

Πεπερασμένα στοιχεία για τη μελέτη λεπτότοιχων κατασκευών

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρηθούν μόνο διδιάστατα στοιχεία επίπεδης εντατικής κατάστασης, διότι αυτά είναι τα πλέον ενδεδειγμένα για την ανάλυση λεπτότοιχων κατασκευών (απλά και ενισχυμένα ελάσματα) και κατ' επέκταση για τη μελέτη της γάστρας του πλοίου. Τρισδιάστατα στοιχεία απαιτούνται μόνο για την τοπική ή την λεπτομερή μελέτη εντατικών πεδίων. Στοιχεία κελυφών δεν εξετάζονται διότι σπανίως χρησιμοποιούνται καθώς τα στοιχεία επίπεδης εντατικής κατάστασης επαρκούν για την ανάλυση ελασμάτων και κελυφών με μικρή καμπυλότητα. Υπάρχουν ειδικά στοιχεία επίπεδης εντατικής κατάστασης για την ανάλυση αξονο-συμμετρικών και σφαιρικών κελυφών, επίσης δε υπάρχουν γενικά στοιχεία κελυφών τα οποία μπορούν να λάβουν υπόψη επίπεδη εντατική κατάσταση και κάμψη ελασμάτων. Όμως τα στοιχεία αυτά απαιτούνται μόνο όταν τα ελάσματα της γάστρας έχουν μεγάλη καμπυλότητα ή ασυνέχειες της γεωμετρίας, της φόρτισης, ή των οριακών συνθηκών έτσι ώστε η απλή θεωρία κελυφών να μην ισχύει. Οι καταστάσεις αυτές δεν προκύπτουν συχνά, και σε κάθε περίπτωση τα μητρώα ακαμψιών των στοιχείων και τα άλλα χαρακτηριστικά στοιχείων γενικών κελυφών δίνονται στην βιβλιογραφία.

2. Θεωρία Kirchhoff λεπτών ορθογώνιων ελασμάτων

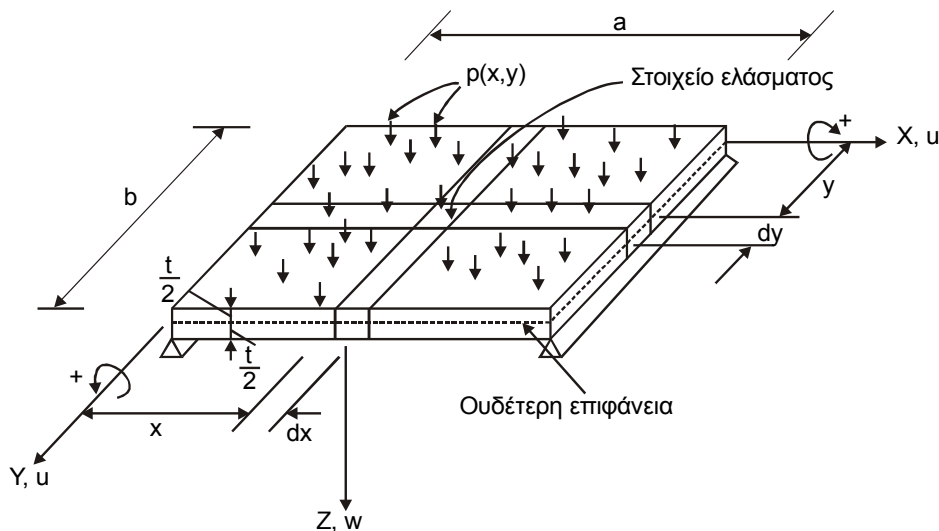
Η παραμόρφωση ενός ελάσματος περιγράφεται επαρκώς με αναφορά στη γεωμετρία του μέσου επιπέδου (*ουδέτερης επιφάνειας*) στην οποία δεν αναπτύσσονται τάσεις όταν ασκείται καθαρά καμπτική φόρτιση. Η γραμμική θεωρία απόκρισης λεπτών ορθογώνιων ελασμάτων¹ που αναπτύχθηκε από τους Love και Kirchhoff βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

¹ καλείται και *θεωρία μικρών μετατοπίσεων*, διότι έχει εφαρμογή για μετατοπίσεις μικρότερες του μισού του πάχους του ελάσματος (ή μικρότερες του $b/50$ όπου b = μήκος κοντύτερης πλευράς)

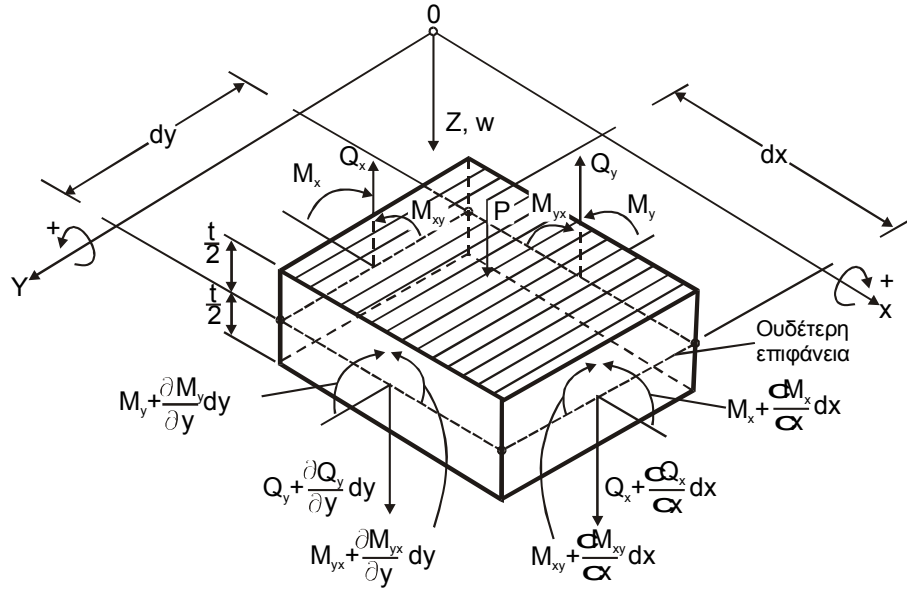
1. Το υλικό είναι ελαστικό, ομοιογενές και ισотροπικό
2. Το έλασμα έχει μηδενικές αρχικές μετατοπίσεις
3. Το πάχος είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις (ως άνω όριο εφαρμογής λαμβάνεται η τιμή $b/50$, όπου b είναι το μήκος της μικρότερης πλευράς)
4. Οι κλίσεις της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι κατά πολύ μικρότερες της μονάδας
5. Οι παραμορφώσεις είναι τέτοιες, ώστε ευθείες που είναι αρχικά κάθετες στο ουδέτερο επίπεδο, παραμένουν ευθείες και κάθετες σε αυτό (αμελούνται δηλαδή μετατοπίσεις λόγω διάτμησης)
6. Η μετατόπιση του ελάσματος αφορά μετατοπίσεις σημείων στο μέσο επίπεδο κάθετα στο αρχικό επίπεδο
7. Οι τάσεις κάθετα στην ουδέτερη επιφάνεια είναι αμελητέες

Για ορθογώνια ελάσματα, το καρτεσιανό, ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων είναι το ενδεδειγμένο. Οι μετατοπίσεις u , v , w και οι εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις έχουν θετικό πρόσημο κατά την κατεύθυνση των αξόνων του συστήματος αναφοράς Ox , Oy και Oz . Οι καμπτικές ροπές με θετικό πρόσημο προκαλούν εφελκυσμό των κάτω εξωτερικών ινών, όταν η φόρτιση ασκείται στην άνω επιφάνεια.

Θεωρούμε ένα στοιχείο του ελάσματος, όπως δείχνεται στο Σχήμα 2. Στο σχήμα δείχνονται οι ροπές και δυνάμεις που έχουν θετικό πρόσημο.



Σχήμα 1 Ορθογώνιο έλασμα υπό καμπτική φόρτιση



Σχήμα 2 Εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις σε στοιχείο της ουδέτερης επιφάνειας ελάσματος

Για ισορροπία του στοιχείου υπό την επίδραση κάθετης καμπτικής φόρτισης, από τις έξι θεμελιώδεις εξισώσεις ισορροπίας αρκούν οι παρακάτω τρεις:

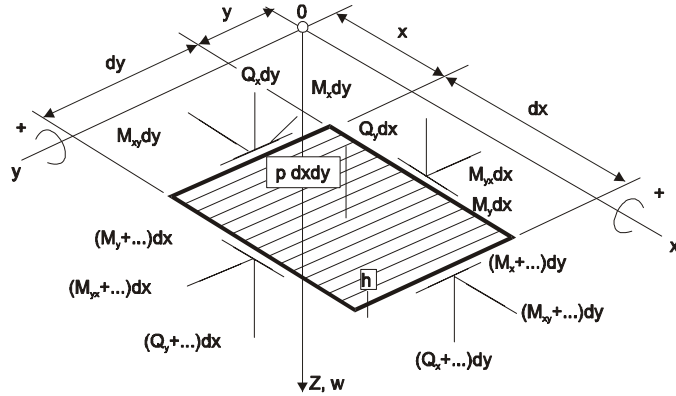
$$\sum F_z = 0 \quad \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad (1\alpha-\gamma)$$

Η πρώτη από αυτές εξασφαλίζει ισορροπία κάθετα στην επιφάνεια του ελάσματος ενώ οι άλλες δύο περί τους άξονες αναφοράς Ox , Oy αντίστοιχα. Από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + p dx dy = 0 \quad (2)$$

όπου Q_x , Q_y είναι οι εφαπτομενικές δυνάμεις κατά μήκος των πλευρών του στοιχείου του ελάσματος (Σχήμα 2). Διαιρώντας με το εμβαδόν του στοιχείου του ελάσματος, $dx dy$, αποκτάται η παρακάτω σχέση:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3)$$



Σχήμα 3 Ροπές και τέμνουσες δυνάμεις σε στοιχείο ελάσματος

Η εφαρμογή της σχέσης (1β) αποδίδει την παρακάτω εξίσωση:

$$\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dy + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + Q_y dx dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0 \quad (4)$$

