα αναφοράς. Στο παράδειγμα αυτό θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \\ &= A \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dx = \quad [dV = A dx \text{ (σταθερή διατομή)}] \\ &= A \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} J d\xi = \\ &= \frac{AEL}{2} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} J d\xi \end{aligned}$$

όπου A είναι το εμβαδόν της διατομής, E είναι το μέτρο ελαστικότητας και J είναι η Ιακωβιανή σχέση $dx = J d\xi$, όπου dx είναι το στοιχειώδες μήκος στο γενικό σύστημα αναφοράς και $d\xi$ είναι το αντίστοιχο μήκος στο φυσικό σύστημα αναφοράς. Από τη σχέση (28) έχουμε $J = L/2$ και αντικαθιστώντας στη ανωτέρω σχέση κατα-

λήγουμε στη γνωστή σχέση για το μητρώο ακαμψίας μίας ράβδου σταθερής διατομής:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{AEL}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} [-1 \ +1] d\xi = \\ &= \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} d\xi = \\ &= \frac{AE}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{(+1) - (-1)\} \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Γενικά για το στοιχείο ράβδος χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση για την παρεμβολή της συντεταγμένης x :

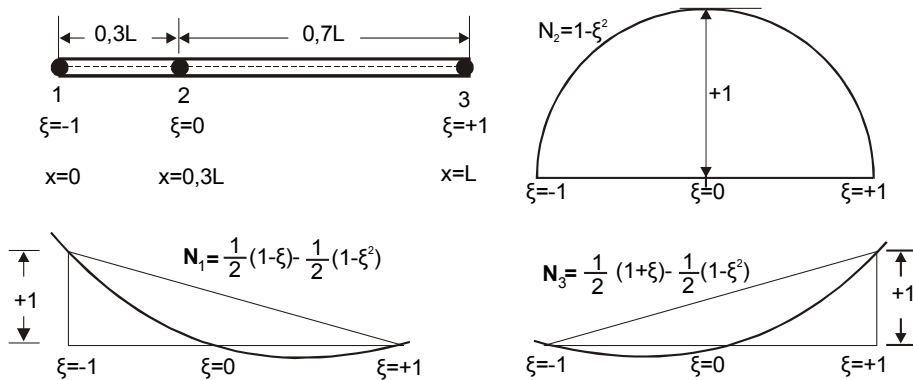
$$x = \sum_{i=1}^q N_i(\xi) x_i \quad (32)$$

όπου x είναι η συντεταγμένη ενός τυχαίου σημείου στο εσωτερικό του στοιχείου, x_i είναι οι αντίστοιχες συντεταγμένες των q κόμβων του, και ξ είναι η μεταβλητή στο φυσικό σύστημα αναφοράς. Στην παραπάνω σχέση οι συντεταγμένες των σημείων του στοιχείου εκφράζονται στο τοπικό σύστημα αναφοράς και το διάνυσμα των κομβικών συντεταγμένων στο γενικό σύστημα αναφοράς, $\mathbf{X}^T = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_q]$, βρίσκεται από την συνήθη σχέση $\mathbf{x} = \mathbf{TX}$ όπου $\mathbf{T}$ είναι το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού.

Ο μετασχηματισμός μεταξύ του τοπικού και φυσικού συστήματος αξόνων δίνεται τώρα από την σχέση (32). Η χαρακτηριστική ιδιότητα των συναρτήσεων παρεμβολής $N_i(\xi)$ είναι ότι στο φυσικό σύστημα αναφοράς έχουν τιμή ίση με την μονάδα στον αντίστοιχο κόμβο i και είναι ίσες με το μηδέν στους υπόλοιπους κόμβους. Επομένως ένα σημαντικό πλεονέκτημα του ισοπαραμετρικού στοιχείου-ράβδου είναι ότι εύκολα ορίζουμε ένα μεταβλητό αριθμό κόμβων οι οποίοι δεν είναι απαραίτητο να είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι. Η διαδικασία για να προσδιορισθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις παρεμβολής εξηγείται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 1

Να διατυπωθούν οι συναρτήσεις παρεμβολής του στοιχείου-ράβδου του Σχήματος 8 για 3 και 4 κόμβους.



Σχήμα 8 Στοιχείο-ράβδος και συναρτήσεις παρεμβολής μίας διάστασης

Λύση

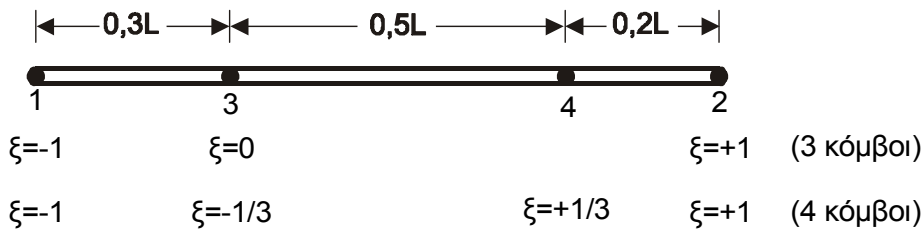
Παρατηρούμε ότι για το στοιχείο με 3 κόμβους η συνάρτηση παρεμβολής πρέπει να περιέχει όρους με υψηλότερη δύναμη τη δεύτερη. Η παρεμβολή θα έχει συνεπώς παραβολική μορφή. Η παραβολή που ικανοποιεί τις απαιτούμενες συνθήκες (δηλαδή ίση με το μηδέν στα σημεία $\xi=\pm 1$ και ίση με τη μονάδα για $\xi=0$) είναι η $(1-\xi^2)$. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις παρεμβολής (N_1 και N_3) αποκτώνται με υπέρθεση μιας γραμμικής συνάρτησης και μίας παραβολής. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση παρεμβολής N_3 . Η συνθήκη μηδενισμού της συνάρτησης στα σημεία $\xi=-1$ και $\xi=+1$ ικανοποιείται χρησιμοποιώντας τη σχέση $(1/2)(1+\xi)$.

Για να εξασφαλισθεί ο μηδενισμός της h_3 και στο σημείο $\xi=0$ χρησιμοποιείται η σχέση $h_3 = (1/2)(1+\xi) - (1/2)(1-\xi^2)$. Με παρόμοιο τρόπο αποκτάται και η συνάρτηση παρεμβολής h_1 .

