

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων. Βασικές έννοιες.

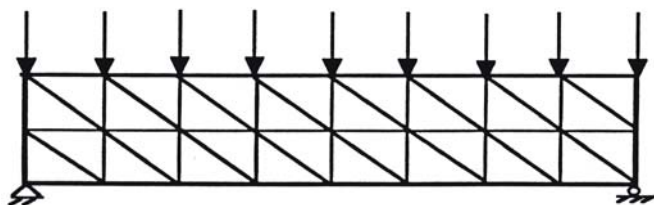
1. Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθεί μία εισαγωγή στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) και στη χρήση της στην ανάλυση και το σχεδιασμό των λεπτότοιχων κατασκευών. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ισχυρό εργαλείο στη μελέτη των κατασκευών και βρίσκει μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Στο πεδίο της ανάλυσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο στο (συμβατικό) ελαστικό πεδίο (θεωρία μικρών μετατοπίσεων) αλλά και για μη-γραμμικά προβλήματα, λυγισμό, δυναμική συμπεριφορά κ.ά. *Η μέθοδος χρησιμοποιείται γενικότερα σε προβλήματα που επιδέχονται μεταβολική διατύπωση στην μηχανική των συνεχών μέσων.*

Η σχετική βιβλιογραφία είναι εκτενέστατη, και συνεχώς αυξάνεται με την πρόταση νέων τεχνικών αλλά και εφαρμογών. Στο παρόν κείμενο η περιγραφή θα περιορισθεί στη μελέτη λεπτότοιχων κατασκευών και θα καλύψει τις βασικές αρχές της μεθόδου με βάση το περιεχόμενο του Κεφ. 3 και τη θεωρία της μητρωικής άλγεβρας.

Η αρχική διατύπωση της μεθόδου έγινε με βάση την μητρωική ανάλυση, αργότερα όμως δόθηκε ευρύτερη και πιο θεμελιώδης θεωρητική βάση. Αρχικά θα θεωρήσουμε την μέθοδο ως επέκταση της μητρωικής ανάλυσης στην ανάλυση των συνεχών μέσων (ελάσματα, κελύφη).

Το χαρακτηριστικό της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι η χρήση διδιάστατων και τρισδιάστατων στοιχείων για την προσομοίωση συνεχών μέσων. Μια από τις πρώτες δημοσιεύσεις στις οποίες παρουσιάστηκε η ιδέα αυτή είναι των Turner, Clough, Martin, και Topp (1956), ορισμένα όμως χαρακτηριστικά της είχαν ήδη περιγραφεί από τους Courant (1943), Hrenikoff (1941), McHenry (1943) και άλλους. Ακολούθησαν πολλές δημοσιεύσεις, συμπεριλαμβανομένων και αυτών του Αργύρη και των συνεργατών του την περίοδο 1954-60. Τα πρώτα πεπερασμένα στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν σε προβλήματα επίπεδης εντατικής κατάστασης, αργότερα όμως διατυπώθηκαν στοιχεία και για τρισδιάστατα στερεά, ελάσματα υπό κάμψη, παχιά κελύφη, και άλλες μορφές κατασκευών. Μετά την καθιέρωσή τους στη γραμμική ελαστική περιοχή εφαρμόστηκαν και σε δυσκολότερα προβλήματα όπως η δυναμική συμπεριφορά, ο λυγισμός και η μη-γραμμική απόκριση και συμπεριφορά του υλικού. Για να επιλυθούν δε προβλήματα με μη-γραμμική συμπεριφορά του υλικού απαιτείται επαναληπτική διαδικασία.



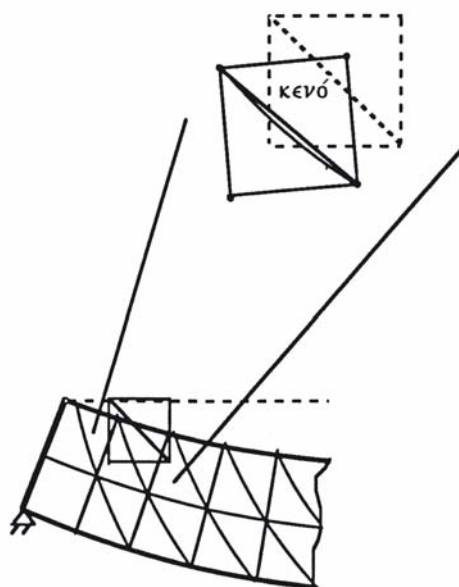
Σχήμα 1 Χρήση τριγωνικών στοιχείων για τη διακριτοποίηση αμφιέρειστης δοκού υπό καμπτική φόρτιση

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 αναγνωρίστηκε ότι η μέθοδος αποτελεί συγκεκριμένη μορφή της μεθόδου Ritz, και το 1964 οι Zienkiewicz και Cheung έδειξαν ότι μπορεί να εφαρμοσθεί σε όλα τα προβλήματα πεδίου που έχουν μεταβολική διατύπωση. Για προβλήματα κατασκευών υπάρχει τώρα ένας ικανός αριθμός προγραμμάτων γενικής χρήσης και το γεγονός αυτό σε συνάρτηση με τις δυνατότητες της μεθόδου έχει οδηγήσει στην ραγδαία εξέλιξη και χρήση της τα τελευταία χρόνια.

2. Βασικές έννοιες της μεθόδου

Η βασική έννοια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων είναι, όπως και στη μητρωική ανάλυση, η δυνατότητα προσομοίωσης της πραγματικής κατασκευής με συστατικά στοιχεία τα οποία συνδέονται σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων. Η μεθοδολογία αυτή αποτελεί φυσιολογική προσομοίωση των πλαισίων, καθώς αυτά αποτελούνται από δοκούς που είναι συνδεδεμένες στα άκρα τους. Σε μία συνεχή όμως κατασκευή δεν υπάρχουν φυσικοί διαχωρισμοί και συνεπώς απαιτείται να γίνει τεχνητός διαχωρισμός σε στοιχεία, τα οποία να συνδέονται κατά μήκος των άκρων (πλευρών) τους. Τα τεχνητά αυτά στοιχεία, ή *πεπερασμένα στοιχεία* είναι συνήθως τετράπλευρα ή τριγωνικά και οι κόμβοι συνήθως βρίσκονται στα άκρα. Το Σχήμα 1 δείχνει τον κορμό δοκού υποδιαιρεμένο σε τριγωνικά στοιχεία. Για να γίνει χρήση μητρωικών μεθόδων απαιτείται να προσομοιωθεί η συνεχής κατασκευή με ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων και σε ορισμένες περιπτώσεις και οι παράγωγοί τους. Εάν περιλαμβάνονται και οι παράγωγοι γίνεται λόγος για *βαθμούς ελευθερίας* αντί για *μετατοπίσεις κόμβων*. Οι μετατοπίσεις στο εσωτερικό των στοιχείων πρέπει να είναι συμβατές με τις μετατοπίσεις των κόμβων και όλες οι αλληλεπιδράσεις των στοιχείων εκφράζονται σε σχέση με τις κομβικές μετατοπίσεις.

Με αυτό τον τρόπο οι μόνοι άγνωστοι είναι οι μετατοπίσεις στους κόμβους και το πρόβλημα μετατρέπεται από συνεχές σε διακριτό. Παρ' όλο που μπορεί να υπάρχει μεγάλος αριθμός κομβικών μετατοπίσεων ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος. Το πρόβλημα εκφράζεται τότε ως ένα σύνολο (σύστημα) γραμμικών εξισώσεων οι οποίες επιλύονται με αριθμητικές (μητρωικές) μεθόδους.



Σχήμα 2 Παραμόρφωση στοιχείων

Για να επιτευχθεί ακριβής λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος στη διακριτοποιημένη μορφή του, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας και γεωμετρικής συμβιβαστότητας στο εσωτερικό των στοιχείων αλλά και στα σύνορά τους. Οι απαιτήσεις αυτές ανάγονται στην ικανοποίηση τεσσάρων συνθηκών. Ας θεωρηθεί, για παράδειγμα, η συμβιβαστότητα μεταξύ των στοιχείων. Σε μία συνεχή κατασκευή όπως το έλασμα του Σχήματος 2 ισχύει συνέχεια των μετατοπίσεων στα κοινά όρια των στοιχείων. Συνεπώς στο αριθμητικό μοντέλο (πεπερασμένα στοιχεία) δεν επαρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη της συνέχειας των μετατοπίσεων στους κόμβους και μόνο.

Εάν δηλαδή δεν διατυπωθούν περιορισμοί στις μετατοπίσεις κατά μήκος των ορίων των στοιχείων το θεωρητικό μοντέλο της κατασκευής θα είναι περισσότερο εύκαμπτο επειδή θα δημιουργηθούν κενά, όπως δείχνει το Σχήμα 2. Ένας τρόπος να περιορισθεί το σφάλμα είναι να χρησιμοποιηθούν μικρότερα και περισσότερα στοιχεία διότι έτσι θα δημιουργηθούν περισσότεροι κόμβοι και συνεπώς περισσότερα σημεία στα οποία θα ικανοποιείται η συμβιβαστότητα.

Μία διακριτή προσομοίωση δεν μπορεί όμως να αποδώσει με απόλυτη ακρίβεια την συμπεριφορά ενός συνεχούς μέσου, ανεξαρτήτως του αριθμού των διακριτών μεταβλητών που χρησιμοποιούνται. Υπάρχει δηλαδή πάντοτε ένα *σφάλμα*, το οποίο όμως μπορεί να περιορισθεί και να γίνει αμελητέο και τοπικό. Δεν είναι συνεπώς δυνατόν να ικανοποιηθούν όλες οι προαναφερθείσες συνθήκες με απόλυτη ακρίβεια, έστω και αν γίνει χρήση μεγάλου αριθμού στοιχείων. Είναι όμως δυνατό, με σωστή επιλογή των ιδιοτήτων των στοιχείων και κατάλληλη διακριτοποίηση, να περιορισθεί το αριθμητικό σφάλμα. Ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων των στοιχείων

αποτελεί ένα από τα βασικότερα στάδια διατύπωσης μιας λύσης. Θα πρέπει τότε να γίνεται αυτό έτσι ώστε να ικανοποιούνται επαρκώς οι συνθήκες συμβιβαστότητας χωρίς να χρειασθεί να γίνει χρήση υπερβολικά μικρών στοιχείων.

Η συμπεριφορά των στοιχείων καθορίζεται από συναρτήσεις οι οποίες ορίζουν τον τρόπο μεταβολής των τάσεων ή των μετατοπίσεων στο εσωτερικό τους. Με άλλα λόγια, προκαθορίζεται ο τρόπος συμπεριφοράς των διαφόρων μεταβλητών. Το αποτέλεσμα είναι ότι, παρ' όλο που οι συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστότητας ικανοποιούνται μόνο στους κόμβους, η προδιαγεγραμμένη συμπεριφορά στο εσωτερικό κάθε στοιχείου εξασφαλίζει ότι η συμβιβαστότητα ικανοποιείται επαρκώς στο εσωτερικό και στα σύνορά τους.

