

1

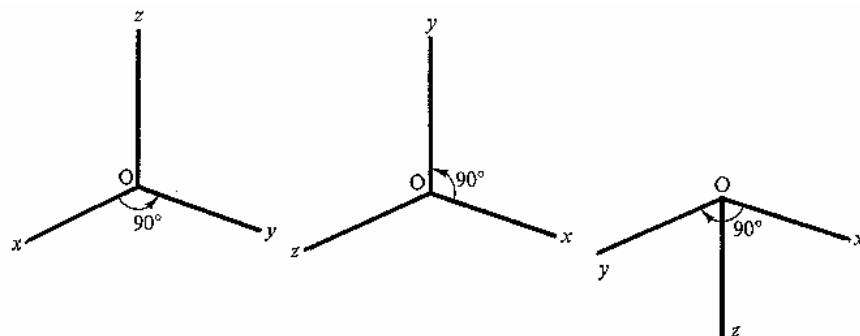
Βασικές αρχές μελέτης των κατασκευών

1. Εισαγωγή

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε έννοιες της μηχανικής που εν πολλοίς συνιστούν το θεωρητικό υπόβαθρο των αριθμητικών μεθόδων που χρησιμοποιούνται σήμερα. Στο πρώτο εδάφιο ορίζεται η σύμβαση των πρόσημων που χρησιμοποιούνται σε όλη την έκταση του κειμένου, και που αποτελεί σημείο αναφοράς για τον αναγνώστη. Σε συνέχεια γίνεται μια σύντομη περιγραφή διαφόρων μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων της μηχανικής των κατασκευών. Οι μέθοδοι υποδιαιρούνται σε *απειροστικές*¹ και σε αυτές που βασίζονται στη *μέθοδο των μεταβολών*², που και αποτελούν το υπόβαθρο της *μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων*³. Σε μεταγενέστερα κεφάλαια γίνεται αναφορά στο περιεχόμενο του Κεφαλαίου 1.

2. Σύμβαση πρόσημων

2.1 Συστήματα αναφοράς



Σχήμα 1 Ορισμός θετικής φοράς αξόνων καρτεσιανού συστήματος αναφοράς

¹ απειροστικός = infinitesimal

² μέθοδος των μεταβολών = variational method

³ μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων = finite element method

Στο παρόν κείμενο γίνεται εκτενής χρήση ορθογωνίων (καρτεσιανών) συστημάτων αναφοράς με άξονες Ox , Oy , Oz κάθετους μεταξύ τους. Μόνο δεξιόστροφα συστήματα χρησιμοποιούνται, και κατά συνέπεια μετά την επιλογή της θετικής φοράς δύο αξόνων, έστω των Ox και Oy , η θετική φορά του τρίτου άξονα ορίζεται ως εκείνη της εξέλιξης δεξιόστροφου κοχλία που κινείται από τον άξονα Ox προς τον Oy , κατά την ορθή γωνία που παρεμβάλλεται μεταξύ των αξόνων αυτών (Σχήμα 1).

2.2 Δυνάμεις και ροπές

Θεωρούμε ένα σώμα στην επιφάνεια του οποίου ασκούνται δυνάμεις σε συγκεκριμένα σημεία. Στο i -οστό σημείο ασκούνται τότε δύναμη $\mathbf{f}_i$ και ροπή $\mathbf{m}_i$. Στον τρισδιάστατο χώρο $Oxyz$ απαιτούνται τρεις συνιστώσες για να ορισθούν πλήρως τα διανύσματα αυτά. Κατά κανόνα οι συνιστώσες των διανυσμάτων ορίζονται ως παράλληλες προς ένα σύστημα ορθογωνίων καρτεσιανών συντεταγμένων. Σε διανυσματική γραφή, έχουμε:

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ f_{z_i} \end{bmatrix} = [f_{x_i} \quad f_{y_i} \quad f_{z_i}]^T \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_{x_i} \\ m_{y_i} \\ m_{z_i} \end{bmatrix} = [m_{x_i} \quad m_{y_i} \quad m_{z_i}]^T \quad (1)$$

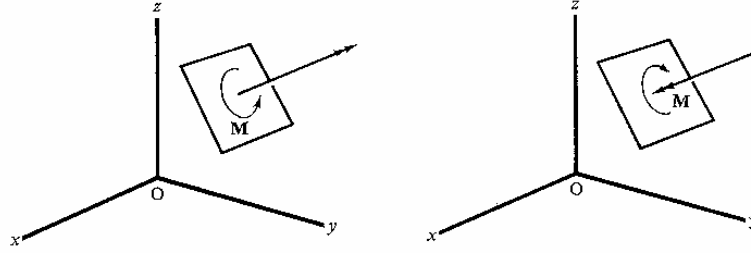
όπου f_{x_i} , κλπ είναι οι συνισταμένες παράλληλες με τους αντίστοιχους άξονες αναφοράς. Οι συνισταμένες δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$f_{x_i} = f \cos \alpha \quad f_{y_i} = f \cos \beta \quad f_{z_i} = f \cos \gamma \quad (2)$$