Η διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση του στοιχείου με τρεις κόμβους μπορεί να εφαρμοσθεί και για στοιχεία με περισσότερους κόμβους. Στο παρακάτω σχήμα περιγράφεται στοιχείο-ράβδος με τέσσερις κόμβους οι οποίοι και πάλι δεν είναι ομοιόμορφα διατεταγμένοι κατά μήκος της ράβδου. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις παρεμβολής δίνονται στον Πίνακα 1. Αρχικά προσδιορίζονται οι συναρτήσεις για ένα στοιχείο με δύο κόμβους. Για την χρήση ενός τρίτου κόμβου ορίζουμε μία τρίτη συνάρτηση παρεμβολής και προστίθενται διορθωτικοί όροι στις δύο υπάρχουσες συναρτήσεις. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για τον τέταρτο κόμβο.

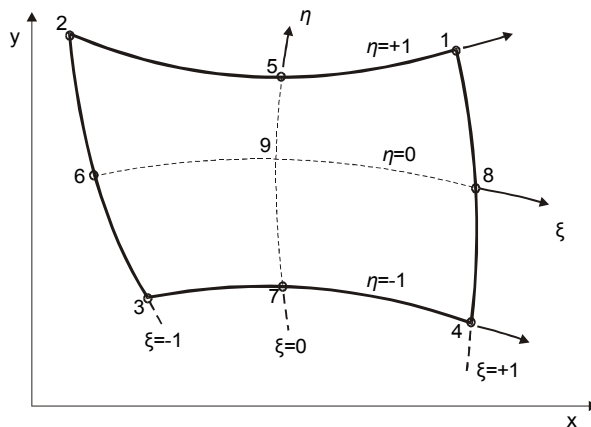
Πίνακας 1 Συναρτήσεις παρεμβολής μονοδιάστατου στοιχείου

		3 κόμβοι	4 κόμβοι
N_1	$(1-\xi)/2$	$-(1-\xi^2)/2$	$(-9\xi^3+\xi^2+9\xi-1)/16$
N_2	$(1+\xi)/2$	$-(1-\xi^2)/2$	$(9\xi^3+\xi^2-9\xi-1)/16$
N_3	$(1-\xi^2)$		$(27\xi^3+7\xi-27\xi-7)/16$
N_4	$(-27\xi^3-9\xi^2+27\xi+9)/16$		



Σχήμα 9 Στοιχείο-ράβδος με μεταβλητό αριθμό κόμβων

3.2 Ορθογωνικά στοιχεία



Σχήμα 10 Διδιάστατο καμπυλόγραμμο ισοπαραμετρικό στοιχείο

Η διατύπωση των ισοπαραμετρικών μητρώων δύο και τριών διαστάσεων γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο. Για στοιχείο δύο διαστάσεων οι παρεμβολές των συντεταγμένων γίνονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$x = \sum_{i=1}^q N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^q N_i y_i \quad (33\alpha-\beta)$$

όπου x και y είναι οι συντεταγμένες τυχαίου σημείου του στοιχείου και x_i, y_i ($i=1, \dots, q$) είναι οι συντεταγμένες των q κόμβων του στοιχείου. Οι συναρτήσεις παρεμβολής N_i ορίζονται στο φυσικό σύστημα αναφοράς με μεταβλητές ξ, η που λαμβάνουν τιμές από -1 έως $+1$.

Η ανωτέρω διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων παρεμβολής στην μία διάσταση μπορεί να εφαρμοσθεί γενικότερα για δύο και τρεις διαστάσεις. Η γενική μορφή του τετράπλευρου ισοπαραμετρικού στοιχείου δίνεται στο Σχήμα 10. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα των ισοπαραμετρικών σε σύγκριση με τα συμβατικά στοιχεία είναι ότι μπορούν να έχουν καμπυ-

λόγραμμες πλευρές και μεταβλητό αριθμό κόμβων. Μέγιστη ακρίβεια αποκτάται όταν τα στοιχεία με μεταβλητό αριθμό κόμβων πλησιάζουν το ορθογώνιο σχήμα (διδιάστατα στοιχεία) και οι μη γωνιακοί κόμβοι βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις τους στο φ.σ.α. (δηλαδή οι πλευρικοί κόμβοι βρίσκονται στο κέντρο των αντίστοιχων πλευρών). Ένα άλλο πλεονέκτημα των στοιχείων αυτών είναι η σχετική ευκολία με την οποία αποκτώνται οι συναρτήσεις μετατοπίσεων των στοιχείων.

Για τα ισοπαραμετρικά στοιχεία λοιπόν η παρεμβολή των μετατοπίσεων των στοιχείων γίνεται κατά τον ίδιο τρόπο με τις παρεμβολές των συντεταγμένων των κόμβων (σχέσεις (33α), (33β)), δηλαδή, με μεταβλητό αριθμό κόμβων (4 έως 9):

Πίνακας 2 Συναρτήσεις παρεμβολής για διδιάστατα στοιχεία με μεταβλητό αριθμό κόμβων

(Οι παρακάτω όροι προστίθενται εάν το στοιχείο περιλαμβάνει τον κόμβο i)

		$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$
$N_1 =$	$(1+\xi)(1+\eta)/4$	$-N_5/2$			$-N_8/2$	$-N_9/4$
$N_2 =$	$(1-\xi)(1+\eta)/4$	$-N_5/2$	$-N_6/2$			$-N_9/4$
$N_3 =$	$(1-\xi)(1-\eta)/4$		$-N_6/2$	$-N_7/2$		$-N_9/4$
$N_4 =$	$(1+\xi)(1-\eta)/4$			$-N_7/2$	$-N_8/2$	$-N_9/4$
$N_5 =$	$(1-\xi^2)(1+\eta)/4$					$-N_9/2$
$N_6 =$	$(1-\eta^2)(1-\xi)/4$					$-N_9/2$
$N_7 =$	$(1-\xi^2)(1-\eta)/4$					$-N_9/2$
$N_8 =$	$(1-\eta^2)(1+\xi)/4$					$-N_9/2$
$N_9 =$	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)/4$					

$$u = \sum_{i=1}^q N_i u_i \quad v = \sum_{i=1}^q N_i v_i \quad (34)$$

όπου u και v είναι οι μετατοπίσεις οποιουδήποτε σημείου στο σύστημα αναφοράς του στοιχείου και u_i , v_i , ($i=1, \dots, q$) είναι οι αντίστοιχες μετατοπίσεις στους κόμβους.