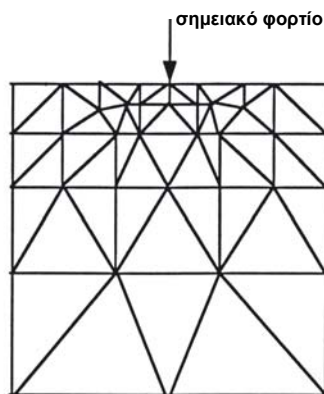
Συμπεραίνεται λοιπόν ότι απαιτείται προσοχή κατά την υποδιαίρεση (*διακριτοποίηση*) της κατασκευής, καθώς επίσης και κατά την επιλογή της συνάρτησης που περιγράφει τη συμπεριφορά στο εσωτερικό του κάθε στοιχείου. Θα γίνει αναφορά σε ορισμένα θέματα σχετικά με την υποδιαίρεση και σε συνέχεια, για να γίνει κατανοητός ο τρόπος επιλογής της συνάρτησης εσωτερικής συμπεριφοράς θα μελετηθούν ορισμένα απλά στοιχεία τα οποία είναι ευρέως διαδεδομένα και βρίσκουν εφαρμογή σε προβλήματα λεπτότοιχων κατασκευών (Κεφάλαια 4, 5 και 8).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η ακρίβεια της μεθόδου αυξάνεται όταν αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων, ή καλύτερα, των κόμβων. Όσο αυξάνεται όμως ο αριθμός των στοιχείων, τόσο αυξάνονται ο χρόνος υπολογισμού και το κόστος.

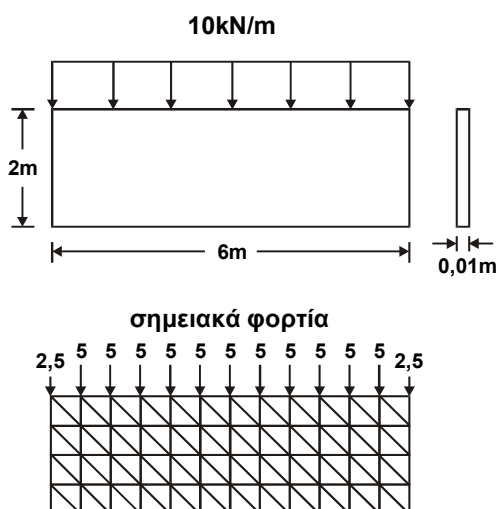
Σε πολλές περιπτώσεις η βαθμιαία μεταβολή του μεγέθους των στοιχείων χρησιμοποιείται για να αποκτηθεί ακριβέστερη εικόνα της τοπικής συμπεριφοράς (σε συγκεντρώσεις τάσεων, σε ανοίγματα, κοντά στο σημείο εφαρμογής του εξωτερικού φορτίου, κλπ). Η βαθμιαία μεταβολή του μεγέθους των στοιχείων είναι ένας εφικτός τρόπος ελάττωσης του κόστους χωρίς να μειωθεί ακρίβεια της λύσης του προβλήματος. Λόγω όμως της μεγάλης ποικιλίας κατασκευών και φορτίσεων δεν είναι δυνατό να δοθεί γενικός κανόνας σχετικά με τον αριθμό ή το μέγεθος των στοιχείων ή τον τρόπο διακριτοποίησης που απαιτούνται για επαρκή ακρίβεια. Σε κάθε περίπτωση ο τρόπος διακριτοποίησης πρέπει να βασίζεται στην εμπειρία συμπεριφοράς και μελέτης παρόμοιων κατασκευών. Εάν αυτό δεν είναι εφικτό πρέπει να επιλυθεί σειρά προβλημάτων με διαφορετικές διακριτοποιήσεις και να υπολογισθεί ο βαθμός σύγκλισης στην ακριβή λύση. Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται η ακρίβεια της λύσης για το συγκεκριμένο πρόβλημα (Σχήμα 3).

Στο Σχήμα 4 δείχνεται ότι η εξωτερική φόρτιση παριστάνεται με σύνολα αντίστοιχων σημειακών φορτίων τα οποία εφαρμόζονται στους κόμβους των στοιχείων. Στην περίπτωση συγκεντρωμένων φορτίων ο προφανής τρόπος είναι να επιλεγεί κόμβος στο σημείο εφαρμογής του φορτίου. Για καταναμεμημένα φορτία πρέπει να επιλεγούν στατικά ισοδύναμα σημειακά φορτία στους αντίστοιχους κόμβους. Τα περισσότερα στοιχεία επίπεδης εντατικής κατάστασης δεν έχουν στρεπτικό βαθμό ελευθερίας και συνεπώς δεν είναι δυνατό να γίνει χρήση αντίστοιχων ροπών στους κόμβους.

Αυτό δεν είναι όμως σοβαρό πρόβλημα διότι οι κόμβοι είναι αρκετά κοντά ο ένας στον άλλο και έτσι οι δυνάμεις στους κόμβους αποτελούν ικανοποιητική προσομοίωση του καταναμεμημένου φορτίου. Για παράδειγμα, το Σχήμα 4 δείχνει



Σχήμα 3 Βαθμιαία ελάττωση του μεγέθους των στοιχείων



Σχήμα 4 Ισοδύναμα επικόμβια φορτία

τον κορμό της δοκού που θεωρήθηκε προηγουμένως, με μήκος 6 m και κατανεμημένο φορτίο 10 kN/m. Η επιλογή των ισοδύναμων φορτίων στους κόμβους είναι προφανής και δίνεται στο σχήμα αυτό.

3. Θεμελίωση της ΜΠΣ με τη μέθοδο των μετατοπίσεων

3.1 Γενικά

Ο πλέον διαδεδομένος τρόπος διατύπωσης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για γραμμικά στατικά προβλήματα βασίζεται στη μέθοδο των μετατοπίσεων. Άλλοι τρόποι κάνουν χρήση της ισορροπίας δυνάμεων, ή άλλων υβριδικών ή και μικτών μεθόδων. Τα βασικά στάδια της μεθόδου είναι:

1. Η προσομοίωση (διακριτοποίηση) της κατασκευής με ένα σύνολο στοιχείων που συνδέονται σε συνοριακούς κόμβους.
2. Ο προσδιορισμός των γενικευμένων (άγνωστων) μετατοπίσεων που θα καθορίσουν πλήρως την απόκριση της κατασκευής.
3. Η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας που αντιστοιχούν στις άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις και η επίλυσή τους.
4. Ο υπολογισμός των εσωτερικών κατανομών των τάσεων των στοιχείων, για δεδομένες μετατοπίσεις στους κόμβους.
5. Η ερμηνεία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, (μετατοπίσεις και τάσεις), με βάση τις δεδομένες παραδοχές του προβλήματος.

Κατά την πρακτική μελέτη της συμπεριφοράς κατασκευών, από τα πιο σημαντικά βήματα της όλης διαδικασίας είναι η κατάλληλη διακριτοποίηση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων της ανάλυσης. Για να επιτευχθεί σωστή διακριτοποίηση πρέπει να θεωρηθούν διάφορα μοντέλα, το οποία σταδιακά γίνονται περισσότερο σύνθετα. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στο Κεφάλαιο 8 όσον αφορά την πρακτική χρήση προγραμμάτων ΠΣ.

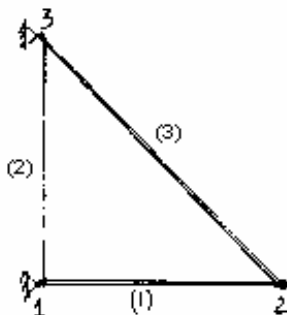
Το γενικό μητρώο ακαμψίας που αντιστοιχεί στο σύνολο των στοιχείων της κατασκευής, αποκτάται με τη μέθοδο της άμεσης σύνθεσης των ακαμψιών, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$K = \sum_m K^{(m)} \quad (1)$$

Για να αποκτηθεί το άθροισμα των ακαμψιών οι ακαμψίες των επί μέρους στοιχείων διατυπώνονται ως μητρώα ίδιας τάξης με το γενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής, στα οποία οι όροι που αντιστοιχούν με τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ίσοι με μηδέν.

Παράδειγμα 1

Να συνταχθεί το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής του σχήματος.



Σχήμα 5 Κατασκευή αποτελούμενη από τρία στοιχεία

Το διάνυσμα των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\mathbf{F}'^T = \begin{bmatrix} F'_{x1} & F'_{y1} & F'_{x2} & F'_{y2} & F'_{x3} & F'_{y3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ενώ το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους είναι:

$$\mathbf{u}'^T = \begin{bmatrix} u'_1 & v'_1 & u'_2 & v'_2 & u'_3 & v'_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Λύση

Η μητρική εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου 1 είναι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}'^{(1)}_{x1} \\ \mathbf{F}'^{(1)}_{y1} \\ \mathbf{F}'^{(1)}_{x2} \\ \mathbf{F}'^{(1)}_{y2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k'^{(1)}_{11} & k'^{(1)}_{12} & k'^{(1)}_{13} & k'^{(1)}_{14} \\ k'^{(1)}_{21} & k'^{(1)}_{22} & k'^{(1)}_{23} & k'^{(1)}_{24} \\ k'^{(1)}_{31} & k'^{(1)}_{32} & k'^{(1)}_{33} & k'^{(1)}_{34} \\ k'^{(1)}_{41} & k'^{(1)}_{42} & k'^{(1)}_{43} & k'^{(1)}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Η μητρική εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου 2 είναι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{F}'^{(2)}_{x1} \\ \mathbf{F}'^{(2)}_{y1} \\ \mathbf{F}'^{(2)}_{x3} \\ \mathbf{F}'^{(2)}_{y3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k'^{(2)}_{11} & k'^{(2)}_{12} & k'^{(2)}_{13} & k'^{(2)}_{14} \\ k'^{(2)}_{21} & k'^{(2)}_{22} & k'^{(2)}_{23} & k'^{(2)}_{24} \\ k'^{(2)}_{31} & k'^{(2)}_{32} & k'^{(2)}_{33} & k'^{(2)}_{34} \\ k'^{(2)}_{41} & k'^{(2)}_{42} & k'^{(2)}_{43} & k'^{(2)}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5a)$$

Η μητρική εξίσωση ισορροπίας του στοιχείου 3 είναι:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{F}'^{(3)}_{x2} \\ \mathbf{F}'^{(3)}_{y2} \\ \mathbf{F}'^{(3)}_{x3} \\ \mathbf{F}'^{(3)}_{y3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k'^{(3)}_{11} & k'^{(3)}_{12} & k'^{(3)}_{13} & k'^{(3)}_{14} \\ k'^{(3)}_{21} & k'^{(3)}_{22} & k'^{(3)}_{23} & k'^{(3)}_{24} \\ k'^{(3)}_{31} & k'^{(3)}_{32} & k'^{(3)}_{33} & k'^{(3)}_{34} \\ k'^{(3)}_{41} & k'^{(3)}_{42} & k'^{(3)}_{43} & k'^{(3)}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \quad (5\beta)
\end{aligned}$$

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η αντιστοιχία βαθμών ελευθερίας στο τοπικό και το γενικό σύστημα αναφοράς, σύμφωνα με τα παραπάνω μητρώα.