όπου οι ποσότητες $\cos \alpha$, $\cos \beta$ και $\cos \gamma$ είναι τα συνημίτονα διεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{f}$. Τα συνημίτονα αυτά συνήθως συμβολίζονται ως εξής:

$$\cos \alpha = l \quad \cos \beta = m \quad \cos \gamma = n$$

Σημειώνουμε ότι οι συνισταμένες του διανύσματος $\mathbf{f}$ εξαρτώνται από το μέτρο του $\mathbf{f}$ αλλά όχι από τις συντεταγμένες του σημείου επιβολής του. Εάν σε ένα σημείο ασκούνται διάφορες δυνάμεις $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{f}_j$, κλπ, το άθροισμά τους είναι το άθροισμα των συνισταμένων της κάθε δύναμης σε κάθε κατεύθυνση. Άρα, για να επέλθει ισορροπία στο συγκεκριμένο σημείο, θα πρέπει η συνιστώσα σε κάθε κατεύθυνση να είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή,



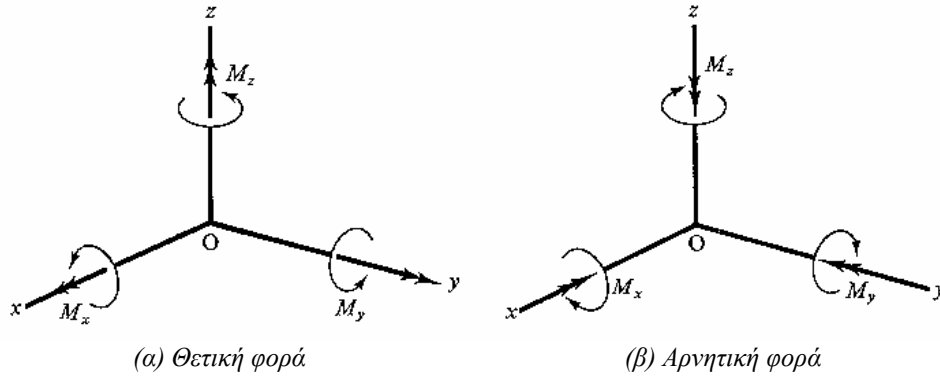
Σχήμα 2 Ορισμός πρόσημου ροπής

$$\begin{bmatrix} \sum_i f_x \\ \sum_i f_y \\ \sum_i f_z \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Η παραπάνω σχέση δεν εξασφαλίζει όμως την απουσία ροπής στο συγκεκριμένο σημείο. Θεωρούμε τις ροπές της δύναμης f_i περί τους τρεις άξονες αναφοράς. Η ροπή της f_i περί οποιονδήποτε άξονα, έστω τον Ox , ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της περί τον συγκεκριμένο άξονα. Εάν η f_i ασκείται στο σημείο (x_i, y_i, z_i) , τότε η συνιστώσα f_{zi} έχει μοχλοβραχίονα y_i περί τον άξονα Ox και η προκύπτουσα ροπή έχει μέγεθος $f_{zi}y_i$ περί τον άξονα αυτό. Παρόμοια, η συνιστώσα f_{yi} προκαλεί ροπή $-f_{yi}z_i$, ενώ η συνιστώσα f_{xi} που είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox , προκαλεί μηδενική ροπή. Άρα, η ροπή της f_i περί τον άξονα Ox ισούται με $f_{zi}y_i - f_{yi}z_i$. Παρομοίως οι αντίστοιχες ροπές περί τους άξονες Oy και Oz είναι $f_{xi}z_i - f_{zi}x_i$ και $f_{yi}x_i - f_{xi}y_i$. Συνεπώς, για να μην προκύψει ροπή περί το σημείο λόγω της επιβολής των δυνάμεων $f_1, f_2, \dots, f_n$, θα πρέπει να ισχύσει η παρακάτω συνθήκη:

$$\begin{bmatrix} \sum_i (f_{zi}y_i - f_{yi}z_i) \\ \sum_i (f_{xi}z_i - f_{zi}x_i) \\ \sum_i (f_{yi}x_i - f_{xi}y_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Στην παραπάνω σχέση η ροπή περί τον άξονα Ox εκφράζεται ως $\Sigma(f_{zi}y_i - f_{yi}z_i)$ αντί του $\Sigma(f_{yi}z_i - f_{zi}y_i)$, σύμφωνα με τη σύμβαση πρόσημου που θα τηρηθεί σε όλη την έκταση του κειμένου.