3.3 Υπολογισμός μητρώου ακαμψίας ισοπαραμετρικού στοιχείου

Για να επιτευχθεί ο υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας, $\mathbf{k}$, πρέπει να υπολογισθεί πρώτα το μητρώο του συμβιβαστού των παραμορφώσεων $\mathbf{B}$. Οι παραμορφώσεις λαμβάνονται συναρτήσεις των παραγώγων των μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα

αναφοράς (για παράδειγμα, $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$). Επειδή όμως οι μετατοπίσεις ορίζονται στο φυσικό σύστημα αναφοράς, (σχέση (34)), πρέπει να αποκτήσουμε τη σχέση μεταξύ των παραγώγων ως προς x και y με τις παραγώγους ως προς ξ και η . Η διαδικασία για τον υπολογισμό του $\mathbf{k}$ είναι παρόμοια στις μία, δύο ή τρεις διαστάσεις. Συνεπώς χρησιμοποιούμε στη συνέχεια τις τρεις διαστάσεις ώστε να δοθεί η πιο γενική διατύπωση της διαδικασίας αυτής.

Οι σχέσεις (33) έχουν την γενική μορφή $x = x(\xi, \eta, \theta)$ όπου το διάνυσμα $\mathbf{x}^T = [x \ y \ z]$ και επομένως στο τοπικό σύστημα αναφοράς οι παράγωγοι $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ κλπ υπολογίζονται κάνοντας χρήση του κανόνα αλληλουχίας:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (35)$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για τις παραγώγους ως προς y και z . Βλέπουμε ότι για να υπολογισθούν οι ζητούμενες παράγωγοι πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των $\partial \xi / \partial x$, $\partial \eta / \partial x$, $\partial \theta / \partial x$ κλπ οι οποίες υπολογίζονται από τις αντίστοιχες σχέσεις $\xi = \xi(x, y, z)$ όπου $\xi^T = (\xi \ \eta \ \theta)$. Επειδή σε πολλές περιπτώσεις οι παραστάσεις αυτές δεν μπορούν να εκφρασθούν αναλυτικά, είναι προτιμότερο να διατυπωθεί το πρόβλημα στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (36')$$

όπου $\mathbf{J}$ είναι το Ιακωβιανό μητρώο, το οποίο συνδέει τις παραγώγους στο φυσικό σύστημα αναφοράς με τις παραγώγους στο τοπικό σύστημα αναφοράς. Το Ιακωβιανό μητρώο υπολογίζεται εύκολα από τις σχέσεις (33). Επιλύοντας ως προς $\partial/\partial \mathbf{x}$ έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (37)$$

Η παράγωγος $\partial/\partial \mathbf{x}$ ορίζεται εφόσον υπάρχει το αντίστροφο του $\mathbf{J}$ (εφόσον δηλαδή υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συντεταγμένων του στοι-

χείου στο φυσικό και στο τοπικό σύστημα αναφοράς). Κάνοντας χρήση των σχέσεων (34) και (37) βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial u/\partial z$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial v/\partial z$, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z$. Ακόλουθα συγκροτείται το μητρώο του συμβιβαστού των παραμορφώσεων, $\mathbf{B}$, όπου:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (38)$$

και $\hat{\mathbf{u}}$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους, δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_I \ v_I \ w_I \ \dots \ u_q \ v_q \ w_q]$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου είναι τότε:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (39)$$

Τα στοιχεία του μητρώου $\mathbf{B}$ είναι συναρτήσεις των μεταβλητών ξ , η , θ στο φυσικό σύστημα αναφοράς. Συνεπώς η ολοκλήρωση στον όγκο γίνεται στο φυσικό σύστημα αναφοράς και το διαφορικό dV πρέπει επίσης να γραφεί στο φυσικό σύστημα αναφοράς. Στη γενική περίπτωση ισχύει:

$$dV = \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\theta \quad (40)$$

όπου $\det \mathbf{J}$ είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου. Για να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{k}$ πρέπει να γίνει η ολοκλήρωση ως προς το όγκο V του στοιχείου. Στα ισοπαραμετρικά στοιχεία χρησιμοποιούνται κυρίως συναρτήσεις παρεμβολής υψηλής τάξης και συνεπώς το $\mathbf{k}$ αποκτάται ευκολότερα με *αριθμητική ολοκλήρωση*. Παρομοίως γίνεται χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του μητρώου μάζας και των διανυσμάτων των φορτίων που ασκούνται σε κάθε στοιχείο. Η σχέση (39) επομένως γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{F} d\xi d\eta d\theta \quad (41)$$

όπου $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \det \mathbf{J}$ και η ολοκλήρωση γίνεται στο φυσικό σύστημα αναφοράς του στοιχείου. Το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{k}$ υπολογίζεται με αριθμητική ολοκλήρωση και γι' αυτό διατυπώνεται στην παρακάτω μορφή:

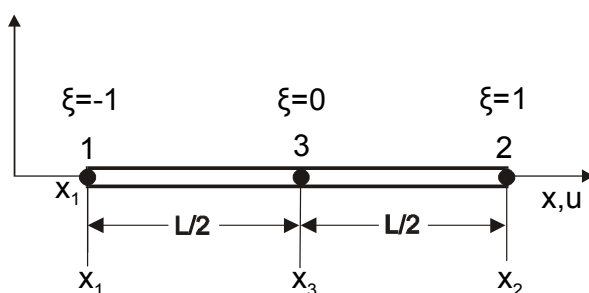
$$\mathbf{k} = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} \mathbf{F}_{ijk} \quad (42)$$

όπου $\mathbf{F}_{ijk}$ είναι η τιμή του μητρώου $\mathbf{F}$ που υπολογίζεται στο σημείο με συντεταγμένες ξ_i , η_j , θ_k . Οι σταθερές α_{ijk} είναι *σταθμικοί παράγοντες* που εξαρτώνται από τις

συντεταγμένες των ξ_i , η_j , και θ_k . Οι τιμές και ο απαιτούμενος αριθμός των μεταβλητών και των σταθμικών παραγόντων επιλέγονται με κατάλληλο τρόπο έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η ακρίβεια της ολοκλήρωσης. Στα ισοπαραμετρικά στοιχεία χρησιμοποιείται ευρέως για την αριθμητική ολοκλήρωση η μέθοδος κατά Gauss η οποία και περιγράφεται παρακάτω στο εδάφιο 5.