Σημειώνουμε ότι οι ροπές του φορτίου $Q_x dx$ και της μεταβολής του φορτίου Q_x , Q_y θεωρούνται αμελητέες ποσότητες ανώτερου βαθμού. Απλοποιώντας, έχουμε:

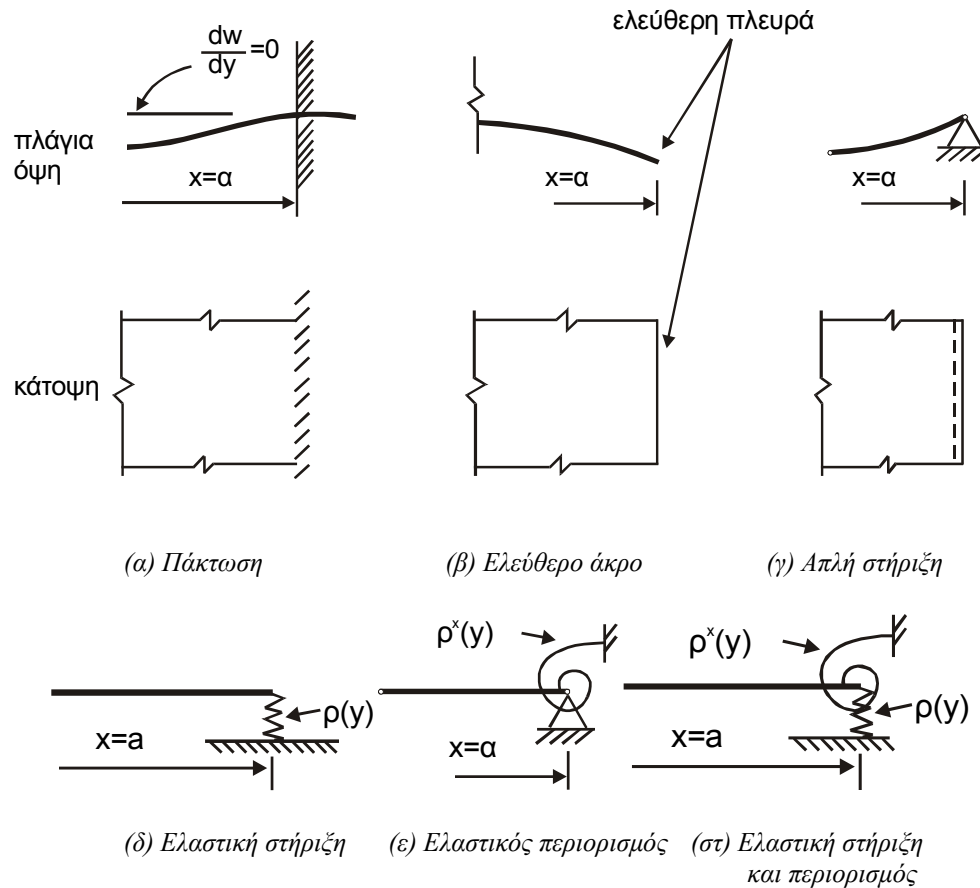
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (5)$$

Ανάλογα για τις ροπές ως προς τον άξονα Oy θα έχουμε:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (6)$$

Από την αρχή της συμπληρωματικής διατμητικής τάσης έχουμε $M_{yx} = -M_{xy}$. Άρα η (6) γίνεται:

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (7)$$



Σχήμα 4 Συνοριακές συνθήκες ελασμάτων

και αντικαθιστώντας τις (5) και (7) στην (3) έχουμε:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (8)$$

Η (8) είναι η εξίσωση ισορροπίας ενός λεπτού ορθογώνιου ελάσματος που φέρει φορτίο κάθετα στη επιφάνειά του. Η εξίσωση αυτή ισχύει στη γραμμική ελαστική περιοχή. Στο Σχήμα 4 δείχνονται διάφοροι τρόποι στήριξης ελασμάτων. Η επίλυση της (8) θα πρέπει να γίνει τότε σε συνδυασμό με κάποιες από τις οριακές συνθήκες που δείχνονται στο Σχήμα 4. Θα έχουμε τότε τιμές για τις μεταβλητές σε όλα τα σημεία που περικλείονται από και που συμπίπτουν με το σύνορο του ελάσματος.

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος, αντιθέτως, θα δώσει λύσεις σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων, μεταξύ των οποίων η συμπεριφορά θα εξαρτηθεί από τις συναρτήσεις που επιλέγουμε για τον τρόπο μεταβολής τους. Στο παρακάτω εδάφιο θα δούμε την εφαρμογή *πολυωνυμικών συναρτήσεων* ενώ στη θεωρία ισοπαραμετρικών στοιχείων θα δούμε την εφαρμογή των *συναρτήσεων μορφής* (Κεφάλαιο 5).

3. Διατύπωση ιδιοτήτων πεπερασμένων στοιχείων

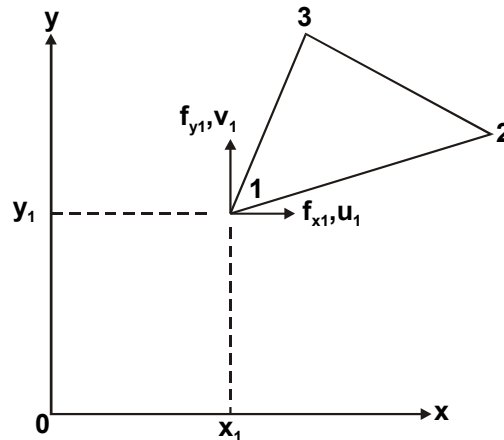
Έχοντας δώσει μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία κάμψης των ορθογωνίων ελασμάτων, θα στραφούμε στη διατύπωση του αντίστοιχου αριθμητικού προβλήματος. Η συμπεριφορά ενός πεπερασμένου στοιχείου καθορίζεται πλήρως από το μητρώο ακαμψίας του. Έτσι, το ζητούμενο είναι να αποκτηθούν μητρώα ακαμψίας για (ορισμένα απλά) στοιχεία που θα αποβούν χρήσιμα κατά τη μελέτη των λεπτότοιχων (ναυπηγικών) κατασκευών. Τα στοιχεία που θα θεωρηθούν βασίζονται σε προσεγγιστικά πεδία των μετατοπίσεων, παρ' όλο που έχουν επίσης αναπτυχθεί και στοιχεία που βασίζονται σε προσεγγίσεις στα πεδία των τάσεων, τα οποία είναι εξίσου ικανοποιητικά, όχι όμως τόσο διαδεδομένα. Η διαδικασία διατύπωσης του μητρώου ακαμψίας περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Επιλογή συστήματος αναφοράς και αρίθμηση κόμβων στοιχείου
2. Επιλογή συνάρτησης συμβιβαστού των μετατοπίσεων (πεδίου-κόμβων)
3. Προσδιορισμός των μετατοπίσεων πεδίου συναρτήσει των μετατοπίσεων στους κόμβους
4. Σχέσεις παραμορφώσεων πεδίου με μετατοπίσεις στους κόμβους μέσω μετατοπίσεων πεδίου
5. Σχέση τάσεων πεδίου με παραμορφώσεις πεδίου και μετατοπίσεις στους κόμβους
6. Αντικατάσταση τάσεων πεδίου με στατικά ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους
7. Σχέση δυνάμεων στους κόμβους με μετατοπίσεις στους κόμβους. Σύνταξη μητρώου ακαμψίας στοιχείου
8. Διατύπωση μητρώου συμβιβαστού των μετατοπίσεων

Τα στοιχεία που περιγράφονται σε αυτό το εδάφιο δεν αποτελούν το τελευταίο στάδιο εξέλιξης της έρευνας στο συγκεκριμένο θέμα. Αντιθέτως, είναι σχετικά απλές εφαρμογές της θεωρίας πεπερασμένων στοιχείων από τις οποίες όμως διαφαίνονται με σαφήνεια τα βασικά στάδια ανάπτυξης του μητρώου ακαμψίας. Επιπρόσθετα, ορισμένα από αυτά συνεχίζουν να χρησιμοποιούνται

σε προγράμματα ΠΣ για τη μελέτη λεπτότοιχων κατασκευών.² Πιο ολοκληρωμένες διατυπώσεις, που λαμβάνουν υπόψη προβλήματα συνέχειας κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων, περιγράφονται στο τελευταίο εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου και στη θεωρία των ισοπαραμετρικών στοιχείων.³

3.1 Τριγωνικό στοιχείο σταθερών παραμορφώσεων⁴ (τάσεων)



Σχήμα 5 Το τριγωνικό στοιχείο CST

Ως πρώτο παράδειγμα θα θεωρηθεί το επίπεδο τριγωνικό ισοτροπικό στοιχείο σταθερού πάχους. Το στοιχείο αυτό είναι σημαντικό διότι λόγω του σχήματός του είναι πολύ εύχρηστο καθώς οι περισσότερες διδιάστατες κατασκευές μπορούν να αναπαρασταθούν με αθροίσματα τριγώνων. Επίσης, οι καμπύλες επιφάνειες στον τρισδιάστατο χώρο μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από τριγωνικά στοιχεία εφόσον η καμπυλότητα δεν παρουσιάζει ασυνέχειες και το ύψος τους είναι μικρό (δηλαδή ο λόγος του πραγματικού εμβαδού προς το εμβαδόν της προβολής του είναι περίπου ίσος με τη μονάδα). Παρακάτω περιγράφεται η διατύπωση του μητρώου ακαμψίας του τριγωνικού στοιχείου, ακολουθώντας τη διαδικασία που αναφέρθηκε στο προηγούμενο εδάφιο.