Σχήμα 3 Ροπές με θετική και αρνητική φορά

Θεωρούμε ροπή $\mathbf{M}$, μεγέθους M , που ασκείται στο επίπεδο που δείχνεται στο Σχήμα 3. Η ροπή παριστάνεται με ευθύγραμμο τμήμα η φορά του οποίου δείχνεται με διπλό βέλος. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος αντιστοιχεί στο μέγεθος M ενώ η φορά της ροπής είναι κάθετη στο επίπεδο που ασκείται η ροπή. Η φορά είναι σύμφωνη με δεξιόστροφο κοχλία και συνεπώς εάν αντιστραφεί η φορά της ροπής, αντιστρέφεται και αυτή του διπλού βέλους.

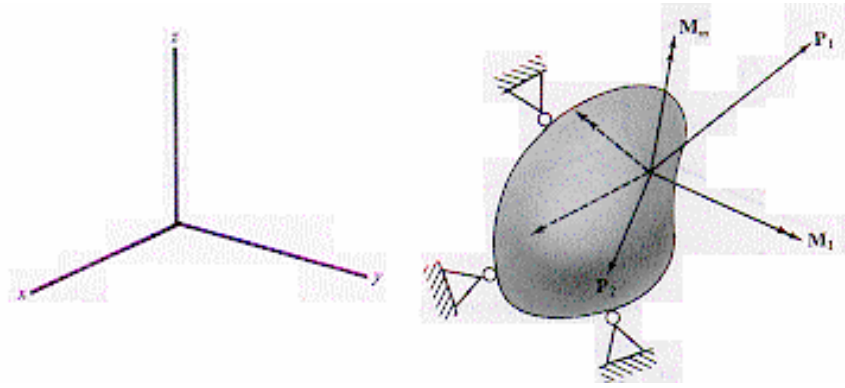
Μια ροπή που ασκείται σε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς καλείται *θετική* εάν το βέλος του διανύσματος είναι στη θετική φορά του συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς. Άρα, οι ροπές στο Σχήμα 3α είναι όλες θετικές ενώ στο Σχήμα 3β είναι όλες αρνητικές. Εάν ασκούνται περισσότερες από μία ροπές τότε μπορούν να αντικατασταθούν από τις συνισταμένες τους περί τους άξονες αναφοράς. Συνεπώς,

$$m_1 = \begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{y_1} \\ m_{z_1} \end{bmatrix} \quad m_2 = \begin{bmatrix} m_{x_2} \\ m_{y_2} \\ m_{z_2} \end{bmatrix} \quad \dots \quad m_n = \begin{bmatrix} m_{x_n} \\ m_{y_n} \\ m_{z_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Το άθροισμα n ροπών είναι τότε το άθροισμα των συνιστωσών τους:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \begin{bmatrix} \sum m_x \\ \sum m_y \\ \sum m_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

και για ισορροπία,



Σχήμα 4 Γενικευμένες δυνάμεις σε σημείο επιφάνειας σώματος

$$\begin{bmatrix} \sum m_x \\ \sum m_y \\ \sum m_z \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Πιο γενικά, αναφερόμαστε στο διάνυσμα των γενικευμένων δυνάμεων που ασκούνται σε σημείο i ως:

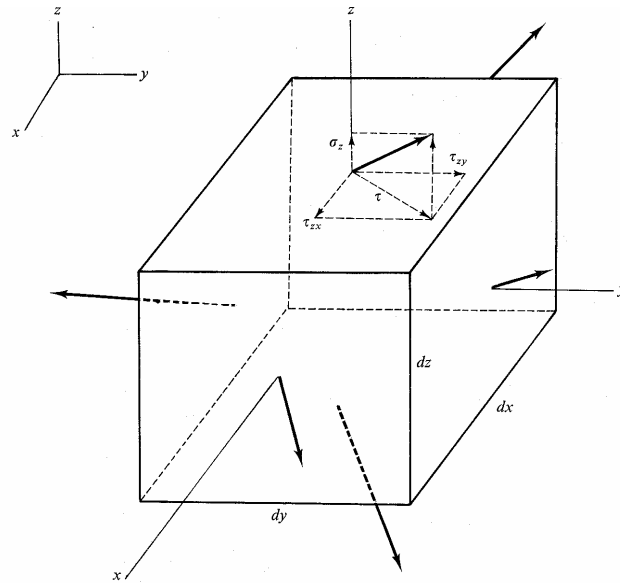
$$f_i = [f_{x_i} \quad f_{y_i} \quad f_{z_i} \quad m_{x_i} \quad m_{y_i} \quad m_{z_i}]^T \quad (8)$$