Παράδειγμα 2

Να υπολογισθούν α) το μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων $\mathbf{H}$, β) το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων $\mathbf{B}$ και γ) το Ιακωβιανό $\mathbf{J}$ του στοιχείου-ράβδου του Σχήματος 11.



Σχήμα 11 Στοιχείο-ράβδος (3 κόμβοι)

Λύση

Οι συναρτήσεις παρεμβολής του στοιχείου αυτού περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2}(1-\xi) & \frac{\xi}{2}(1+\xi) & (1-\xi^2) \end{bmatrix} \quad (43)$$

Το μητρώο του συμβιβαστού των παραμορφώσεων, $\mathbf{B}$, λαμβάνεται από την παραγωγή του $\mathbf{H}$ ως προς ξ και στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα με το αντίστροφο του Ιακωβιανού μητρώου. Δηλαδή,

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) & \left(\frac{1}{2} + \xi\right) & -2\xi \end{bmatrix} \quad (44)$$

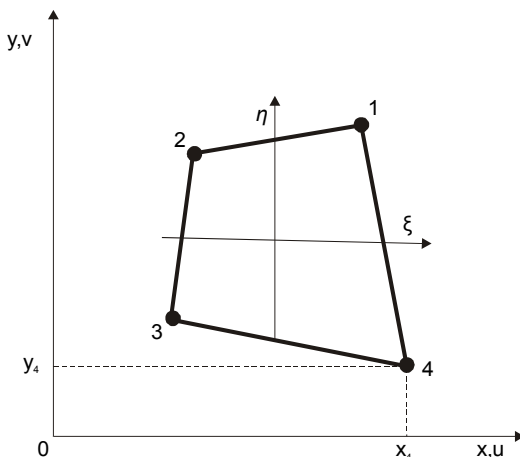
Το Ιακωβιανό $\mathbf{J}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)(x_1 + L) + (1-\xi^2)\left(x_1 + \frac{L}{2}\right) \quad (45)$$

$$\text{άρα } x = x_1 + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \xi \quad (46)$$

Επειδή ο κόμβος 3 διχοτομεί τη ράβδο, το x παρεμβάλλεται γραμμικά μεταξύ των άκρων. Η σχέση (46) δίνει ότι $J=[L/2]$ και $J^1=[2/L]$, $\det J = L/2$. Τα μητρώα K , M , R_b , R_s και R_i υπολογίζονται παρομοίως από τις σχέσεις (43-46).

Παράδειγμα 3



Σχήμα 12 Τετράκομβο διδιάστατο στοιχείο

Να προσδιορισθούν οι σχέσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας του ισοπαραμετρικού τετράκομβου στοιχείου του Σχήματος 12 για επίπεδες εντατικές ή παραμορφωσιακές καταστάσεις.

Λύση

Οι συναρτήσεις παρεμβολής N_1-N_4 δίνονται στον Πίνακα 2. Συνεπώς, οι συντεταγμένες x και y στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς είναι:

$$x = 1/4(1+\xi)(1+\eta)x_1 + 1/4(1-\xi)(1+\eta)x_2 + 1/4(1-\xi)(1-\eta)x_3 + 1/4(1+\xi)(1-\eta)x_4 \quad (47\alpha)$$

$$y = 1/4(1+\xi)(1+\eta)y_1 + 1/4(1-\xi)(1+\eta)y_2 + 1/4(1-\xi)(1-\eta)y_3 + 1/4(1+\xi)(1-\eta)y_4 \quad (47\beta)$$

Αντίστοιχα, οι μετατοπίσεις είναι:

$$u = 1/4(1+\xi)(1+\eta)u_1 + 1/4(1-\xi)(1+\eta)u_2 +$$

$$+1/4(1-\xi)(1-\eta)u_3 + 1/4(1+\xi)(1-\eta)u_4 \quad (48\alpha)$$

$$v = 1/4(1+\xi)(1+\eta)v_1 + 1/4(1-\xi)(1+\eta)v_2 + \\ + 1/4(1-\xi)(1-\eta)v_3 + 1/4(1+\xi)(1-\eta)v_4 \quad (48\beta)$$

Οι παραμορφώσεις του στοιχείου είναι $\varepsilon^T = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]$ όπου $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$, $\varepsilon_y = \partial v / \partial y$ και $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$. Για το στοιχείο του Σχήματος 12, η (36) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (49\alpha)$$

$$\text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (49\beta)$$

Από τις σχέσεις (49α) και (49β) προκύπτουν οι παρακάτω:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)x_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_4 \quad (50\alpha)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)x_1 - \frac{1}{4}(1-\xi)x_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)x_3 - \frac{1}{4}(1-\xi)x_4 \quad (50\beta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)y_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_4 \quad (50\gamma)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)y_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)y_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)y_3 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_4 \quad (50\delta)$$

όπου $-1 \leq \xi, \eta \leq +1$. Στο σημείο (ξ_i, η_j) του στοιχείου το Ιακωβιανό μητρώο και η ορίζουσά του έχουν τιμές J_{ij} και $\det \mathbf{J}_{ij}$. Τότε, στο σημείο $\xi=\xi_i, \eta=\eta_j$,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Για να υπολογισθούν οι παραμορφώσεις του στοιχείου στο φυσικό σύστημα αναφοράς απαιτούνται οι παρακάτω σχέσεις, που προκύπτουν αντιστοίχως από τις σχέσεις (48α) και (48β):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)u_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)u_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)u_4 \quad (52\alpha)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)u_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)u_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)u_3 - \frac{1}{4}(1+\xi)u_4 \quad (52\beta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)v_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)v_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)v_4 \quad (52\gamma)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)v_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)v_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)v_3 - \frac{1}{4}(1+\xi)v_4 \quad (52\delta)$$

Επομένως, στο σημείο (ξ_i, η_j) ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 1+\eta_j & 0 & -(1+\eta_j) & 0 & -(1-\eta_j) & 0 & 1-\eta_j & 0 \\ 1+\xi_i & 0 & 1-\xi_i & 0 & -(1-\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \quad (53\alpha)$$

και

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1+\eta_j & 0 & -(1+\eta_j) & 0 & -(1-\eta_j) & 0 & 1-\eta_j \\ 0 & 1+\xi_i & 0 & 1-\xi_i & 0 & -(1-\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \quad (53\beta)$$