Στοιχείο	Τοπική αρίθμηση	Γενική αρίθμηση
(1)	1	1
	2	2
(2)	1	1
	2	3
(3)	1	2
	2	3

Επιβάλλουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στους κόμβους της κατασκευής. Για παράδειγμα, στον κόμβο 2 θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_{x2} &= \mathbf{F}'^{(1)}_{x2} + \mathbf{F}'^{(3)}_{x2} = \\
&= k'^{(1)}_{31} u'_1 + k'^{(1)}_{32} v'_1 + k'^{(1)}_{33} u'_2 + k'^{(1)}_{34} v'_2 + \\
&\quad + k'^{(3)}_{11} u'_2 + k'^{(3)}_{12} v'_2 + k'^{(3)}_{13} u'_3 + k'^{(3)}_{14} v'_3 = \\
&= k'^{(1)}_{31} u'_1 + k'^{(1)}_{32} v'_1 + [k'^{(1)}_{33} + k'^{(3)}_{11}] u'_2 + [k'^{(1)}_{34} + k'^{(3)}_{12}] v'_2 + \\
&\quad + k'^{(3)}_{13} u'_3 + k'^{(3)}_{14} v'_3 \quad (6\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'_{y2} &= \mathbf{F}'^{(1)}_{y2} + \mathbf{F}'^{(3)}_{y2} = \\
&= k'^{(1)}_{41} u'_1 + k'^{(1)}_{42} v'_1 + k'^{(1)}_{43} u'_2 + k'^{(1)}_{44} v'_2 + \\
&\quad + k'^{(3)}_{21} u'_2 + k'^{(3)}_{22} v'_2 + k'^{(3)}_{23} u'_3 + k'^{(3)}_{24} v'_3 \\
&= k'^{(1)}_{41} u'_1 + k'^{(1)}_{42} v'_1 + [k'^{(1)}_{43} + k'^{(3)}_{21}] u'_2 + [k'^{(1)}_{44} + k'^{(3)}_{22}] v'_2 + \\
&\quad + k'^{(3)}_{23} u'_3 + k'^{(3)}_{24} v'_3 \quad (6\beta)
\end{aligned}$$

Σύνθεση του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής

$$\begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(3)} & k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(3)} & k_{13}^{(3)} & k_{14}^{(3)} \\ k_{41}^{(1)} & k_{42}^{(1)} & k_{43}^{(1)} + k_{21}^{(3)} & k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(3)} & k_{23}^{(3)} & k_{24}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

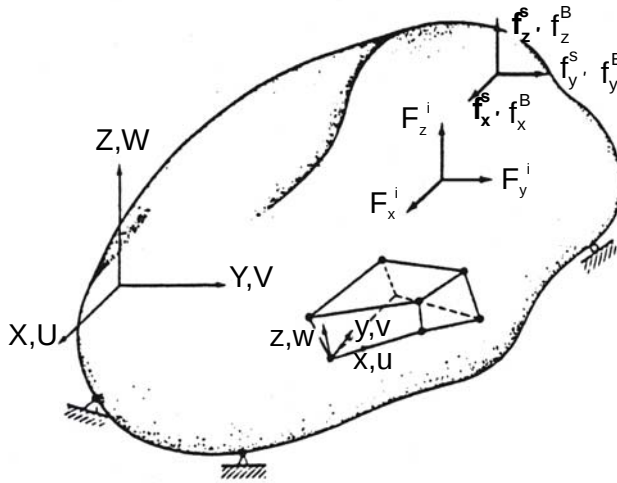
Παρομοίως και από τις συνθήκες ισορροπίας στους άλλους κόμβους. Επομένως, εισάγονται οι όροι στο γενικό μητρώο ακαμψίας κατά τρόπο ώστε να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ της τοπικής και της γενικής αρίθμησης.

Στοιχείο	Τοπική αρίθμηση		Γενική αρίθμηση		Σειρά στο διάνυσμα μετατοπίσεων
(1)	1	u'_1	1	u'_1	1
		v'_1		v'_1	2
	2	u'_2	2	u'_2	3
		v'_2		v'_2	4
(2)	1	u'_1	1	u'_1	1
		v'_1		v'_1	2
	2	u'_2	3	u'_3	5
		v'_2		v'_3	6
(3)	1	u'_1	2	u'_2	3
		v'_1		v'_2	4
	2	u'_1	3	u'_3	5
		v'_1		v'_3	6

3.2 Εξισώσεις ισορροπίας κατά τη ΜΠΣ

Θεωρούμε την ισορροπία ενός τρισδιάστατου σώματος στο οποίο ασκούνται επιφανειακά (κατανεμημένα) φορτία $\mathbf{f}^S$, σωματειακά (αδρανειακά) φορτία $\mathbf{f}^B$, και συγκεντρωμένα φορτία $\mathbf{F}^i$. Τα φορτία αυτά περιλαμβάνουν όλα τα εξωτερικά φορτία και αντιδράσεις και κατά κανόνα έχουν τρεις συνισταμένες:

$$\mathbf{f}^B = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^S = \begin{bmatrix} f_x^S \\ f_y^S \\ f_z^S \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}^i = \begin{bmatrix} f_x^i \\ f_y^i \\ f_z^i \end{bmatrix} \quad (8\alpha-\gamma)$$



Σχήμα 6 Στερεό σώμα υπό την επίδραση γενικευμένων φορτίων

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων του σώματος από την αφόρτιστη κατάσταση συμβολίζεται με U , όπου $U^T = [U \ V \ W]$. Το αντίστοιχο διάνυσμα των παραμορφώσεων είναι:

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \quad (9)$$

Όπου

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial Y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial Z} \quad (10\alpha-\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (11\alpha-\gamma)$$

Το διάνυσμα των τάσεων είναι:

$$\sigma^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \quad (12)$$

Υποθέτουμε ότι τα εξωτερικά φορτία είναι γνωστά και ότι ζητούμενα είναι οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις. Για την επίλυση του προβλήματος της απόκρισης του σώματος θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες θα έπρεπε να επιλυθούν για συγκεκριμένες οριακές συνθήκες και συμβιβαστότητες. Οι διαφορικές εξισώσεις αποκτώνται είτε θεωρώντας όλα τα φορτία που ασκούνται στο σώμα (άμεση μέθοδος) είτε με τη μέθοδο

του λογισμού μεταβολών. Μπορούμε όμως να κάνουμε χρήση και της αρχής των δυνατών έργων, η οποία διατυπώνεται ως εξής (Κεφάλαιο 1):

Ένα σώμα ισορροπεί, όταν το συνολικό εσωτερικό δυνατό έργο ισούται με το εξωτερικό δυνατό έργο για μικρές συμβιβαστές δυνατές μετατοπίσεις οι οποίες ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες.

Δηλαδή,

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \bar{\boldsymbol{U}}^T \boldsymbol{f}^B dV + \int_S \bar{\boldsymbol{U}}^S{}^T \boldsymbol{f}^S dS + \sum_i \bar{\boldsymbol{U}}^i{}^T \boldsymbol{F}^i \quad (13)$$

Το εσωτερικό δυνατό έργο δίνεται από το αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης και ισούται με το έργο που παράγεται όταν οι τάσεις $\boldsymbol{\sigma}$ αντιστοιχούν σε δυνατές παραμορφώσεις $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, οι οποίες οφείλονται σε εξωτερικές δυνατές μετατοπίσεις.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = [\bar{\varepsilon}_{xx} \quad \bar{\varepsilon}_{yy} \quad \bar{\varepsilon}_{zz} \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{zx}] \quad (14)$$

Το εξωτερικό δυνατό έργο δίνεται από το δεξιό σκέλος της (13) και ισούται με τα γινόμενα των πραγματικών φορτίων $\boldsymbol{f}^B$, $\boldsymbol{f}^S$, και $\boldsymbol{F}^i$ με τις αντίστοιχες δυνατές μετατοπίσεις $\boldsymbol{U}$, όπου:

$$\bar{\boldsymbol{U}}^T = [\bar{\boldsymbol{U}} \quad \bar{\boldsymbol{V}} \quad \bar{\boldsymbol{W}}] \quad (15)$$

Οι εκθέτες S και i υποδηλώνουν αντίστοιχα τις μετατοπίσεις σε κόμβους της επιφάνειας και τις μετατοπίσεις των σημείων που εφαρμόζονται φορτία $\boldsymbol{F}^i$.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, κατά τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ένα στερεό συνεχές σώμα αντικαθίσταται από ένα άθροισμα διακριτών πεπερασμένων στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους στους συνοριακούς κόμβους. Υποθέτουμε ότι οι μετατοπίσεις που υπολογίζονται στο τοπικό σύστημα αναφοράς (x, y, z) στο εσωτερικό κάθε στοιχείου είναι συνάρτηση των μετατοπίσεων στους N κόμβους του σώματος. Συνεπώς για το m -οστό στοιχείο:

$$\boldsymbol{u}^{(m)}(x, y, z) = \boldsymbol{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\boldsymbol{U}} \quad (16)$$

όπου $\boldsymbol{H}^{(m)}$ είναι το μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων, ο εκθέτης m υποδηλώνει το m -οστό στοιχείο και $\hat{\boldsymbol{U}}$ είναι το διάνυσμα των συνιστωσών των μετατοπίσεων U_i , V_i , W_i , σε όλους τους κόμβους, στο γενικό σύστημα αναφοράς. Το μητρώο $\hat{\boldsymbol{U}}$ είναι συνεπώς διάνυσμα με $3N$ όρους,

$$\hat{\boldsymbol{U}}^T = [U_1 V_1 W_1 \quad U_2 V_2 W_2 \quad \dots \quad U_N V_N W_N] \quad (17)$$

Συνήθως το παραπάνω διάνυσμα γράφεται ως εξής:

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \mathbf{U}_3 \quad \dots \quad \mathbf{U}_N] \quad (18)$$

Για ένα δεδομένο στοιχείο μόνο οι μετατοπίσεις στους κόμβους που γειτονεύουν με αυτό επηρεάζουν τις μετατοπίσεις στο εσωτερικό του. Οι παραμορφώσεις του m -οστού στοιχείου είναι τότε:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad (19)$$

όπου $\mathbf{B}^{(m)}$ είναι το *μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων*. Τα στοιχεία του μητρώου $\mathbf{B}^{(m)}$ λαμβάνονται με παραγωγή των όρων του μητρώου $\mathbf{H}^{(m)}$ σύμφωνα με τη σχέση $\mathbf{B}^{(m)} = \partial \mathbf{H}$, όπου η ανηγμένη μορφή του μητρώου $\partial \mathbf{H}$ περιλαμβάνει τις παραγώγους από τις εξισώσεις συμβιβαστότητας των παραμορφώσεων και μετατοπίσεων. Οι τάσεις $\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{E}^{(m)}(x, y, z) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} + \boldsymbol{\sigma}_i^{(m)} \quad (20)$$

όπου $\mathbf{E}^{(m)}$ είναι το *μητρώο ελαστικότητας* του στοιχείου m και $\boldsymbol{\sigma}_i^{(m)}$ είναι το διάνυσμα των αρχικών (προηγούμενων) τάσεων του στοιχείου. Από τη σχέση (16) είμαστε σε θέση να αποκτήσουμε τις μετατοπίσεις στους κόμβους. Αρχικά όμως ξαναγράφουμε την (13) ως άθροισμα ολοκληρωμάτων στους χώρους των στοιχείων.