2.3 Τάσεις

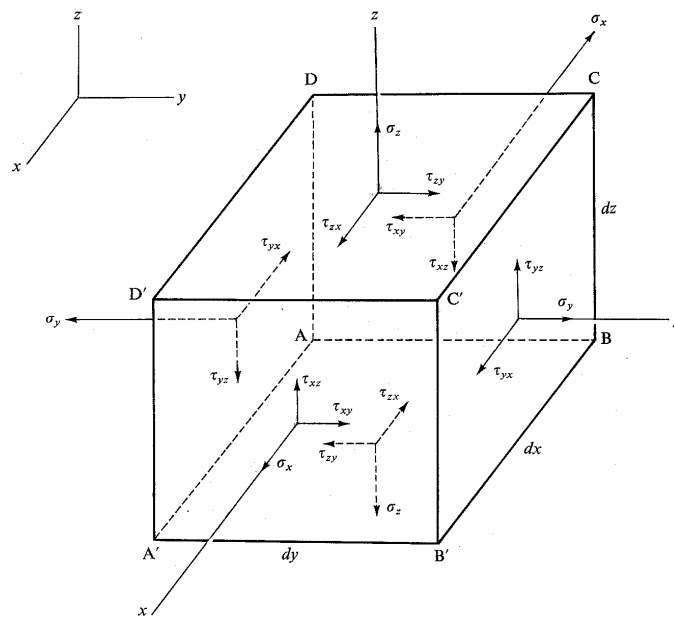
Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με κέντρο στο σημείο a (x, y, z) και μήκη πλευρών dx , dy και dz . Οι τάσεις που αναπτύσσονται στις έξι έδρες δείχνονται στο Σχήμα 5.

Επειδή τα μεγέθη και οι διευθύνσεις των δυνάμεων αρχικά δεν είναι γνωστές, επιλέγονται αυθαίρετες τιμές. Θεωρούμε την τάση που αφορά την έδρα που είναι κάθετη στον άξονα Oz . Η τάση αυτή μπορεί να αναλυθεί σε μια συνιστώσα κάθετα στην έδρα (σ_z) και σε μια συνιστώσα που κείται στο επίπεδο της έδρας (τ). Η τελευταία μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω σε συνιστώσες παράλληλες προς τους άξονες Ox (τ_{zx}) και Oy (τ_{zy}). Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για τις τάσεις στις υπόλοιπες έδρες και έτσι η εντατική κατάσταση περιγράφεται συνολικά στο Σχήμα 6.

Τα σύμβολα και η σύμβαση πρόσημων που χρησιμοποιούνται βρίσκουν γενική εφαρμογή στη μηχανική των κατασκευών. Οι ορθές τάσεις συμβολίζονται με το σ , ενώ ο δείκτης που προστίθεται υποδηλώνει την έδρα στην οποία ασκείται η συγκεκριμένη τάση. Συνεπώς, σ_x είναι η ορθή τάση που ασκείται στην έδρα που είναι κά-



Σχήμα 5 Στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο υπό εντατική κατάσταση



Σχήμα 6 Συνιστώσες τάσεων που ασκούνται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

θετη στον άξονα Ox . Οι διατμητικές τάσεις συμβολίζονται με το τ και δύο δείκτες. Ο πρώτος δηλώνει την επιφάνεια στην οποία ασκείται η τάση, ενώ ο δεύτερος τη διεύθυνση της τάσης. Συνεπώς, τ_{xy} είναι διατμητική τάση που ασκείται σε έδρα κάθετη στον άξονα Ox με διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα Oy .

Σύμβαση πρόσημων

Ως θετική λαμβάνεται μια τάση όταν εφελκύει την έδρα στην οποία ασκείται, και αντίστοιχα, μια θλιπτική τάση λαμβάνεται ως αρνητική. Συνεπώς, για την έδρα $A'B'C'D'$ (Σχήμα 6), η θετική ορθή τάση έχει φορά παράλληλη προς τον άξονα Ox , ενώ για την έδρα $ABCD$ η θετική ορθή τάση έχει φορά αντίθετη με τον άξονα Ox .