όπου $\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_q \ v_q \ w_q]$. Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων υπολογίζεται τώρα από τις σχέσεις (53α) και (53β) και έχουμε:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{u}} \quad (54)$$

όπου οι δείκτες i και j ορίζουν ότι το μητρώο $\mathbf{B}$ υπολογίζονται στα σημεία (ξ_i, η_j) . Για παράδειγμα, εάν οι εξισώσεις παρεμβολής των συντεταγμένων ενός σημείου του στοιχείου (33α), (33β) είναι $x=\xi$, $y=\eta$, όπως συμβαίνει στην περίπτωση ενός τετράγωνου στοιχείου με πλευρά μήκους 2 μονάδων, τότε το Ιακωβιανό είναι το μοναδιαίο μητρώο και συνεπώς:

$$\mathbf{B}_{ij} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\eta_j & 0 & -(1+\eta_j) & 0 & -(1-\eta_j) & 0 & 1-\eta_j & 0 \\ 0 & 1+\xi_i & 0 & 1-\xi_i & 0 & -(1+\xi_i) & 0 & -(1+\xi_i) \\ 1+\xi_i & 1+\eta_j & 1-\xi_i & -(1+\eta_j) & -(1-\xi_i) & -(1-\eta_j) & -(1+\xi_i) & 1-\eta_j \end{bmatrix}$$

Το μητρώο $\mathbf{F}_{ij}$ της σχέσης (41) ισούται με:

$$\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{B}_{ij}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij} \quad (56)$$

$$\text{όπου } \mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ή } \mathbf{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

για επίπεδες εντατικές ή παραμορφωσιακές καταστάσεις αντίστοιχα. Ολοκληρώνουμε στο πεδίο (ξ, η) και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{F}$ δεν μεταβάλλεται κατά το πάχος t του στοιχείου. Για δεδομένες τιμές των συντελεστών α_{ij} το μητρώο ακαμψίας είναι:

$$\mathbf{k} = \sum_{i,j} t_{ij} \alpha_{ij} \mathbf{F}_{ij} \quad (1)$$

όπου t_{ij} είναι το πάχος στο σημείο (ξ_i, η_j) του στοιχείου.

4. Μητρώα στοιχείων στο γενικό σύστημα αναφοράς

Στο εδάφιο 3 υπολογίσθηκαν τα διάφορα μητρώα ως προς το τ.σ.α. κάνοντας χρήση των τοπικών βαθμών ελευθερίας του ισοπαραμετρικού στοιχείου (π.χ. παραδείγματα 2 και 3). Όπως είδαμε και στο εδάφιο 5 του Κεφαλαίου 3 πρέπει στην συνέχεια να γίνει ο μετασχηματισμός στο γ.σ.α. και τους γενικούς βαθμούς ελευθερίας. Για τα ισοπαραμετρικά στοιχεία μπορεί να γίνουν απευθείας οι υπολογισμοί των μητρώων στο γενικό σύστημα αναφοράς της κατασκευής χωρίς να προηγηθεί ο μετασχηματισμός στο τ.σ.α. Αυτό είναι εφικτό εάν ο αριθμός των μετα-

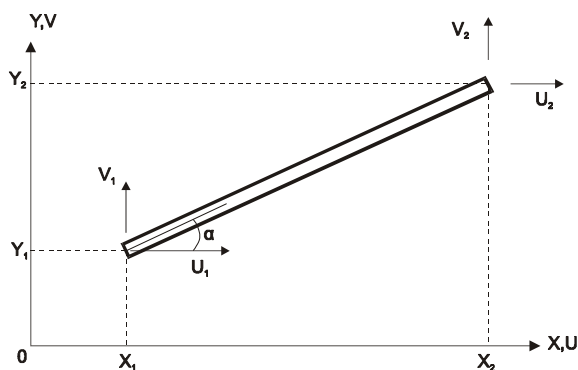
βλητών στο φυσικό σύστημα αναφοράς είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών στο γενικό σύστημα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση διδιάστατων στοιχείων που εκτείνονται σε ένα επίπεδο το οποίο συμπίπτει με ένα από τα επίπεδα του γ.σ.α (μία περίπτωση ανάλογη του του στοιχείου ράβδου που εξετάστηκε στο εδάφιο 3.1) ή για τρισδιάστατα εξαεδρικά στοιχεία. Τότε το Ιακωβιανό είναι ένα τετράγωνο μητρώο που ορίζεται όπως στην σχέση (36β), τα δε μητρώα των στοιχείων ορίζονται απευθείας στις γενικές συνιστώσες των μετατοπίσεων.

Όταν όμως η τάξη του γενικού συστήματος αναφοράς (για παράδειγμα τρεις διαστάσεις) είναι υψηλότερη αυτής του φυσικού συστήματος αναφοράς (π.χ. δύο διαστάσεις), εξυπηρετεί να γίνεται πρώτα ο υπολογισμός των μητρώων στο τοπικό σύστημα και να επακολουθεί ο μετασχηματισμός τους στο γενικό σύστημα. Παραδείγματα αυτής της περίπτωσης είναι μία ράβδος-δοκός ή ένα διδιάστατο στοιχείο επίπεδης εντατικής κατάστασης που καταλαμβάνουν αντιστοίχως τυχαίες θέσεις στον τρισδιάστατο χώρο. Εναλλακτικά, μπορούμε να συμπεριλάβουμε το μετασχηματισμό απευθείας στη διατύπωση της λύσης. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας στις συναρτήσεις παρεμβολής τον κατάλληλο μετασχηματισμό ο οποίος εκφράζει τις τοπικές κομβικές μετατοπίσεις συναρτήσει των αντιστοίχων συνιστωσών στο γ.σ.α. Αυτή η εναλλακτική λύση περιγράφεται επίσης στο παρακάτω Παράδειγμα 4.

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου-ράβδου του Σχήματος 13 στο γενικό σύστημα αναφοράς.

