

Η μητρική μέθοδος μελέτης των κατασκευών

1. Διακριτοποίηση της κατασκευής

Ένα σημαντικό βήμα κατά την ανάλυση κατασκευών με μητρικές μεθόδους είναι η απόκτηση ενός διακριτού μαθηματικού μοντέλου που αναπαριστά σε ικανοποιητικό βαθμό τα κυριότερα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς της πραγματικής, συνεχούς κατασκευής. Σε ένα τέτοιο μοντέλο τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων. Η καινοτομία αυτή απαιτείται για να αποκτηθεί ένα σύστημα με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας το οποίο μπορούμε να χειρισθούμε με μεθόδους της μητρικής άλγεβρας. Το 1827, ο Navier έδειξε ότι εάν οι κομβικές μετατοπίσεις θεωρηθούν ως οι άγνωστες μεταβλητές, υφίσταται ένας αντίστοιχος αριθμός εξισώσεων ισορροπίας, και συνεπώς είναι δυνατό να αποκτηθεί λύση στο πρόβλημα.

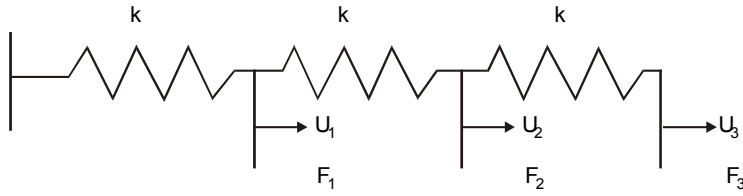
Το βασικό βήμα στη διατύπωση μοντέλων στατικών ή δυναμικών προβλημάτων βασίζεται στην εξίσωση της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης και του δυναμικού των εξωτερικών φορτίσεων και της κινητικής ενέργειας συνεχών ή διακριτών συστημάτων. Κατασκευές που αποτελούνται από αμφιέριστες δοκούς και άκαμπτα πλαίσια διακριτοποιούνται εύκολα και επιτυγχάνεται ακριβής αναπαράσταση της στατικής συμπεριφοράς τους¹. Εάν η κατασκευή δεν αποτελείται από διακριτά στοιχεία που να συνδέονται μεταξύ τους σε ένα πεπερασμένο αριθμό κόμβων δεν είναι δυνατό να γίνει ακριβής περιγραφή της συμπεριφοράς.

Η μητρική εξίσωση ισορροπίας μιας κατασκευής

Θεωρούμε μία γραμμική ελαστική κατασκευή που στηρίζεται σε κάποια σημεία και στην οποία ασκούνται δυνάμεις $F_1, F_2, \dots, F_n$ στους κόμβους της. Στους κόμβους που ασκούνται οι δυνάμεις F_i αντιστοιχούν μετατοπίσεις $U (U_1, U_2, \dots, U_n)$. Από την αρχή της επαλληλίας, γνωρίζουμε ότι για μικρές μετατοπίσεις, η συνολική μετατόπιση στον i -οστό κόμβο, U_i ισούται με το άθροισμα των μετατοπίσεων στον κόμβο αυτό που οφείλονται σε κάθε μία δύναμη ξεχωριστά.

$$U_i = U_{iF_1} + U_{iF_2} + \dots + U_{iF_n} \quad (1)$$

¹ όχι όμως και της δυναμικής



Σχήμα 1 Κατασκευή τριών βαθμών ελευθερίας

Έστω η κατασκευή του Σχήματος 1, που είναι σύστημα τριών ελατηρίων με τρεις εξωτερικές δυνάμεις. Οι μετατοπίσεις στα σημεία 1, 2 και 3 της κατασκευής του παραπάνω σχήματος δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$U_1 = U_{1F_1} + U_{1F_2} + U_{1F_3} \quad (2\alpha)$$

$$U_2 = U_{2F_1} + U_{2F_2} + U_{2F_3} \quad (2\beta)$$

$$U_3 = U_{3F_1} + U_{3F_2} + U_{3F_3} \quad (2\gamma)$$

Για να υπολογισθεί το U_{iF_j} ορίζουμε *συντελεστές ευκαμψίας* C_{ij} ,² οι οποίοι εκφράζουν την επίδραση κάθε μίας δύναμης ξεχωριστά στη μετατόπιση του συγκεκριμένου κόμβου. Έτσι έχουμε:

$$U_{iF_j} = C_{ij} F_j \quad (3)$$

και γενικά,

$$\begin{aligned} U_1 &= C_{11}F_1 + C_{12}F_2 + \dots + C_{1n}F_n \\ U_2 &= C_{21}F_1 + C_{22}F_2 + \dots + C_{2n}F_n \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4)$$

$$U_n = C_{n1}F_1 + C_{n2}F_2 + \dots + C_{nn}F_n$$

Σε μητρική μορφή,

$$\mathbf{U} = \mathbf{CF} \quad (5)$$

$$\text{όπου } \mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n] \quad (6)$$

² συντελεστής ευκαμψίας= flexibility coefficient

$$\mathbf{F}^T = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n] \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Το μητρώο $\mathbf{C}$ καλείται *μητρώο ευκαμψίας* της κατασκευής. Η σχέση $U_{iFj} = C_{ij}F_j$ ή γενικότερα η αντίστοιχη μητρική σχέση (5) συνιστούν τη βασική εξίσωση της *μεθόδου των δυνάμεων* κατά την οποία οι μετατοπίσεις $\mathbf{U}$ εκφράζονται συναρτήσει των δυνάμεων $\mathbf{F}$.

Το πρόβλημα μπορεί να τεθεί και αντιστρόφως. Δηλαδή, για δεδομένες μετατοπίσεις $U_1, U_2, \dots, U_n$ ποια θα είναι τα φορτία που πρέπει να επιβληθούν στην κατασκευή; κάνοντας πάλι χρήση της αρχής της επαλληλίας, λέμε ότι το φορτίο F_i ισούται με το άθροισμα των φορτίων F_{iUj} που αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις U_j .

$$F_i = F_{iU_1} + F_{iU_2} + F_{iU_3} + \dots + F_{iU_n} \quad (9)$$

Ορίζουμε τώρα τον *συντελεστή ακαμψίας*³ k_{ij} ως ίσο με τη δύναμη που ασκείται στον i -οστό κόμβο στην διεύθυνση U_i όταν η κατασκευή υποστεί μοναδιαία μετατόπιση στον j -οστό κόμβο στην διεύθυνση U_j και όταν οι υπόλοιποι κόμβοι παραμένουν αμετάθετοι. Δηλαδή,

$$F_{iU_j} = k_{ij}U_j \quad (10)$$

Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας γράφεται τώρα ως εξής:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{11}U_1 + k_{12}U_2 + \dots + k_{1n}U_n \\ F_2 &= k_{21}U_1 + k_{22}U_2 + \dots + k_{2n}U_n \\ &\vdots \\ F_n &= k_{n1}U_1 + k_{n2}U_2 + \dots + k_{nn}U_n \end{aligned} \quad (11)$$

³ συντελεστής ακαμψίας = stiffness coefficient

$$\text{ή} \quad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (13)$$

όπου $\mathbf{K}$ είναι το μητρώο ακαμψιών της κατασκευής και το οποίο είναι προφανώς τετράγωνο. Η παραπάνω σχέση συνιστά την θεμελιώδη εξίσωση της μεθόδου των μετατοπίσεων της μητρωικής μεθόδου ανάλυσης των κατασκευών. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4) και (12) έχουμε:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{F} = \mathbf{F}$$

από την (12),

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{U}$$

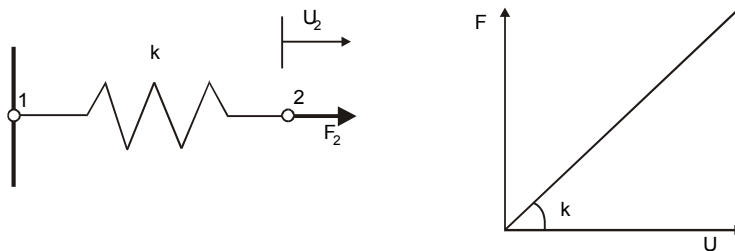
Άρα,

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} \quad (14)$$

δηλαδή τα μητρώα ευκαμψίας και ακαμψίας είναι το ένα αντίστροφο του άλλου.

Στα παραδείγματα που ακολουθούν γίνεται χρήση στοιχείων με γραμμική ελαστική συμπεριφορά (ελατήρια) τα οποία αποτελούν μία πρώτη προσέγγιση στην απόκριση κατασκευαστικών στοιχείων. Η απόκριση ελαστικής δοκού μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα τέτοιο μοντέλο.

Παράδειγμα 1. Να υπολογισθούν τα μητρώα ακαμψίας και ευκαμψίας της κατασκευής του σχήματος.



Σχήμα 2 Ελαστικό ελατήριο με μία κύλιση

Λύση

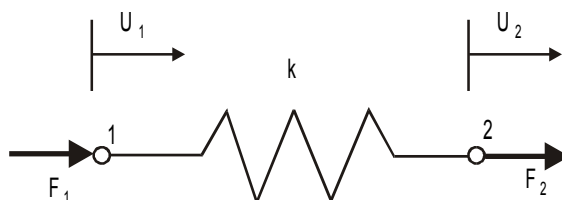
Από το Σχήμα 2 παρατηρούμε ότι $F_2 = kU_2$

Άρα $U_2 = F_2/k$

Στην περίπτωση αυτή

$$K=k \quad \text{και} \quad C=1/k$$

Παράδειγμα 2. Να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας ελαστικού ελατηρίου με κύλιση στα δύο άκρα.



Σχήμα 3 Ελαστικό ελατήριο με δύο κυλίστεις

Λύση

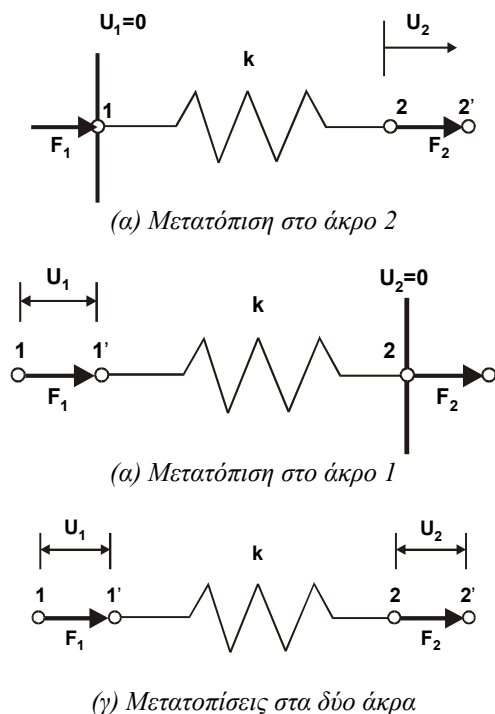
Το ελατήριο του προηγούμενου παραδείγματος αναφέρεται σε ένα μεμονωμένο στοιχείο. Εάν όμως το ελατήριο αποτελεί τμήμα μιας πιο σύνθετης κατασκευής, τότε θα προκύψει κύλιση και στα δύο άκρα. Άρα θα πρέπει να ληφθούν υπόψη οι μετατοπίσεις και στους δύο ακραίους κόμβους, όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα. Τα διανύσματα των εξωτερικών δυνάμεων και των μετατοπίσεων είναι τότε:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο ακαμψίας είναι συνεπώς 2x2 και η μητρική εξίσωση ισορροπίας γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Στην παραπάνω σχέση οι όροι του μητρώου ακαμψίας παραμένουν απροσδιόριστοι. Οι όροι αυτοί υπολογίζονται εάν επιτραπεί στην κατασκευή να



Σχήμα 4 Ελατήριο με κυλίσεις στο κάθε ένα άκρο και στα δύο άκρα

παραμορφωθεί κατά κάθε ένα βαθμό ελευθερίας ξεχωριστά. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας, τους U_1 και U_2 . Θεωρούμε λοιπόν ότι αρχικά μετατοπίζεται ο κόμβος 1 ενώ ο κόμβος 2 παραμένει αμετάθετος. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη του προηγούμενου παραδείγματος. Άρα, $F_1 = kU_1$ όπου U_1 είναι η μετατόπιση στο άκρο 1. Για να ισορροπήσει το ελατήριο πρέπει $F_1 + F_2 = 0$ και $F_2 = -F_1 = -kU_1$.

Οι τρεις περιπτώσεις παραμόρφωσης του ελατηρίου περιγράφονται σχηματικά στο Σχήμα 4. Για την περίπτωση (α) έχουμε:

$$F_2 = kU_2 = -F_1$$

Στην τελευταία περίπτωση χρησιμοποιούμε την αρχή της επαλληλίας για να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των δυνάμεων F_1 και F_2 και των μετατοπίσεων U_1 και U_2 . Η συνολική δύναμη που ασκείται στον κόμβο 1 είναι:

$$F_1 = F_{1\alpha} + F_{1\beta}$$

ενώ η συνολική δύναμη που ασκείται στον κόμβο 2 είναι:

$$F_2 = F_{2\alpha} + F_{2\beta}$$

όπου οι δείκτες α και β αντιστοιχούν στις ανωτέρω περιπτώσεις (α) και (β). Έχουμε:

$$F_1 = kU_1 - kU_2$$

$$F_2 = -kU_1 + kU_2$$

Οι σχέσεις αυτές γράφονται και σε μητρική μορφή και ως εξής:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου ελατηρίου είναι λοιπόν,

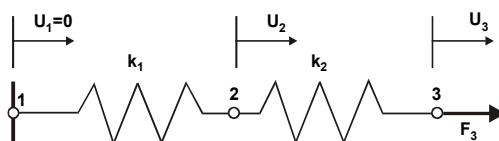
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (17)$$

Παρατηρούμε ότι:

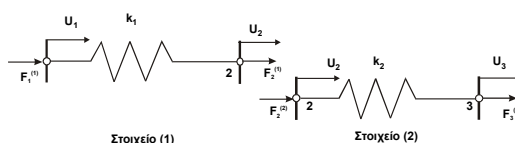
- α) Το μητρώο $\mathbf{K}$ είναι συμμετρικό, εφόσον ισχύει η αρχή Betti-Maxwell και
- β) Το μητρώο $\mathbf{K}$ είναι μοναδιαίο, (δηλ. $\det \mathbf{K} = 0$)

Παρόμοια ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων-ελατηρίων.

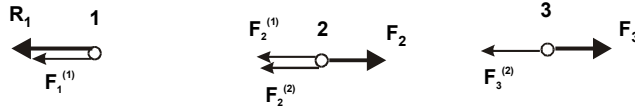
Παράδειγμα 3. Να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής του σχήματος 5.