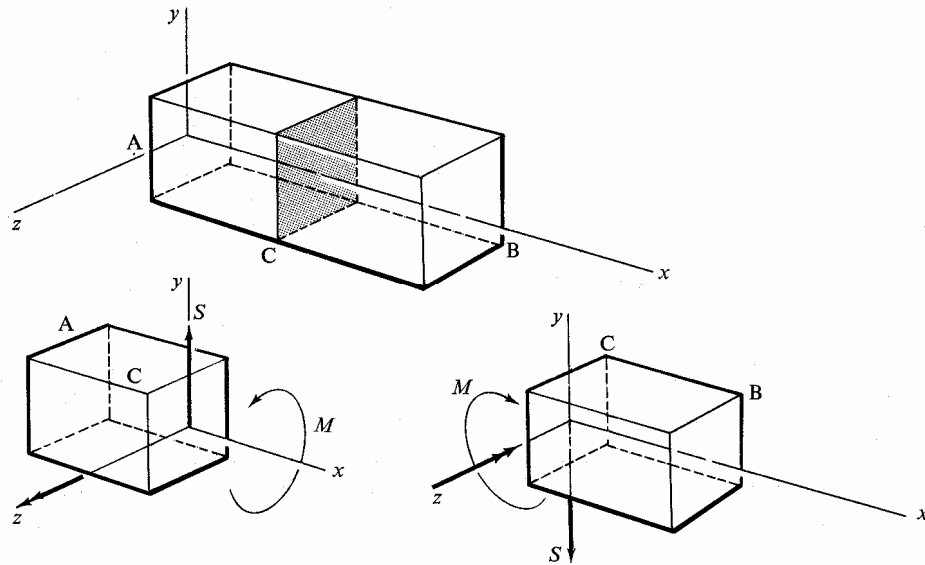
Η θετική φορά των διατμητικών τάσεων εξαρτάται από τη φορά της αντίστοιχης ορθής τάσης στη συγκεκριμένη έδρα. Ορίζεται τότε, ότι, αν η θετική ορθή τάση έχει την ίδια φορά με τον αντίστοιχο άξονα αναφοράς, τότε η διατμητική τάση στην ίδια έδρα έχει επίσης θετική φορά. Για παράδειγμα, στην έδρα $ABCD$, η θετική σ_x έχει ίδια φορά με τον άξονα Ox . Κατά συνέπεια, οι διατμητικές τάσεις, που έχουν τη φορά των Oy και Oz έχουν θετικό πρόσημο. Στην έδρα $A'B'C'D'$ όμως, η θετική σ_x έχει φορά αντίθετη του άξονα Ox . Κατά συνέπεια, οι θετικές διατμητικές τάσεις έχουν φορά αντίθετη των αξόνων Oy και Oz αντίστοιχα.

2.4 Τέμνουσες δυνάμεις και καμπτικές ροπές

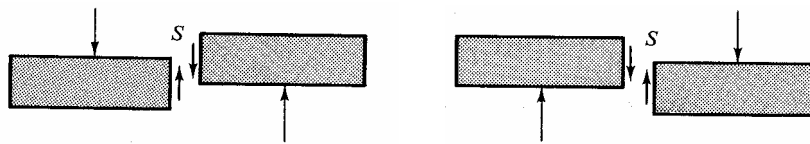
Για το στοιχείο της κατασκευής που δείχνεται στο Σχήμα 7, ως διαμήκης κεντροβαρικός άξονας ορίζεται ο Ox . Αν το ορθό διάνυσμα (τάση) σε κάποια έδρα του στοιχείου έχει φορά προς τα έξω και αυτή είναι ίδια με αυτή του άξονα Ox , τότε το θετικό διάνυσμα τέμνουσας δύναμης έχει τη φορά του άξονα Oy και η θετική καμπτική ροπή έχει τη φορά του άξονα Oz . Η σύμβαση αυτή είναι συμβατή με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση των τάσεων. Επίσης, διευκολύνει τη μελέτη των ραβδωτών κατασκευών με τη μέθοδο της μητρωικής ανάλυσης.

Μπορούμε να κάνουμε χρήση της παραπάνω σύμβασης εξετάζοντας την τέμνουσα δύναμη και την καμπτική ροπή που ασκούνται σε τομή C της δοκού AB (Σχήμα 7). Εάν θεωρήσουμε την έδρα C τότε η κάθετη με φορά προς τα έξω έχει φορά ίδια με αυτή του άξονα Ox . Η θετική φορά της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής δείχνονται τότε στο Σχήμα 8. Εάν τώρα εξετάσουμε την έδρα C του τμήματος CB της δοκού, τότε η κάθετη με φορά προς τα έξω έχει φορά αντίθετη αυτής του άξονα Ox . Οι αντίστοιχες φορές της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής δείχνονται στο Σχήμα 8. Καθίσταται σαφές ότι η θετική φορά της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής εξαρτάται από την επιλογή της θετικής φοράς της κάθετης προς τη συγκεκριμένη επιφάνεια.