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}^{(m)} dV^{(m)} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} + \\ &+ \sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}} \bar{\mathbf{U}}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} + \sum_m \bar{\mathbf{U}}^i{}^T \mathbf{F}^i \end{aligned} \quad (21)$$

όπου $m = 1, 2, \dots, k$, $S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}$ είναι οι περιοχές της επιφάνειας του σώματος και k = αριθμός στοιχείων. Για τους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε στοιχείο εξυπηρετεί η χρήση τοπικών συστημάτων αναφοράς. Εάν αντικαταστήσουμε στη σχέση (13) τις μετατοπίσεις, παραμορφώσεις και τάσεις καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \hat{\mathbf{U}} &= \bar{\mathbf{U}}^T \left[\left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} \right] + \right. \\ &+ \left[\sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \right] - \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}_i^{(m)} dV^{(m)} \right] + \mathbf{F}_C \end{aligned} \quad (22)$$

Τα μητρώα συμβιβαστού των επιφανειακών μετατοπίσεων $\mathbf{H}^{S(m)}$ δίνονται τώρα από τα μητρώα συμβιβαστού των μετατοπίσεων στο εσωτερικό των στοιχείων $\mathbf{H}^{(m)}$ αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες της επιφάνειας των στοιχείων. Το διάνυσμα $\mathbf{F}_c$ περιλαμβάνει τις συγκεντρωμένες φορτίσεις στους κόμβους του σώματος. Παρατηρούμε ότι η i -οστή συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{F}_c$ παριστάνει τη συγκεντρωμένη δύναμη στον κόμβο που αντιστοιχεί στην i -οστή συνιστώσα της μετατόπισης του $\hat{\mathbf{U}}$. Τα διανύσματα των κομβικών μετατοπίσεων είναι ανεξάρτητα του θεωρούμενου στοιχείου και γι' αυτό δεν συμπεριλαμβάνονται στην άθροιση.

Για να λάβουμε τις εξισώσεις των αγνώστων κομβικών μετατοπίσεων από τη σχέση (22) εφαρμόζουμε την αρχή των δυνατών έργων n φορές επιβάλλοντας μοναδιαίες μετατοπίσεις σε όλες τις συνιστώσες του $\hat{\mathbf{U}}$, σε όλους τους κόμβους. Με αυτό τον τρόπο έχουμε, κατά την πρώτη εφαρμογή,

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_1$$

και ορίζουμε τις μετατοπίσεις με το μητρώο $\mathbf{U}$ (έχουμε δηλαδή $\hat{\mathbf{U}} \equiv \mathbf{U}$). Κατά τη δεύτερη εφαρμογή έχουμε:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_2$$

κ.ο.κ., μέχρι τη n -οστή, $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{e}_n$. Ορίζουμε τότε τις άγνωστες μετατοπίσεις στους κόμβους ως $\mathbf{U}$, δηλαδή $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}$. Οι εξισώσεις ισορροπίας των μετατοπίσεων στους κόμβους είναι τότε:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (23)$$

$$\text{όπου } \mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S - \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_C \quad (24)$$

Το μητρώο ακαμψιών $\mathbf{K}$ για το σύνολο των στοιχείων δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{K} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}}_{\mathbf{K}^{(m)}} = \sum_m \mathbf{K}^{(m)} \quad (25)$$

Το διάνυσμα των φορτίων περιλαμβάνει τα σωματειακά (αδρανειακά) φορτία, τα επιφανειακά φορτία και τις αρχικές τάσεις.

$$\mathbf{F}_B = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)}}_{\mathbf{F}_B^{(m)}} = \sum_m \mathbf{F}_B^{(m)} \quad (26)$$

$$\mathbf{F}_S = \sum_m \underbrace{\int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S^{(m)T}} \mathbf{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)}}_{\mathbf{F}_S^{(m)}} = \sum_m \mathbf{F}_S^{(m)} \quad (27)$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}^{(m)} dV^{(m)}}_{\mathbf{F}_i^{(m)}} = \sum_m \mathbf{F}_i^{(m)} \quad (28)$$

Τα συγκεντρωμένα φορτία είναι $\mathbf{F}_C = \mathbf{F}$. Σημειώνεται ότι, όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις, τα διανύσματα $\mathbf{F}_B$, $\mathbf{F}_S$, $\mathbf{F}_i$ και $\mathbf{F}_C$ συγκροτούνται με απευθείας άθροιση των αντίστοιχων διανυσμάτων για κάθε στοιχείο.

Εάν οι δυνάμεις μεταβάλλονται στο χρόνο (δυναμικές φορτίσεις), πρέπει να συμπεριληφθούν και οι αντίστοιχες αδρανειακές δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας την αρχή του d' Alembert προσθέτουμε τις αδρανειακές δυνάμεις στο μητρώο των σωματειακών δυνάμεων. Εάν υποθέσουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τις επιταχύνσεις κατά τον ίδιο τρόπο με τις μετατοπίσεις, (σχέση (9)), η συμβολή των αδρανειακών δυνάμεων στο διάνυσμα των φορτίων $\mathbf{F}$ είναι (με αμετάθετο το σύστημα αναφοράς *Oxyz*),

$$\mathbf{F}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left[\mathbf{f}^{B^{(m)}} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} \right] dV^{(m)} \quad (29)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{f}^{B^{(m)}}$ δεν περιλαμβάνει πλέον αδρανειακές (σωματειακές) δυνάμεις, το διάνυσμα $\ddot{\mathbf{U}}$ περιλαμβάνει τις επιταχύνσεις σε κάθε κόμβο και $\rho^{(m)}$ είναι η πυκνότητα του m -οστού στοιχείου. Η εξίσωση ισορροπίας γράφεται τώρα:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (30)$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{F}$ και $\mathbf{U}$ εξαρτώνται πλέον από τον χρόνο. Το μητρώο $\mathbf{M}$ είναι το *μητρώο μάζας* του σώματος:

$$\mathbf{M} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \mathbf{M}^{(m)} \quad (31)$$

Για να συμπεριληφθεί και η επίδραση της απόσβεσης προστίθενται οι αντίστοιχοι όροι στο διάνυσμα των σωματειακών φορτίων $\mathbf{F}_B$:

$$\mathbf{F}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left[\mathbf{f}^{B^{(m)}} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} - \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{U}} \right] dV^{(m)} \quad (32)$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{f}^{B(m)}$ δεν περιλαμβάνουν πλέον όρους αδράνειας και απόσβεσης, το διάνυσμα $\dot{\mathbf{U}}$ περιλαμβάνει τις κομβικές ταχύτητες και $\kappa^{(m)}$ είναι το διάνυσμα απόσβεσης του m -οστού στοιχείου. Η εξίσωση ισορροπίας είναι τότε:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (33)$$

όπου $\mathbf{C}$ είναι το μητρώο απόσβεσης της κατασκευής που δίνεται από τη σχέση:

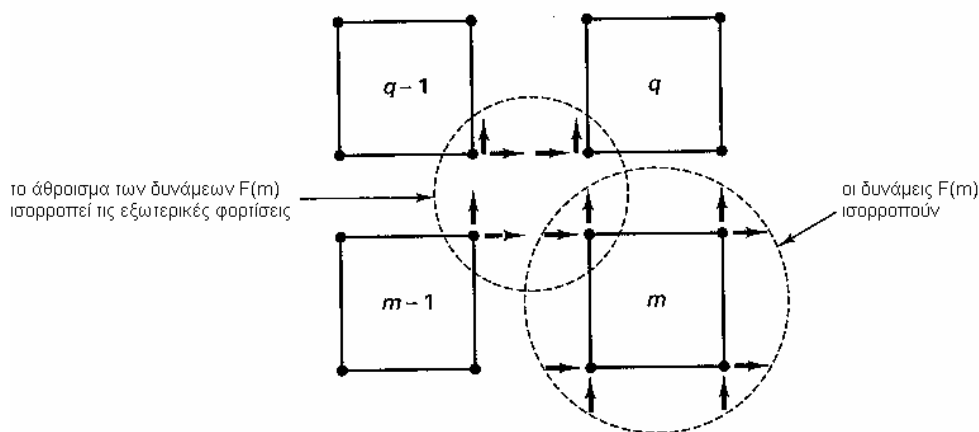
$$\mathbf{C} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)^T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \mathbf{C}^{(m)} \quad (34)$$

Επειδή στην πράξη δεν είναι εύκολη η συγκρότηση του μητρώου $\mathbf{C}$ από τα χαρακτηριστικά απόσβεσης κάθε στοιχείου, χρησιμοποιούνται τα μητρώα μάζας και ακαμψίας ολόκληρης της κατασκευής σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα για το βαθμό απόσβεσης των ταλαντώσεων.

3.3 Ισορροπία δυνάμεων στη ΜΠΣ

Στη ΜΠΣ δεν ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας στη διαφορική τους μορφή, δηλαδή δεν ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας σε κάθε σημείο του συνεχούς μέσου. Υπάρχουν όμως δύο βασικές συνθήκες οι οποίες ικανοποιούνται πάντοτε από τη λύση του προβλήματος, ανεξάρτητα του αριθμού των στοιχείων που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη διακριτοποίηση. Αυτές είναι:

1. Ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε κόμβο
2. Ισορροπία των κομβικών δυνάμεων για κάθε στοιχείο



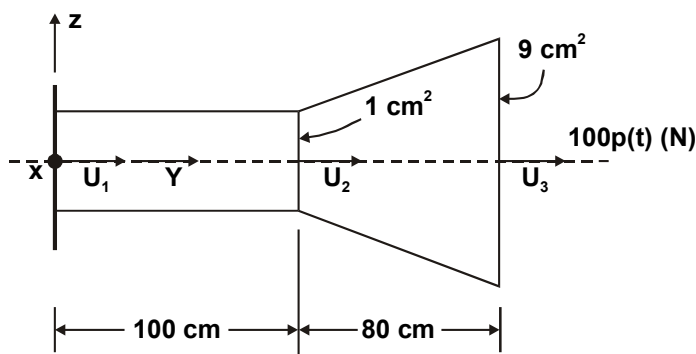
Σχήμα 7 Ισορροπία δυνάμεων σε κόμβο πλέγματος και στο εσωτερικό στοιχείου

Σε κάθε κόμβο οι εσωτερικές δυνάμεις (δηλαδή οι δυνάμεις που αντιστοιχούν στο εντατικό πεδίο ενός στοιχείου) ισορροπούν τις εξωτερικά ασκούμενες δυνάμεις, οι οποίες περιλαμβάνουν τις αδρανειακές δυνάμεις, τα συγκεντρωμένα φορτία, τις επιφανειακές δυνάμεις, τις δυνάμεις λόγω παραμενουσών τάσεων και τις αντιδράσεις στα σημεία στήριξης.

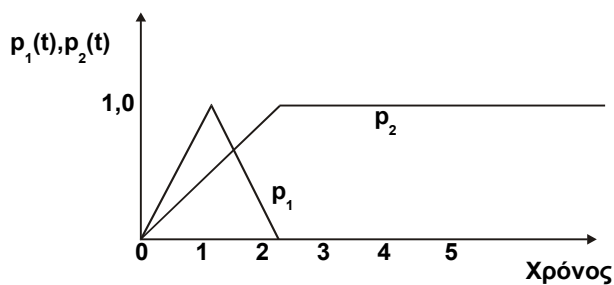
Στο Σχήμα 7 δείχνονται οι δυνάμεις στο εσωτερικό στοιχείου που ισορροπούν.

Παράδειγμα 2

Να διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής (δοκού) του σχήματος. Κατά την επίλυση θεωρήσατε α) ότι η φόρτιση επιβάλλεται αργά σε σύγκριση με τις ιδιοσυχνότητες ταλαντώσεων της κατασκευής, β) ότι η φόρτιση επιβάλλεται ραγδαία στην κατασκευή και επιφέρει δυναμική απόκριση. Αρχικά η κατασκευή είναι σε κατάσταση ηρεμίας.