(α) Διάταξη κατασκευής



(β) Διακριτοποίηση σε δύο στοιχεία και ορισμός των κομβικών (εσωτερικών) δυνάμεων των στοιχείων



(γ) Ισορροπία εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στους κόμβους 1, 2, και 3

Σχήμα 5 Δύο ελατήρια εν σειρά

Λύση

Στην διάταξη του Σχήματος 5α, ο κόμβος 1 παραμένει αμετάθετος ενώ επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις F_2 και F_3 στους κόμβους 2 και 3 αντιστοίχως. Συνεπώς τα διανύσματα των εξωτερικών δυνάμεων και μετατοπίσεων για την κατασκευή είναι:

$$\mathbf{U}^t = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]$$

$$\text{με} \quad U_1 = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{F}^t = [R_1 \quad F_2 \quad F_3]$$

όπου R_1 είναι η αντίδραση στον αμετάθετο κόμβο 1. Η κατασκευή διακριτοποιείται σε δύο στοιχεία, (Σχήμα 5β) για τα οποία ισχύουν οι εξής μητρικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$k_1 \begin{bmatrix} I & -I & 0 \\ -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

όπου τα μητρώα κάθε στοιχείου διευρύνονται για να περιλάβουν τους βαθμούς ελευθερίας και στους τρεις κόμβους. Από τη ισορροπία των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων στους τρεις κόμβους, Σχήμα 5γ, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} -R_1 = F_1^{(1)} \\ F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3 = F_3^{(2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -R_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Αντικαθιστούμε στην παραπάνω σχέση τις αντίστοιχες μητρικές εξισώσεις των στοιχείων (1) και (2),

$$\begin{bmatrix} -R_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

άρα, προσθέτοντας τους αντίστοιχους όρους των μητρώων ακαμψίας των δύο στοιχείων,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (20)$$

Παρατηρούμε ότι εάν $U_I \neq 0$ η κατασκευή δεν έχει στήριξη και συνεπώς συμπεριφέρεται ως άκαμπτο σώμα. Δηλαδή μπορεί να μετατοπισθεί στο χώρο με $\mathbf{U} = \mathbf{U}_R$ χωρίς να παραμορφωθεί και επομένως χωρίς να αναπτυχθούν εσωτερικές δυνάμεις (τάσεις) στους τρεις κόμβους. Άρα, από τις εξισώσεις ισορροπίας (α), $\mathbf{F} = 0$ και,

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_R = \mathbf{0} \quad (21)$$

Η σχέση (21) είναι ένα ομογενές σύστημα τριών εξισώσεων. Για να υπάρχει λύση εκτός της μηδενικής είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ότι η ορίζουσα του μητρώου $\mathbf{K}$ είναι μηδέν, όπως επαληθεύεται εύκολα από την σχέση (19). Συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων (20) δεν έχει λύση.

Οι εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής με $U_I = 0$ είναι:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Επιλύοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε ότι:

$$U_2 = \frac{F_2 + F_3}{k_1} \quad \text{και} \quad U_3 = \frac{F_2}{k_1} + F_3 \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (22)$$

Η αντίδραση στον αμετάθετο κόμβο 1, R_1 , υπολογίζεται αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις από τις σχέσεις (ε) στο σύστημα των εξισώσεων (19),

$$k_1 U_2 = R_1 \Rightarrow R_1 = F_2 + F_3 \quad (23)$$

Τελικά παρατηρούμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μετατοπίσεις από τις σχέσεις (22) στην μητρική εξίσωση κάθε στοιχείου ώστε να υπολογισθούν οι αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις.

2. Το στοιχείο-ράβδος. Χρήση γενικού συστήματος αναφοράς

Εάν αντικαταστήσουμε το ελατήριο των προηγούμενων παραδειγμάτων με ελαστική δοκό που φέρει αποκλειστικά αξονικές δυνάμεις με ακαμψία k ίση με EA/L , όπου E = μέτρο ελαστικότητας, A = εμβαδόν διατομής και L = μήκος, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά πραγματικών, αρθρωτών, κατασκευών. Κατά κανόνα τέτοιες κατασκευές εκτείνονται σε δύο ή και σε τρεις διαστάσεις και συνεπώς για να αποκτήσει και πρακτικό ενδιαφέρον η περαιτέρω ανάπτυξη της μητρικής μεθόδου πρέπει να ληφθεί υπόψη και η έκταση στο χώρο των διαφόρων κατασκευαστικών στοιχείων-ράβδων.

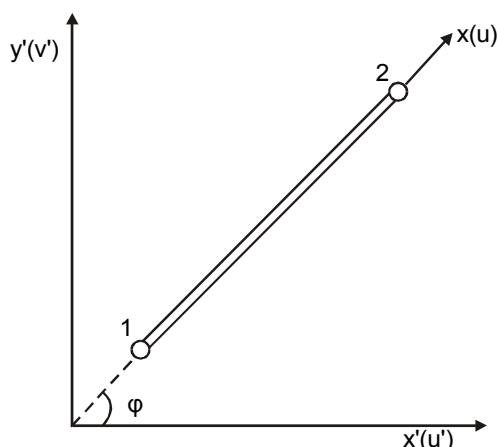
Εάν επιστρέψουμε στα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2 μπορούμε, κάνοντας χρήση της σχέσης $k=EA/L$, να καταλήξουμε στη σχέση:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Από τη σχέση αυτή μπορούν να αποκτηθούν οι κομβικές μετατοπίσεις U που οφείλονται στη δράση των εξωτερικών δυνάμεων F στο σύστημα αναφοράς του στοιχείου (τοπικό). Εάν όμως, όπως αναφέρθηκε προηγουμένα, η ράβδος αποτελεί τμήμα κατασκευής που εκτείνεται σε δύο διαστάσεις τότε απαιτείται να εισαχθεί ένα νέο, γενικό σύστημα αναφοράς για ολόκληρη την κατασκευή και να εκφραστούν οι μετατοπίσεις και δυνάμεις σε αυτό για κάθε στοιχείο της κατασκευής. Η επίλυση του προβλήματος προϋποθέτει λοιπόν:

- α) Την σύνταξη του μητρώου ακαμψίας ολόκληρης της κατασκευής,
- β) Την αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας στο γενικό σύστημα αναφοράς και
- γ) Την απόκτηση των μετατοπίσεων και άλλων αγνώστων (παραμορφώσεων, τάσεων), στο τοπικό σύστημα αναφοράς.

Στο Σχήμα 6 περιγράφεται στοιχείο-ράβδος σε γενικό σύστημα αναφοράς. Για να διακρίνουμε τις ποσότητες που άλλοτε εκφράζονται στο τοπικό σύστημα αναφοράς και άλλοτε στο γενικό σύστημα αναφοράς χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο, στο γ.σ.α. όμως το μέγεθος τονίζεται ($\mathbf{u}$ και $\mathbf{u}'$, κ.ο.κ.). Πρέπει επίσης να μπορεί να γίνεται η διαφοροποίηση μεταξύ ποσοτήτων που αφορούν ολόκληρη την κατασκευή ή τμήμα (στοιχείο) της. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε κεφαλαία και μικρά



Σχήμα 6 Στοιχείο-ράβδος σε γενικό σύστημα αναφοράς

γράμματα αντίστοιχα ($\mathbf{K}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}$ κ.ο.κ.). Όταν αναφερόμαστε σε κατασκευή αποτελούμενη από ένα μόνο στοιχείο χρησιμοποιούμε το συμβολισμό που εξυπηρετεί καλύτερα.

Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι το τοπικό σύστημα αναφοράς είναι μονοδιάστατο (Ox) ενώ το γενικό σύστημα αναφοράς είναι διδιάστατο ($Ox'y'$). Η θετική φορά της γωνίας φ είναι αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού. Εφόσον κατά κανόνα οι μεταβλητές u και f στο τοπικό σύστημα αναφοράς έχουν συνιστώσες u' , v' και f_x , f_y αντιστοίχως στο γενικό σύστημα αναφοράς, η σχέση (24) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (25')$$

ώστε να γίνει εφικτός ο μητρωικός μετασχηματισμός μεταξύ των δύο συστημάτων αναφοράς. Παρατηρούμε στη σχέση (25) ότι $f_{y1}=f_{y2}=0$ επειδή το στοιχείο-ράβδος φέρει μόνο αξονικά φορτία. Οι σχέσεις δυνάμεων στο τοπικό και στο γενικό σύστημα αναφοράς είναι τότε:

$$f_{x1} = f'_{x1} \cos \varphi + f'_{y1} \sin \varphi \quad (26\alpha)$$

$$f_{y1} = -f'_{x1} \sin \varphi + f'_{y1} \cos \varphi \quad (26\beta)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τον κόμβο 2. Τότε, για το σύνολο των δυνάμεων:

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_{x1} \\ f'_{y1} \\ f'_{x2} \\ f'_{y2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{f}' \quad (28)$$

όπου $\mathbf{T}$ είναι το *μητρώο μετασχηματισμού των δυνάμεων* από το γενικό στο τοπικό σύστημα αναφοράς. Για το μητρώο αυτό ισχύει $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}'$ (βλέπε θεωρία μητρωικής άλγεβρας). Οι σχέσεις των μετατοπίσεων στα δύο συστήματα αναφοράς αποκτώνται με γεωμετρία και είναι:

$$\begin{aligned} u_1 &= u'_1 \cos \phi + v'_1 \sin \phi \\ v_1 &= -u'_1 \sin \phi + v'_1 \cos \phi \\ u_2 &= u'_2 \cos \phi + v'_2 \sin \phi \\ v_2 &= -u'_2 \sin \phi + v'_2 \cos \phi \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{u}' \quad (30)$$

Εκτός όμως των παραπάνω απαιτείται και η σχέση μεταξύ των μητρώων ακαμψίας στα δύο συστήματα αναφοράς. Αντικαθιστώντας στη σχέση (28) από την $\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{u}$, έχουμε

$$\mathbf{T} \mathbf{f}' = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (31)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο σκέλη της παραπάνω σχέσης με $\mathbf{T}'$ και κάνοντας χρήση της σχέσης $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}'$, καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{T}' \mathbf{T} \mathbf{f}' = \mathbf{T}' \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (32)$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}' \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (33)$$

Από τη σχέση (30) στη σχέση (33) έχουμε:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{T}' \mathbf{k} \mathbf{T} \mathbf{u}' = \mathbf{k}' \mathbf{u}' \quad (34)$$

άρα,

$$\mathbf{k}' = \mathbf{T}' \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (35)$$

Εάν κάνουμε τις πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{k}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & -\cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi \\ -\cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix} \quad (36)$$

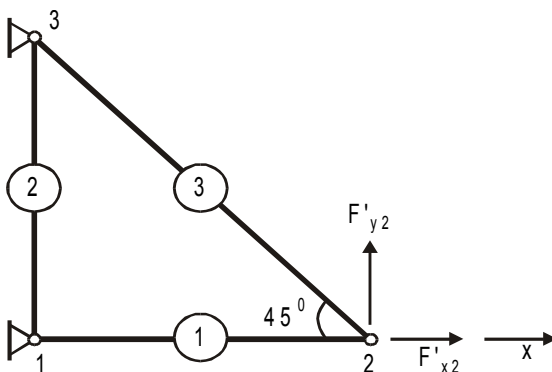
Το μητρώο αυτό είναι συμμετρικό και αποτελείται από τέσσερα υπομητρώα

$$\begin{aligned} \mathbf{k}' &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & -\cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi \\ \cos^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & -\sin^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix} = \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{h} & -\mathbf{h} \\ -\mathbf{h} & \mathbf{h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \phi \end{bmatrix} \quad (37)$$

Έχοντας αποκτήσει τις μετατοπίσεις στο γενικό σύστημα αναφοράς γίνεται μετασχηματισμός στο τοπικό σύστημα για να υπολογισθούν οι εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στο στοιχείο. Από αυτές εύκολα υπολογίζονται οι τάσεις.

Παράδειγμα 4. Να επιλυθεί το διδιάστατο πλαίσιο του σχήματος



Σχήμα 7 Διδιάστατο πλαίσιο

Λύση

Για το πλαίσιο του Σχήματος 7 τα διανύσματα των εξωτερικών δυνάμεων και μετατοπίσεων είναι:

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \quad (38\alpha-\beta)$$

Τα μητρώα ακαμψίας των τριών ράβδων που αποτελούν την κατασκευή είναι (στο γ.σ.α.):

$$\mathbf{k}'_i = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39\alpha)$$

$$\mathbf{k}'_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39\beta)$$

$$\mathbf{k}'_3 = \frac{E_3 A_3}{2L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (39\gamma)$$

Το γενικό μητρώο ακαμψίας περιλαμβάνει όρους που αφορούν και τους τρεις κόμβους. Τα παραπάνω μητρώα επομένως διευρύνονται και γίνονται (στο γ.σ.α.):

$$\mathbf{k}'_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40\alpha)$$

$$\mathbf{k}'_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40\beta)$$

$$\mathbf{k}'_3 = \frac{E_3 A_3}{2L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (40\gamma)$$

Επειδή το διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{F} = \Sigma (F_i)$$

προκύπτει ότι $\mathbf{K}' = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}'_3$. Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση και παρατηρώντας ότι $L_3 = \sqrt{2} L_1 = \sqrt{2} L_2$ (και για κοινό A και E), αποκτάται το γενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής:

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1+1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 1+1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την αντιστροφή του μητρώου $\mathbf{K}'$ το οποίο όμως όπως δίνεται παραπάνω είναι μοναδιαίο και συνεπώς δεν μπορεί να αποκτηθεί λύση. Η φυσική σημασία αυτού είναι, όπως και στο Παράδειγμα 3, ότι η κατασκευή συμπεριφέρεται ως άκαμπτο σώμα, διότι μέχρις αυτό το σημείο δεν έχει περιγραφεί ο τρόπος στήριξής της. Πρέπει δηλαδή να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες οι οποίες περιγράφουν τους περιορισμούς σε βαθμούς ελευθερίας σε συνοριακούς ή και σε εσωτερικούς κόμβους της κατασκευής.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα περιορίζονται οι κόμβοι 1 και 3 ενώ επιτρέπονται οι μετατοπίσεις του κόμβου 2. Άρα, οι μόνες άγνωστες μετατοπίσεις είναι οι u'_2 και v'_2 . Η λύση του συστήματος αφορά λοιπόν τις σχέσεις που περιλαμβάνουν μόνο τους αγνώστους βαθμούς ελευθερίας. Η (ανηγμένη) μητρωική εξίσωση ισορροπίας γράφεται:

$$\begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1+1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix}$$

Αντιστρέφοντας, αποκτάται η λύση του προβλήματος:

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στους κόμβους στήριξης.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{x1}' \\ F_{y1}' \\ F_{x3}' \\ F_{y3}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1/2\sqrt{2} & 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x2}' \\ F_{y2}' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x2}' \\ F_{y2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-F_{x2}' - F_{y2}') \\ 0 \\ F_{y2}' \\ -F_{y2}' \end{bmatrix} \quad (43)
\end{aligned}$$

Οι αξονικές εσωτερικές δυνάμεις υπολογίζονται αντιστοίχως από την ανηγμένη μητρική εξίσωση ισορροπίας κάθε στοιχείου,

$$F_{x1}^{(1)} = F_{x1}^{(1)'} = \frac{EA}{L}(u_1' - u_2') = -\frac{EA}{L}u_2' = -F_{x2}' - F_{y2}' \quad (44\alpha)$$

$$F_{y1}^{(2)} = F_{y1}^{(2)'} = \frac{EA}{L}(v_1' - v_3') = 0 \quad (44\beta)$$

$$F_{x2}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-F_{x2}^{(3)'} + F_{y2}^{(3)'}) = \frac{EA}{2L}(-u_2' + v_2') = \sqrt{2} F_{y2}' \quad (44\gamma)$$

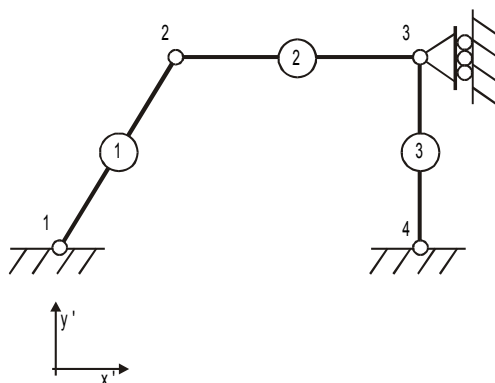
Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί η σημασία που έχει ο *τρόπος αρίθμησης των κόμβων της κατασκευής*. Για σχετικά περίπλοκες κατασκευές ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας γίνεται αρκετά μεγάλος. Στο μητρώο ακαμψίας προκύπτουν όροι που οφείλονται στην παρουσία κάθε κόμβου και εάν γίνει προσεκτική αρίθμηση είναι δυνατόν να περιορισθεί σημαντικά ο αριθμός των όρων που περιλαμβάνει το μητρώο ακαμψίας με επακόλουθο κέρδος στον χρόνο τρεξίματος του προγράμματος. Για το στοιχείο που συνδέει τους κόμβους m και n θα υπάρχουν όροι mm και nn κατά την κύρια διαγώνιο και όροι mn και nm σε θέσεις εκτός της κύριας διαγωνίου. Για να περιορισθεί το εύρος της λωρίδας του μητρώου ακαμψίας *οι κόμβοι πρέπει να αριθμούνται έτσι ώστε η διαφορά μεταξύ των αριθμών των κόμβων να είναι η ελάχιστη* (εδάφιο 10).