Το σύστημα αναφοράς και η αρίθμηση των κόμβων δίνονται στο Σχήμα 5. Οι συντεταγμένες των κόμβων είναι (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Επειδή θεωρού-

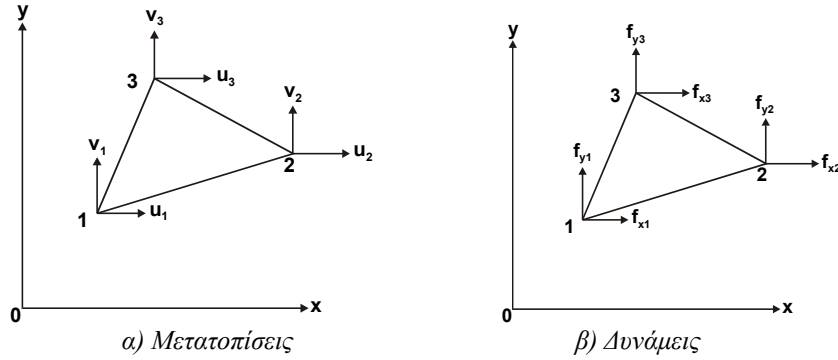
² το πρόγραμμα *MAESTRO*, αποτελέσματα του οποίου περιγράφονται σε επόμενα κεφάλαια του βιβλίου, περιλαμβάνει το τριγωνικό στοιχείο σταθερών παραμορφώσεων και το ορθογώνιο στοιχείο σταθερών διατμητικών τάσεων που εξετάζονται παρακάτω

³ η ερευνητική κοινότητα έχει ασχοληθεί εκτενώς με προβλήματα συνέχειας, με πολλές σχετικές δημοσιεύσεις. Για μια πρωτότυπη αντιμετώπιση βλέπε Irons B., Ahmad S. *Techniques of Finite Elements*. Ellis Horwood Series in Engineering Science, 1986.

⁴ τριγωνικό στοιχείο σταθερών παραμορφώσεων = constant strain triangle (CST)

νται μόνο ομοεπίπεδες μετατοπίσεις το στοιχείο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο και συνεπώς έχει συνολικά έξι βαθμούς ελευθερίας.

ΒΗΜΑ 1ο Επιλογή συστήματος αναφοράς και αρίθμηση κόμβων



Σχήμα 6 Ορισμός μεταβλητών στους κόμβους του στοιχείου CST

Τα διανύσματα των μετατοπίσεων και των δυνάμεων στους κόμβους είναι τότε:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix} \quad (9\alpha-\beta)$$

Τα μητρώα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{f}$ περιλαμβάνουν έξι όρους, και συνεπώς το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{k}$ έχει διαστάσεις 6x6, καθώς ορίζεται από τη σχέση $\mathbf{k} \mathbf{u} = \mathbf{f}$.

ΒΗΜΑ 2ο Επιλογή συνάρτησης συμβιβαστού των μετατοπίσεων (πεδίου-κόμβων)

Όπως έχει ήδη λεχθεί, ο προσδιορισμός των παραμορφώσεων συναρτήσει κάποιας αλγεβρικής παράστασης αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Τα πολυώνυμα είναι απλές και εύχρηστες συναρτήσεις καθώς έχουν τη δυνατότητα να είναι πολυδιάστατα (για επίπεδες εντατικές καταστάσεις απαιτούνται μόνο δύο διαστάσεις, x, y). Επίσης, μπο-

ρούν να περιέχουν οποιοδήποτε αριθμό ανεξαρτήτων συντελεστών που εξαρτώνται από το βαθμό του πολυωνύμου. Συνεπώς μπορεί να επιλεγεί ένα κατάλληλο πολυώνυμο για να περιγραφούν οι μετατοπίσεις στο πεδίο του τριγωνικού στοιχείου. Επειδή το τριγωνικό στοιχείο έχει έξι βαθμούς ελευθερίας επιλέγεται πολυώνυμο με έξι ανεξάρτητους συντελεστές. Επίσης, επειδή δεν πρέπει να δοθεί προτίμηση σε καμιά κατεύθυνση, γίνεται χρήση τριών συντελεστών για τη μετατόπιση u και τριών για τη μετατόπιση v . Μία λογική μορφή για τις μετατοπίσεις u και v είναι, τότε:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y \quad (10\alpha)$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y \quad (10\beta)$$

Με αυτό τον τρόπο οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά στις διευθύνσεις Ox και Oy , και συνεπώς και κατά το μήκος των πλευρών κάθε στοιχείου. Επειδή δε οι μετατοπίσεις στους κόμβους γειτονικών στοιχείων είναι ίσες, παραμένουν ίσες και καθ' όλο το μήκος των συνόρων των σχετικών στοιχείων. Η επιλογή των γραμμικών συναρτήσεων εξασφαλίζει συνεπώς τη συνέχεια των μετατοπίσεων σε όλο το μήκος των συνόρων των στοιχείων. Όπως θα διαφανεί αργότερα, αυτό δεν εξασφαλίζει ισορροπία παρά μόνο στους κόμβους. Υπάρχει δηλαδή αναπόφευκτα ένα σφάλμα το οποίο μπορεί να περιορισθεί κάνοντας χρήση μικρότερων στοιχείων. Οι εξισώσεις (10α-β) γράφονται ως εξής:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{\Phi}(x, y) \mathbf{a} \quad (12)$$

ΒΗΜΑ 3ο Προσδιορισμός των μετατοπίσεων πεδίου συναρτήσει των μετατοπίσεων στους κόμβους

Εάν αντικατασταθούν οι συντεταγμένες των κομβικών μετατοπίσεων στην σχέση (11) λαμβάνονται σχέσεις οι οποίες επιλύονται ως προς τους αγνώστους συντελεστές $\mathbf{a}$. Για παράδειγμα, στον κόμβο 1 ισχύει:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(x_1, y_1) = \mathbf{\Phi}(x_1, y_1) \mathbf{a} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

και για τους κόμβους 2 και 3:

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \mathbf{a};$$

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \mathbf{a}$$

Γίνεται αντικατάσταση των παραστάσεων αυτών στη σχέση (11):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο των συντεταγμένων των κόμβων συμβολίζεται με το $\mathbf{A}$. Συνεπώς:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (13)$$

Οι άγνωστοι πολωνυμικοί συντελεστές $\mathbf{a}$ προσδιορίζονται τώρα από τη σχέση (13) με αντιστροφή του μητρώου $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (14)$$

Για το σχετικά μικρού μεγέθους μητρώο του στοιχείου αυτού η αντιστροφή γίνεται ευχερώς χωρίς τη χρήση υπολογιστού. Για μητρώα όμως μεγαλύτερου μεγέθους απαιτείται η χρήση υπολογιστού. Στην προκειμένη περίπτωση το αντίστροφο του μητρώου $\mathbf{A}$ είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 & 0 \\ y_2y_3 & 0 & y_3y_1 & 0 & y_1y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } 2A_{123} &= \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = \\ &= 2 \cdot (\text{εμβαδόν του τριγώνου 123}) \end{aligned}$$

Οι έξι άγνωστοι συντελεστές του μητρώου $\mathbf{a}$ δίνονται από τη σχέση (14) συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων $\mathbf{u}$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (12) οι μετατοπίσεις $\mathbf{u}(x, y)$ σε κάθε σημείο (x, y) στο εσωτερικό του στοιχείου εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων στους κόμβους, αντικαθιστώντας το μητρώο $\mathbf{a}$. Η σχέση είναι:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{\Phi}(x, y) \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{u}} \quad (16)$$

ΒΗΜΑ 4ο Σχέσεις παραμορφώσεων πεδίου με μετατοπίσεις στους κόμβους μέσω
μετατοπίσεων πεδίου

Κατά κανόνα, οι παραμορφώσεις στο εσωτερικό του στοιχείου ορίζονται ως παράγωγοι των μετατοπίσεων. Στην περίπτωση της μετατόπισης άκαμπτων σωμάτων οι μετατοπίσεις (γραμμικές ή περιστροφικές) είναι παντού σταθερές και συνεπώς οι παραμορφώσεις είναι παντού μηδενικές. Το διδιάστατο συνεχές έχει τρεις συνιστώσες παραμορφώσεων και το διάνυσμά τους ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (17)$$

όπου ε_{xx} , ε_{yy} είναι ορθές παραμορφώσεις και γ_{xy} είναι η διατμητική παραμόρφωση. Από τη θεωρία ελαστικότητας έχουμε τις σχέσεις γεωμετρικού συμβι-

βαστού (σχέσεις (4α), (4β) και (4δ) Κεφαλαίου 3). Αντικαθιστώντας στις σχέσεις αυτές από τις (10α), (10β) λαμβάνουμε:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(a_1 + a_2x + a_3y) = a_2 \quad (18\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(a_4 + a_5x + a_6y) = a_6 \quad (18\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(a_1 + a_2x + a_3y) + \frac{\partial}{\partial x}(a_4 + a_5x + a_6y) = a_3 + a_5 \quad (18\gamma)$$

Συνεπώς,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Σημειώνεται ότι επειδή η συνάρτηση των μετατοπίσεων είναι γραμμική, οι παραμορφώσεις παραμένουν σταθερές στο εσωτερικό του στοιχείου. Εν τούτοις, η σχέση ορίζεται ως $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$ για να διευκρινισθεί ότι ισχύει σε όλο το στοιχείο και όχι μόνο στους κόμβους. Αναλυτικά η σχέση γράφεται:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{ή} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{G} \mathbf{a} \quad (21)$$

Αντικαθιστώντας το μητρώο $\mathbf{a}$ από τη σχέση (60), η παραμόρφωση εκφράζεται συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{GA}^{-1} \mathbf{u} \quad (22)$$

Άρα, το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων, $\mathbf{B}$, ισούται με (σχέση (12), Κεφάλαιο 3):⁵

$$\mathbf{B} = \mathbf{GA}^{-1} \quad (23)$$

Η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \quad (24)$$

όπου

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

και A_{123} = εμβαδόν του στοιχείου

ΒΗΜΑ 5ο Σχέση τάσεων πεδίου με παραμορφώσεις πεδίου και μετατοπίσεις στους κόμβους

Σε διδιάστατα ελαστικά συνεχή μέσα το διάνυσμα των τάσεων είναι:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Για επίπεδες εντατικές καταστάσεις οι σχέσεις παραμορφώσεων-τάσεων είναι:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu \sigma_{yy}}{E} \quad (27\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu \sigma_{xx}}{E} \quad (27\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (27\gamma)$$

όπου E = μέτρο ελαστικότητας, G = μέτρο διάτμησης και ν = λόγος του Poisson. Η μητρική μορφή της παραπάνω σχέσης είναι:

⁵ βλέπε επίσης Κεφάλαιο 3, Παράδειγμα 3, σχέση (58)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Το αντίστροφο του παραπάνω μητρώου είναι:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\text{ή} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$$