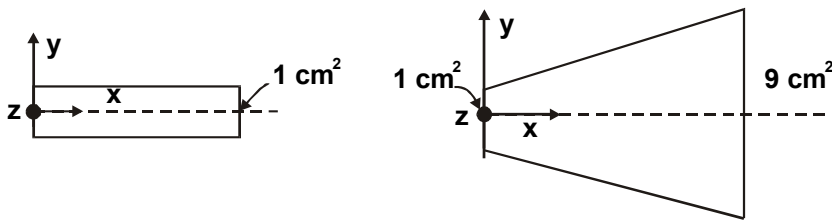
α) Γεωμετρία της δοκού (διακριτοποίηση στο γ.σ.α.)



Στοιχείο 1: $f_x^B = p_2(t) \text{ N/cm}^2$

Στοιχείο 2: $f_x^B = p_1(t) \text{ N/cm}^2$

(β) Διακριτοποίηση της κατασκευής σε δύο στοιχεία-δοκούς (τ.σ.α.)



γ) Μεταβολή εξωτερικών φορτίων στο χρόνο

Σχήμα 8 Κατασκευή και διακριτοποιημένη μορφή της

Λύση

Η γενική διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας των πεπερασμένων στοιχείων περιλαμβάνει όλες τις πιθανές εντατικές καταστάσεις. Στο παράδειγμα αυτό όμως οι μόνες μη-μηδενικές τάσεις είναι οι παράλληλες με τον άξονα Ογ. Θεωρούμε ότι η δοκός υποδιαιρείται σε δύο στοιχεία-δοκούς για τα οποία οι μετατοπίσεις μεταβάλλονται γραμμικά μεταξύ των κόμβων. Κατά τη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας θεωρούμε ότι η μετατόπιση στο εσωτερικό των στοιχείων μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ των κόμβων στα άκρα τους.

Το πρώτο βήμα συνίσταται στη συγκρότηση των μητρώων $\mathbf{H}^{(m)}$ και $\mathbf{B}^{(m)}$ για $m = 1, 2$. Σε μητρωική μορφή η σχέση (16) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(1)} & H_2^{(1)} & H_3^{(1)} \\ H_1^{(2)} & H_2^{(2)} & H_3^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Εφόσον για $x=0$ $u^{(1)}=U_1$ και για $x=100$ $u^{(2)}=U_2$, η συνάρτηση παρεμβολής είναι:

$$(1-x/100)U_1 + (x/100)U_2 = u^{(1)}$$

Συνεπώς, για το διάνυσμα των μετατοπίσεων $\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3]$ έχουμε:

$$\mathbf{H}^{(1)T} = \begin{bmatrix} (1-x/100) & x/100 & 0 \end{bmatrix} \quad (36\alpha)$$

$$\mathbf{H}^{(2)T} = \begin{bmatrix} 0 & (1-x/80) & x/80 \end{bmatrix} \quad (36\beta)$$

και επειδή για την προκειμένη περίπτωση, $\mathbf{B} = \partial \mathbf{H} / \partial x$ έχουμε:

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/100 & 1/100 & 0 \end{bmatrix} \quad (37\alpha)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} \quad (37\beta)$$

Τα μητρώα ελαστικότητας είναι $\mathbf{E}^{(1)} = E$, $\mathbf{E}^{(2)} = E$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Για τις ολοκληρώσεις στον όγκο των στοιχείων απαιτούνται τα εμβαδά των διατομών. Έχουμε:

$$A^{(1)} = 1 \text{ cm}^2 \quad \text{και} \quad A^{(2)} = (1+x/40)^2 \text{ cm}^2$$

Όταν τα φορτία επιβάλλονται αργά, απαιτείται στατική ανάλυση για την οποία υπολογίζεται το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{K}$ και το διάνυσμα των φορτίων $\mathbf{F}$. Για το παράδειγμα αυτό:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_m \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \\ &= A^{(1)} \int_V \mathbf{B}^{(1)T} \mathbf{E} \mathbf{B}^{(1)} dx + \int_V A^{(2)} \mathbf{B}^{(2)T} \mathbf{E} \mathbf{B}^{(2)} dx = \\ &= (1)E \int_0^{100} \begin{bmatrix} -1/100 \\ 1/100 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/100 & 1/100 & 0 \end{bmatrix} dx + \\ &\quad + E \int_0^{80} (1+x/40)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1/80 \\ 1/80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1/80 & 1/80 \end{bmatrix} dx \\ \text{ή} \quad \mathbf{K} &= \frac{E}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{240} \begin{bmatrix} 2,4 & -2,4 & 0 \\ -2,4 & 15,4 & -13 \\ 0 & -13 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= \begin{bmatrix} (1) \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1-x/100 \\ x/100 \\ 0 \end{bmatrix} (1) dx + \\ &\quad + \int_0^{80} (1+x/40)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1-x/80 \\ x/80 \end{bmatrix} (1/10) dx \end{bmatrix} p_2(t) = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 150 \\ 186 \\ 68 \end{bmatrix} p_2(t) \end{aligned} \quad (39\alpha)$$

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} p_1(t) \quad (39\beta)$$

Για να αποκτηθεί λύση για συγκεκριμένο χρόνο t^* πρέπει να υπολογισθούν τα διανύσματα $\mathbf{F}_B$ και $\mathbf{F}_C$ στο χρόνο αυτό. Η εξίσωση:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} \big|_{t=t^*} = \mathbf{F}_b \big|_{t=t^*} + \mathbf{F}_c \big|_{t=t^*} \quad (40)$$

δίνει τις μετατοπίσεις στο χρόνο t^* . Για να επιλύσουμε το δυναμικό πρόβλημα πρέπει να υπολογίσουμε το μητρώο μάζας της κατασκευής. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & (1)\rho \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1-x/100 \\ x/100 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-x/100) & x/100 & 0 \end{bmatrix} dx + \\ & + \rho \int_0^{80} (1+x/40)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1-x/80 \\ x/80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1-x/80 & x/80 \end{bmatrix} dx \end{aligned} \quad (41)$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 584 & 336 \\ 0 & 336 & 1024 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Επειδή στο παράδειγμα αυτό δεν λαμβάνεται υπόψη η απόσβεση, οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

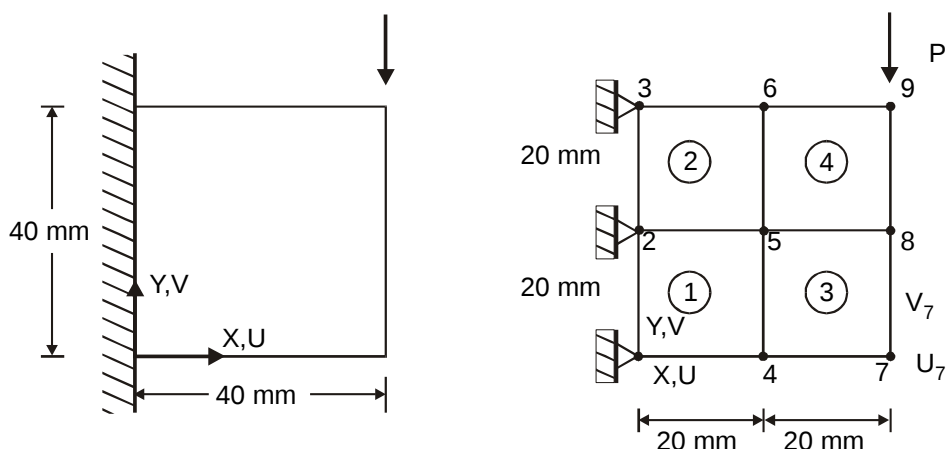
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}_B(t) + \mathbf{F}_C(t) \quad (43\alpha)$$

$$\text{Οι αρχικές συνθήκες είναι:} \quad \mathbf{U} \big|_{t=0} = 0 \quad \dot{\mathbf{U}} \big|_{t=0} = 0 \quad (43\beta)$$

και για να υπολογισθεί η λύση σε χρόνο t^* πρέπει να γίνει ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης (δυναμικής ισορροπίας) στο πεδίο $0 < t < t^*$.

Παράδειγμα 3

Να διατυπωθούν τα μητρώα α) ελαστικότητας $\mathbf{E}^{(2)}$, β) παρεμβολής των μετατοπίσεων $\mathbf{H}^{(2)}$ και γ) συμβιβαστού των παραμορφώσεων $\mathbf{B}^{(2)}$ για το έλασμα-πρόβολος του παρακάτω σχήματος. Επίσης να εξετασθεί η ισορροπία της κατασκευής με βάση τις δυνάμεις που προκύπτουν στους κόμβους του πλέγματος.



α) Έλασμα-πρόβολος

β) Διακριτοποίηση της κατασκευής

Σχήμα 9 Πραγματική κατασκευή και διακριτοποιημένη μορφή της*Λύση*

Σημειώνεται αρχικά ότι σε ένα πραγματικό πρόβλημα θα γινόταν χρήση περισσotέρων στοιχείων.

α) Επειδή ισχύουν συνθήκες επίπεδης εντατικής κατάστασης, χρησιμοποιείται το μητρώο συμβιβαστού για ισοτροπικό γραμμικά ελαστικό υλικό. Έτσι, για για το στοιχείο 2 θα έχουμε:

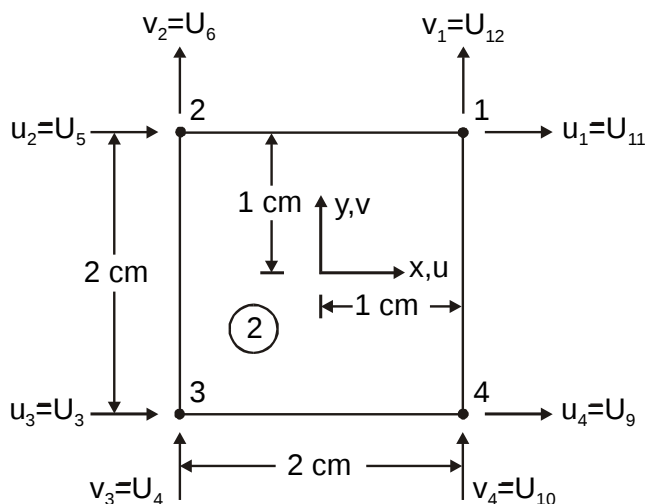
$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

β) Το μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων για το στοιχείο 2, $\mathbf{H}^{(2)}$, ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{U} \quad (45)$$

όπου $\mathbf{U}$ είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους της κατασκευής:

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_{17} \quad U_{18}] \quad (46)$$



Σχήμα 10 Στοιχείο δύο διαστάσεων με κόμβους στα άκρα
(τοπικό σύστημα αναφοράς)

Οι μετατοπίσεις που αφορούν στο στοιχείο 2 είναι αυτές των κόμβων 6, 3, 2 και 5. Για διευκόλυνση των υπολογισμών οι κόμβοι αριθμούνται όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα. Επειδή υπάρχουν τέσσερις κομβικές μετατοπίσεις με συνιστώσες $u(x, y)$, $v(x, y)$ η καθεμία μπορούμε να εκφράσουμε τις τοπικές μετατοπίσεις του στοιχείου με τις ακόλουθες πολυωνυμικές μορφές:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (47\alpha)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (47\beta)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές $a_1, \dots, a_8$ καλούνται γενικευμένες συντεταγμένες¹ και εκφράζονται συναρτήσεις των αγνώστων κομβικών μετατοπίσεων $u_1, u_2, \dots, u_4$, και $v_1, v_2, \dots, v_4$. Θέτοντας:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] \quad (48)$$