3. Περιορισμένοι κόμβοι και συμμετρία

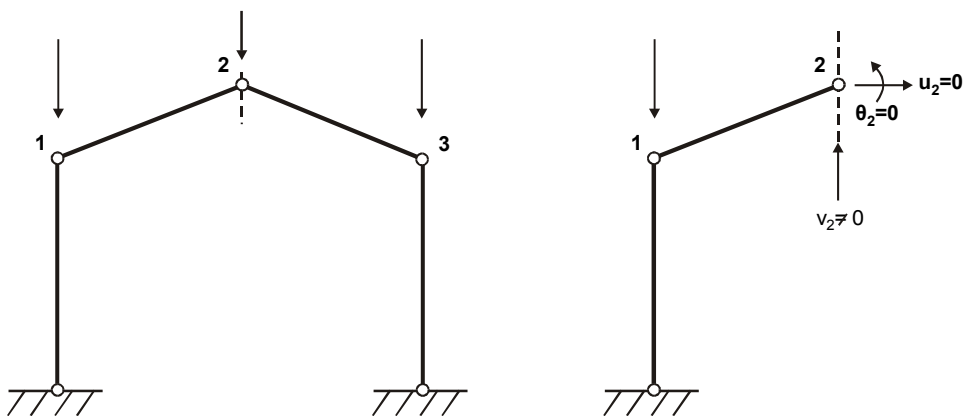
Σε πρακτικές κατασκευές συχνά περιορίζεται η μετατόπιση σε μία κατεύθυνση ενώ επιτρέπεται σε μία άλλη. Στο Σχήμα 8 περιορίζεται η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 3 ενώ επιτρέπεται η μετατόπιση στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Στο πρόβλημα αυτό δεν θα πρέπει να αφαιρεθεί η εξίσωση που αντιστοιχεί στην οριζόντια μετάθεση του κόμβου 3. Η εξωτερική επιβαλλόμενη δύναμη στην οριζόντια κατεύθυνση είναι μηδενική στον κόμβο 3 (ενώ η αντίδραση είναι μη-μηδενική).

Εάν ο κόμβος έχει ελαστικό περιορισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αντίδραση ισούται με λu_3 όπου λ είναι η ακαμψία του σημείου στήριξης. Η εξίσωση ισορροπίας στην οριζόντια κατεύθυνση του κόμβου 3 γίνεται τότε:

$$F_{x3} - \lambda u_3 = P_{x3}' + P_{x2}'$$



Σχήμα 8 Κατασκευή με περιορισμούς σε κόμβους



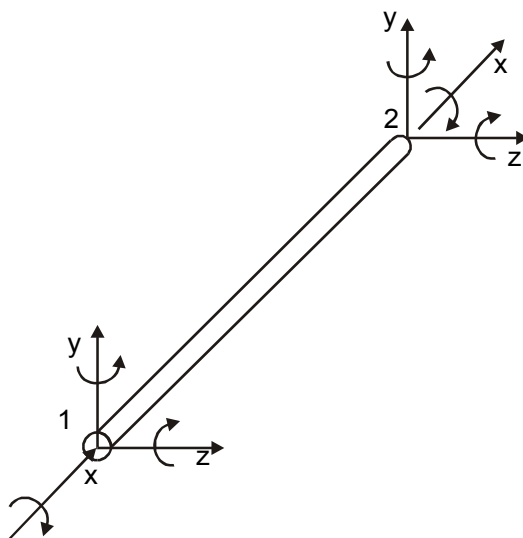
Σχήμα 9 Χρήση συμμετρίας κατά την μελέτη της κατασκευής

Εάν μεταφερθεί ο όρος λu_3 στο δεξιό σκέλος γίνεται εμφανές ότι η μόνη αλλαγή στο μητρώο ακαμψίας της κατασκευής είναι η πρόσθεση του όρου λ στον ήδη υπάρχοντα αντίστοιχο όρο της κύριας διαγωνίου. Γενικά όταν δίνονται αριθμητικές τιμές για την ακαμψία των σημείων στήριξης οι τιμές αυτές πρέπει να προστίθενται στους όρους της κύριας διαγωνίου του γενικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής.

Στο σημείο αυτό θα δούμε πως μπορεί να γίνει χρήση συμμετρίας για να περιορισθεί ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών. Στο Σχήμα 9 περιγράφεται μια κατασκευή με πλήρη συμμετρία (γεωμετρία, οριακές συνθήκες) και συμμετρική φόρτιση. Ο συνολικός αριθμός βαθμών ελευθερίας είναι 15, στον κόμβο 2 όμως δεν προκύπτει οριζόντια μετατόπιση ούτε περιστροφή. Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε την κατασκευή με δύο ισοδύναμες υποκατασκευές, η μία από τις οποίες δείχνεται στο σχήμα.

Είναι δυνατόν να συνταχθεί το μητρώο ακαμψίας της μιας υποκατασκευής (τρεις κόμβοι) αφαιρώντας τις σειρές και στήλες που αντιστοιχούν στην οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2. Στον κόμβο 2 επιβάλλεται φόρτιση ίση με τη μισή της αρχικής φόρτισης. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να περιορίσουμε τις διαστάσεις του μητρώου ακαμψίας διαφόρων κατασκευών, για δε περίπλοκες ή μεγάλες κατασκευές αυτό μπορεί να αποφέρει σημαντική μείωση του χρόνου τρεξίματος του προγράμματος.

4. Το στοιχείο-δοκός



Σχήμα 10 Το στοιχείο-δοκός και οι βαθμοί ελευθερίας του

Οι βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου-δοκού σταθερής διατομής, εκτός των μετατοπίσεων, περιλαμβάνουν επίσης και περιστροφές περί τους κόμβους στα άκρα, όπως δείχνει το Σχήμα 10.

Οι πρόσθετοι αυτοί βαθμοί ελευθερίας επιτρέπουν την παρουσία καμπτικών ροπών και με αυτό τον τρόπο προσεγγίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια η συμπεριφορά των πραγματικών κατασκευών. Τα διανύσματα των γενικευμένων μετατοπίσεων και δυνάμεων είναι τώρα:

$$\mathbf{f} = [f_{x1} \quad f_{y1} \quad f_{z1} \quad m_{x1} \quad m_{y1} \quad m_{z1} \quad f_{x2} \quad f_{y2} \quad f_{z2} \quad m_{x2} \quad m_{y2} \quad m_{z2}]$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2}]$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στους αντίστοιχους κόμβους. Για ισορροπία της δοκού ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$f_{x1} + f_{x2} = 0 \quad f_{y1} + f_{y2} = 0 \quad f_{z1} + f_{z2} = 0 \quad (45\alpha-\gamma)$$

$$m_{x1} + m_{x2} = 0 \quad m_{y1} + m_{y2} = -f_{z1}L \quad m_{z1} + m_{z2} = f_{y1}L \quad (45\delta-\sigma\tau)$$

Στο σημείο αυτό θα υπολογισθούν οι όροι του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου-δοκού, κάνοντας χρήση των παρακάτω σχέσεων και μεθόδων, δηλαδή,

- Σχέσεων τάσεων παραμορφώσεων (καταστατικών εξισώσεων)
- Αντιμετάθεσης δεικτών
- Θεωρίας δοκών
- Ενεργειακών μεθόδων

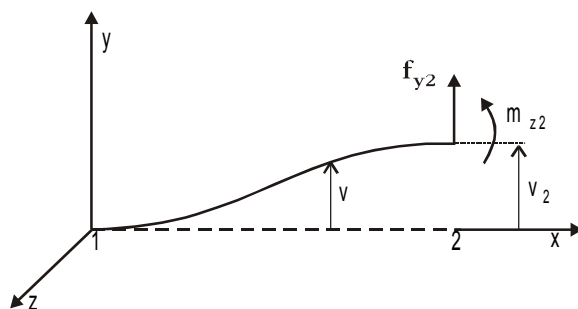
Για τη μετατόπιση u_1 , από τη σχέση τάσεων-παραμορφώσεων έχουμε:

$$f_{x1} = \frac{EA}{L}u_1 \quad (46\alpha)$$

και για διαμήκη ισορροπία,

$$f_{x1} = -f_{x2} \quad (46\beta)$$

Η μετατόπιση u_1 οφείλεται μόνο σε αξονικές δυνάμεις και συνεπώς όλοι οι υπόλοιποι όροι της αντίστοιχης στήλης είναι ίσοι με το μηδέν. Από τα παραπάνω προκύπτουν οι όροι του μητρώου ακαμψίας. Για τη μετατόπιση u_2 , οι αντίστοιχοι όροι της στήλης 7 του μητρώου ακαμψίας, προκύπτουν με αντιμετάθεση όρων.



Σχήμα 11 Γενικευμένες δυνάμεις σε διατομή δοκού

Για τη μετατόπιση v_2 θα γίνει χρήση της θεωρίας δοκών, βάσει του Σχήματος 11. Θεωρούμε ότι η μόνη μετατόπιση που προκύπτει είναι η v_2 . Από τη θεωρία δοκών έχουμε:

$$m_z(x) = m_{z2} + f_{y2}(L - x)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = + \frac{m_z(x)}{EI_z}$$

$$\text{άρα} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z} \{ m_{z2}[x] + f_{y2}[Lx - x^2/2] \} + C_1$$

Στη συνέχεια κάνοντας χρήση των δύο οριακών συνθηκών, για $x=0$ και $x=L$ έχουμε $dv/dx=0$, βρίσκουμε ότι:

$$C_1=0 \quad \text{και} \quad m_{z2} = -(L/2)f_{y2} \quad (47\alpha)$$

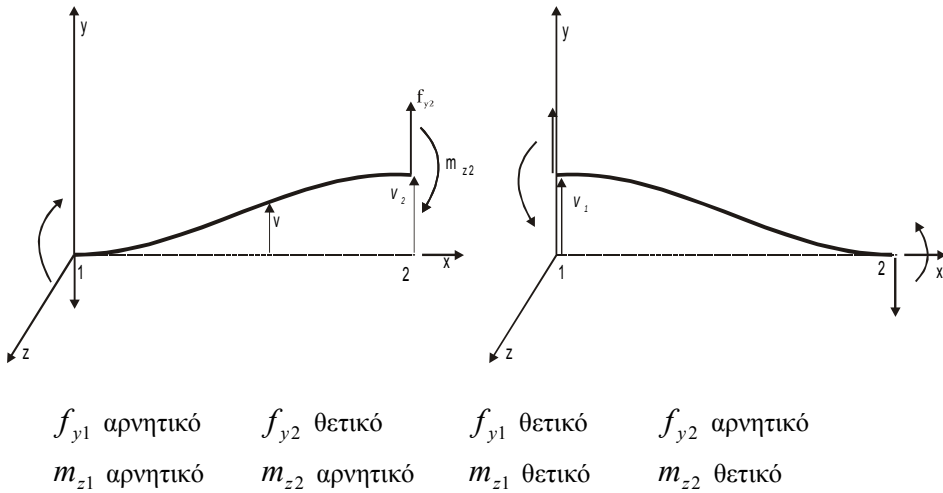
και συνεπώς,

$$v = \frac{1}{EI_z} \left\{ m_{z2} \frac{x^2}{2} + f_{y2} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] \right\} + C_2 \quad (47\beta)$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες $v=0$ για $x=0$ και $v=v_2$ για $x=L$ βρίσκουμε ότι $C_2=0$ και:

$$f_{y2} = \frac{12EI_z}{L^3} v_2 \quad \Rightarrow \quad m_{z2} = -\frac{6EI_z}{L^2} v_2 \quad (48)$$

Εφαρμόζοντας τελικώς τις συνθήκες ισορροπίας, έχουμε:



Σχήμα 12 Αντιμετάθεση δεικτών 1 και 2

$$f_{y1} = -f_{y2} = -\frac{12EI_z}{L^3}v_2 \quad (49)$$

$$m_{z1} = -m_{z2} + f_{y1}L = -\frac{6EI_z}{L^2}v_2 \quad (41)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι όροι της στήλης 8 του μητρώου ακαμψίας.

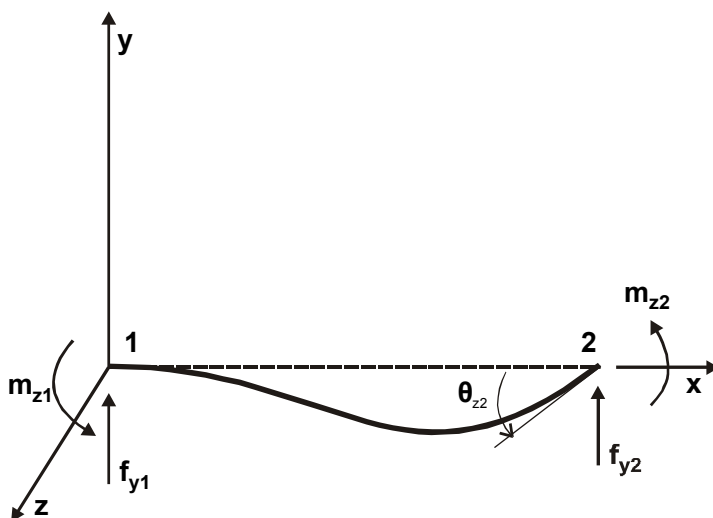
Για τη μετατόπιση v_1 θα γίνει αντιμετάθεση των δεικτών 1 και 2 στις σχέσεις (48) και (49), προσέχοντας τις αντίστοιχες διευθύνσεις των δυνάμεων και καμπτικών ροπών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12. Αποκτάται έτσι η στήλη 2 του μητρώου ακαμψίας.

Για τις μετατοπίσεις w_1 και w_2 οι όροι αποκτώνται με αντιμετάθεση. Για τις γωνίες περιστροφής θ_{x1} και θ_{x2} που προσδιορίζουν την στρέψη της δοκού, οι αντίστοιχοι όροι μπορούν να βρεθούν όπως και αυτοί των u_1 και u_2 προηγουμένως (στήλες 4 και 10 του μητρώου ακαμψίας).

Οι όροι που αντιστοιχούν στη γωνία περιστροφής θ_{z2} (Σχήμα 13) θα υπολογισθούν με ενεργειακή μέθοδο.

$$m_z(x) = m_{z2} + f_{y2}(L - x) \quad (50)$$

$$U = \int_0^L \frac{m_z^2(x)}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \left\{ m_{z2}^2 L + m_{z2} f_{y2} L^2 + f_{y2}^2 \frac{L^3}{3} \right\} \quad (51)$$



Σχήμα 13 Γενικευμένες δυνάμεις σε δοκό

άρα, από το θεώρημα του Castigliano,

$$\frac{\partial U}{\partial m_{z2}} = \frac{1}{2EI_z} \{2m_{z2}L + f_{y2}L^2\} = \theta_{z2}$$

Επίσης,

$$\frac{\partial U}{\partial f_{y2}} = \frac{1}{2EI_z} \left\{ m_{z2}L^2 + 2f_{y2} \frac{L^3}{3} \right\} = v_2 = 0$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις, επιλύουμε ως προς m_{z2} και f_{y2}

$$m_{z2} = \frac{4EI_z}{L} \theta_{z2} \quad \text{και} \quad f_{y2} = -\frac{6EI_z}{L^2} \theta_{z2}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας τέλος δίνουν:

$$m_{z1} = \frac{2EI_z}{L} \theta_{z2} \quad \text{και} \quad f_{y1} = \frac{6EI_z}{L^2} \theta_{z2}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η στήλη 12 του μητρώου ακαμψίας ενώ με αντι-μετάθεση δεικτών υπολογίζονται οι όροι που αντιστοιχούν στις γωνίες περιστροφής θ_{z1} , θ_{y1} και θ_{y2} . Συνεπώς προσδιορίστηκαν όλοι οι όροι του μητρώου ακαμψίας $\mathbf{k}$ το οποίο δίνεται σε ανεπτυγμένη μορφή παρακάτω.