Αντικαθιστώντας τέλος τις παραμορφώσεις $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$, από τη σχέση (12) του Κεφαλαίου 3, οι τάσεις εκφράζονται συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (30)$$

Εφόσον τα μητρώα $\mathbf{B}$ και $\mathbf{D}$ είναι δεδομένα, οι τάσεις μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των κομβικών μετατοπίσεων $\mathbf{u}$. Εάν τότε $\mathbf{S} = \mathbf{DB}$, θα έχουμε:

$$\mathbf{S} = \frac{E}{2A_{123}(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & -\nu x_{23} & -y_{13} & \nu x_{13} & y_{12} & -\nu x_{12} \\ \nu y_{23} & -x_{23} & -\nu y_{13} & x_{13} & y_{12} & -x_{12} \\ \frac{-(1-\nu)x_{23}}{2} & \frac{(1-\nu)y_{23}}{2} & \frac{(1-\nu)x_{13}}{2} & \frac{-(1-\nu)y_{13}}{2} & \frac{-(1-\nu)x_{12}}{2} & \frac{(1-\nu)y_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\text{όπου} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

ΒΗΜΑ 6ο Αντικατάσταση τάσεων πεδίου με στατικά ισοδύναμες δυνάμεις στους κόμβους. Σχέση δυνάμεων στους κόμβους με μετατοπίσεις στους κόμ-βους. Σύνταξη μητρώου ακαμψίας στοιχείου

Στο βήμα αυτό επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις $\bar{\mathbf{u}}$, και το εξωτερικό έργο των δυνάμεων $\mathbf{f}$ στους κόμβους εξισώνεται με το εσωτερικό έργο (ενέργεια παραμόρφωσης) που εκφράζεται συναρτήσει των δυνατών παραμορφώσεων $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ και των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$. Οι δυνατές μετατοπίσεις $\bar{\mathbf{u}}$ στους κόμβους τίθενται (για λό-

γους ευκολίας) ίσες με τη μονάδα. Το ζητούμενο είναι τότε το μητρώο που συνδέει τις δυνάμεις $\mathbf{f}$ με τις δυνατές μετατοπίσεις $\bar{\mathbf{u}}$.

Το εξωτερικό δυνατό έργο είναι:

$$W = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f} \quad (32)$$

ενώ το εσωτερικό δυνατό έργο είναι:

$$U = \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (33)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο τον όγκο του στοιχείου. Αντικαθιστώντας τα μητρώα των δυνατών παραμορφώσεων $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y)$ και των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$, λαμβάνεται η παρακάτω μορφή:

$$U = \int_V [\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV$$

Η δυνατή μετατόπιση $\bar{\mathbf{u}}$ τίθεται ίση με τη μονάδα. Εξισώνοντας το εσωτερικό με το εξωτερικό έργο λαμβάνουμε την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{f} = \left[\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{u}$$

Τα μητρώα $\mathbf{B}$ και $\mathbf{D}$ περιέχουν μόνο σταθερούς όρους και συνεπώς δεν χρειάζεται να συμπεριληφθούν στην ολοκλήρωση. Ο όρος που απομένει αντιπροσωπεύει τον όγκο του στοιχείου που στην περίπτωση αυτή ισούται με το πάχος πολλαπλασιαζόμενο επί το εμβαδόν (A_{123}). Συνεπώς,

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A_{123} t \quad (34)$$

$$\text{όπου } 2A_{123} = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Το γινόμενο $\mathbf{D} \mathbf{B}$ είναι τότε ίσο με:

$$\frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} d_{11}(y_2 - y_3) & d_{12}(x_3 - x_2) & d_{11}(y_3 - y_1) & d_{12}(x_1 - x_3) & d_{11}(y_1 - y_2) & d_{12}(x_2 - x_1) \\ d_{21}(y_2 - y_3) & d_{22}(x_3 - x_2) & d_{21}(y_3 - y_1) & d_{22}(x_1 - x_3) & d_{21}(y_1 - y_2) & d_{22}(x_2 - x_1) \\ d_{33}(x_3 - x_2) & d_{33}(y_2 - y_3) & d_{33}(x_1 - x_3) & d_{33}(y_3 - y_1) & d_{33}(x_2 - x_1) & d_{33}(y_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

όπου, για επίπεδες εντατικές καταστάσεις

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = E/(1 - \nu^2) \\ d_{12} &= d_{21} = \nu E/(1 - \nu^2) \\ d_{33} &= E/2(1 + \nu) \end{aligned}$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου, $\mathbf{k}$, λαμβάνεται τότε πολλαπλασιάζοντας με το ανάστροφο του $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}^T = \frac{1}{2A_{123}} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_2 - y_3 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

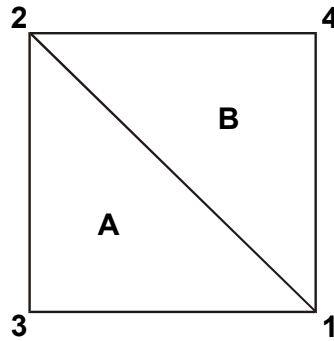
Το αποτέλεσμα δίνεται στην επόμενη σελίδα.

Ισορροπία και συμβατότητα

Εξετάζεται τώρα κατά πόσο οι συνθήκες ισορροπίας και συμβατότητας ικανοποιούνται στο εσωτερικό κάθε στοιχείου και μεταξύ των στοιχείων. Κατά πρώτον, εφόσον το πεδίο των μετατοπίσεων είναι συνεχές, αυτομάτως υπάρχει συμβατότητα στο εσωτερικό κάθε στοιχείου. Κατά δεύτερο λόγο, η ισορροπία του διδιάστατου εντατικού πεδίου στο εσωτερικό κάθε στοιχείου εξασφαλίζεται όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (37\alpha-\beta)$$

Οι παραμορφώσεις στο εσωτερικό του στοιχείου είναι σταθερές διότι λαμβάνονται με παραγωγή του πεδίου των μετατοπίσεων που είναι γραμμικό. Κατά συνέπεια, οι τάσεις οι οποίες είναι ανάλογες των παραμορφώσεων, θα



Σχήμα 7 Διάταξη γειτονικών στοιχείων με κοινό σύνορο

είναι επίσης σταθερές στο εσωτερικό κάθε στοιχείου και έτσι ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας στο εσωτερικό κάθε στοιχείου.

Καθίσταται πλέον φανερό ότι η επιλογή γραμμικού πεδίου μετατοπίσεων διασφαλίζει τη συμβατότητα των στοιχείων μεταξύ τους. Απομένει συνεπώς να εξετασθεί η ισορροπία κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων. Στο Σχήμα 7 διακρίνεται το σύνορο δύο στοιχείων, A και B .

Το μητρώο S , δίνεται από τη σχέση (31) από την οποία διαφαίνεται ότι οι συνιστώσες της τάσης είναι συναρτήσεις των μετατοπίσεων και στους τρεις κόμβους κάθε στοιχείου. Συνεπώς, παρ' όλο που και η σ_A (στοιχείο A) και η σ_B (στοιχείο B) είναι συναρτήσεις των u_1, u_2, v_1 και v_2 , η τάση σ_A είναι συνάρτηση και των u_3 και v_3 , ενώ η σ_B είναι συνάρτηση και των u_4 και v_4 . Άρα οι τάσεις κατά μήκος των συνόρων γενικά δεν είναι ίσες.

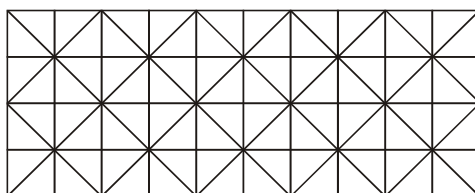
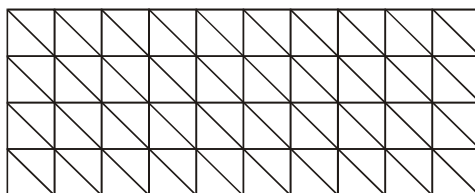
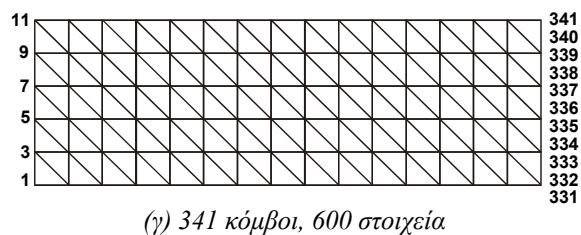
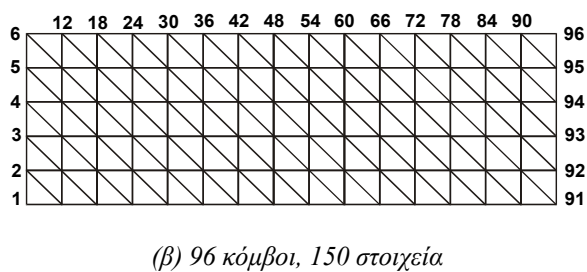
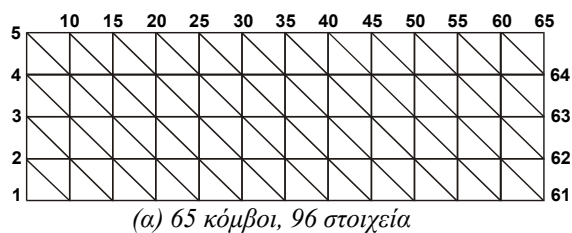
Συμπεραίνομε λοιπόν ότι για το τριγωνικό στοιχείο επίπεδης εντατικής κατάστασης οι συνθήκες ισορροπίας και συμβατότητας ικανοποιούνται στο εσωτερικό του στοιχείου. Επίσης, η συμβατότητα ικανοποιείται και κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων, σε αντιδιαστολή με την ισορροπία η οποία ικανοποιείται μόνο στους κόμβους. Έτσι, εξασφαλίζεται η ισορροπία της κατασκευής συνολικά.