γράφουμε τις (47α) και (47β) σε μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{a} \quad (49)$$

$$\text{όπου } \Phi = \begin{bmatrix} \varphi & \theta \\ \theta & \varphi \end{bmatrix} \quad \varphi = [1 \ x \ y \ xy] \quad (50)$$

¹ γενικευμένη συντεταγμένη= generalised coordinate

$$\text{και } \boldsymbol{\alpha}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8] \quad (51)$$

Επειδή η σχέση (49) ισχύει για όλους τους κόμβους του στοιχείου, κάνοντας χρήση της (48) έχουμε:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} & \mathbf{A}_I \end{bmatrix} \\ \text{και } \mathbf{A}_I &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επιλύνοντας ως προς $\boldsymbol{\alpha}$ από την (52) έχουμε:

$$\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\alpha}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (49) λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}$$

άρα, το μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \quad (53)$$

Το μητρώο $\mathbf{H}$ ορίζεται συναρτήσει των μετατοπίσεων στους κόμβους στη (48):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+x)(1+y)(1-x)(1+y)(1-x)(1-y)(1+x)(1-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+x)(1+y)(1-x)(1+y)(1-x)(1-y)(1+x)(1-y) \end{bmatrix} \quad (54)$$

Εάν $\mathbf{H}_{(ij)}$ είναι το (i, j) -οστό στοιχείο του μητρώου $\mathbf{H}$, έχουμε:

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{matrix} \begin{matrix} u_3 & v_3 & u_2 & v_2 & u_4 & v_4 & u_1 & v_1 \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \end{matrix} & \begin{matrix} U_9 & U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & \dots & U_{18} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{13} & H_{17} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & H_{14} & H_{18} & H_{11} & H_{15} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H_{23} & H_{27} & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & H_{24} & H_{28} & H_{21} & H_{25} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (55)$$

γ) Το μητρώο του συμβιβαστού των παραμορφώσεων ορίζεται από τη σχέση (53). Για επίπεδες εντατικές καταστάσεις, οι παραμορφώσεις κάθε στοιχείου είναι:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}] \quad (56)$$

$$\text{όπου} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (57)$$

Το μητρώο συμβιβαστού των παραμορφώσεων, $\mathbf{B}$, αποκτάται από τις σχέσεις (19) και (53).

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{H} = \partial [\boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1}]$$

Εφόσον τα στοιχεία του $\mathbf{A}^{-1}$ είναι ανεξάρτητα των x και y , έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial [\boldsymbol{\Phi} \mathbf{A}^{-1}] &= [\partial \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{G} \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (58)$$

Παραγωγίζοντας το μητρώο $\boldsymbol{\Phi}$ κάνοντας χρήση των σχέσεων ∂ λαμβάνουμε:

$$\text{όπου} \quad \mathbf{G} = \partial \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\text{και} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) \\ (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) & (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) \end{bmatrix} \quad (60)$$

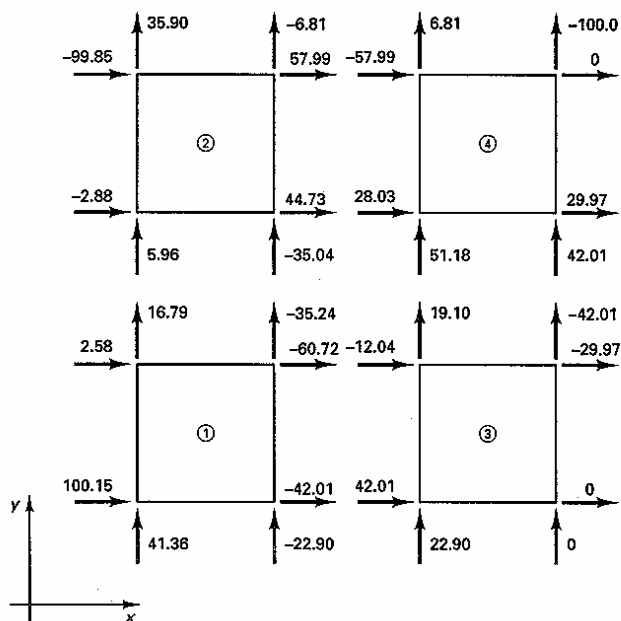
Το μητρώο $\mathbf{B}^{(2)}$ είναι τότε:

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} & B_{17} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & B_{14} & B_{18} & B_{11} & B_{15} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{27} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & B_{24} & B_{28} & B_{21} & B_{25} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{37} & B_{32} & B_{36} & 0 & 0 & B_{34} & B_{38} & B_{31} & B_{35} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε παραγωγίζοντας το μητρώο $\mathbf{H}$, που δίνεται από τη σχέση (54).

Η λύση του προβλήματος για $P=100$, $E=2,07 \times 10^6$, $\nu=0,30$ και $t=0,1$ δίνεται στο Σχήμα 11. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συνέχεια στις κατανομές των τάσεων κατά μήκος των συνόρων των στοιχείων. Αναφερόμενοι στην αρίθμηση των κόμβων του Σχήματος 11 έχουμε:

α) Ισορροπία κόμβων



Σχήμα 11 Δυνάμεις στους κόμβους του πλέγματος

Κόμβος 1 (αντιδράσεις)

$$R_x = 100,15$$

$$R_y = 41,36$$

Κόμβος 2 (αντιδράσεις)

$$R_x = 2,58 - 2,88 = -0,30$$

$$R_y = 16,79 + 5,96 = 22,74 \text{ (λόγω στρογγύλευσης)}$$

Κόμβος 3 (αντιδράσεις)

$$R_x = -99,85$$

$$R_y = -22,90 + 22,90 = 0$$

Κόμβος 4

Οριζόντια κατεύθυνση

$$R_x = -42,01 + 42,01 = 0$$

Κατακόρυφη κατεύθυνση

$$R_y = -22,90 + 22,90 = 0$$

Κόμβος 5

Οριζόντια κατεύθυνση

$$R_x = -60,72 - 12,04 + 44,73 + 28,03 = 0$$

Κατακόρυφη κατεύθυνση

$$R_y = -35,24 - 35,04 + 19,10 + 51,18 = 0$$

Κόμβος 6

$$\begin{aligned} \text{Οριζόντια κατεύθυνση} \quad R_x &= 57,99 - 57,99 = 0 \\ \text{Κατακόρυφη κατεύθυνση} \quad R_y &= -6,81 + 6,81 = 0 \end{aligned}$$

Στους κόμβους 7, 8 και 9 ικανοποιείται η συνθήκη ισορροπίας καθώς στον κόμβο 9 ασκείται η εξωτερική δύναμη $P = 100$.

β) Έλεγχος ισορροπίας όλης της κατασκευής

$$\begin{aligned} \text{Οριζόντια κατεύθυνση} \quad R_x &= 100,15 - 0,30 - 99,85 = 0 \\ \text{Κατακόρυφη κατεύθυνση} \quad R_y &= 41,36 + 22,74 + 35,90 - 100 = 0 \end{aligned}$$

Ισορροπία ροπών περί τον κόμβο 2

$$-(100)(4) + (100,15)(2) + (99,85)(2) = 0$$

γ) Ισορροπία στοιχείου 4

Οριζόντια κατεύθυνση

$$0 - 57,99 + 28,03 + 29,97 = 0 \text{ (λόγω στρογγύλευσης)}$$

Κατακόρυφη κατεύθυνση

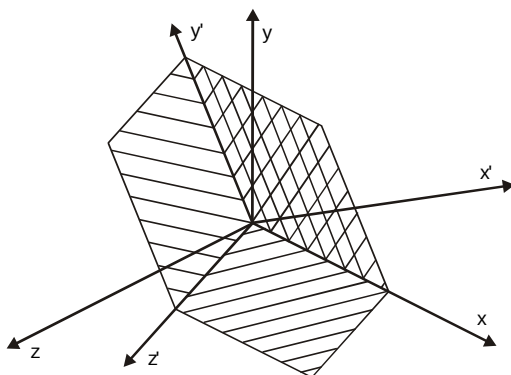
$$-100 + 6,81 + 51,18 + 42,01 = 0$$

Ροπή περί τον κόμβο 3

$$(-100)(2) + (57,99)(2) + (42,01)(2) = 0$$

Άρα οι δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους του στοιχείου 4 ισορροπούν.

3.4 Μετασχηματισμός συστημάτων αναφοράς



Σχήμα 12 Μετασχηματισμός συστημάτων αναφοράς

Κατά τον υπολογισμό των μητρώων των στοιχείων συνήθως εξυπηρετεί η χρήση *τοπικών συστημάτων αναφοράς* (τ.σ.α.). Η συγκρότηση των μητρώων στο *γενικό σύστημα αναφοράς* (γ.σ.α.) μπορεί να επιτευχθεί με τον προσδιορισμό των βαθμών ελευθερίας για τους οποίους αντιστοιχούν βαθμοί ελευθερίας και στα τοπικά συστήματα αναφοράς. Εάν εξετάσουμε τα μητρώα (για παράδειγμα τα $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$), στο γενικό σύστημα αναφοράς παρατηρούμε πως μόνο τα στοιχεία για τα οποία υπάρχουν αντίστοιχα και στο τοπικό σύστημα αναφοράς είναι μη-μηδενικά. Συνεπώς, εάν το ανηγμένο μητρώο $\hat{\mathbf{u}}$ περιλαμβάνει μόνο τους μη-μηδενικούς βαθμούς ελευθερίας, θα έχουμε:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \quad (62)$$

$$\text{και} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (63)$$

Στο τοπικό σύστημα αναφοράς ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (64)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (65)$$

$$\mathbf{F}_b = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^b dV \quad (66)$$

$$\mathbf{F}_s = \int_V \mathbf{H}^{s^T} \mathbf{f}^s dS \quad (67)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^i dV \quad (68)$$

Εάν το γ.σ.α. δε συμπίπτει με το τ.σ.α. τότε το διάνυσμα των μετατοπίσεων στο εσωτερικό του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \quad (69)$$

όπου οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{u}$ εκφράζονται ως προς το τ.σ.α. $Oxyz$. Αντιστοίχως, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (70)$$

Το *μητρώο μετασχηματισμού* $\mathbf{T}$ μετασχηματίζει τους βαθμούς ελευθερίας $\hat{\mathbf{u}}$ (στο γ.σ.α.) στους βαθμούς ελευθερίας $\tilde{\mathbf{u}}$ (στο τ.σ.α.) και αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό τανυστή πρώτου βαθμού. Οι όροι κάθε στήλης j του $\mathbf{T}$ είναι τα συνημίτονα διεύθυνσης μοναδιαίου μητρώου που αντιστοιχεί στον j -οστό βαθμό ελευθερίας του $\hat{\mathbf{u}}$ όταν υπολογίζεται στις διευθύνσεις των $\tilde{\mathbf{u}}$ βαθμών ελευθερίας. Επομένως,

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{u}} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (71\alpha-\beta)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (71β) στην (71α), έχουμε:

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{T} \quad (72)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τότε το σύμβολο ($\sim$) για να υποδηλώσουμε μητρώα που αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας $\tilde{\mathbf{u}}$, λαμβάνουμε από την (72) και τις (64-68):

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (73)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{T} \quad (74)$$

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{F}}_b \quad (75)$$

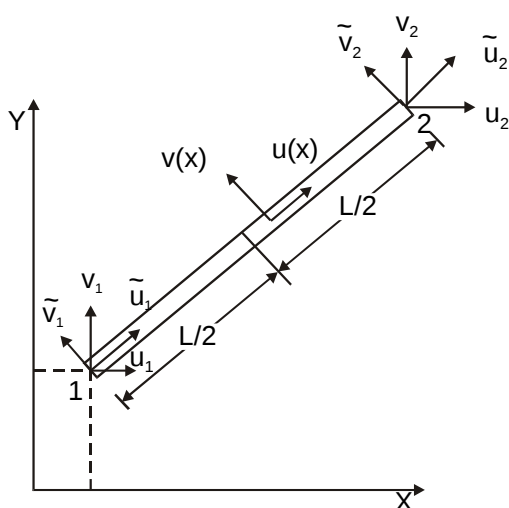
$$\mathbf{F}_s = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{F}}_s \quad (76)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{F}}_i \quad (77)$$

όπου το σύμβολο ($\sim$) ορίζει ότι τα μητρώα $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{M}}$ κλπ. αντιστοιχούν στο τ.σ.α. Τέλος, ας σημειωθεί ότι οι μετασχηματισμοί (73)-(77) χρησιμοποιούνται και όταν επιβάλλονται μετατοπίσεις στα σύνορα της κατασκευής οι οποίες δεν αντιστοιχούν στους β.ε. του γ.σ.α. της κατασκευής.