4.1 Μετατοπίσεις λόγω διάτμησης. Η δοκός Timoshenko

Η συνολική μετατόπιση που οφείλεται σε κάμψη και διάτμηση δίνεται από τη σχέση:

$$v = v_b + v_s \quad (52)$$

όπου v_b είναι οι μετατοπίσεις λόγω κάμψης και v_s είναι οι μετατοπίσεις λόγω διάτμησης. Η διαφορική εξίσωση για την περίπτωση της διάτμησης είναι:

$$\frac{dv_s}{dx} = + \frac{f_{y2}}{GA_s} \quad (53)$$

όπου A_s είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής που συνεισφέρει στη παραλαβή της διατμητικής φόρτισης. Οι εγκάρσιες τομές που αρχικά ήσαν κάθετες στον κεντροβαρικό άξονα θα περιστραφούν λόγω κάμψης θα μετατοπισθούν λόγω κάμψης και διάτμησης και θα υποστούν στρέβλωση λόγω της μη-σταθερής κατανομής των διατμητικών φορτίων κατά μήκος της δοκού. Οι οριακές συνθήκες που απαιτούνται ώστε να επιτευχθούν οι ζητούμενες περιστροφές και μετατοπίσεις στα άκρα είναι:

$$\left. \frac{dv_b}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{dv_b}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (54\alpha)$$

$$v_{x=0} = 0 \quad v_{x=L} = v_2 \quad (54\beta)$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι πρέπει να προστεθεί ένας όρος στη σχέση (47β), που θα προκύψει από την ολοκλήρωση της σχέσης (53). Έτσι έχουμε:

$$v = v_b + v_s = \frac{1}{EI_z} \left\{ m_{z2} \frac{x^2}{2} + f_{y2} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] \right\} + \frac{xf_{y2}}{GA_s} + C_2 \quad (55)$$

Εφόσον $v|_{x=0}=0$ έχουμε $C_2=0$ όπως προηγουμένως, και εφόσον $v|_{x=L}=v_2$ εάν απαλειφθεί το m_{z2} κάνοντας χρήση της εξίσωσης (47α) βρίσκουμε:

$$f_{y2} = \frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi)} v_2 \quad \text{όπου} \quad \varphi = \frac{12EI_z}{GA_s L^2}$$

Αντίστοιχες σχέσεις αποκτώνται από τις σχέσεις ισορροπίας για τους άλλους όρους που περιλαμβάνουν το v_2 . Γενικά, οι όροι που περιλαμβάνουν μετατοπίσεις λόγω κάμψης και διάτμησης θα περιλαμβάνουν τον όρο φ για μετατοπίσεις λόγω διάτμησης στις διευθύνσεις Oy και Oz . Ορίζουμε έτσι αντιστοίχως τις δύο παραμέτρους:

$$\varphi_y = \frac{12EI_z}{GA_{sy}L^2} \quad \varphi_z = \frac{12EI_y}{GA_{sz}L^2} \quad (56)$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου-δοκού λαμβάνοντας υπόψη τις μετατοπίσεις λόγω διάτμησης που προκύπτει δίνεται στη μεθεπόμενη σελίδα. Στο μητρώο αυτό ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} k_{22} &= \frac{12EI_z}{L^3(1+\varphi_y)} & k_{33} &= \frac{12EI_y}{L^3(1+\varphi_z)} & k_{68} &= \frac{6EI_z}{L^2(1+\varphi_y)} & k_{59} &= \frac{6EI_y}{L^2(1+\varphi_z)} \\ k_{55} &= \frac{(4+\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & k_{66} &= \frac{(4+\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} & k_{511} &= \frac{(2+\varphi_z)EI_y}{L(1+\varphi_z)} & k_{612} &= \frac{(2+\varphi_y)EI_z}{L(1+\varphi_y)} \end{aligned}$$

Για δοκούς με μεταβαλλόμενη διατομή μπορούμε είτε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις με ενεργειακά θεωρήματα (Castigliano, Engesser) είτε να υποδιαιρεθεί η δοκός σε έναν αριθμό μικρότερων τμημάτων σταθερής διατομής.

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε πλαίσια με συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους. Στην περίπτωση που τα φορτία είναι κατανεμημένα, αυτά λαμβάνονται υπόψη αναλόγως του τρόπου στήριξης των στοιχείων. Για στοιχεία-ράβδους εύκολα εφαρμόζονται οι συνθήκες ισορροπίας και αποκτώνται οι 6 δυνάμεις που ασκούνται στους δύο ακραίους κόμβους κάθε στοιχείου. Για πλαίσια με ροπές στα άκρα των στοιχείων η διαδικασία είναι πιο περίπλοκη και θα περιγραφεί σε επόμενο εδάφιο.

5. Πλαίσια με κατανεμημένα φορτία

Έχει αναφερθεί προηγουμένως ότι στην περίπτωση αρθρωτών κατασκευών με στοιχεία δύο κόμβων αρκεί η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας για να αποκτηθούν οι 6 συνιστώσες των δυνάμεων στους δύο κόμβους. Για κατασκευές με περιορισμούς στους κόμβους οι εξισώσεις ισορροπίας δεν επαρκούν διότι η κατασκευή γίνεται πλέον στατικά αόριστη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι τα εξωτερικά φορτία υποδιαιρούνται σε δύο συστήματα, γίνονται δύο αναλύσεις και στο τέλος προστίθενται τα αποτελέσματα, κάνοντας χρήση της αρχής της επαλληλίας, που ισχύει για γραμμικά ελαστικά συστήματα.

Το πρώτο στάδιο συνίσταται στην πάκτωση όλων των κόμβων και στον υπολογισμό των δυνάμεων πάκτωσης. Το στάδιο αυτό επιτυγχάνεται χωρίς δυσκολία καθώς μπορούμε να εξετάσουμε κάθε στοιχείο ξεχωριστά. Στο δεύτερο στάδιο της ανάλυσης εξετάζεται η συμπεριφορά της κατασκευής υπό την επίδραση δυνάμεων στους κόμβους και μόνο, η κάθε μία από τις οποίες έχει το ίδιο μέγεθος αλλά αντίθετη φορά από τις δυνάμεις πάκτωσης. Στις δυνάμεις αυτές πρέπει να προστεθούν

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ m_{x1} \\ m_{y1} \\ m_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \\ m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & -k_{68} & 0 & 0 & 0 & -k_{68} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & 0 & -k_{59} & 0 & 0 & -k_{33} & 0 & -k_{59} & 0 \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{59} & 0 & k_{55} & 0 & 0 & 0 & k_{59} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & -k_{68} & 0 & 0 & 0 & k_{66} & 0 & k_{68} & 0 & 0 & k_{66} & k_{612} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_{22} & 0 & 0 & 0 & k_{68} & 0 & k_{22} & 0 & 0 & k_{68} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{33} & 0 & k_{59} & 0 & 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{59} & 0 \\ \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{59} & 0 & k_{55} & 0 & 0 & 0 & k_{59} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & -k_{68} & 0 & 0 & 0 & k_{66} & 0 & k_{68} & 0 & 0 & k_{66} & k_{612} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου δοκού
(λαμβάνοντας υπόψη τις μετατοπίσεις λόγω διάτμησης)

και τυχόν εξωτερικά φορτία που ασκούνται στους κόμβους. Τέλος εφαρμόζεται η αρχή της επαλληλίας και αποκτώνται οι εσωτερικές δυνάμεις στους κόμβους από τις οποίες υπολογίζονται οι μετατοπίσεις και οι αντίστοιχες τάσεις.

Παράδειγμα 5. Πλαίσιο με κατανεμημένο φορτίο

Στο σχήμα της επόμενης σελίδας περιγράφεται η επίλυση πλαισίου με κατανεμημένο φορτίο. Το πλαίσιο είναι πακτωμένο στους κόμβους O και B και επομένως είναι στατικά αόριστο. Η επίλυσή του ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

1. Πακτώνονται οι κόμβοι A και B προ της επιβολής του W . Στη δοκό AB δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τότε. Η δοκός OB καθίσταται τότε αμφίπακτη.
2. Οι δυνάμεις πάκτωσης δείχνονται στο αντίστοιχο σχήμα. Οι δυνάμεις στον κόμβο O δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά του πλαισίου και επομένως αμελούνται σε αυτό το στάδιο.
3. Η τελική κατανομή των καμπτικών ροπών δίνεται στο τελευταίο διάγραμμα.

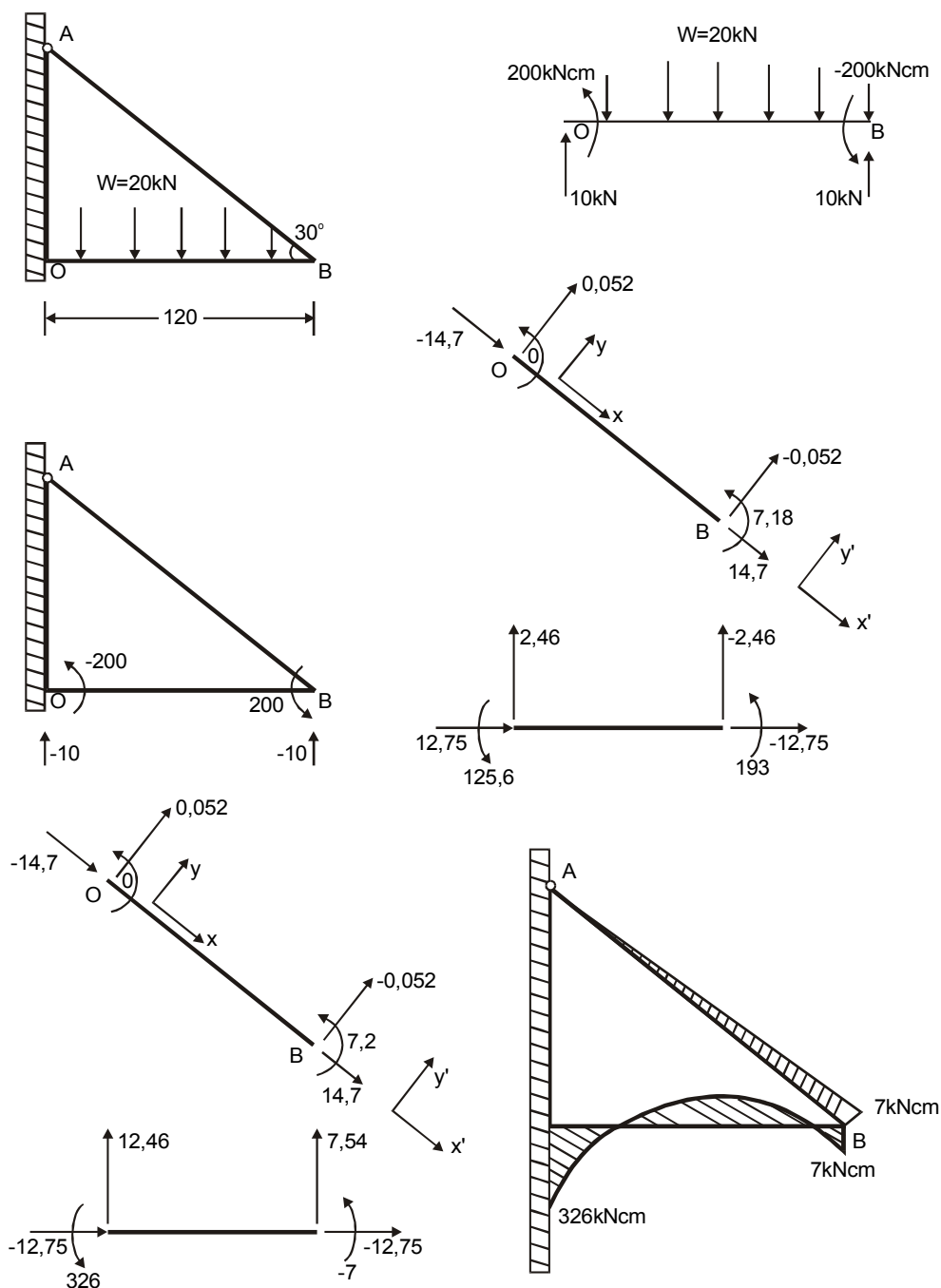
6. Συγκρότηση του γενικού μητρώου ακαμψίας

Η διαδικασία επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας ($KU=F$) συνίσταται στην συγκρότηση του μητρώου ακαμψίας της κατασκευής K και σε συνέχεια είτε:

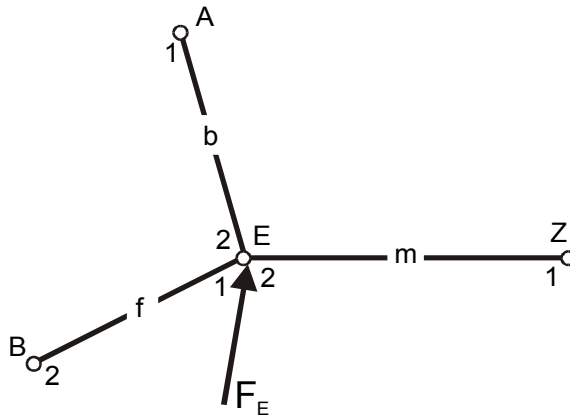
α) στην αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας για να διατυπωθεί η μητρική εξίσωση $U=K^{-1}F$, είτε

β) στην επίλυση του συστήματος με μία μέθοδο απαλοιφής (ή επαναληπτική).

Ο ευκολότερος τρόπος *συγκρότησης* (*συνάθροισης*) του γενικού μητρώου ακαμψίας K της κατασκευής συνίσταται στην *άμεση σύνθεση των ακαμψιών* των στοιχείων. Κατά τη μέθοδο αυτή οι όροι του μητρώου ακαμψίας βρίσκονται με συστηματική πρόσθεση των όρων του μητρώου ακαμψίας κάθε στοιχείου. Η μέθοδος γίνεται ευκολότερα κατανοητή εάν γίνει αναφορά σε συγκεκριμένο παράδειγμα.



Σχήμα 14 Ανάλυση πλαισίου με κατανεμημένο φορτίο



Σχήμα 15 Διάταξη στοιχείων στην περιοχή κόμβου

Έστω λοιπόν κατασκευή αποτελούμενη από στοιχεία-ράβδους με δύο κόμβους σε κάθε ένα στοιχείο. Τα κεφαλαία γράμματα $A, B, C, \dots$ αναφέρονται σε κόμβους ενώ αντίστοιχα μικρά $a, b, c, \dots$ αναφέρονται σε στοιχεία. Τότε μία πιθανή διάταξη στην περιοχή του κόμβου E περιγράφεται στο Σχήμα 15.