Στην περίπτωση μιας απλής δοκού, αν η θετική φορά του άξονα Ox είναι προς τα δεξιά και αυτή του άξονα Oy προς τα πάνω, τότε,



Σχήμα 7 Σύμβαση πρόσημου ροπής ως προς σύστημα αναφοράς



(α) Διατμητική δύναμη (θετική φορά) (β) Διατμητική δύναμη (αρνητική φορά)



(γ) Καμπτική ροπή (θετική φορά) (δ) Καμπτική ροπή (αρνητική φορά)

Σχήμα 8 Σύμβαση πρόσημων τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής

- α) Αν η συνιστώσα δύναμη στην αριστερή έδρα της δοκού ασκείται προς τα κάτω, τότε η τέμνουσα δύναμη στην τομή αυτή είναι θετική.
- β) Η καμπτική ροπή που έχει σαν αποτέλεσμα η άνω έδρα της δοκού να είναι κοίλη, λαμβάνεται ως θετική.

3. Μεθοδολογίες επίλυσης κατασκευών

3.1 Γενική διατύπωση του προβλήματος. Οι διάφορες μεθοδολογίες.

Το γενικό πρόβλημα της μηχανικής των κατασκευών μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

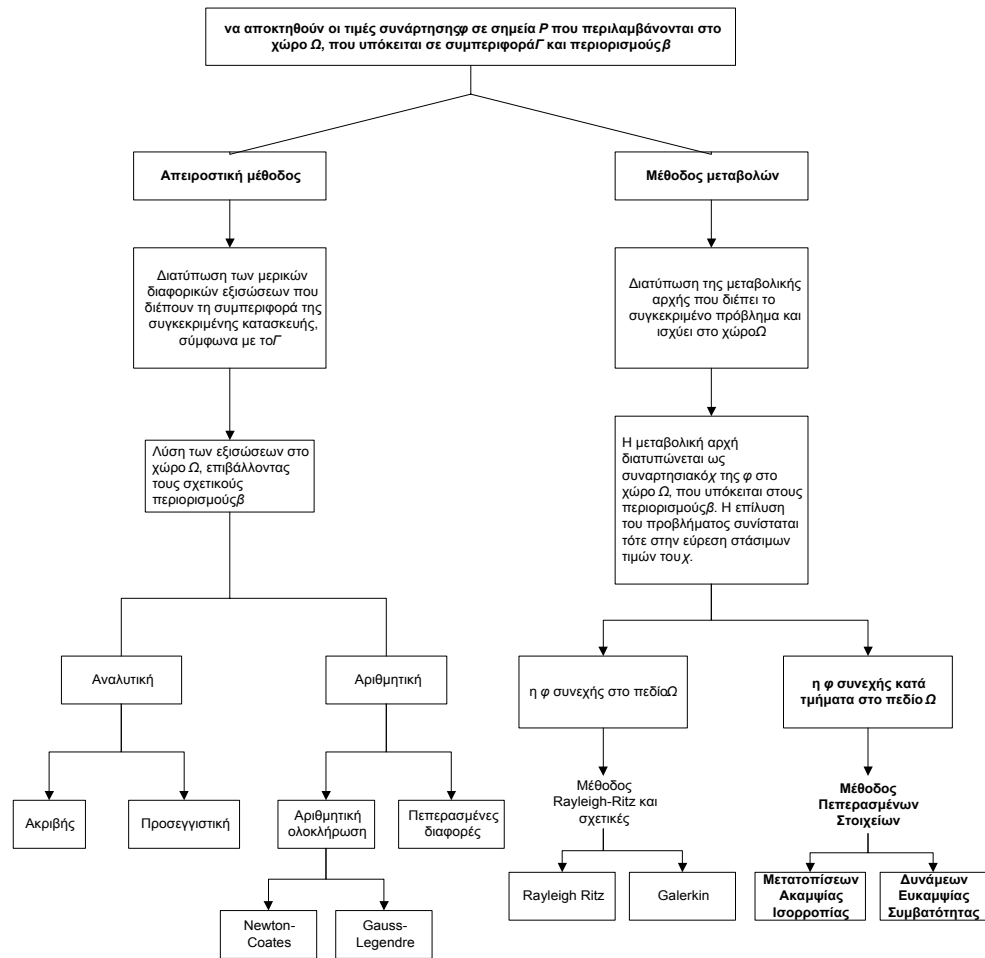
να αποκτηθούν οι τιμές συνάρτησης φ σε σημεία P που περιέχονται στο χώρο Ω , που υπόκειται σε συμπεριφορά Γ και περιορισμούς β

Η συνάρτηση φ μπορεί να είναι μετατόπιση, συνισταμένη τάσης, τασική συνάρτηση κλπ. Τα σημεία P μπορεί να είναι το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν το συνεχές μέσο, τμήματά του ή μεμονωμένα σημεία. Η συμπεριφορά Γ μπορεί να περιγραφεί είτε από εξισώσεις ισορροπίας, καταστατικές εξισώσεις και σχέσεις συμβιβαστού είτε από μία γενική αρχή, όπως η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Οι περιορισμοί β περιλαμβάνουν όλες τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες.