Συνεπώς το σφάλμα που προκύπτει λόγω αυτής της τοπικής ανισορροπίας ελαττώνεται όταν μειωθούν οι διαστάσεις των στοιχείων και αυξηθεί ο αριθμός τους. Αυτό θα διαφανεί από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Να διερευνηθεί η επίδραση του βαθμού διακριτοποίησης κάνοντας χρήση του τριγωνικού στοιχείου σταθερών παραμορφώσεων στα πεδία α) των μετατοπίσεων β) των τάσεων, σε αμφιέρειστη δοκό υπό κατανεμημένη σταθερή φόρτιση. Η αριθμητική λύση να συγκριθεί με τη λύση της απλής θεωρίας δοκών και αυτή της θεωρίας ελαστικότητας.

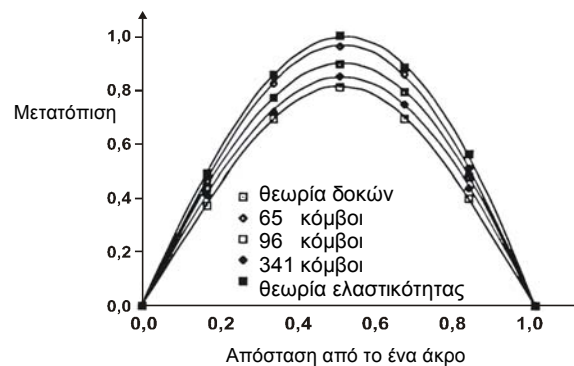
Λύση

**Σχήμα 8** Εναλλακτικές διατάξεις πλεγμάτων**Σχήμα 9** Διάφορα πλέγματα τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων

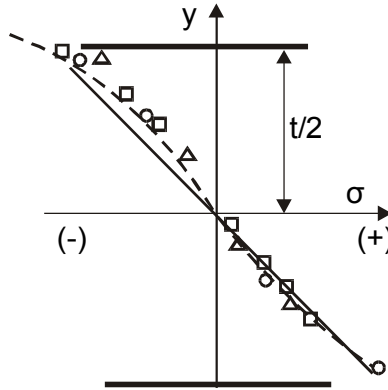
Εφόσον υπάρχει λύση της θεωρίας της ελαστικότητας μπορεί να ελεγχθεί η ακρίβεια του στοιχείου και ο βαθμός ελάττωσης του σφάλματος όταν μειώνεται το μέγεθος των στοιχείων. Στο Σχήμα 8 εικονίζονται δύο διαφορετικές διατάξεις.

Μια σειρά αριθμητικών μελετών έχει δείξει ότι η πρώτη διάταξη αποδίδει ακριβέστερα αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, η αυτόματη ανάπτυξη του πλέγματος γίνεται ευκολότερα. Η ακρίβεια της λύσης χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία αυξάνεται όταν αποφεύγονται οξείες γωνίες στα τρίγωνα. Στο Σχήμα 9 δίνονται πλέγματα για τα οποία οι αντίστοιχες λύσεις εικονίζονται στα Σχήματα 10 και 11. Οι διαστάσεις των στοιχείων ελαττώνονται κατά τους λόγους $1,0 : 0,8 : 0,4$ και ο αντίστοιχος αριθμός τους αυξάνεται από 96 σε 150 σε 600. Η προσομοίωση απλής έδρασης γίνεται θέτοντας μηδενικές κατακόρυφες μετατοπίσεις σε όλους τους κόμβους στα άκρα της δοκού. Στο Σχήμα 10 δίνεται η κατακόρυφη μετατόπιση της δοκού για α) την λύση της απλής θεωρίας δοκών, β) της ακριβούς λύσης της θεωρίας της ελαστικότητας και (γ) για αριθμητικές λύσεις με αυξανόμενο αριθμό κόμβων. Είναι προφανές ότι σε κάθε περίπτωση οι τιμές των λύσεων με πεπερασμένα στοιχεία είναι μικρότερες των τιμών της θεωρίας ελαστικότητας, τις πλησιάζουν όμως όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων. Οι διαφορές αυτές προκύπτουν διότι κατά τη μητρική ανάλυση η χρήση συνάρτησης μετατοπίσεων προκαλεί μεγαλύτερη ακαμψία της κατασκευής από την πραγματική. Το σφάλμα μπορεί να περιορισθεί αν η συνθήκη συμβατότητας δεν τηρηθεί αυστηρά.

Στο Σχήμα 11 εικονίζεται η εγκάρσια κατανομή των διαμήκων τάσεων στο μέσο της δοκού για τις ίδιες περιπτώσεις διακριτοποίησης. Επειδή οι τάσεις για κάθε στοιχείο είναι σταθερές, οι τιμές δίνονται στο κέντρο βάρους κάθε στοιχείου. Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι τα τριγωνικά στοιχεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πολλών ειδών κατασκευές. Έτσι, η σχέση σφάλματος-μέγεθους στοιχείου έχει μελετηθεί εκτενώς και υπάρχει πλούσια σχετική βιβλιογραφία.



Σχήμα 10 Μετατοπίσεις δοκού με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο



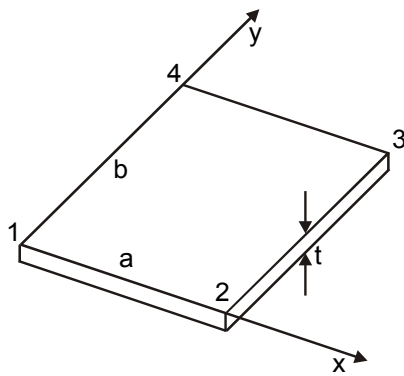
Σχήμα 11 Εγκάρσια κατανομή διαμήκων ορθών τάσεων

3.2 Ορθογώνιο στοιχείο γραμμικών παραμορφώσεων⁶

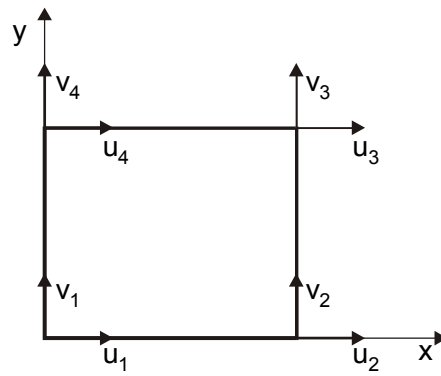
Το στοιχείο αυτό βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα επίπεδης ελαστικότητας (εντατικές και παραμορφωσιακές καταστάσεις). Εφόσον έχουμε 4 κόμβους με 2 βαθμούς ελευθερίας στον καθένα, ο συνολικός αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι 8. Κατάλληλες συναρτήσεις συνεπώς είναι οι παρακάτω:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (38\alpha)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (38\beta)$$



α) Κόμβοι και διαστάσεις



β) Βαθμοί ελευθερίας

Σχήμα 12 Ορθογώνιο στοιχείο γραμμικών παραμορφώσεων

⁶ ορθογώνιο στοιχείο γραμμικών παραμορφώσεων = linear strain rectangle element (LSR)

Η ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα ακολουθείται και σε αυτή την περίπτωση. Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου αυτού αποτελείται τότε από τους παρακάτω όρους:

$$k_\varepsilon = \frac{Et}{12[1-\nu^2]} \begin{bmatrix} 4/a & & & & & & & \\ & 3\nu & 4a & & & & & \\ -4/a & -3\nu & 4/a & & & & & \\ & 3\nu & 2a & -3\nu & 4a & & & \\ -2/a & -3\nu & 2/a & -3\nu & 4/a & & & \\ -3\nu & -2a & 3\nu & -4a & 3\nu & 4a & & \\ 2/a & 3\nu & -2/a & 3\nu & -4/a & -3\nu & 4/a & \\ -3\nu & -4a & 3\nu & -2a & 3\nu & 2a & -3\nu & 4a \end{bmatrix} \quad (39\alpha)$$

$$k_\gamma = \frac{Et}{24(1+\nu)} \begin{bmatrix} 4a & & & & & & & \\ & 3 & 4/a & & & & & \\ 2a & & 3 & 4a & & & & \\ -3 & -4/a & -3 & 4/a & & & & \\ -2a & -3 & -4a & 3 & 4/a & & & \\ -3 & -2/a & 3 & 2/a & 3 & 4/a & & \\ -4a & -3 & -2a & 3 & 2a & 3 & 4a & \\ & 3 & 2a & 3 & -2/a & -3 & -4/a & 3 & 4/a \end{bmatrix} \quad (39\beta)$$

όπου $a = a/b$. Το μητρώο μετασχηματισμού είναι:

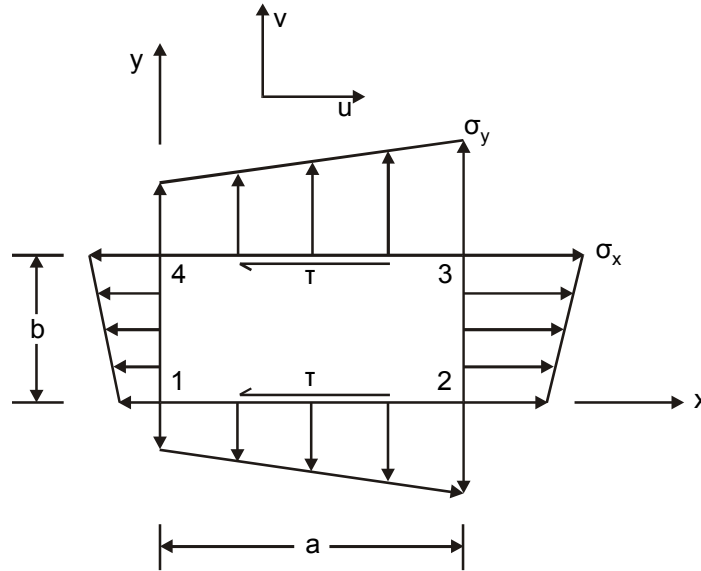
$$T = \begin{bmatrix} R_o & \theta & \theta & \theta \\ \theta & R_o & \theta & \theta \\ \theta & \theta & R_o & \theta \\ \theta & \theta & \theta & R_o \end{bmatrix} \quad (40)$$

όπου R_o , το μητρώο περιστροφών, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$R_o = \begin{bmatrix} \cos \theta x' & \cos \theta y' \\ \cos \theta x' & \cos \theta y' \end{bmatrix} \quad (41)$$

Στη σχέση αυτή η γωνία θ μετριέται μεταξύ των αντίστοιχων αξόνων στο τοπικό και στο γενικό σύστημα αναφοράς.