Λύση



Σχήμα 13 Στοιχείο-ράβδος σε γενικό σύστημα αναφοράς

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου-ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$k = \int_V B^T E B dV \quad (57)$$

όπου $\mathbf{B}$ είναι το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων και $\mathbf{E}$ είναι το μητρώο ελαστικότητας. Για το στοιχείο αυτό έχουμε ότι,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi)U_1 + \frac{1}{2}(\xi+1)U_2 \\ \frac{1}{2}(1-\xi)V_1 + \frac{1}{2}(\xi+1)V_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Η εξίσωση του γεωμετρικού συμβιβαστού ($\varepsilon = \partial u / \partial x$) στο φυσικό σύστημα αναφοράς γράφεται $\varepsilon = (2/L) \partial u / \partial \xi$ και επομένως το μητρώο $\mathbf{B}$ που αντιστοιχεί στο διάλυμα των μετατοπίσεων, $\mathbf{U}^T = [U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2]$ είναι:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε επίσης $dV = AL/2 \ d\xi$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (57) καταλήγουμε στη σχέση:

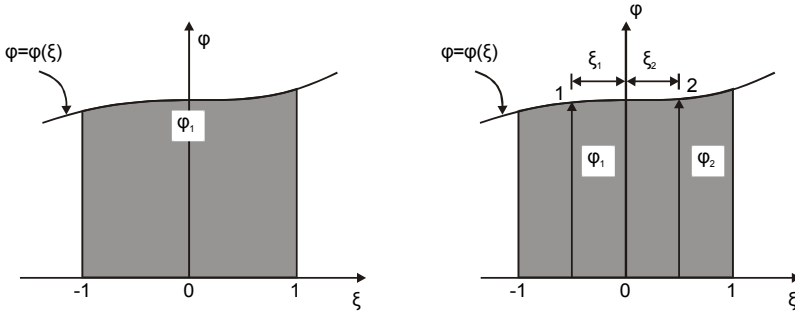
$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (59)$$

5. Αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss

Επειδή το Ιακωβιανό μητρώο είναι συνάρτηση του ξ , το μητρώο $\mathbf{B}$ περιλαμβάνει όρους ξ στον αριθμητή και στον παρονομαστή και έτσι κατά κανόνα δε μπορεί να γίνει υπολογισμός του ολοκληρώματος σε κλειστή μορφή. Για το λόγο αυτό απαιτείται να γίνει αριθμητική ολοκλήρωση. Για στοιχείο όπως το στοιχείο-ράβδος και τα στοιχεία επίπεδης εντατικής κατάστασης, η πλέον κατάλληλη μέθοδος ολοκλήρωσης είναι η ολοκλήρωση Gauss.

Μία ολοκλήρωση μεταξύ τυχαίων ορίων μπορεί να μετατραπεί σε ολοκλήρωση μεταξύ των τιμών -1 και +1. Για $f=f(x)$ και με τον μετασχηματισμό

$$x = (1/2)(1-\xi)x_1 + (1/2)(1+\xi)x_2$$



(α) Ένα σημείο ολοκλήρωσης

(β) Δύο σημεία ολοκλήρωσης

Σχήμα 14 Ολοκλήρωση κατά Gauss για τον υπολογισμό του εμβαδού που περικλείεται από τη καμπύλη $\varphi = \varphi(\xi)$

το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f dx$$

$$\text{γίνεται } I = \int_{-1}^{+1} \phi d\xi \quad (60)$$

Η συνάρτηση $f=f(x)$ γίνεται $\varphi = \varphi(\xi)$, όπου η φ περιλαμβάνει εδώ και το Ιακωβιανό του μετασχηματισμού, $J=dx/d\xi = (1/2)(x_2-x_1)$. Η αποκτηθείσα μορφή επιτρέπει την ευχερέστερη διατύπωση τύπων ολοκλήρωσης. Μία πρώτη προσέγγιση στο ολοκλήρωμα I αποκτάται πολλαπλασιάζοντας την τιμή της φ στο σημείο $x=0$ με το μήκος του διαστήματος ($|-1|+|+1|=2$) και συνεπώς $I \approx 2\varphi_1$ (Σχήμα 14α).

Η γενίκευση της παραπάνω σχέσης οδηγεί στον παρακάτω τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης:

$$I = \int_{-1}^{+1} \phi d\xi \approx \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n \quad (61)$$

Στην περίπτωση του Σχήματος 14α έχουμε $I \approx 2\varphi_1$ και $n=1$, $\alpha_1=2$. Ο Gauss υπολόγισε τις συντεταγμένες των σημείων ολοκλήρωσης και τους σταθμικούς παράγοντες α έτσι ώστε να αποκτηθεί η μέγιστη δυνατή ακρίβεια για κάθε αριθμό σημείων ολοκλήρωσης. Τα σημεία ολοκλήρωσης είναι συμμετρικά διατεταγμένα περί την αρχή του άξονα ξ και επειδή οι συντεταγμένες τους είναι ρίζες πολυωνύμων Legendre συχνά καλούνται σημεία Gauss-Legendre.

Για ολοκλήρωση σε δύο διαστάσεις, ο γενικός τύπος παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\approx \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i \alpha_i \varphi_i(\xi_i, \eta) \right] d\eta \\
&\approx \sum_j \alpha_j \left[\sum_i a_i \varphi(\xi_i, \eta_j) \right] = \\
&= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \varphi(\xi_i, \eta_j)
\end{aligned} \tag{62}$$

Ο Πίνακας 3 περιλαμβάνει τιμές των ξ_i , α_i για $n = 1, 2, \dots, 6$. Επομένως για ένα ορθογωνικό στοιχείο στο οποίο γίνεται χρήση 4 σημείων για την αριθμητική ολοκλήρωση (2 σημείων στην διεύθυνση ξ και δύο σημείων στην διεύθυνση η), σύμφωνα με τον Πίνακα 3, $\alpha_i \alpha_j = 1$ και ισχύει η σχέση:

$$I \approx \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \varphi(\xi_1, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_1) + \varphi(\xi_2, \eta_2) + \varphi(\xi_1, \eta_2)$$

Πίνακας 3 Συντεταγμένες και σταθμικοί παράγοντες σημείων αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre (-1 έως +1)

n (τάξη ολοκλήρωσης)	ξ_i	α_i
1	0,0	2,0
2	$\pm 0,57735$	$0,00000$
3	$\pm 0,77459$	$0,55555$
4	$\pm 0,86113$	$0,34785$
5	$\pm 0,90617$	$0,23692$
6	$\pm 0,93246$	$0,17132$
	$\pm 0,66120$	$0,36076$
	$\pm 0,23861$	$0,46791$

Παράδειγμα 5

Να γίνει ολοκλήρωση του πολωνύμου $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3$ από -1 έως +1, όπου τα α_i είναι σταθερές, και να συγκριθούν τα αποτελέσματα για $n=1, 2$.