Για να επιτευχθεί το ζητούμενο, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς τρόπους, που εξαρτώνται από τον τρόπο περιγραφής της συμπεριφοράς της κατασκευής. Ο πρώτος τρόπος καλείται *απειροστικός*, και βασίζεται κατ' αρχή στη διατύπωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά της συγκεκριμένης κατασκευής, σύμφωνα με το Γ . Η επίλυση του προβλήματος αποκτάται τότε με τη λύση (ολοκλήρωση) των εξισώσεων στο χώρο Ω και εφαρμοζοντας τους σχετικούς περιορισμούς β . Ο δεύτερος τρόπος βασίζεται στην απόκτηση της *μεταβολικής αρχής* που διέπει το συγκεκριμένο πρόβλημα και ισχύει στο χώρο Ω . Σε συνέχεια, η μεταβολική αρχή διατυπώνεται ως συναρτησιακό χ της συνάρτησης φ στο χώρο Ω . Το συναρτησιακό χ υπόκειται σε περιορισμούς β . Η επίλυση του προβλήματος συνίσταται τότε στην εύρεση στάσιμων τιμών του χ .

Η πρώτη μέθοδος αποτελεί την πρώτη προσέγγιση στην επίλυση των κατασκευών. Μπορεί επίσης να διατυπωθεί σε μητρική μορφή και να αποκτηθούν οι αντίστοιχες λύσεις.

Η απόκτηση λύσεων κλειστής μορφής των εξισώσεων ελαστικότητας για πολύπλοκες κατασκευές είναι εφικτή σε ελάχιστες, μεμονωμένες, περιπτώσεις. Αρχικά, το ενδιαφέρον των ερευνητών επικεντρώθηκε στον υπολογισμό των μετατοπίσεων και των δυνάμεων που ασκούνται σε ραβδωτές κατασκευές, και ιδιαίτερα των στατικά ορισμένων, για τις οποίες η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας σε έναν αριθμό κόμβων επαρκεί για τον ορισμό του εσωτερικού εντατικού πεδίου και των μετατοπίσεων. Στις στατικά αόριστες κατασκευές οι συνθήκες ισορροπίας δεν επαρκούν, και το 1827 ο Navier αντελήφθη ότι επιτυγχάνεται λύση του προβλήματος με επίλυση ως προς τις μετατοπίσεις των κόμβων. Αποκτώνται τότε εξισώσεις, ο αριθμός των οποίων ισούται με τον αριθμό των αγνώστων μετατοπίσεων, οπότε



Σχήμα 9 Μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών

η λύση του προβλήματος είναι εφικτή. Η μέθοδος αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε μέχρι την εποχή των H/Y, που επιτρέπουν την ταχεία επίλυση μεγάλων συστημάτων εξισώσεων.

Το 1873, ο Castigliano διατύπωσε τα δύο θεωρήματά του⁴, ενώ το 1889 ο Engesser εισήγαγε την έννοια της *συμπληρωματικής ενέργειας παραμόρφωσης*. Επίσης γενίκευσε τα θεωρήματα του Castigliano για εφαρμογή και σε μη-γραμμικές κατασκευές. Το 1955 ο Αργύρης έδειξε ότι όλα τα ενεργειακά θεωρήματα μπορούν να αποκτηθούν από τις παρακάτω δύο *συμπληρωματικές αρχές*:

⁴ εδάφια 3.3.2, 3.3.4 παρακάτω

- α) Της αρχής των δυνατών έργων (ή δυνατών μετατοπίσεων) και
- β) Της αρχής του συμπληρωματικού δυνατού έργου

Οι δύο αυτές αρχές παρουσιάζονται σε εδάφια που ακολουθούν.

3.2 Η μέθοδος της ισορροπίας κατασκευών

Στα εδάφια που ακολουθούν θα κάνουμε μια σύντομη αναδρομή στις βασικές έννοιες της μηχανικής των κατασκευών για να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές των δύο διαφορετικών προσεγγίσεων στο πρόβλημα: της μεθόδου ισορροπίας και των ενεργειακών μεθόδων μελέτης των κατασκευών.

3.2.1 Εισαγωγή

Η μελέτη μίας κατασκευής, ανεξάρτητα από τη μορφή της και την εξωτερική φόρτιση που ασκείται σε αυτή, βασίζεται στη διατύπωση των συνθηκών *ισορροπίας* και *συμβιβαστού* καθώς και στις σχέσεις *τάσεων-παραμορφώσεων* (*καταστατικές εξισώσεις*⁵). Οι συνθήκες αυτές και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων μπορούν να περιγραφούν με απλές μαθηματικές εξισώσεις ώστε να διευκολύνεται η κατανόηση και εφαρμογή τους.