Στο σχήμα αυτό δίνεται η αρίθμηση των κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς. Τότε για το στοιχείο b θα έχουμε:

$$\mathbf{f}^{(b)} = \mathbf{k}^{(b)} \mathbf{U}^{(b)} \quad (57)$$

Μετασχηματίζοντας στο γενικό σύστημα αναφοράς και διαχωρίζοντας έτσι ώστε να αποκτηθούν υπομητρώα που να αντιστοιχούν στους δύο κόμβους του στοιχείου, αποκτάται η παρακάτω μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{(b)'} \\ \mathbf{f}_2^{(b)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(b)'} & \mathbf{k}_{12}^{(b)'} \\ \mathbf{k}_{21}^{(b)'} & \mathbf{k}_{22}^{(b)'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{(b)'} \\ \mathbf{U}_2^{(b)'} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Εφαρμόζοντας συνθήκες συμβιβαστού στους κόμβους A και E έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^{(b)'} \\ \mathbf{U}_2^{(b)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A \\ \mathbf{U}_E \end{bmatrix} \quad (59)$$

όπου $\mathbf{U}_A$ και $\mathbf{U}_E$ είναι οι μετατοπίσεις στο γενικό σύστημα αναφοράς. Συμβολίζουμε επίσης με $-\mathbf{f}_2^{(b)}$ τη δύναμη που ασκεί το στοιχείο b στον κόμβο E . Αντίστοιχες σχέσεις αποκτώνται για κάθε στοιχείο που συναντά τον κόμβο E . Η εξίσωση ισορροπίας του κόμβου αυτού είναι:

$$\mathbf{F}_E - \mathbf{f}^{(b)'} - \mathbf{f}^{(f)'} - \mathbf{f}^{(m)'} = \mathbf{0} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } \mathbf{F}_E = & \left[\mathbf{k}_{21}^{(b)'} \mathbf{U}_A + \mathbf{k}_{22}^{(b)'} \mathbf{U}_E \right] + \left[\mathbf{k}_{11}^{(f)'} \mathbf{U}_E + \mathbf{k}_{12}^{(f)'} \mathbf{U}_B \right] + \\ & + \left[\mathbf{k}_{21}^{(m)'} \mathbf{U}_Z + \mathbf{k}_{22}^{(m)'} \mathbf{U}_E \right] \end{aligned} \quad (61)$$

Προσθέτοντας τους αντίστοιχους όρους και διατυπώνοντας την εξίσωση σε μητρική μορφή, έχουμε:

$$\mathbf{F}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{21}^{(b)'} & \mathbf{k}_{12}^{(f)'} & \left[\mathbf{k}_{22}^{(b)'} + \mathbf{k}_{11}^{(f)'} + \mathbf{k}_{22}^{(m)'} \right] & \mathbf{k}_{21}^{(m)'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A \\ \mathbf{U}_B \\ \mathbf{U}_E \\ \mathbf{U}_Z \end{bmatrix} \quad (62)$$

Η τάξη των μητρώων της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γίνει ίση με αυτή της εξίσωσης ισορροπίας της κατασκευής εάν συμπεριληφθούν όλες οι μετατοπίσεις στο μητρώο $\mathbf{U}$ και συμπληρωθούν με $\mathbf{0}$ οι υπόλοιπες θέσεις. Τότε έχουμε:

$$\mathbf{F}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{21}^{(b)'} & \mathbf{k}_{12}^{(f)'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \left[\mathbf{k}_{22}^{(b)'} + \mathbf{k}_{11}^{(f)'} + \mathbf{k}_{22}^{(m)'} \right] & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{21}^{(m)'} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \dots \end{bmatrix} \mathbf{U} \quad (63)$$

Παρόμοιες εξισώσεις αποκτώνται για κάθε κόμβο και το σύνολο των εξισώσεων ισορροπίας της κατασκευής εκφράζεται σε μητρική μορφή ως $\mathbf{KU}=\mathbf{F}$. Το μητρώο ακαμψίας της κατασκευής αποκτάται κατά τον ίδιο τρόπο με τη σχέση (63). Τοποθετούνται οι όροι στο μητρώο $\mathbf{K}$ έτσι ώστε οι βαθμοί ελευθερίας των στοιχείων να αντιστοιχούν με αυτούς που ορίζονται στο τοπικό σύστημα αναφοράς και ακολούθως με πρόσθεση των όρων που συμπίπτουν.

Εάν για παράδειγμα το στοιχείο n συνδέει τους κόμβους M και N και στο τοπικό σύστημα αναφοράς το M αντιστοιχεί με το 1 και το N με το 2, τότε τα υπομητρώα του $\mathbf{k}^{(n)}$ ($\mathbf{k}_{11}^{(n)}$, $\mathbf{k}_{12}^{(n)}$, $\mathbf{k}_{21}^{(n)}$ και $\mathbf{k}_{22}^{(n)}$) θα τοποθετηθούν στο μητρώο $\mathbf{K}$ όπως φαίνεται παρακάτω. Λεπτομέρειες σχετικά με τον προγραμματισμό της μεθόδου της άμεσης σύνθεσης των ακαμψιών δίνονται στο εδάφιο 10, όπου περιλαμβάνονται λογικά διαγράμματα και άλλες σχετικές πληροφορίες.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_M \\ \mathbf{F}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & +\mathbf{k}_{11}^{(n)} & \dots & \dots & +\mathbf{k}_{12}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & +\mathbf{k}_{21}^{(n)} & \dots & \dots & +\mathbf{k}_{22}^{(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_M \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}$$

7. Η μέθοδος της στατικής συμπίκνωσης. Υπερστοιχεία.

Κατά την ανάλυση μεγάλων και σχετικά πολύπλοκων κατασκευών εξυπηρετεί, όταν είναι εφικτό, να υποδιαιρείται το διακριτό μοντέλο της κατασκευής σε ομάδες στοιχείων (υποκατασκευές) και να επακολουθεί ανάλυση των τμημάτων αυτών της κατασκευής. Αυτό έχει σαν επακόλουθο:

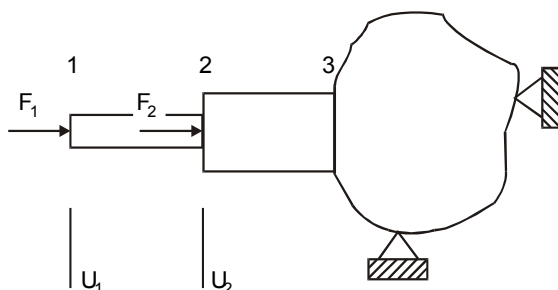
1. Να επιτυγχάνεται ευκολότερα η σύνταξη, ο έλεγχος και ο χειρισμός των αρχικών δεδομένων.
2. Να γίνεται οικονομία υπολογιστικού χώρου αποφεύγοντας την επανάληψη ταυτόσημων τμημάτων της κατασκευής.
3. Να γίνεται ευκολότερα η πρόσθεση τοπικών λεπτομερειών.
4. Να επιφέρονται αλλαγές με πιο απλό και οικονομικό τρόπο.
5. Να είναι εφικτή η σταδιακά λεπτομερέστερη ανάλυση με μικρότερους χρόνους τρεξίματος.
6. Να μπορούν να λαμβάνονται υπόψη κατά την ίδια ανάλυση υποπεριοχές στις οποίες οι παράμετροι κομβικών μετατοπίσεων διαφέρουν.
7. Να περιορίζονται τα σφάλματα αποκοπής.
8. Να είναι δυνατό να επιλεγούν τα απαιτούμενα αποτελέσματα
9. Να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη οικονομία χρόνου κατά τη σύνταξη δεδομένων, τη λειτουργία του προγράμματος και τον έλεγχο των αποτελεσμάτων.

Ας δούμε όμως σε τι συνίσταται η διαδικασία της *στατικής συμπίκνωσης*⁴. Στην πράξη, η στατική συμπίκνωση βασίζεται στην *εμπρόσθια απαλοιφή* των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής που περιλαμβάνονται στη θεωρούμενη υποκατασκευή, έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της απαλοιφής αυτής στους υπόλοιπους κόμβους της κατασκευής. Αυτό επιτυγχάνεται με την σταδιακή κανονικοποίηση της *i*-οστής εξίσωσης (διαιρώντας με τον *i*-οστό συντελεστή) και συνδυάζοντας με τις υπόλοιπες εξισώσεις έτσι ώστε ο συντελεστής της *i*-οστής γραμμής να γίνει ίσος με το μηδέν. Σαν αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας μπορεί να απαλειφθεί ο *i*-οστός βαθμός ελευθερίας και έτσι αποκτάται η ανηγμένη (ή συμπυκνωμένη) εξίσωση ισορροπίας, η οποία λύνεται με πίσω-αντικατάσταση.

Παράδειγμα 6

Ζητιέται να αντικατασταθεί η διακριτοποιημένη κατασκευή του σχήματος από μία αντίστοιχη στην οποία τα δύο συστατικά στοιχεία να γίνουν ένα και να επιλυθεί η μητρική εξίσωση ισορροπίας.

⁴ στατική συμπίκνωση = static condensation



Σχήμα 16 Κατασκευή αποτελούμενη από τρία στοιχεία
(δύο ράβδοι και ένα υπερστοιχείο)

Λύση

Η κατασκευή του σχήματος αποτελείται από δύο στοιχεία-ράβδους και ένα τρίτο τμήμα, που δεν θα μας απασχολήσει προς το παρόν. Τα δύο στοιχεία-ράβδοι έχουν συνολικά τρεις κόμβους και τρεις βαθμούς ελευθερίας ενώ ο λόγος των εμβαδών της διατομής τους είναι 1 προς 2. Στην κατασκευή ασκούνται δύο εξωτερικές δυνάμεις, στους κόμβους 1 και 2. Ο κόμβος 2 δεν είναι συνδεδεμένος με την υπόλοιπη κατασκευή που εκτείνεται στα δεξιά του κόμβου 3, ενώ ο κόμβος 1 είναι ελεύθερος. Θεωρούμε λοιπόν τον κόμβο 2 ως εσωτερικό των δύο στοιχείων 1 και 2. Μπορούμε λοιπόν να τον αφαιρέσουμε με τη μέθοδο της στατικής συμπίκνωσης μετατρέποντας έτσι τα δύο στοιχεία σε ένα υπερστοιχείο με κόμβους μόνο στα σύνορά του. Η αρχική μητρωική εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής είναι:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε πως εάν τοποθετήσουμε ένα άκαμπτο στήριγμα στον κόμβο 3, δηλαδή το $U_3=0$, και επιλύσουμε την μητρωική εξίσωση ισορροπίας των δύο στοιχείων καταλήγουμε στις παρακάτω μετατοπίσεις:

$$U_1 = \frac{3F_1 + F_2}{2} \frac{L}{EA} \quad U_2 = \frac{F_1 + F_2}{2} \frac{L}{EA} \quad (65\alpha-\beta)$$

Για να επιτευχθεί στατική συμπίκνωση του κόμβου 2 αναδιατάσσονται οι εξισώσεις έτσι ώστε ο αφαιρούμενος βαθμός ελευθερίας να είναι ο πρώτος σε κάθε μία εξίσωση του συστήματος. Αυτό επιτυγχάνεται αλλάζοντας τη σειρά των εξισώσεων στο σύστημα, θέτοντας την θεωρούμενη πρώτη. Η δεύτερη εξίσωση (που αντιστοιχεί στον δεύτερο βαθμό ελευθερίας) γίνεται λοιπόν πρώτη με αντικατάσταση της πρώτης σειράς και στήλης από τη δεύτερη σειρά και στήλη. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Εκπονείται τώρα το πρώτο βήμα απαλοιφής κατά Gauss:

$$\begin{bmatrix} F_2/3 \\ F_1 + F_2/3 \\ 2F_2/3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη σειρά και η πρώτη στήλη έχουν κανονικοποιηθεί ως προς την πρώτη μεταβλητή, έχει δε γίνει απαλοιφή της μεταβλητής αυτής στις υπόλοιπες δύο εξισώσεις. Η ανηγμένη (ή συμπτυκνωμένη) μητρική εξίσωση ισορροπίας είναι τότε:

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_2/3 \\ 2F_2/3 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

το δε τμήμα που έχει αφαιρεθεί είναι:

$$\frac{F_2}{3} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση θα χρησιμοποιηθεί κατά τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνάμεων του υπερστοιχείου. Βλέπουμε λοιπόν πως οι δύο ακραίοι κόμβοι συνδέονται πλέον απευθείας με ένα υπερστοιχείο-ράβδο το μητρώο ακαμψίας του οποίου είναι:

$$k_{se} = \frac{2EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εάν οι δύο ράβδοι αποτελούσαν τμήμα μεγαλύτερης κατασκευής, το μητρώο k_{se} θα συντασσόταν ως μέρος του γενικού μητρώου ακαμψίας. Το διάνυσμα των δυνάμεων θα εντασσόταν επίσης στο διάνυσμα των δυνάμεων της κατασκευής. Βλέπουμε λοιπόν ότι η διαδικασία αυτή ελαττώνει το μέγεθος του γ.μ.α., για να έχουμε όμως και ελάττωση του αριθμού των απαιτούμενων πράξεων θα πρέπει να γίνει επαναληπτική χρήση ενός υπερστοιχείου διότι διαφορετικά θα απαιτηθεί

ακριβώς ο ίδιος αριθμός υπολογισμών με τον αρχικό. Για να κάνουμε επαλήθευση των υπολογισμών μπορούμε να θεωρήσουμε το υπερστοιχείο μεμονωμένο, θέτοντας $U_3=0$. Τότε,

$$\begin{bmatrix} F_1 + F_2 / 3 \\ R_3 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{3L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

όπου η δύναμη στον κόμβο 3 είναι τώρα η αντίδραση R_3 . Επιλύοντας ως προς U_1 έχουμε:

$$U_1 = \frac{3F_1 + F_2}{2} \frac{L}{EA} \quad (68)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με αυτό που αποκτήθηκε κατά την αρχική θεώρηση της κατασκευής χωρίς την εφαρμογή της στατικής συμπίκνωσης. Μετά τον προσδιορισμό των μετατοπίσεων στο υπερστοιχείο μπορούμε να υπολογίσουμε και τις τάσεις στο εσωτερικό του.

Δημιουργία υπερστοιχείου

Θα περιγραφεί τώρα η διαδικασία δημιουργίας ενός υπερστοιχείου σε γενική μορφή. Θεωρούμε λοιπόν μία κατασκευή η οποία υποδιαιρείται σε (νοητές) υποκατασκευές, κάθε μία από τις οποίες αποτελείται από έναν αριθμό στοιχείων. Τα όρια των στοιχείων συνορεύουν με αυτά των γειτονικών υποκατασκευών στις οποίες έχει υποδιαιρεθεί η κατασκευή. Εάν το διάνυσμα των μετατοπίσεων για μία από τις υποκατασκευές αυτές καλείται U , το διάνυσμα αυτό μπορεί να διαιρεθεί στα U_i και U_r , όπου οι μετατοπίσεις U_i είναι εσωτερικές ενώ οι U_r είναι συνοριακές ($U=U_i+U_r$). Η εξίσωση ισορροπίας είναι τότε:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ir} \\ k_{ri} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_r \end{bmatrix} \quad (69)$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές γράφεται:

$$F_i = k_{ii}U_i + k_{ir}U_r \quad (70)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο σκέλη με k_{ii}^{-1} και αναδιατάσσοντας έχουμε:

$$U_i = k_{ii}^{-1}F_i - k_{ii}^{-1}k_{ir}U_r \quad (71)$$

όπου $\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{F}_i$ είναι οι μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων που οφείλονται στις εσωτερικές δυνάμεις όταν οι συνοριακοί κόμβοι περιορίζονται, και $-\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{k}_{ir}\mathbf{U}_r$ είναι οι μετατοπίσεις των εσωτερικών κόμβων που οφείλονται σε μετατοπίσεις των συνόρων της υποκατασκευής. Το αντίστροφο του $\mathbf{k}_{ii}$ υπάρχει εφόσον οι επιβαλλόμενες συνθήκες στους εσωτερικούς κόμβους σε συνδυασμό με τις μετατοπίσεις $\mathbf{U}_r$ των περιορισμένων κόμβων επαρκούν για να μην προκύψει κίνηση άκαμπτου σώματος στους κόμβους i . Η δεύτερη εξίσωση είναι:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{k}_{ri}\mathbf{U}_i + \mathbf{k}_{rr}\mathbf{U}_r \quad (72)$$

Εάν αντικαταστήσουμε για το $\mathbf{U}_i$ και το $\mathbf{k}_{ri}$ από τη σχέση $\mathbf{k}_{ri} = \mathbf{k}_{ir}^t$ και αναδιατάξουμε καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathbf{F}_r - \mathbf{k}_{ir}^t \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{U}_i = (\mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{ir}^t \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ir}) \mathbf{U}_r \quad (73)$$

$$\text{ή} \quad \bar{\mathbf{F}}_r = \bar{\mathbf{k}}_{rr} \mathbf{U}_r \quad (74)$$

$$\text{και} \quad \bar{\mathbf{k}}_{rr} = \mathbf{k}_{rr} - \mathbf{k}_{ir}^t \mathbf{k}_{ii}^{-1} \mathbf{k}_{ir} \quad (75)$$

Η (74) είναι εξίσωση ισορροπίας της υποκατασκευής και χρησιμοποιείται κατά την ανάλυση ολόκληρης της κατασκευής κατά τον γνωστό τρόπο.