3.3 Ορθογώνιο στοιχείο σταθερής διατμητικής τάσης⁷



Σχήμα 13 Ορθογώνιο στοιχείο σταθερής διατμητικής τάσης (CSSR)

Το στοιχείο αυτό παρουσιάστηκε στην εργασία των Turner, Clough, Martin και Torp που δημοσιεύθηκε το 1956 και είναι συνεπώς ένα από τα πρώτα πεπερασμένα στοιχεία. Υπερτερεί ως προς το ορθογώνιο στοιχείο γραμμικών παραμορφώσεων και διαφέρει στο ότι αντί να γίνει χρήση συνάρτησης μετατοπίσεων, χρησιμοποιείται συγκεκριμένη κατανομή τάσεων στο στοιχείο. Επιλέγεται μία απλή κατανομή στην οποία οι ορθές τάσεις μεταβάλλονται γραμμικά ενώ η διατμητική τάση παραμένει σταθερή (Σχήμα 19):

$$\sigma_x = a_1 + a_2 y \quad (42\alpha)$$

$$\sigma_y = a_3 + a_4 x \quad (42\beta)$$

$$\tau_{xy} = a_5 \quad (42\gamma)$$

όπου $a_1, \dots, a_5$ είναι σταθεροί συντελεστές, οι οποίοι αρχικά είναι άγνωστοι. Οι κατανομές αυτές ικανοποιούν τις συνθήκες ισορροπίας των τάσεων στο εσωτερικό του στοιχείου, δεν ικανοποιείται όμως η ισορροπία των μετατοπί-

⁷ ορθογώνιο στοιχείο σταθερής διατμητικής τάσης = constant shear stress rectangle element (CSSR)

σεων μεταξύ των στοιχείων. Οι γενικές μετατοπίσεις $\mathbf{u}(x, y)$ λαμβάνονται ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

1. Αντικατάσταση των τασικών συναρτήσεων στις σχέσεις επίπεδης εντατικής κατάστασης
2. Ολοκλήρωση των σχέσεων αυτών ως προς τις μετατοπίσεις u, v .
3. Υπολογισμός των σταθερών ολοκλήρωσης συναρτήσεως των σταθερών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$.
4. Αντικατάσταση των σταθερών ολοκλήρωσης στις σχέσεις των μετατοπίσεων

Η τελική μορφή είναι η εξής:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(x, y) \boldsymbol{\alpha} \quad (43)$$

όπου

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} x & xy & -vx & -\frac{1}{2}(v x^2 + y^2) & (1+v)y & y & 1 & 0 \\ -vy & -\frac{1}{2}(v y^2 + x^2)y & y & xy & (1+v)x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Η εξίσωση (43) είναι η συνάρτηση μετατοπίσεων του στοιχείου για τη δεδομένη κατανομή τάσεων και σύμφωνα με αυτή ικανοποιείται η γεωμετρική συμβατότητα στο εσωτερικό του στοιχείου. Τα στάδια τα οποία απαιτούνται για την διατύπωση του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου είναι

1. Γίνεται αντιστροφή του $\mathbf{A}$ για να υπολογισθούν οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$
2. Εκφράζονται οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ συναρτήσεως των μετατοπίσεων στους κόμβους ($\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}$)
3. Εκφράζονται οι εσωτερικές παραμορφώσεις του στοιχείου συναρτήσεως των κομβικών μετατοπίσεων.
4. Εκφράζονται οι εσωτερικές τάσεις του στοιχείου $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$ μέσω των παραμορφώσεων, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}$, συναρτήσεως των κομβικών μετατοπίσεων ($\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}$). Το μητρώο των τάσεων δίνεται από το γινόμενο $\mathbf{D}\mathbf{B}$.
5. Εκφράζονται οι τάσεις στους κόμβους συναρτήσεως των μετατοπίσεων στους κόμβους. Στο στάδιο αυτό επιβάλλονται δυνατές μετατοπίσεις στους κόμβους, εξισώνεται το εσωτερικό έργο με το εξωτερικό έργο και αποκτάται η σχέση δυνάμεων-μετατοπίσεων στους κόμβους.

Για το ορθογώνιο στοιχείο σταθερής διατμητικής τάσης το μητρώο ακαμψιών $\mathbf{k}$ είναι:

$$\mathbf{k}^e = \frac{Et}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} Aa + D/a & B & A/a + Da & & & & & & & \\ & Aa - D/a & C & Aa + D/a & & & & & & \\ -C & -A/a + Ea & -B & A/a + Da & & & & & & \\ -Aa - E/a & -B & -Aa + E/a & C & Aa + D/a & & & & & \\ -B & -A/a - Ea & -C & A/a - Da & B & A/a + Da & & & & \\ -Aa + E/a & -C & -Aa - E/a & B & Aa - D/a & C & Aa + D/a & & & \\ C & A/a - Da & B & -A/a - Ea & -C & -A/a + Ea & -B & A/a + Da & & \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } A &= \frac{1-\nu}{2} & B &= \frac{1+\nu}{2} & C &= \frac{1-3\nu}{2} \\ D &= \frac{4-\nu^2}{3} & E &= \frac{2+\nu^2}{3} & \alpha &= a/b \end{aligned}$$

και

$$(\sigma_x)_1 = (\sigma_x)_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{-u_1 + u_2}{a} + \frac{\nu^2(u_1 - u_2 + u_3 - u_4)}{2a} + \frac{\nu(-v_1 - v_2 + v_3 + v_4)}{2b} \right]$$

$$(\sigma_x)_3 = (\sigma_x)_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{u_3 - u_4}{a} + \frac{\nu^2(-u_1 + u_2 - u_3 + u_4)}{2a} + \frac{\nu(-v_1 - v_2 + v_3 + v_4)}{2b} \right]$$

$$(\sigma_y)_1 = (\sigma_y)_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{-v_1 + v_4}{b} + \frac{\nu^2(v_1 - v_2 + v_3 - v_4)}{2b} + \frac{\nu(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4)}{2a} \right]$$

$$(\sigma_y)_3 = (\sigma_y)_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{-v_2 + v_3}{b} + \frac{\nu^2(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4)}{2b} + \frac{\nu(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4)}{2a} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{4(1+\nu)} \left[\frac{-u_1 - u_2 + u_3 + u_4}{b} + \frac{-v_1 + v_2 + v_3 - v_4}{a} \right] \quad (46\alpha-\epsilon)$$

Χρήση και σχετική ακρίβεια του στοιχείου CSSR

Πίνακας 1 Σύγκριση επίδοσης στοιχείων (μετατοπίσεις)

Αριθμός στοιχείων		Σχετικό σφάλμα ($=\delta_c-\delta_E/\delta_E$)	
Διαμήκως	Εγκαρσίως	LSR	CSSR
1	1	-0,86	-0,25
2	1	-0,63	-0,06
	2	-0,61	-0,09
	4	-0,61	-0,09
4	1	-0,33	-0,02
	2	-0,31	-0,04
	4	-0,29	-0,04
8	1	-0,17	> -0,02
	2	0,12	> -0,02
	4	0,11	> -0,02
16	1	-0,11	> -0,02
	2	-0,06	> -0,02
	4	-0,03	> -0,02

Πίνακας 2 Σύγκριση επίδοσης στοιχείων (τάσεις)

Αριθμός στοιχείων		Σχετικό σφάλμα ($=\delta_c-\delta_E/\delta_E$)	
Διαμήκως	Εγκαρσίως	LSR	CSSR
1	1	-0,93	-0,50
2	1	-0,69	-0,27
	2	-0,68	-0,25
	4	-0,68	-0,25
4	1	-0,36	-0,14
	2	-0,34	-0,13
	4	-0,33	-0,12
8	1	-0,14	-0,08
	2	-0,11	-0,07
	4	-0,08	-0,05
16	1	-0,06	-0,05
	2	-0,03	-0,04
	4	+0,04	+0,01

Η συνάρτηση τάσεων του στοιχείου CSSR επιτρέπει την προσομοίωση της ομοεπίπεδης κάμψης μιας κατασκευής και έτσι το στοιχείο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην ανάλυση των πλευρικών ελασμάτων και των διαμήκων φρακτών



Σχήμα 14 Κατασκευή για τη σύγκριση ακρίβειας των στοιχείων *LSR* και *CSSR*

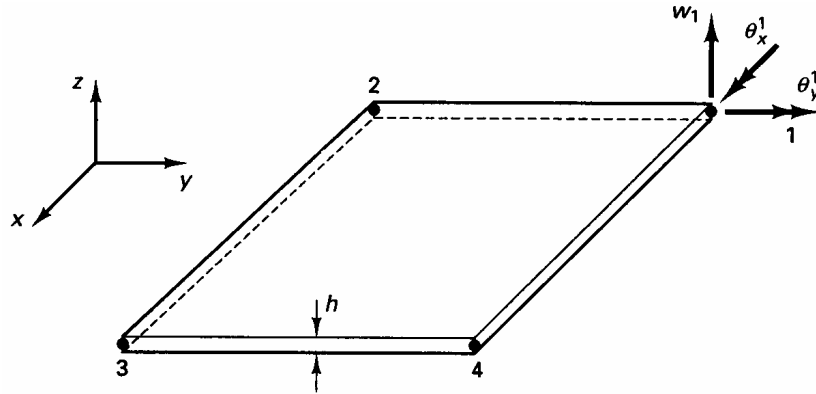
των πλοίων, καθώς αυτά υποβάλλονται σε ομοεπίπεδη κάμψη και σε σχεδόν ομοιόμορφη διατμητική τάση. Το στοιχείο αυτό μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της απόκρισης και των επίπεδων ελασμάτων των καταστρωμάτων διότι, παρ'όλο που η διατμητική τάση δεν είναι σταθερή, η χρήση μιας μέσης τιμής που αντιστοιχεί σε κάθε τμήμα (στοιχείο) αποδίδει επαρκή ακρίβεια σε σχέση με το κόστος χρήσης περισσότερο περίπλοκου στοιχείου.