Λύση

Το ακριβές αποτέλεσμα είναι:

$$I = \int_{-1}^{+1} \varphi d\xi = 2a_1 + (2/3)a_3 \quad (64)$$

Το προσεγγιστικό ολοκλήρωμα με ένα σημείο ολοκλήρωσης είναι $I_1 \approx 2a_1$. Με δύο σημεία ολοκλήρωσης έχουμε $\xi_1=p$, $\xi_2=p$ και $p=1/\sqrt{3}$. Άρα,

$$\begin{aligned} I_2 &\approx 1,0(a_1 - a_2 p + a_3 p^2 - a_4 p^3) + 1,0(a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + a_4 p^3) = \\ &= 2a_1 + (2/3)a_3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι *πολυώνυμα τάξης $2n-1$ ολοκληρώνονται ακριβώς με n σημεία ολοκλήρωσης Gauss*. Ο βαθμός ακρίβειας ενός κανόνα ολοκλήρωσης είναι η τάξη του πολυωνύμου με τον υψηλότερο βαθμό που ολοκληρώνεται ακριβώς. Συνεπώς, η ολοκλήρωση Gauss με δύο σημεία (σε κάθε διεύθυνση) έχει βαθμό ακρίβειας 3. Γενικά εάν η συνάρτηση $\varphi = \varphi(\xi)$ δεν είναι πολυωνυμική η ολοκλήρωση είναι ανακριβής, προσεγγίζει όμως το ακριβές αποτέλεσμα όταν αυξάνεται ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 6

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss με δύο σημεία για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^3 (2^\xi - \xi) d\xi$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τη σχέση (60):

$$\int_0^3 (2^\xi - \xi) d\xi = \alpha_1 \phi(\xi_1) + \alpha_2 \phi(\xi_2)$$

όπου α_1, α_2 είναι σταθμικοί παράγοντες και ξ_1, ξ_2 είναι οι συντεταγμένες των σημείων ολοκλήρωσης. Από τον Πίνακα 3,

$$\xi_1 = (3/2)(1-1/\sqrt{3}) \quad \xi_2 = (3/2)(1+1/\sqrt{3})$$

Για δύο σημεία ολοκλήρωσης $\alpha_1 = \alpha_2 = (3/2) \cdot 1$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι:

$$\int_0^3 (2^\xi - \xi) d\xi \approx 5,56053551 \quad (65)$$

6. Η επιλογή ισοπαραμετρικών στοιχείων. Ορισμός ιδιοτήτων τους.

Έχοντας καταστρώσει τις σχέσεις που διέπουν τα μητρώα των ισοπαραμετρικών στοιχείων πρέπει να εξετάσουμε και ορισμένα θέματα που αφορούν την πρακτική τους χρήση. Δύο σημαντικά ερωτήματα που προκύπτουν είναι:

1. Η επιλογή στοιχείου (-ων)
2. Το είδος και η τάξη της απαιτούμενης αριθμητικής ολοκλήρωσης

Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά Gauss για την αριθμητική ολοκλήρωση των μητρώων των στοιχείων αποτελεί στις περισσότερες περιπτώσεις την καλύτερη δυνατή επιλογή για γραμμικά προβλήματα. Εάν όμως το πρόβλημα είναι μη-γραμμικό τότε συνιστώνται οι σχέσεις Newton-Coates, οι οποίες και περιγράφονται εκτενώς στην βιβλιογραφία.

Η τάξη ολοκλήρωσης είναι επίσης ένα θέμα που απασχολεί τον χρήστη των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων. Εάν γίνει ολοκλήρωση χαμηλής τάξης ελαττώνεται μεν το κόστος, πιθανότατα όμως να προκύψουν σφάλματα κατά τους υπολογισμούς των μητρώων του στοιχείου. Κατά κανόνα, η τάξη της ολοκλήρωσης εξαρτάται από το είδος του υπολογιζόμενου μητρώου και το είδος του στοιχείου. Εάν η τάξη είναι επαρκώς υψηλή, τότε όλα τα μητρώα υπολογίζονται με απόλυτη ακρίβεια.

Στην περίπτωση του μητρώου ακαμψίας, εάν η τάξη είναι χαμηλότερη από την απαιτούμενη τότε εμφανίζεται μεγαλύτερος αριθμός μηδενικών ιδιοτιμών από τους βαθμούς ελευθερίας των μετατοπίσεων του (άκαμπτου) σώματος. Χρειάζεται λοιπόν οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σε μηδενικές ιδιοτιμές να περιορίζονται διότι διαφορετικά το μητρώο γίνεται μοναδιαίο. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε το στοιχείο-δοκός με τρεις κόμβους και χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Gauss με ένα σημείο ολοκλήρωσης, η στήλη και η σειρά που αντιστοιχούν στο βαθμό ελευθερίας του ενδιάμεσου κόμβου θα είναι μηδενικά διανύσματα, και θα οδηγήσουν σε μοναδιαίο μητρώο ακαμψίας.

Η τάξη ολοκλήρωσης, η οποία θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από μία ελάχιστη υπολογίζεται με βάση την τάξη της συνάρτησης που ολοκληρώνεται. Στην περίπτωση του μητρώου ακαμψίας πρέπει να υπολογισθεί η σχέση:

$$k = \int_V B^T E B \det J dV = \int_V F dV \quad (66)$$

Το μητρώο F υπολογίζεται σχετικά εύκολα στην περίπτωση του διδιάστατου τετράκομβου στοιχείου. Η τάξη ολοκλήρωσης για το στοιχείο αυτό εξαρτάται από τις τιμές των ξ και η που χρησιμοποιούνται στη σχέση (66). Για ορθογώνιο στοιχείο με πλευρές $2a$, $2b$ έχουμε τις σχέσεις παρεμβολής $x=a\xi$, $y=b\eta$ και συνεπώς το Ιακωβιανό J είναι:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Επειδή τα στοιχεία του $\mathbf{J}$ είναι σταθερά, τα στοιχεία του μητρώου $\mathbf{B}$ είναι συναρτήσεις των ξ και η μόνο. Το Ιακωβιανό μητρώο $\mathbf{J}$ όμως είναι επίσης σταθερά. Συνεπώς το μητρώο $\mathbf{F}$ είναι συνάρτηση των ξ^2 , $\xi\eta$ και η^2 .