Παράδειγμα 4

Να υπολογισθεί το μητρώο παρεμβολής των μετατοπίσεων $\mathbf{H}$ του στοιχείου-ράβδου του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 13 Στοιχείο-ράβδος (σε γ.σ.α.)

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} (L/2-x) & 0 & (L/2+x) & 0 \\ 0 & (L/2-x) & 0 & (L/2+x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\text{και} \quad \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & 0 & -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} (L/2-x) & 0 & (L/2+x) & 0 \\ 0 & (L/2-x) & 0 & (L/2+x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & 0 & -\sin a & \cos a \end{bmatrix} \quad (80)$$

Σημειώνεται ότι για τη σύνταξη του μητρώου του συμβιβαστού των παραμορφώσεων $\mathbf{B}$ (γραμμική ανάλυση) απαιτείται μόνο ο πρώτος όρος του μητρώου $\mathbf{H}$, εφόσον η σχέση συμβιβαστού που χρησιμοποιείται είναι η $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$.

3.5 Επιβολή οριακών συνθηκών

3.5.1 Γενικά

Εάν υποθέσουμε ότι το σώμα που απεικονίζεται στο Σχήμα 6 φέρει φορτία τα οποία δεν ισορροπούν, το σώμα θα φέρει μία συνιστώσα φόρτιση. Αν το σώμα δε στηρίζεται επαρκώς, θα προκύψουν γενικευμένες επιταχύνσεις στο χώρο. Θα έχουμε δηλαδή κίνηση άκαμπτου σώματος και δεν θα αναπτυχθούν εσωτερικά εντατικά πεδία μετατοπίσεων και τάσεων.

Το μαθηματικό ανάλογο αυτής της κατάστασης είναι η ύπαρξη μοναδιαίου μητρώου ακαμψίας $\mathbf{K}$. Για να επιλυθεί λοιπόν το στατικό πρόβλημα θα πρέπει να επιβληθούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες έτσι ώστε να αποφευχθεί η κίνηση άκαμπτου σώματος. Στη ΜΠΣ οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται ως προκαθορισμένες μετατοπίσεις (ή και περιστροφές) που αντιστοιχούν στις αναγκαίες (γεωμετρικές) οριακές συνθήκες. Όπως θα δειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο, (μέθοδος των μεταβολών) οι φυσικές οριακές συνθήκες προκύπτουν από τη λύση του προβλήματος.

Όταν η συνιστώσα μιας μετατόπισης σε κάποιο κόμβο τεθεί ίση με το μηδέν, τότε το γινόμενο της συνιστώσας αυτής με την αντίστοιχη στήλη του μητρώου $\mathbf{K}$ θα είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν. Η επιβολή λοιπόν αυτής της οριακής συνθήκης αντιστοιχεί με την αφαίρεση αυτού του βαθμού ελευθερίας από τα μητρώα των μετατοπίσεων και ακαμψίας της κατασκευής. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στην ύπαρξη μίας εξίσωσης ισορροπίας περισσότερο από τον αριθμό των αγνώστων μετατοπίσεων. Επειδή οι εξισώσεις ισορροπίας είναι συμβατές μεταξύ τους, επιτρέπεται η απαλοιφή μίας οποιασδήποτε εξίσωσης. Έτσι και αλλιώς, το εξωτερικό φορτίο στον βαθμό ελευθερίας που περιορίζεται δεν επηρεάζει τη συμπεριφορά της κατασκευής διότι το φορτίο μεταβιβάζεται απευθείας στη στήριξη του κόμβου. Συνεπώς εξυπηρετεί να γίνει απαλοιφή της σειράς του μητρώου $\mathbf{K}$ που περιλαμβάνει αυτό τον βαθμό ελευθερίας. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε ένα τετράγωνο μητρώο ακαμψίας του οποίου η τάξη έχει ελαττωθεί κατά μία μονάδα.

Αφού επιβληθεί επαρκής αριθμός περιορισμών για να αποφευχθεί η κίνηση άκαμπτου σώματος, το ανηγμένο μητρώο ακαμψίας $\mathbf{K}_r$ αντιστρέφεται για να αποκτηθεί το ανηγμένο μητρώο μετατοπίσεων $\mathbf{U}_r$, συναρτήσει των ανηγμένων φορτίων $\mathbf{f}_r$. Δηλαδή,

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{K}_r \mathbf{U}_r \quad (81)$$

$$\text{άρα, } \mathbf{U}_r = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{f}_r \quad (82)$$

Όταν το μητρώο ακαμψίας $\mathbf{K}$ περιλαμβάνει πολλούς βαθμούς ελευθερίας, αντί να αφαιρούνται σταδιακά οι μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας εξυπηρετεί η αντικατάστασή τους με μηδέν και μονάδα στην κύρια διαγώνιο. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για τα διανύσματα των φορτίων και μετατοπίσεων. Η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής, $\mathbf{f}_r = \mathbf{K}_r \mathbf{U}_r$ γίνεται τότε:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (83)$$

$$\text{ή, } \mathbf{f}_m = \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m$$

$$\text{άρα, } \mathbf{U}_m = \mathbf{K}_m^{-1} \mathbf{f}_m \quad \text{όπου, } \mathbf{K}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση ισορροπίας (23) διατυπώνεται σε διαχωρισμένη μορφή έτσι ώστε να αποκτηθούν οι αγνώστες μετατοπίσεις $\mathbf{U}_a$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_b \end{bmatrix} \quad (84)$$

όπου U_b είναι οι γνωστές ή επιβεβλημένες, μετατοπίσεις. Επιλύνοντας τότε ως προς U_a , έχουμε:

$$K_{aa}U_a = F_a - K_{ab}U_b \quad (85)$$

Παρατηρούμε ότι απαιτείται να συγκροτηθεί μόνο το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής που αντιστοιχεί στους άγνωστους βαθμούς ελευθερίας U_a . Το διάνυσμα των φορτίων F_a θα πρέπει τώρα να συμπεριλάβει την επίδραση των μη-μηδενικών μετατοπίσεων. Οι αντιδράσεις μπορούν τώρα να υπολογισθούν γράφοντας κατ' αρχή:

$$F_b = F_B^b + F_S^b - F_I^b + F_C^b + R_r \quad (86)$$

όπου $F_B^b, F_S^b, F_I^b, F_C^b$ είναι οι γνωστές, εξωτερικά επιβαλλόμενες (σημειακές) φορτίσεις και R_r είναι οι άγνωστες αντιδράσεις. Από την (86) και τη δεύτερη σειρά εξισώσεων της (84) λαμβάνουμε:

$$R_r = K_{ba}U_a + K_{bb}U_b - F_B^b - F_S^b + F_I^b - F_C^b \quad (87)$$

Οι τέσσερις τελευταίοι όροι συνιστούν διόρθωση λόγω γνωστών εσωτερικών και επιφανειακών φορτίσεων που ασκούνται στους κόμβους.

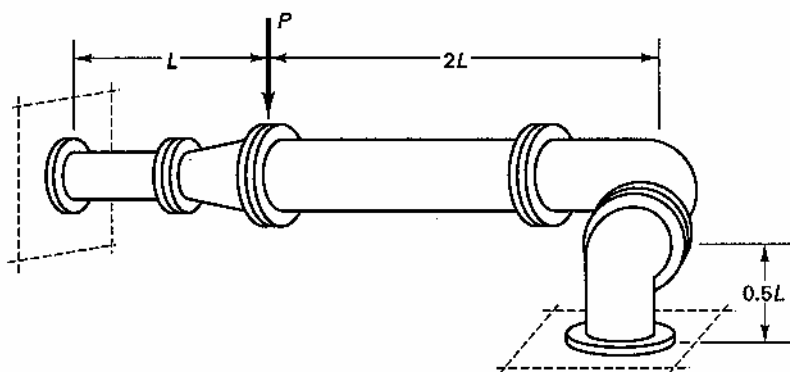
Παράδειγμα 5

Το τμήμα δικτύου σωληνώσεων που δείχνεται στο Σχήμα 12 παραλαμβάνει ένα τυχαίο, μεγάλο εγκάρσιο φορτίο σε μια συγκεκριμένη σύνδεσή του. Να επιλυθεί η κατασκευή με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις και οι αντιδράσεις στους κόμβους της διακριτοποιημένης, ιδεατής κατασκευής.

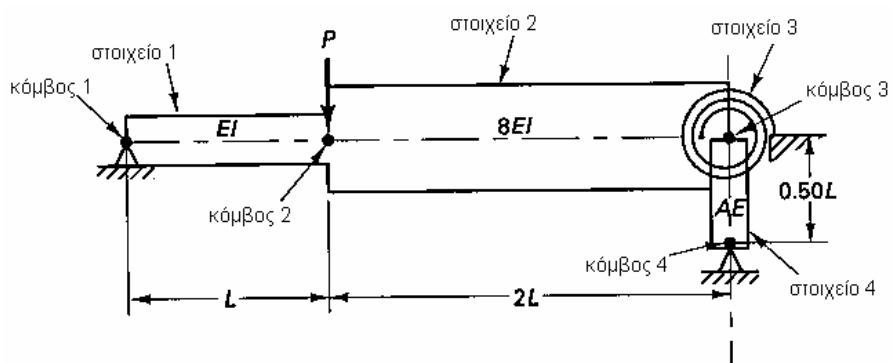
Λύση

Η μελέτη μιας τέτοιας κατασκευής μπορεί να γίνει σε διάφορα επίπεδα πολυπλοκότητας, που να λαμβάνουν υπόψη τη μη-γραμμική συμπεριφορά υλικού (πλαστικότητα) και γεωμετρίας (μεγάλες μετατοπίσεις), την ακριβή επιβολή του φορτίου (έκταση φόρτισης), κλπ. Σε πρώτο στάδιο φρόνιμο είναι να ξεκινούμε με μια απλή ανάλυση και να εισάγουμε πιο ακριβή στοιχεία εφόσον αυτό απαιτείται.