Γενικά το στοιχείο *CSSR* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση μεγάλων τμημάτων επίπεδων κατασκευών. Η σχετική ακρίβεια δίνεται στους Πίνακες 1 και 2 και συμπεραίνεται ότι το σφάλμα είναι μικρότερο από εκείνο του στοιχείου *LSR*. Στους πίνακες δίνονται συγκριτικά αποτελέσματα για τα δύο στοιχεία σε σχέση με τη λύση της θεωρίας της ελαστικότητας. Το πρόβλημα είναι η επίλυση του κορμού δοκού (προβόλου) υπό κάθετη σημειακή φόρτιση στο ελεύθερο άκρο (Σχήμα 14).

Από την φόρτιση αυτή προκύπτει κάμψη και διάτμηση στη δοκό, η δε γεωμετρία της δοκού (λόγος μήκους-πλάτους) είναι ανάλογη με εκείνη των πλευρικών ελασμάτων πλοίου. Από τον Πίνακα 1 συμπεραίνεται ότι και με τη χρήση τεσσάρων μόνο στοιχείων ($m=4, n=1$) το σφάλμα στις μετατοπίσεις για το στοιχείο *CSSR* είναι της τάξης μερικών ποσοστιαίων μονάδων, ενώ η λύση του στοιχείου *LSR* αποκλίνει από την αναλυτική λύση κατά 30%. Κατά τη μελέτη κατασκευών οι τάσεις έχουν μεγαλύτερη σημασία από τις μετατοπίσεις. Ο Πίνακας 2 περιλαμβάνει αντίστοιχα αποτελέσματα για τις τάσεις και είναι προφανές ότι και σ' αυτή την περίπτωση το στοιχείο *CSSR* υπερτερεί.

Τα ελάσματα της γάστρας του πλοίου είναι κατά κανόνα ενισχυμένα, και πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση των ενισχυτικών στις κατανομές των τάσεων και των μετατοπίσεων. Το στοιχείο *CSSR* έχει αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμο και στην περίπτωση αυτή.

3.4 Ορθογώνιο στοιχείο κάμψης



Σχήμα 15 Ορθογώνιο στοιχείο κάμψης

Όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα, το στοιχείο αυτό διαθέτει τρεις βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο. Απαιτούνται συνεπώς 12 γενικευμένες μετατοπίσεις $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$ στο πολυώνυμο που συντάσσεται για το βέλος κάμψης. Το πολυώνυμο είναι:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (47)$$

Συνεπώς,

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2$$

Το μητρώο συντεταγμένων των κόμβων A υπολογίζεται τότε κάνοντας χρήση των σχέσεων:

$$w_i = (w)_{x_i, y_i} \quad \theta_x^i = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i} \quad \theta_y^i = \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} \quad (48)$$

και αντικαθιστώντας στην $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{a}$. Έχουμε τότε:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^3 y_4 & x_4 y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \cdot & & & & \cdot & & & & & & & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογισθεί το μητρώο $\mathbf{E}$, υπενθυμίζουμε ότι κατά την μελέτη ελασμάτων υπό κάμψη, οι καμπυλότητες και οι ροπές εκφράζονται ως γενικευμένες παραμορφώσεις και τάσεις αντίστοιχα. Απαιτούνται οι παρακάτω ποσότητες:

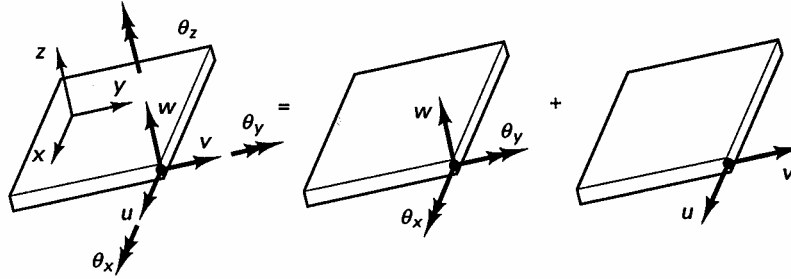
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} x^2 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 2\alpha_5 + 4\alpha_{10} + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

Τα μητρώα C , Φ , A και E χρησιμοποιούνται σε επόμενο στάδιο για τον υπολογισμό α) του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου, k , β) του μητρώου μάζας του στοιχείου και των διανυσμάτων των φορτίων.

3.5 Ορθογώνιο επίπεδο στοιχείο-κέλυφος



Σχήμα 16 Ορθογώνιο επίπεδο στοιχείο-κέλυφος

Μπορούμε να αναπτύξουμε ένα επίπεδο στοιχείο-κέλυφος με υπέρθεση της καμπτικής συμπεριφοράς του ορθογώνιου στοιχείου-κάμψης στο ορθογώνιο στοιχείο επίπεδης εντατικής κατάστασης, που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Το αποτέλεσμα δείχνεται στο Σχήμα 16. Εάν τα μητρώα ακαμψίας σε κάμψη και επίπεδη εντατική κατάσταση είναι $\tilde{K}_B$ και $\tilde{K}_M$ αντίστοιχα, στο τοπικό σύστημα αναφοράς, το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου-κελύφους είναι:

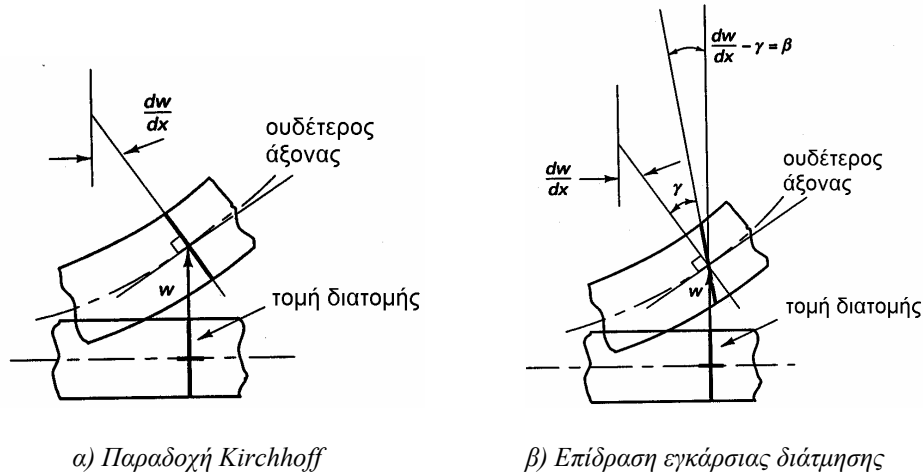
$$\tilde{K}_S = \begin{bmatrix} \tilde{K}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{K}_M \end{bmatrix} \quad (49)$$

Στη σχέση αυτή το μητρώο $\tilde{K}_S$ έχει διαστάσεις 20x20 ενώ τα μητρώα $\tilde{K}_B$ και $\tilde{K}_M$ έχουν διαστάσεις 12x12 και 8x8 αντίστοιχα. Για τη μετατροπή στο γενικό σύστημα αναφοράς της κατασκευής απαιτείται ο μετασχηματισμός $K_S = T^T \tilde{K}_S^* T$.

4. Θεωρία Mindlin ορθογώνιων ελασμάτων

4.1 Εισαγωγή

Στα εδάφια που ακολουθούν θα εξετασθούν ορθογώνια στοιχεία που βρίσκουν εκτενή εφαρμογή κατά τη μελέτη των λεπτότοιχων κατασκευών. Ευθύς αμέσως θα πρέπει να τονίσουμε ότι είναι απαραίτητη η εξοικείωση με τη θεωρία λεπτότοιχων



Σχήμα 17 Μετατόπιση στοιχείου

κατασκευών και ειδικά με αυτή των λεπτών ελασμάτων⁸, για να γίνει κατανοητή η διατύπωση των αντίστοιχων πεπερασμένων στοιχείων.

Η ανάπτυξη ορθογώνιων πεπερασμένων στοιχείων εξ' αρχής συνάντησε δυσκολίες, οι οποίες οφείλονται στη φύση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά των λεπτών ελασμάτων. Η θεωρία των λεπτών ελασμάτων βασίσθηκε στις παραδοχές που πρότεινε ο Kirchhoff το 1850 (μετά τις μελέτες της Sophie Germain το 1811), σύμφωνα με τις οποίες τα επίπεδα που αρχικά είναι κάθετα στο ουδέτερο επίπεδο του ελάσματος:

- α) Διατηρούν τη μορφή τους (δηλαδή δεν παραμορφώνονται) και
- β) Παραμένουν κάθετα στο ουδέτερο επίπεδο και μετά την επιβολή του εξωτερικού φορτίου.

⁸ π.χ. S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger *Theory of Plates and Shells* και S.P. Timoshenko & J.M. Gere *Theory of Elastic Stability*. Στα ελληνικά βλέπε Π.Α. Καρύδη *Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου – Θέματα Τοπικής Αντοχής*, Αθήνα 2000 (Κεφάλαια 4, 6).

Οι παραδοχές αυτές συνέβαλαν σημαντικά στην απλοποίηση της διαδικασίας απόκτησης λύσης της διαφορικής εξίσωσης του λεπτού ελάσματος, όταν όμως καλούμαστε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες ενός αντίστοιχου πεπερασμένου στοιχείου, ανακύπτουν συγκεκριμένες δυσκολίες. Διαπιστώθηκε, μετά από μελέτες ελασμάτων κατά τις οποίες δεν είχαν εισαχθεί οι παραδοχές Kirchhoff, ότι πεπερασμένα στοιχεία που έχουν γενικότερη εφαρμογή (για λεπτά αλλά και για παχιά ελάσματα) συμπεριφέρονται καλύτερα από αυτά που βασίζονται στη θεωρία λεπτότοιχων κατασκευών. Αυτό οφείλεται στο ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις σύγκλισης του στοιχείου αλλά και να είναι αυτό αποτελεσματικά στο επίπεδο της εφαρμογής. Το θέμα της σύγκλισης πεπερασμένων στοιχείων εξετάζεται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 12 (εδάφιο 6).