8. Επίπεδα και χωρικά πλαίσια⁵

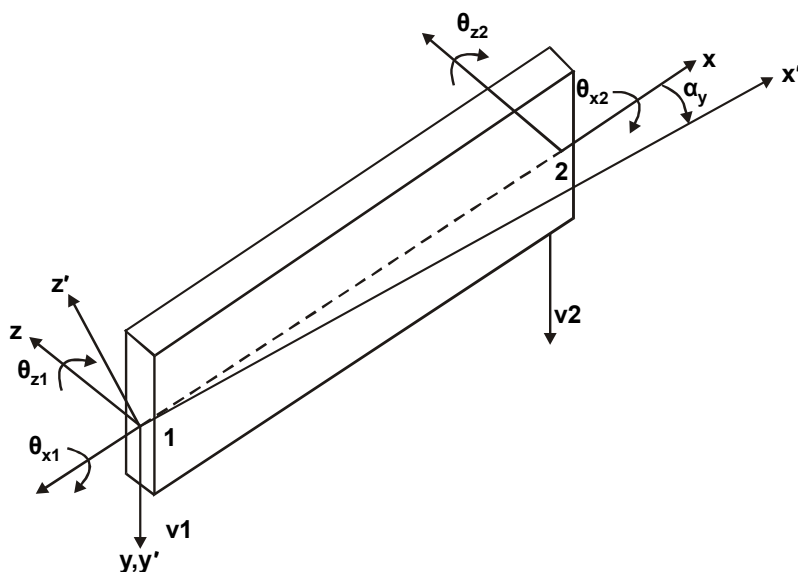
Ο όρος *πλαίσιο* συνήθως αφορά κατηγορία κατασκευών στις οποίες συνεπίπεδα συστήματα δοκών συνδέονται μεταξύ τους σε κόμβους. Σε ναυπηγικές κατασκευές, παραδείγματα τέτοιων κατασκευών είναι τα καταστρώματα και ο πυθμένας του πλοίου. Κατά κανόνα σε τέτοιες κατασκευές οι κατανεμημένες φορτίσεις δεν προκαλούν ανάπτυξη ομοεπίπεδων εσωτερικών δυνάμεων και ροπών και έτσι το ζητούμενο της ανάλυσης μίας τέτοιας κατασκευής είναι η κάθετη μετατόπιση και οι περιστροφές περί τους δύο άξονες, στο επίπεδο της κατασκευής. Επειδή τέτοιες κατασκευές συναντώνται συχνά σε ναυπηγικές κατασκευές, θα δοθεί κάποια έμφαση στους τρόπους ανάλυσής τους με μητρωικές μεθόδους. Πριν εισαχθούν οι υπολογιστικές μέθοδοι, είχε γίνει σημαντική προσπάθεια επίλυσης των επιπέδων πλαισίων από τον Clarkson ο οποίος χρησιμοποίησε αναλυτικές μεθόδους και παρουσίασε σειρά διαγραμμάτων για την μελέτη τέτοιων κατασκευών. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία για την περιγραφή των μεθόδων αυτών.

⁵ επίπεδο πλαίσιο = plane frame

χωρικό πλαίσιο = space frame

Ο κύριος λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνται λεπτότοιχα ελάσματα στις ναυπηγικές κατασκευές είναι για να εξασφαλίζεται στεγανότητα, επιτυγχάνοντας συγχρόνως τον περιορισμό του βάρους. Οι διαστάσεις των ελασμάτων και των ενισχύσεων τους επιλέγονται για να ανθίσταται η κατασκευή τις καταπονήσεις λόγω του εξωτερικού υδροστατικού φορτίου ή των συγκεντρωμένων βαρών. Οι τάσεις που αναπτύσσονται στα ελάσματα είναι καμπτικές και καλούνται *τριτεύουσες* (σ_3). Τα ελάσματα εκπληρώνουν όμως και ένα δεύτερο ρόλο, καθότι λειτουργούν και ως πέλματα των ενισχύσεων-δοκών. Σε αυτή την περίπτωση οι τάσεις που αναπτύσσονται ασκούνται στο επίπεδο του ελάσματος και καλούνται *δευτερεύουσες* (σ_2)⁶. Περαιτέρω εξέταση των κατανομών των τάσεων αυτών οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι κατανομές των δευτερευουσών τάσεων στο έλασμα δεν είναι ομοιόμορφες αλλά παρουσιάζουν μία αύξηση στην περιοχή σύνδεσης με τα ενισχυτικά ενώ παρατηρείται μία αντίστοιχη ελάττωση σε κάποια απόσταση από αυτά. Η μεταβολή αυτή οφείλεται στο φαινόμενο της υστέρησης διάτμησης που παρουσιάζεται όταν ενισχυμένα ελάσματα φέρουν κάθετες, καμπτικές φορτίσεις. Για να ληφθεί υπόψη αυτή η μεταβολή ορίζεται ένα ισοδύναμο, νοητό έλασμα το οποίο φέρει το ίδιο φορτίο αλλά ομοιόμορφα κατανεμημένο. Το πλάτος του ισοδυνάμου ελάσματος χρησιμοποιείται κατά τη μελέτη επιπέδων πλαισίων και πρέπει να θεωρείται και κατά τη μητρωική ανάλυση τέτοιων κατασκευών.

8.1 Το στοιχείο δοκός-πλαισίου



Σχήμα 17 Στοιχείο-δοκός με έξι βαθμούς ελευθερίας

⁶ βλέπε: Π.Α. Καρύδη *Η Μεταλλική Κατασκευή του Πλοίου. Θέματα Τοπικής Αντοχής* Αθήνα 2000, (Κεφάλαιο 11).

Θεωρούμε ότι οι κεντροβαρικοί άξονες όλων των δοκών από τις οποίες αποτελείται το πλαίσιο είναι ομοεπίπεδες και ότι έχουν ένα επίπεδο συμμετρίας κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόκτηση του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου δοκού-πλαισίου.

Εάν Oxy είναι ένα τοπικό σύστημα αναφοράς κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου, (Σχήμα 17), τα διανύσματα μετατοπίσεων και δυνάμεων του στοιχείου δοκού-πλαισίου είναι:

$$u = [v_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{z2}] \quad (76)$$

$$\text{και } f = [f_{y1} \quad m_{x1} \quad m_{z1} \quad f_{y2} \quad m_{x2} \quad m_{z2}] \quad (77)$$

$$\text{και το μητρώο ακαμψίας} \quad k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

περιλαμβάνει τα παρακάτω υπομητρώα

$$k_{11} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad k_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (78\alpha-\beta)$$

$$k_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad k_{22} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (78\gamma-\delta)$$

Μετατοπίσεις λόγω διάτμησης μπορούν επίσης να ληφθούν υπόψη με αντίστοιχες μετατροπές στους όρους των παραπάνω υπομητρώων. Εάν το τοπικό σύστημα αναφοράς αντιστοιχεί σε γωνία περιστροφής α , περί τον άξονα Oy' στο γενικό σύστημα αναφοράς, Σχήμα 17, το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού από το τοπικό στο γενικό σύστημα αναφοράς, T είναι:

$$T = \begin{bmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & R_\theta \end{bmatrix} \quad (80)$$

και περιλαμβάνει το μητρώο $\mathbf{R}_\theta$ όπου

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \quad (81)$$

Στον κόμβο 1 του στοιχείου-πλασιού ισχύει $\begin{bmatrix} \mathbf{U}_I \\ \boldsymbol{\Theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o & \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} & \mathbf{R}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_I' \\ \boldsymbol{\Theta}_I' \end{bmatrix}$

Η σχέση αυτή γράφεται παρακάτω στην πλήρη μορφή της:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_y & 0 & -\sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ w_1' \\ \theta_{x1}' \\ \theta_{y1}' \\ \theta_{z1}' \end{bmatrix} \quad (82)$$

Άρα για το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου αυτού έχουμε:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_y & -\sin \alpha_y \\ 0 & \sin \alpha_y & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ \theta_{x1}' \\ \theta_{z1}' \end{bmatrix} \quad (83)$$

ή για το στοιχείο $\mathbf{U} = \mathbf{T}_r \mathbf{U}'$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_y & -\sin \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_y & \cos \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_y & -\sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_y & \cos \alpha_y \end{bmatrix} \quad (84)$$

Η συνάθροιση του γενικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής γίνεται με την *άμεση σύνθεση των ακαμψιών*, όπως περιγράφηκε στο εδάφιο 7. Η επίλυση του προβλήματος σε επόμενα στάδια ακολουθεί τα ίδια βήματα με την έως τώρα περιγραφείσα μητρική μέθοδο.

Για την περιγραφή αναλυτικών μεθόδων ανάλυσης επίπεδων πλαισίων με κατανεμημένα φορτία ο ενδιαφερόμενος παραπέμπεται στο βιβλίο του Clarkson [7]. Η όλη διαδικασία μπορεί όμως να αυτοματοποιηθεί σε υπολογιστικά προγράμματα έτσι ώστε να μην απαιτούνται προκαταρκτικοί υπολογισμοί.

8.2 Συμμετρία και αντισυμμετρία σε επίπεδα πλαίσια

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονισθεί η σημασία της χρήσης συμμετρίας ή αντισυμμετρίας κατά την ανάλυση των επίπεδων πλαισίων. Οι διάφορες περιπτώσεις περιγράφονται στο Σχήμα 18. Στο σχήμα αυτό εικονίζεται μία συμμετρική κατασκευή με ανομοιόμορφη κατανομή κάθετης και ομοεπίπεδης φόρτισης μεγέθους F_1 στο (x, y) , F_2 στο $(-x, y)$, F_3 στο $(-x, -y)$, και F_4 στο $(x, -y)$, όπου $F_i = [f_{zi}, m_{xi}, m_{yi}]^t$. Τα τέσσερα διανύσματα F_1, F_2, F_3, F_4 μπορούν να εκφραστούν ως άθροισμα τεσσάρων συνιστωσών F_a, F_b, F_c, F_d κάνοντας χρήση κάθε φορά διαφορετικής σχέσης συμμετρίας-αντισυμμετρίας ως προς τους άξονες κατασκευαστικής συμμετρίας. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ f_{z3} \\ f_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{za} \\ f_{zb} \\ f_{zc} \\ f_{zd} \end{bmatrix} \quad (85)$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\begin{bmatrix} f_{za} \\ f_{zb} \\ f_{zc} \\ f_{zd} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ f_{z3} \\ f_{z4} \end{bmatrix} \quad (86a)$$

και

$$\begin{bmatrix} m_{xa} \\ m_{xb} \\ m_{xc} \\ m_{xd} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \\ m_{x3} \\ m_{x4} \end{bmatrix} \quad (86\beta)$$

$$\begin{bmatrix} m_{ya} \\ m_{yb} \\ m_{yc} \\ m_{yd} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{y1} \\ m_{y2} \\ m_{y3} \\ m_{y4} \end{bmatrix} \quad (86\gamma)$$

Η απόκριση του πλαισίου για κάθε ένα από τα τέσσερα συστήματα εξωτερικών δυνάμεων μπορεί να προσδιορισθεί με τη μελέτη του ενός τετάρτου της κατασκευής θεωρώντας τις αρμόζουσες οριακές συνθήκες κατά μήκος των αξόνων συμμετρίας της κατασκευής. Ισχύουν

- α) Για σύνορο με συμμετρία κατασκευής και εξωτερικών δυνάμεων. Περιορισμός περιστροφών παράλληλα με το σύνορο, μηδενική δύναμη κάθετη στο επίπεδο του πλαισίου, μηδενικές καμπτικές ροπές κάθετα στο σύνορο στο επίπεδο του πλαισίου.
- β) Για σύνορο με συμμετρία κατασκευής και αντισυμμετρία εξωτερικών δυνάμεων. Μηδενική μετατόπιση κάθετα στο επίπεδο του πλαισίου, μηδενική περιστροφή στο επίπεδο του πλαισίου περί καθέτους στο σύνορο και μηδενικές καμπτικές ροπές στο σύνορο παράλληλα με το σύνορο.

Για την επίλυση ενός προβλήματος θα πρέπει:

1. Να προσδιορισθούν οι άξονες συμμετρίας της κατασκευής.
2. Να υπολογισθούν τα διανύσματα συμμετρικών και αντισυμμετρικών εξωτερικών δυνάμεων κάνοντας χρήση των παραπάνω σχέσεων.
3. Να υπολογισθεί η απόκριση στο ένα τέταρτο της κατασκευής για κάθε ένα από τα τέσσερα παραπάνω διανύσματα εξωτερικών δυνάμεων, και
4. Να προστεθούν τα αποτελέσματα κάνοντας χρήση της αρχής της επαλληλίας.

Το μεγαλύτερο μέρος του χρόνου αναλώνεται κατά την αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας. Για κάθε ένα από τα τέσσερα συστήματα εξωτερικών δυνάμεων θα απαιτηθεί και μία αντιστροφή. Επειδή όμως οι απαιτήσεις χώρου είναι της τάξης του N^2 , όπου N είναι η τάξη μεγέθους του μητρώου ακαμψίας, ο δε χρόνος αντιστροφής είναι της τάξης του N^3 . Οι απαιτήσεις μνήμης και χρόνου υπολογισμού είναι συνεπώς 1/16 αυτών που απαιτούνται για την αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας ολόκληρης της κατασκευής.