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\xi^2, \xi\eta, \eta^2) \quad (67)$$

Εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Gauss με δύο σημεία ολοκλήρωσης στις κατευθύνσεις ξ και η , όλες οι συναρτήσεις τρίτου βαθμού που περιλαμβάνουν τις ξ και η ολοκληρώνονται χωρίς σφάλμα. Δηλαδή, για τάξη ολοκλήρωσης n , η τάξη της πολυωνυμικής συνάρτησης των ξ και η που ολοκληρώνεται ακριβώς είναι $(2n-1)$. Συνεπώς η χρήση δύο σημείων επαρκεί.

Στην περίπτωση μη-παράλληλόγραμμων στοιχείων το Ιακωβιανό δεν έχει σταθερή τιμή και απαιτείται ολοκλήρωση υψηλότερης τάξης. Θεωρητικές αναλύσεις καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η διατύπωση της ΜΠΣ με τη μέθοδο των μετατοπίσεων οδηγεί σε κάτω όριο της ενέργειας παραμόρφωσης του θεωρούμενου συστήματος. Με άλλα λόγια, το αριθμητικό μοντέλο της κατασκευής είναι περισσότερο άκαμπτο από την πραγματική κατασκευή. Εάν όμως η τάξη ολοκλήρωσης είναι χαμηλότερη από αυτήν που απαιτείται για απόλυτη ακρίβεια, τότε τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης μπορούν να προσεγγίσουν καλύτερα τη συμπεριφορά της πραγματικής κατασκευής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εφόσον το σφάλμα που προκύπτει αντισταθμίζει την πλεονάζουσα ακαμψία του μοντέλου της κατασκευής. Η διαδικασία αυτή καλείται *ελάττωση της τάξης ολοκλήρωσης*, μπορεί δε να συνδυασθεί και με *επιλεκτική ολοκλήρωση*, κατά την οποία οι τάξεις ολοκλήρωσης των διαφόρων παραμορφώσεων διαφέρουν μεταξύ τους.

Ο Πίνακας 4 της επόμενης σελίδας περιλαμβάνει πιθανά στοιχεία και αντίστοιχες τάξεις ολοκλήρωσης για τη μέθοδο Gauss όταν επιλύονται προβλήματα επίπεδης εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης.

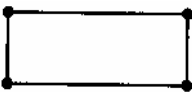
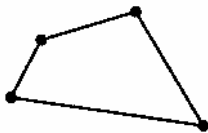
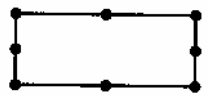
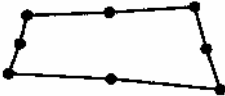
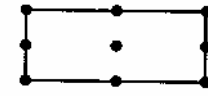
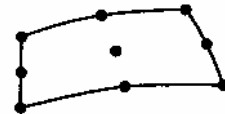
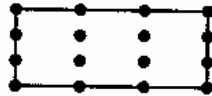
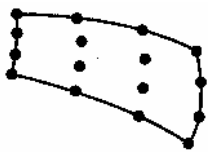
Η *επιλογή του απαραίτητου στοιχείου (-ων)* αποτελεί επίσης ένα σημαντικό θέμα που δεν πρέπει να αγνοηθεί. Δεν είναι δυνατόν να ειπωθεί ότι κάποιο συγκεκριμένο στοιχείο είναι προτιμότερο ενός άλλου, δεδομένης της μεγάλης ποικιλίας προβλημάτων για τα οποία απαιτούνται λύσεις. Εάν όμως περιορισθούμε στα ισοπαραμετρικά στοιχεία μπορούμε να πούμε πως, εκτός του δίκομβου στοιχείου-δοκού τα στοιχεία που συνιστώνται είναι τα υψηλότερης τάξης, ιδιαίτερα δε τα *παραβολικά* (των οποίων το πολυώνυμο παρεμβολής $N(\xi)$ είναι δευτέρου βαθμού). Ο λόγος είναι πως ο χρόνος τρεξίματος στην περίπτωση αυτή αντισταθμίζεται από την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Όταν απαιτούνται στοιχεία-ελάσματα συνιστώνται τα στοιχεία Lagrange 9 και 16 κόμβων.

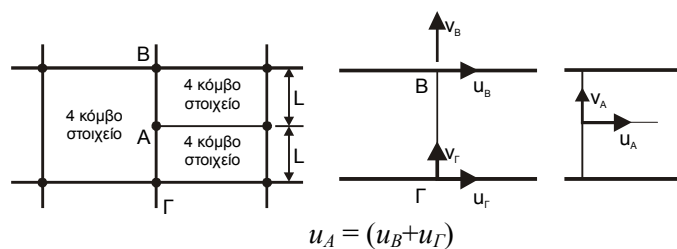
Εξίσου σημαντικό θέμα είναι ο τρόπος διακριτοποίησης της κατασκευής. Γενικοί κανόνες δεν υπάρχουν και η διακριτοποίηση εξαρτάται άμεσα από το συγκεκριμένο πρόβλημα. Μπορούμε να πούμε πως το μέγεθος των ασυνεχειών των κα-

τανομών των τάσεων μεταξύ των στοιχείων αποτελεί έναν γνώμονα αξιολόγησης της διακριτοποίησης. Σε περιοχές με μεταβαλλόμενο πλέγμα χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές, για παράδειγμα:

- Στοιχεία με διαφορετικούς αριθμούς κόμβων
- Συνθήκες περιορισμών (Σχήμα 20, Κεφάλαιο 7)
- Παραμορφωμένα στοιχεία
- Αυξημένος αριθμός στοιχείων

Πίνακας 4 Διδιάστατα ορθογώνια στοιχεία και προτεινόμενες τάξεις αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss

Στοιχείο	Κόμβοι	Τάξη ολοκλήρωσης
	4	2x2
	4 (παραμ.)	2x2
	8	3x3
	8 (παραμ.)	3x3
	9	3x3
	9 (παραμ.)	3x3
	16	4x4
	16 (παραμ.)	4x4



Σχήμα 15 Μετάβαση από ένα σε δύο τετράκομβα ορθογώνια στοιχεία

Βιβλιογραφία

1. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3rd edition, John Wiley & Sons, New York, 1988.
2. Bathe K.J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982.