Για να γίνει κατανοητό το πρόβλημα που ανακύπτει κατά τη χρήση στοιχείων λεπτών ελασμάτων, πρέπει να ανατρέξουμε στη διαφορική εξίσωση κάμψης λεπτών ορθογωνίων ελασμάτων (σχέση (8)) όπου:⁹

$$M_{xy} = -D(1 - \nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (50)$$

Από πλευράς συμπεριφοράς των στοιχείων, απαιτείται συνέχεια κατά μήκος του συνόρου δύο γειτονικών στοιχείων. Η συνέχεια αφορά τη παραμορφωμένη μορφή της κατασκευής, και εξασφαλίζεται με ισότητα μετατοπίσεων και κλίσεων κάθετα στο σύνορο σε όλο του το μήκος, για τα δύο στοιχεία (έστω πλευρά 1-2). Θα πρέπει δηλαδή οι ποσότητες w και $\partial w / \partial h$ να είναι ίσες για τα δύο στοιχεία. Ακολουθώντας την πρακτική που έχει περιγραφεί σε προγενέστερα κεφάλαια, μπορούμε να κάνουμε χρήση των παρακάτω αναπτυγμάτων πολυωνμικής μορφής:

$$w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \dots \quad (51)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots \quad (52)$$

Ο αριθμός των σταθερών που χρησιμοποιείται στις παραπάνω μορφές θα πρέπει να επαρκεί για την πλήρη περιγραφή της μεταβολής της συγκεκριμένης μεταβλητής κατά μήκος του συνόρου, συναρτήσει των τιμών στους κόμβους. Για παράδειγμα, αν υπάρχουν μόνο δύο κόμβοι, απαιτείται πολώνυμο τρίτου βαθμού για την περιγραφή της μετατόπισης w εφόσον τα w και $\partial w / \partial x$ ορίζο-

⁹ Καρύδη Π.Α. *op. cit*, Κεφάλαιο 4.

νται στους δύο κόμβους. Η μεταβολή της κλίσης $\partial w / \partial y$ είναι τότε γραμμική και περιγράφεται με δύο μόνο όρους.

Η ίδια διαδικασία θα μπορούσε να γίνει και για την πλευρά του στοιχείου που γειτονεύει με αυτή και με την οποία συναντιέται στην κοινή ακμή (πλευρά 1-3). Στη δεύτερη περίπτωση η συνέχεια προϋποθέτει την ισότητα κλίσεων $\partial w / \partial x$. Η κλίση αυτή εξαρτάται από κομβικές παραμέτρους της πλευράς 1-3 και μόνο.

Η διαρμονική εξίσωση περιλαμβάνει τον όρο $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Στην ακμή όμως, ο όρος αυτός μπορεί να υπολογισθεί είτε παραγωγίζοντας τη μεταβλητή $\partial w / \partial x$ που υπολογίζεται με βάση την πλευρά (1-2) ως προς y , είτε παραγωγίζοντας τη μεταβλητή $\partial w / \partial y$ που υπολογίζεται με βάση την πλευρά (1-3) ως προς x . Επειδή όμως οι κλίσεις εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές των κόμβων της κάθε πλευράς, θα έχουμε:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

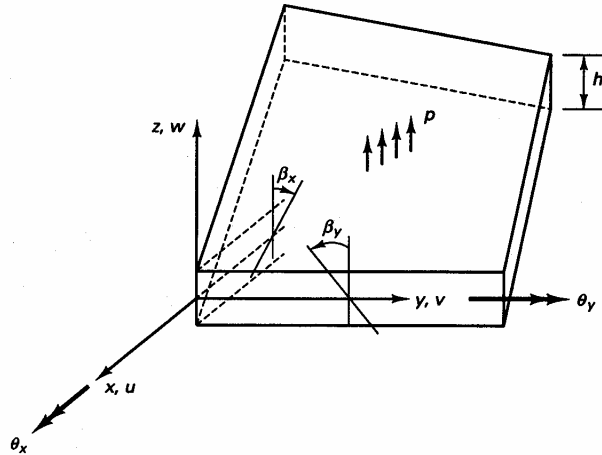
Προκύπτει λοιπόν μια ασυμβατότητα, και συμπεραίνουμε ότι είναι αδύνατη η χρήση απλών πολυωνυμικών μορφών για τον ορισμό των συναρτήσεων μορφής, όταν στους κόμβους ακμών ορίζονται μόνο η μετατόπιση και οι παράγωγοί της. Οι μελετητές του προβλήματος έχουν προτείνει διάφορους τρόπους για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, δεν κρίνεται όμως σκόπιμο να επεκταθούμε περισσότερο στο σημείο αυτό.

4.2 Στοιχεία-ελάσματα θεωρίας Mindlin

Για να γίνει σαφής η διατύπωση των ιδιοτήτων των πεπερασμένων στοιχείων ορθογωνίων ελασμάτων που βασίζονται στη θεωρία Mindlin, θα παρουσιάσουμε πρώτα τις σχετικές εξισώσεις της αναλυτικής θεωρίας. Η βασική παραδοχή της διατύπωσης κατά Mindlin είναι ότι *σημεία του ελάσματος που βρίσκονται σε ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ουδέτερη επιφάνεια του ελάσματος, συνεχίζουν να βρίσκονται σε ευθεία και μετά την επιβολή του φορτίου. Η ευθεία αυτή δεν απαιτείται όμως να παραμείνει κάθετη στην ουδέτερη επιφάνεια του ελάσματος*. Βλέπουμε λοιπόν ότι αίρεται η παραδοχή (β) που έγινε κατά την διατύπωση της θεωρίας Kirchhoff.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι μετατοπίσεις ενός σημείου με συντεταγμένες (x, y, z) κατά τη θεωρία μικρών μετατοπίσεων είναι:

$$u = -z\beta_x(x, y) \quad v = -z\beta_y(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (53\alpha-\gamma)$$



Σχήμα 18 Η παραμόρφωση ελάσματος με μη-μηδενικές εγκάρσιες διατμητικές τάσεις

όπου w είναι η μετατόπιση κάθετα την ουδέτερη επιφάνεια του ελάσματος, και β_x, β_y είναι οι κλίσεις της καθέτου προς την απαραμόρφωτη ουδέτερη επιφάνεια του ελάσματος στα επίπεδα Oxz και Oyz αντίστοιχα. Εάν δε ληφθούν υπόψη οι εγκάρσιες διατμητικές τάσεις, κατά τη θεωρία Kirchhoff, θα έχουμε:

$$\beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{και} \quad \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (54\alpha-\beta)$$

Οι καμπτικές και διατμητικές παραμορφώσεις ε_{xx} , ε_{yy} και γ_{xy} μεταβάλλονται γραμμικά κατά το πάχος του ελάσματος και, κάνοντας χρήση των (54α) και (54β), δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (55)$$

ενώ οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις θεωρούνται σταθερές κατά το πάχος του ελάσματος:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (56)$$

Για επίπεδη εντατική κατάσταση ισοτροπικού υλικού ($\sigma_{zz} = 0$) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (58)$$

Το μητρώο ακαμψίας ενός αντίστοιχου στοιχείου-ελάσματος διατυπώνεται εξισώνοντας το έργο των εξωτερικών δυνάμεων με την εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης U . Εάν το εμβαδόν της μέσης (ουδέτερης) επιφάνειας είναι A , η εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης U δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{+t/2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dz dA \quad (59)$$

Στη σχέση αυτή $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων. Οι παραμορφώσεις εκφράζονται συναρτήσει των μετατοπίσεων (σχέσεις (5), (7) και (8)). Ολοκληρώνοντας κατά το πάχος, λαμβάνουμε:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}_M \boldsymbol{\kappa} dA \quad (60)$$

όπου $\mathbf{D}_M$ και $\boldsymbol{\kappa}$ ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{D}_M = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & \mathbf{D}_K & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx}t \end{bmatrix} \quad (61\alpha, \beta)$$

$$\text{και} \quad \mathbf{D}_K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (62)$$

όπου ο πρώτος όρος του γινομένου της σχέσης (62) συνήθως συμβολίζεται με το D και καλείται *καμπτική ακαμψία* του ελάσματος. Γενικά ισχύει:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & \mathbf{D}_K & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{yz}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} - \kappa_0 =$$

$$= \mathbf{D}_M (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) \quad (63)$$

Εάν σε κάθε κόμβο ορίζονται οι τρεις βαθμοί ελευθερίας w , β_x , και β_y μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες συναρτήσεις μορφής N_i για την παρεμβολή των ποσοτήτων αυτών από τις αντίστοιχες τιμές στους κόμβους. Δηλαδή,

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (64)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (65)$$

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\boldsymbol{\kappa} = \partial \mathbf{u} \quad (66)$$

$$\text{και} \quad \partial = \begin{bmatrix} 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ -\partial/\partial y & 0 & 1 \\ -\partial/\partial x & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Οι σχέσεις (17), (19) και (20) δίνουν:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (68)$$

όπου:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots \\ -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & N_1 & \dots \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (69)$$

και τέλος, από τις σχέσεις (12), (21) και (22), λαμβάνουμε:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad \text{όπου} \quad \mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D}_M \mathbf{B} dA \quad (70)$$

Για ορθογώνιο έλασμα, οι συναρτήσεις μορφής N_i εκφράζονται συναρτήσεις των x και y . Τότε $dA = dx dy$. Για τετράπλευρο γενικότερης μορφής χρησιμοποιείται ισοπαραμετρική διατύπωση για να εκφραστούν οι συναρτήσεις μορφής, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5 (εδάφιο 3.2).

Τα στοιχεία τύπου *Mindlin* πρέπει να θεωρούνται ως μια ειδική κατηγορία τρισδιάστατων στοιχείων, που για λόγους οικονομίας και αριθμητικής ευστάθειας δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση λεπτών ελασμάτων.

Βιβλιογραφία

1. Walz J.E., Fulton R.E., Cyrus N.J. "Accuracy and convergence of finite element approximations". *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright-Patterson Air Force Base, U.S.A., 1968.
2. Rockey K.C., Evans H.R., Griffiths D.W., Nethercot D.A., *The Finite Element Method – a Basic Introduction*. Blackwell Scientific Professional Books (BSP), Oxford, 1983.
3. Bathe K.-J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
4. Zienkiewicz O.C. Taylor R.L. *The Finite Element Method, Vol. 2 Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Machinery*. 4th edition, McGraw Hill, 1991.
5. Hughes O.F. *Ship Structural Design: A Rationally-Based, Computer-Aided Optimization Approach*. SNAME, New Jersey, 1988.