9. Προγραμματισμός της μεθόδου της μητρικής ανάλυσης

Μέχρι τώρα η περιγραφή της μητρικής ανάλυσης κατασκευών αρκέστηκε στην παρουσίαση του θεωρητικού υποβάθρου της μεθόδου. Επειδή όμως κρίνεται αναγκαία η αμεσότερη επαφή με τον τρόπο προγραμματισμού θα περιγραφούν παρακάτω οι βασικές αρχές προγραμματισμού της μεθόδου, ανεξάρτητα από χρησιμο-

ποιούμενη γλώσσα. Υπολογιστικοί αλγόριθμοι όπως αυτός της μητρικής ανάλυσης περιγράφονται ευκολότερα με λογικά διαγράμματα. Η συνδυασμένη χρήση

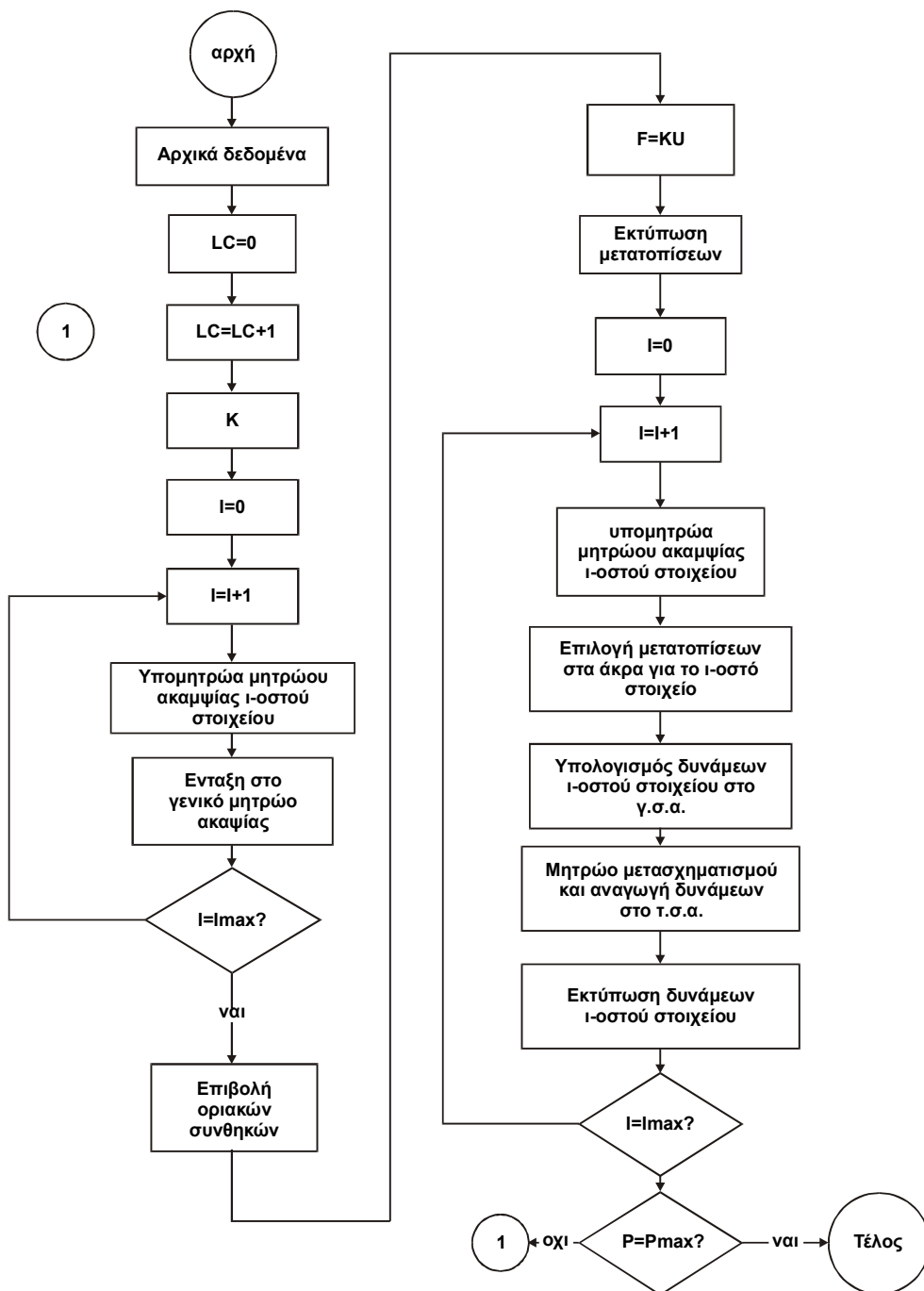
- α) Των λογικών διαγραμμάτων,
- β) Διαθέσιμων υποπρογραμμάτων που επιτελούν συγκεκριμένους υπολογισμούς (για παράδειγμα, αντιστροφή μητρώου) και
- γ) Γνώση μίας υπολογιστικής γλώσσας υψηλού επιπέδου (FORTRAN, PASCAL, C, κ.ά.)

επαρκούν ώστε ο ενδιαφερόμενος να μπορέσει να συντάξει δικό του πρόγραμμα μητρικής ανάλυσης. Σημειώνεται δε ότι τα βασικά βήματα που επιτελούνται στη μητρική ανάλυση είναι τα ίδια με αυτά που ακολουθούνται και στα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων. Η πιο σημαντική διαφορά μεταξύ τους είναι ότι με τα πεπερασμένα στοιχεία μελετώνται συνεχείς και όχι διακριτές κατασκευές.

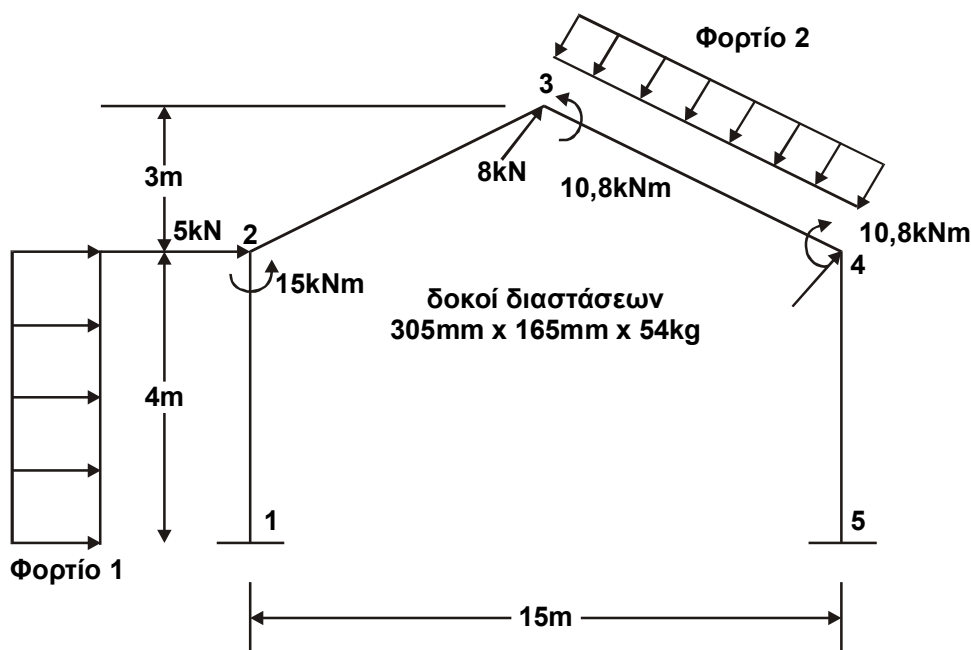
Διαδικασία επίλυσης προβλήματος με τη μέθοδο της μητρικής ανάλυσης

1. Σύνταξη του αρχείου αρχικών δεδομένων⁷
2. Σύνταξη του γενικού μητρώου ακαμψίας και μηδενισμός όλων των όρων.
3. Υπολογισμός των μηκών των μελών, και σύνταξη των μητρώων μετασχηματισμού κάθε στοιχείου.
4. Ένταξη των υπομητρώων $\mathbf{k}_{11}'$, $\mathbf{k}_{12}'$, $\mathbf{k}_{22}'$ που έχουν υπολογισθεί στο 3^ο βήμα στο γενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής.
5. Μηδενισμός των σειρών και στηλών του $\mathbf{K}$ που αντιστοιχούν σε μηδενικές μετατοπίσεις εκτός των όρων της κύριας διαγωνίου, οι οποίοι τίθενται ίσοι με τη μονάδα.
6. Επίλυση της μητρικής εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής ή αντιστροφή του μητρώου ακαμψίας.
7. Σύνταξη εκ νέου των υπομητρώων $\mathbf{k}_{11}'$, $\mathbf{k}_{12}'$, $\mathbf{k}_{22}'$ για να υπολογισθούν οι εσωτερικές δυνάμεις (και ροπές) στους κόμβους της κατασκευής
8. Υπολογισμός των εσωτερικών δυνάμεων στο γενικό σύστημα αναφοράς και σε συνέχεια στο τοπικό σύστημα αναφοράς.
9. Εκτύπωση των αποτελεσμάτων (εσωτερικών δυνάμεων).

⁷ Παράδειγμα ενός τέτοιου αρχείου που αφορά την κατασκευή του Σχήματος 20 δίνεται παρακάτω.



Σχήμα 19 Λογικό διάγραμμα μητρικής ανάλυσης κατασκευών



Σχήμα 20 Επίπεδο πλαίσιο με δύο τρόπους φόρτισης

Στο λογικό διάγραμμα του Σχήματος 19 ο ακέραιος *LC* (Load Case No.) απαριθμεί τις διάφορες περιπτώσεις φόρτισης ενώ ο ακέραιος *I* αφορά την αρίθμηση των στοιχείων της κατασκευής κατά τη συγκρότηση του γενικού μητρώου ακαμψιάς. Η εφαρμογή του λογικού διαγράμματος γίνεται καλύτερα κατανοητή με αναφορά σε συγκεκριμένο παράδειγμα. Θεωρούμε λοιπόν την κατασκευή του Σχήματος 20.

Αρχείο αρχικών δεδομένων

(α) Αρχικά δεδομένα

Κωδικός αριθμός ανάλυσης	17/23/A
Είδος κατασκευής	Επίπεδο πλαίσιο
Αριθμός μελών	4
Αριθμός κόμβων	5
Αριθμός στηριζόμενων κόμβων με κύλιση	2
Αριθμός περιπτώσεων φορτίσεων	2
Μέτρο ελαστικότητας (kN/mm^2)	200,0

(β) Συντεταγμένες κόμβων

Αριθμός κόμβου, ακολουθούμενος από τις συντεταγμένες

1	0	0
2	0	4000
3	7500	7000
4	15000	4000
5	15000	0

(γ) *Ιδιότητες διατομών*

Αριθμός διατομής, ροπή αδράνειας και εμβαδόν

1	116.860.000	6830
---	-------------	------

(δ) *Πληροφορίες στοιχείων*

Αριθμός μέλους, αριθμοί κόμβων στα άκρα 1 και 2, τύπος διατομής (από κατάλογο γ) και περιγραφή τρόπου στήριξης (π.χ. R - περιορισμένος)

1	1	2	RR
2	2	3	RR
3	3	4	RR
4	4	5	RR

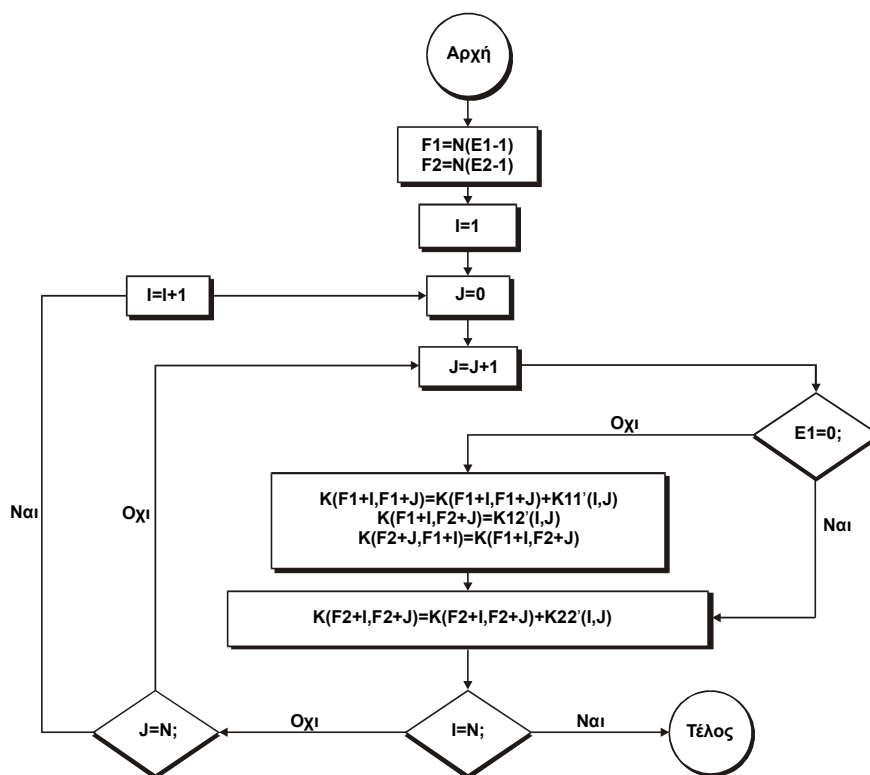
(ε) *Οριακές συνθήκες*

Αριθμός κόμβου υπό περιορισμό και είδος περιορισμού	1	<i>PZ</i>
(<i>PZ</i> σημαίνει περιορισμό περιστροφής)	5	<i>PZ</i>

(στ) *Περιπτώσεις φορτίσεων*

1	1	0	-15000
2	5	0	+15000
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

1	0	0	0
2	0	0	0
3	3	7,5	+18800
4	3	7,5	-18800
5	0	0	0



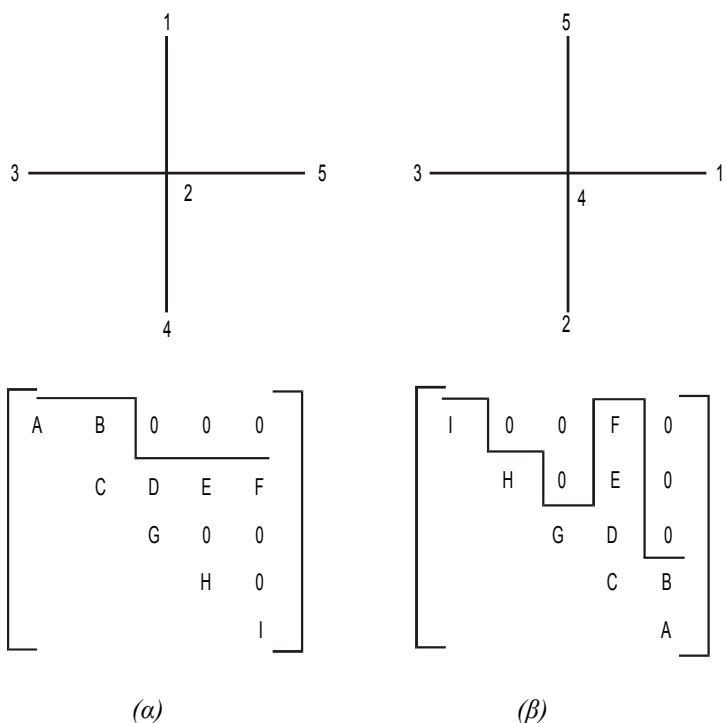
Σχήμα 21 Λογικό διάγραμμα διαδικασίας άμεσης σύνθεσης των ακαμψιών

Υποπρόγραμμα σύνταξης γενικού μητρώου ακαμψίας

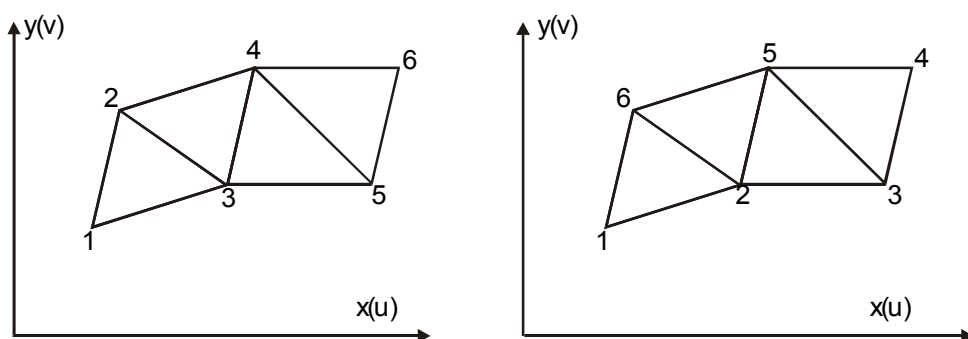
Στο στάδιο 4 της παραπάνω διαδικασίας γίνεται η ένταξη των υπομητρώων των μητρώων ακαμψίας κάθε μέλους (στοιχείου) στο γενικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής. Θα περιγραφεί στο σημείο αυτό η διαδικασία αυτή, η οποία άλλωστε είναι και από τα σημαντικότερα στάδια της όλης διαδικασίας της μητρικής ανάλυσης κατασκευών.