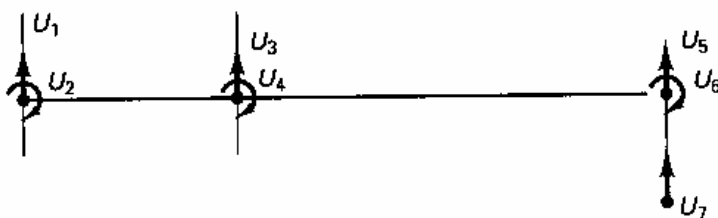
Θεωρούμε ότι η εξωτερική φόρτιση εφαρμόζεται έτσι ώστε μια στατική ανάλυση είναι επαρκής (αμελητέες επιταχύνσεις). Η διακριτοποιημένη μορφή αποτελείται από δύο στοιχεία-δοκούς, ένα στοιχείο-ράβδος και ένα στοιχείο-ελατήριο. Υπολογίζουμε πρώτα τα μητρώα ακαμψίας του κάθε στοιχείου. Έχουμε:



(α) Διάταξη κατασκευής



(β) Διακριτοποίηση κατασκευής



$$EI = 10^7$$

$$L = 100$$

$$P = 1,0$$

$$p = 0,01$$

(γ) Ανάλυση προβόλου

Σχήμα 14 Διάταξη δικτύου σωληνώσεων

$$U_1, U_2, U_3, U_4: \quad \mathbf{K}_1^e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \quad (88\alpha)$$

$$U_3, U_4, U_5, U_6: \quad \mathbf{K}_2^e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} \\ & 16 & \frac{12}{L} & 8 \\ & & \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L} \\ & & & 16 \end{bmatrix} \quad (88\beta)$$

$$U_6: \quad \mathbf{K}_3^e = k_s \quad (88\gamma)$$

$$U_5, U_7: \quad \mathbf{K}_4^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (88\delta)$$

Παρατηρούμε ότι το τ.σ.α. συμπίπτει με το γ.σ.α. και έτσι δεν απαιτείται να γίνουν μετασχηματισμοί σε κάθε περίπτωση. Για να συγκροτηθεί το μητρώο ακαμψίας της συνολικής κατασκευής εφαρμόζεται η μέθοδος της άμεσης σύνθεσης των ακαμψιών (σχέση (1)).

Έχουμε τότε, για παράδειγμα, το διευρυμένο μητρώο που περιλαμβάνει την ακαμψία του στοιχείου 4:

$$\mathbf{K}^{(4)} = \overbrace{\begin{matrix} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{matrix}}^{\text{βαθμιάελευθερίας κατασκευής}} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{L} & 0 & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2AE}{L} & 0 & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (89)$$

Ενώ το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής γράφεται τότε:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{24EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^2} & 0 \\ & & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2AE}{L} & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{2EA}{L} \\ & \text{συμμετρικό} & & & & \frac{16EI}{L^2} + k_s & 0 \\ & & & & & & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix} \quad (90)$$

Η εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής είναι:

$$KU = F \quad (91)$$

Σε τρίτο στάδιο απαιτείται η επιβολή των οριακών συνθηκών $U_1 = 0$, $U_7 = 0$. Έτσι αποκτιέται μία εξίσωση ισορροπίας ανηγμένων όρων που περιέχει 5 αντί των 7 αγνώστων. Το ανηγμένο μητρώο ακαμψίας αποκτιέται αφαιρώντας την πρώτη και την έβδομη σειρά και στήλη του αρχικού μητρώου.

Για να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις και τις μετατοπίσεις στους κόμβους του προβόλου που δείχνεται στο Σχήμα 12β, θεωρούμε τον πρόβολο ως αποτελούμενο από τα δύο στοιχεία-δοκούς.

Κάνοντας χρήση των μητρώων ακαμψίας των στοιχείων 1 και 2 έχουμε:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{36}{L^3} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_1 \\ U_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ -\frac{pL}{2} \\ -\frac{pL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (92)$$

Έχουμε $U_b^T = [U_5 \ U_6]$ και $U_b = \mathbf{0}$. Από τη σχέση (85) λαμβάνουμε για $EI = 10^7$, $L = 100$ $P = 1,0$ και $p = 0,01$

$$U_a^T = [-165 \quad 1,33 \quad -47,9 \quad 0,83](10^{-3}) \quad (93)$$

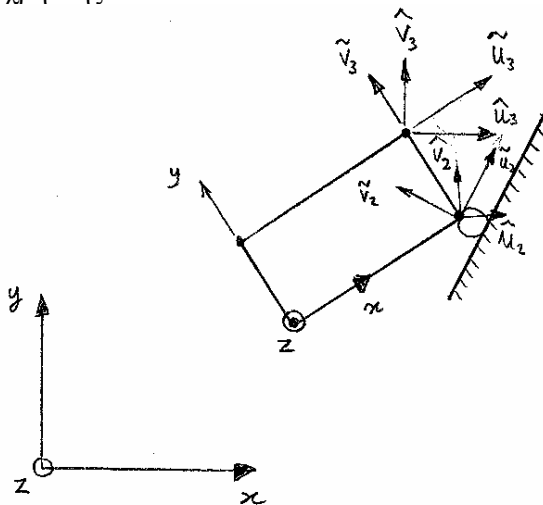
και κάνοντας χρήση της (87), έχουμε:

$$R_r = \begin{bmatrix} 2 \\ -250 \end{bmatrix} \quad (94)$$

3.5.2 Λοξή στήριξη²

Σε πολλές εφαρμογές, εκτός από τις εξωτερικές δυνάμεις επιβάλλονται και προκαθορισμένες (μη-μηδενικές) μετατοπίσεις ή και περιστροφές. Οι μετατοπίσεις αυτές, μαζί με τις αντίστοιχες μηδενικές μετατοπίσεις (ή και περιστροφές) που απαιτούνται για τη στήριξη της κατασκευής, επιβάλλονται από το πρόγραμμα ΠΣ κάνοντας χρήση των τοπικών βαθμών ελευθερίας. (Βέβαια, ο χρήστης ορίζει τις μετατοπίσεις αυτές με βάση τους γενικούς βαθμούς ελευθερίας).

Συμβολίζουμε τους τοπικούς βαθμούς ελευθερίας στο γ.σ.α. για το στοιχείο (m) με το διάνυσμα $\tilde{u}$ και με $\tilde{u}$ το αντίστοιχο διάνυσμα στο τ.σ.α. Επομένως ισχύει ο μετασχηματισμός $\tilde{u} = T\tilde{u}$. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ανάγκη να ορισθούν οι μετατοπίσεις ως προς ένα σύστημα αναφοράς διαφορετικό του γ.σ.α. και του τ.σ.α. το οποίο επιλέγει ο χρήστης.



Σχήμα 15 Κατασκευή με λοξή στήριξη

Το Σχήμα 15 απεικονίζει μια τέτοια περίπτωση για το στοιχείο (m) το οποίο αποτελεί τμήμα μιας κατασκευής. Παρατηρούμε ότι στον κόμβο 2 η συνιστώσα $\tilde{u}_2$ είναι μηδενική λόγω της συγκεκριμένης άρθρωσης επίσης δε ότι η γωνία β ορίζει

² λοξή στήριξη = skew support (boundary condition)

το σύστημα αναφοράς που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να ορισθεί η συνοριακή αυτή συνθήκη. Ο μετασχηματισμός μεταξύ του γ.σ.α. και του παραπάνω συστήματος αναφοράς γίνεται κάνοντας χρήση ενός μητρώου περιστροφών, όπως το $\mathbf{Q}$ που περιλαμβάνεται στο προηγούμενο σχήμα.

Οι ζητούμενοι βαθμοί ελευθερίας περιλαμβάνουν τώρα τη συνιστώσα $\tilde{u}_2$ (εφόσον $\tilde{v}_2 = 0$), και επομένως, για το στοιχείο m , ισχύει ο μετασχηματισμός:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}^{(m)}} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{v}_3 \\ \tilde{u}_4 \\ \tilde{v}_4 \end{bmatrix} \quad (95)$$

και παρομοίως για το διάνυσμα που περιλαμβάνει όλους τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής, $\hat{\mathbf{U}}$.

$$\hat{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{U}} \quad (96)$$

Η σχέση (52) χρησιμοποιείται στην αρχή των δυνατών έργων για τον προσδιορισμό των εξισώσεων της ΜΠΣ, δηλαδή,

$$\overline{\tilde{\mathbf{U}}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \hat{\mathbf{U}} = \overline{\tilde{\mathbf{U}}}^T \mathbf{F} \quad (97)$$

όπου το $\mathbf{F}$ περιλαμβάνει όλες τις εξωτερικές δυνάμεις. Άρα, γράφοντας την αντίστοιχη σχέση με την (96) για τις δυνατές μετατοπίσεις έχουμε:

$$\overline{\tilde{\mathbf{U}}} = \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{U}} \quad (98)$$

και αντικαθιστώντας από την (98) και (96) στην (97) βρίσκουμε:

$$\overline{\tilde{\mathbf{U}}}^T \tilde{\mathbf{T}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{E}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \tilde{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{U}} = \overline{\tilde{\mathbf{U}}}^T \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{F} \quad (99)$$

οπότε λαμβάνουμε τις εξής εξισώσεις για τις κομβικές μετατοπίσεις:

$$\check{T}^T K T \check{U} = \check{T}^T F$$

$$\text{άρα, } \check{K} \check{U} = \check{F} \quad (100)$$

δηλαδή οι εξισώσεις επιλύονται με αγνώστους τις μετατοπίσεις στα συστήματα αναφοράς που απαιτούνται για να επιβληθούν οι οριακές συνθήκες.

Έστω ότι τώρα το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής $\check{U}$, διαχωρίζεται σε προκαθορισμένους (μηδενικούς και μη-μηδενικούς) βαθμούς ελευθερίας και σε άγνωστους βαθμούς ελευθερίας, $\check{U}_b$ και $\check{U}_a$ αντίστοιχα. Το σύστημα των εξισώσεων (99) γράφεται τώρα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \check{K}_{aa} & \check{K}_{ab} \\ \check{K}_{ba} & \check{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{U}_a \\ \check{U}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{F}_a \\ \check{R}_b \end{bmatrix} \quad (101)$$

όπου $\check{F}_a$ είναι το διάνυσμα των εξωτερικών φορτίων και $\check{R}_b$ είναι το διάνυσμα των αντιδράσεων στους προκαθορισμένους βαθμούς ελευθερίας από τις σχέσεις (100) επιλύουμε ως προς το $\check{U}_a$.

$$\check{K}_{aa} \check{U}_a = \check{F}_a - \check{K}_{ab} \check{U}_b \quad (102)$$

Άρα, για τον υπολογισμό των άγνωστων βαθμών ελευθερίας συνθέτουμε μόνο το μητρώο ακαμψίας που αντιστοιχεί στο $\check{U}_a$. Το διάνυσμα των φορτίων περιλαμβάνει όμως τώρα και την επίδραση των προκαθορισμένων μετατοπίσεων (εκτός εάν $\check{U}_b \equiv 0$). Από τις σχέσεις (101) και (102) υπολογίζονται σε συνέχεια οι αντιδράσεις $\check{R}_b$.

Βιβλιογραφία

1. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc, New Jersey, 1996.
2. Hughes O. *Ship Structural Design: A rationally-based, computer-aided optimization procedure*. SNAME, New York, 1996.