Η ένταξη των υπομητρώων στο γενικό μητρώο ακαμψίας γίνεται για κάθε ένα όρο ξεχωριστά, όπως δείχνει το λογικό διάγραμμα (Σχήμα 21). Στο διάγραμμα αυτό ισχύουν τα εξής:

- N = αριθμός βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο (1, 2, 3 ή 6)
- K = Γενικό μητρώο ακαμψίας. Αρχικά $k_{ij} = 0$.
- E_1 = Αριθμός κόμβου στο άκρο 1 του μέλους
- E_2 = Αριθμός κόμβου στο άκρο 2 του μέλους
- I, J = ακέραιοι δείκτες



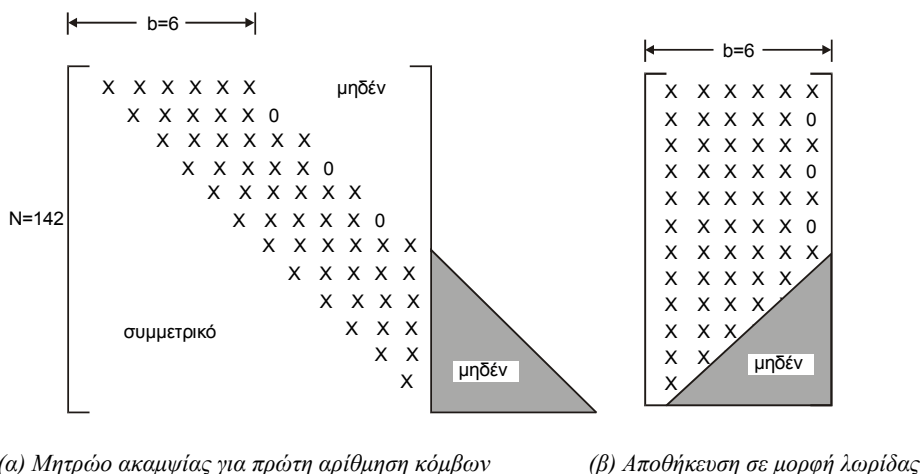
Σχήμα 23 Υποθετική κατασκευή με στοιχεία 2 κόμβων και τα αντίστοιχα μητρώα ακαμψίας^{8,9}



Σχήμα 24 Επίπεδο πλαίσιο με δύο τρόπους αρίθμησης των κόμβων
(Ο πρώτος δίνει μικρό εύρος λωρίδας ενώ ο δεύτερος μεγάλο εύρος λωρίδας περί την κυρία διαγώνιο)

⁸ κάθε κόμβος έχει ένα βαθμό ελευθερίας

⁹ οι μη-μηδενικοί όροι αριθμούνται με κεφαλαία γράμματα



Σχήμα 25 Στοιχεία μητρώου ακαμψίας κατασκευής

μηδενός θα πρέπει να είναι παρών ο βαθμός ελευθερίας που αντιστοιχεί στους δείκτες (i, j) του μητρώου σε τουλάχιστον ένα στοιχείο. Ας σημειωθεί ότι οι μη-μηδενικοί όροι του μητρώου ακαμψίας δείχνονται στο Σχήμα 23 με κεφαλαία γράμματα.

Εξετάζουμε στην συνέχεια την κατασκευή του Σχήματος 24 όπου το μητρώο $\mathbf{K}$ έχει διαστάσεις 12×12 (2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο). Στο Σχήμα 25α παρουσιάζεται η τοπολογία του $\mathbf{K}$ για την αρίθμηση των κόμβων σύμφωνα με το Σχήμα 24α. Ο αριθμός των στηλών που περιλαμβάνουν μη-μηδενικούς όρους, συμπεριλαμβανομένης και της κύριας διαγωνίου καλείται *εύρος ή πλάτος λωρίδας*¹⁰ και συμβολίζεται με το b . Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέγεθος του b προσθέτοντας μία μονάδα στη μέγιστη διαφορά των αριθμών των ενεργών βαθμών ελευθερίας στο γ.σ.α. που παρατηρούνται σε ένα στοιχείο. Για παράδειγμα, για την κατασκευή του Σχήματος 23α, βρίσκουμε από το στοιχείο 2-5 ότι $b = (5-2)+1=4$. Για την κατασκευή στο Σχήμα 24α έχουμε ότι $b=6$ για τα στοιχεία 1-3, 2-4, 3-5, και 4-6. Αντίστοιχα, οι διαφορές των βαθμών ελευθερίας είναι $6-1=5$, $8-3=5$, $10-5=5$ και $12-7=5$.

Στο Σχήμα 23 εμφανίζεται μία τεθλασμένη γραμμή που περιβάλλει το άνω μη-μηδενικό συντελεστή σε κάθε στήλη του μητρώου. Η γραμμή αυτή καλείται *περιβάλλουσα* και αποτελεί χαρακτηριστική ποσότητα του μητρώου ακαμψίας. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι τα μητρώα έχουν το ίδιο εύρος λωρίδας αλλά διαφορετική περιβάλλουσα. Κάνοντας χρήση των δύο αυτών ποσοτήτων, μπορούμε να αποθηκεύσουμε μόνο το τμήμα κάθε στήλης που περιλαμβάνεται μεταξύ της περιβάλλουσας και της κύριας διαγωνίου. Αυτή είναι μία εναλλακτική λύση από την αποθήκευση του μητρώου ακαμψίας που δείχνεται στο Σχήμα 25β. Συνεπώς η αρίθμηση της κατασκευής του Σχήματος 23β είναι καλύτερη εφόσον μειώνεται ο αριθμός των συντελεστών του $\mathbf{K}$ που αποθηκεύεται. Συμπεραίνουμε ότι οι παρα-

¹⁰ εύρος λωρίδας $b = (\text{matrix}) \text{ bandwidth}$

πάνω διαδικασίες μπορούν να ελαττώσουν σημαντικά τον αριθμό των απαιτούμενων υπολογισμών και να αποκτάται έτσι λύση σε πιο πολύπλοκα προβλήματα κάνοντας χρήση της ίδιας υπολογιστικής ικανότητας.

10.2 Αυτόματη αρίθμηση των κόμβων

Έστω τώρα ότι θέλουμε να προσθέσουμε ένα κόμβο στο αριστερό τμήμα της κατασκευής του Σχήματος 24. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να προστεθούν δύο ράβδοι που θα συνδέουν τον νέο κόμβο με τους κόμβους 1 και 2. Για να περιορίσουμε το εύρος b θα πρέπει να γίνει εκ νέου αρίθμηση όλων των κόμβων της κατασκευής. Θα ήταν όμως πιο εύκολο εάν δινόταν ο αριθμός 7 στον νέο κόμβο και το ίδιο το πρόγραμμα αριθμούσε τους κόμβους, κάνοντας χρήση κάποιας αυτόματης διαδικασίας. Γενικότερα δε, θα ήταν επιθυμητό το πρόγραμμα να δέχεται την αρίθμηση των κόμβων που επιλέγει ο χρήστης, να κάνει στη συνέχεια νέα αρίθμηση ώστε να περιορίζεται ο αριθμός των απαιτούμενων υπολογισμών και τέλος να παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με την αρχική αρίθμηση.

Σύγχρονα υπολογιστικά προγράμματα περιλαμβάνουν αλγόριθμους επαναρίθμησης, που κάνουν χρήση της θεωρίας γραφημάτων¹¹ και εξετάζουν ένα περιορισμένο αριθμό αριθμήσεων κόμβων από τις $N!$ δυνατές λύσεις για μητρώο $N \times N$. Κατά κανόνα αποκτάται με αυτό τον τρόπο μία καλύτερη λύση στο πρόβλημα της ελάττωσης του ημι-εύρους της λωρίδας του μητρώου ακαμψίας αλλά όχι όμως η απόλυτα βέλτιστη λύση.

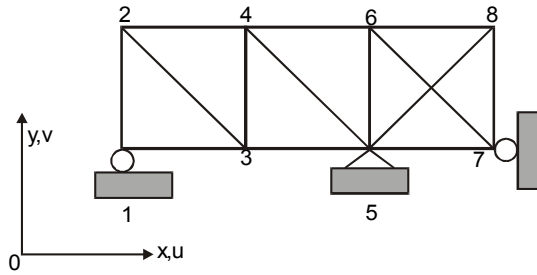
10.3 Οριακές συνθήκες μετατοπίσεων

Στη γενικότερη τους μορφή οι κόμβοι της διακριτοποιημένης κατασκευής έχουν έξι βαθμούς ελευθερίας (τρεις μετατοπίσεις και τρεις περιστροφές). Σε πολλές εφαρμογές όμως δεν απαιτείται να αποκτηθούν αποτελέσματα για όλους τους βαθμούς ελευθερίας αλλά μόνο για ένα περιορισμένο αριθμό. Για παράδειγμα, κατά την ανάλυση επιπέδων πλαισίων δεν απαιτούνται η μετατόπιση στην κατεύθυνση θz και οι περιστροφές περί τους άξονες Ox και Oy . Εκτός αυτών πρέπει βέβαια να επιβληθούν οι οριακές συνθήκες ώστε να επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας. Συνήθως οι οριακές συνθήκες αντιστοιχούν στο μηδενισμό ενός επαρκούς αριθμού βαθμών ελευθερίας.

Για τον καλύτερο χειρισμό των μητρώων εισάγεται ένα νέο μητρώο που χρησιμοποιείται για να καθορισθούν οι μη-μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας και αντίστοιχα οι μη-μηδενικοί όροι του γενικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής. Το μητρώο αυτό καλείται *μητρώο αποστολής*¹² και συνήθως συμβολίζεται με το ID . Ο αριθμός στηλών του μητρώου ID ισούται με τον αριθμό των κόμβων της κατασκευής ενώ ο αριθμός των σειρών αντιστοιχεί στον μέγιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο

¹¹ θεωρία γραφημάτων = graph theory

¹² μητρώο αποστολής = destination array



Σχήμα 26 Κατασκευή με προκαθορισμένους βαθμούς ελευθερίας

(συνήθως 6). Η χρήση του μητρώου ID θα καταστεί πιο σαφής μέσω του παραδείγματος που ακολουθεί.

Για την κατασκευή του Σχήματος 26, υποθέτουμε ότι το πρόγραμμα επιτρέπει τη χρήση 6 βαθμών ελευθερίας σε κάθε κόμβο. Το μητρώο ID έχει τότε 6 σειρές και οκτώ στήλες.

Αρχικά μηδενίζονται όλοι οι όροι του μητρώου. Μετά, με βάση τα αρχικά δεδομένα του προγράμματος, οι όροι που αντιστοιχούν σε προκαθορισμένους βαθμούς ελευθερίας τίθενται ίσοι με τη μονάδα. Από το σχήμα προκύπτει ότι $v_1 = u_5 = v_5 = u_7 = 0$. Πρέπει επίσης να γίνει απαλοιφή α) της μετατόπισης κάθετα στο επίπεδο της κατασκευής και β) των τριών περιστροφών θ_x , θ_y και θ_z για κάθε κόμβο της κατασκευής. Το μητρώο ID της κατασκευής είναι τότε:

$$ID = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (87)$$

όπου ο βαθμός ελευθερίας που αντιστοιχεί σε κάθε σειρά φαίνεται στην τελευταία στήλη. Στο επόμενο στάδιο γίνεται η μετατροπή του μητρώου ID σε κατάλογο αριθμών των εξισώσεων, απαριθμώντας τα μηδενικά κάθε στήλης και μετατρέποντας τις μονάδες σε 0. Η διαδικασία αυτή εφαρμοζόμενη στο μητρώο ID του παραπάνω παραδείγματος μας δίνει το μετασχηματισμένο μητρώο ID παρακάτω. Στο μητρώο αυτό τα μηδενικά αντιστοιχούν πλέον σε βαθμούς ελευθερίας που δεν θα εμφανισθούν στο διάνυσμα των μετατοπίσεων U . Αριθμοί διάφοροι του μηδενός υποδηλώνουν αριθμό εξίσωσης που αντιστοιχεί σε ενεργό βαθμό ελευθερίας.

$$ID = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 0 & 8 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 0 & 9 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Για παράδειγμα, για να υπολογισθεί ο όρος του μητρώου ακαμψίας $\mathbf{K}$ που αντιστοιχεί στον κόμβο 7, πηγαίνουμε στη στήλη 7 του παραπάνω μητρώου και παρατηρούμε ότι όλοι οι βαθμοί ελευθερίας έχουν περιορισθεί εκτός του v_7 , που εμφανίζεται ως U_{10} στο διάνυσμα $\mathbf{U}$. Το μητρώο $\mathbf{K}$ της στηριζόμενης κατασκευής έχει διαστάσεις 12×12 όπου το $N_{eq}=12$ υπολογίζεται από τις παρακάτω γραμμές του προγράμματος:

```

      NEQ=0
      DO 62 N=1, NUMNP
      DO 60 J=1, NDOF
C      Transfer if d.o.f. is fixed. Otherwise
C      increment NEQ
      IF(ID(J,N).GT.0) GO TO 58
      NEQ=NEQ+1
      ID(J,N)=NEQ
      GO TO 60
58   ID(J,N)=0
60   CONTINUE
62   CONTINUE

```

όπου NUMP = αριθμός κόμβων κατασκευής
 NDOF = μέγιστος αριθμός βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο
 NEQ = αριθμός ενεργών βαθμών ελευθερίας

Για να συγκροτηθεί το μητρώο ακαμψίας με τη μορφή του Σχήματος 25β, διατηρώντας όμως μόνο τους ενεργούς βαθμούς ελευθερίας, κάνουμε χρήση του μητρώου ID στον παρακάτω κώδικα.

```

      DO 500 N=1, NUMEL
      CALL ELEMNT
      I=NOD(1,N)
      J=NOD(2,N)
      KK(1)=ID(1,I)
      KK(2)=ID(2,I)
      KK(3)=ID(1,J)
      KK(4)=ID(2,J)
      DO 400 I=1,4

```

```

IF (KK(I).LE.0) GO TO 400
K=KK(I)
R(K)=R(K)+RE(I)
DO 300 J=1,4
IF (KK(J).LT.K) GO TO 300
L=KK(J)-K+1
S(K,L)=S(K,L)+SE(I,J)
300 CONTINUE
400 CONTINUE
500 CONTINUE

```

Το μητρώο **KK** περιλαμβάνει αριθμούς εξισώσεων για κάθε στοιχείο. Για παράδειγμα, στη ράβδο 1-3 στο Σχήμα 26 αντιστοιχούν οι αριθμοί 1, 0, 4 και 5, όπως προκύπτει από τις στήλες 1 και 3 του μητρώου *ID*. Η πρώτη εντολή *IF* αποβάλλει τους όρους K_{ij} που αντιστοιχούν σε προκαθορισμένους βαθμούς ελευθερίας (για παράδειγμα $KK(2)=0$, δηλαδή $v_I=0$). Η δεύτερη εντολή *IF* αποβάλλει τις αντίστοιχες στήλες για τις οποίες έχουν προκαθορισθεί οι βαθμοί ελευθερίας. Επίσης αποβάλλονται οι μη-μηδενικοί όροι του μητρώου ακαμψίας κάτω από την κύρια διαγώνιο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχει υποτεθεί ότι τα μητρώα ακαμψίας **k** είναι 4×4 . Στην πράξη ο αλγόριθμος πρέπει να επιτρέπει την επίλυση μητρώου ακαμψίας οποιωνδήποτε διαστάσεων.

Βιβλιογραφία

1. Przemieniecki J. *Theory of Matrix Analysis of Structures*, Dover Publications, New York, U.S.A.
2. Rockey K.C., Evans H.R., Griffiths D.W., Nethercot D.A. *The Finite Element Method. A Basic Introduction*. Second Edition, BSP Edition, BSP Professional Books, Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1983.
3. Μπαρδής Α. *Μητρική Ανάλυση Κατασκευών*. Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων, Ε.Μ.Π., Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Αθήνα, 1990.
4. Chamberlain P. *Matrix Methods of Structural Analysis*, Department of Mechanical Engineering, R.C.N.C. M.Sc. course lecture notes. University College London, 1976.
5. Coates R.C., Coutie M.G., Kong F.K. *Structural Analysis*. Nelson, London, 1972.
6. Hughes O.F. *Ship Structural Design. A rationally based, computer aided optimization approach*. SNAME Publications, New York 1996.
7. Clarkson J. *The Elastic Analysis of Flat Grillages (with particular reference to ship structures)*. Cambridge University Press, UK 1965.