3.2.2 Συνθήκη ισορροπίας

Θεωρούμε μία κατασκευή στην οποία ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, για παράδειγμα αυτή του Σχήματος 10α.

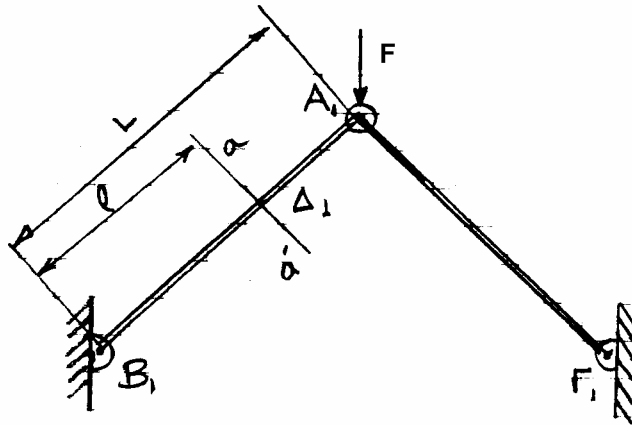
Η συνθήκη ισορροπίας συνδέει τις εξωτερικές δυνάμεις με τις αντίστοιχες τάσεις σ που αναπτύσσονται στο εσωτερικό της κατασκευής. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 10β η εξωτερική δύναμη F που ασκείται στην αρθρωτή σύνδεση A_I ισορροπείται από τις αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στις δύο ράβδους. Επίσης, στα τμήματα μίας κατασκευής όπου δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η συνθήκη ισορροπίας συνδέει τις τάσεις που εξασκούνται εκατέρωθεν μίας τυχούσας διατομής, π.χ. της διατομής AA' της ράβδου $A_I B_I$ (Σχήματα 10α, 10γ). Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στην *ισορροπία των εσωτερικών δυνάμεων*.

3.2.3 Συνθήκη συμβιβαστού

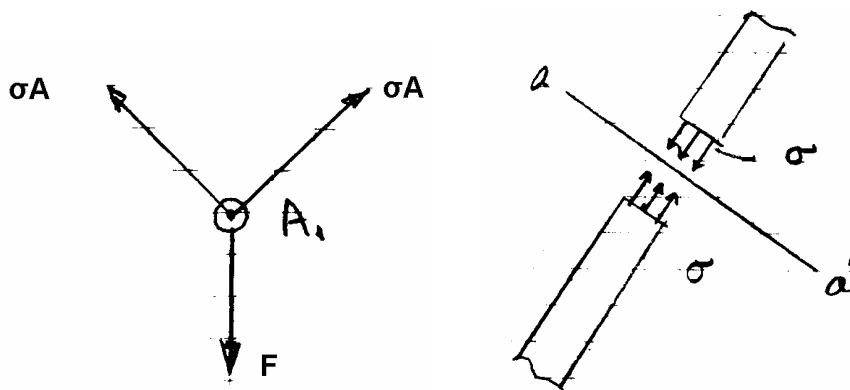
Η *συνθήκη συμβιβαστού*⁶ συνδέει τις παραμορφώσεις (ϵ) μίας κατασκευής με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις (u). Συνεπώς η συνθήκη αυτή εκφράζεται ανάλογα με τον τρόπο που παραμορφώνεται η κατασκευή, (επιμήκυνση, διάτμηση). Στο παρά

⁵ καταστατική εξίσωση = constitutive equation

⁶ η συνθήκη αυτή επίσης αναφέρεται ως *το συμβιβαστό των παραμορφώσεων – μετατοπίσεων*



(α) Διάταξη κατασκευής

(β) Ισορροπία δυνάμεων στην σύνδεση A_1 (γ) Ισορροπία τάσεων/δυνάμεων στην διατομή aa' **Σχήμα 10** Κατασκευή αποτελούμενη από δύο αρθρωτές ράβδους

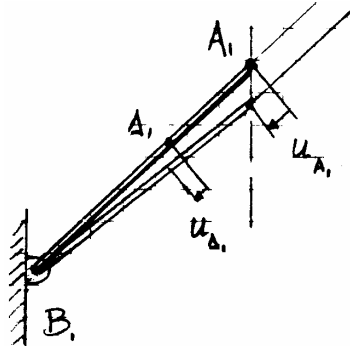
δειγμα του Σχήματος 10, οι ράβδοι A_1B_1 και $A_1\Gamma_1$ παραμορφώνονται μόνο κατά μήκος των αξόνων τους επειδή η σύνδεση A_1 είναι αρθρωτή. Επομένως για δύο τυχαία σημεία A_1 και Δ_1 της ράβδου A_1B_1 , η συνθήκη συμβιβαστού γράφεται αντίστοιχα:

$$\varepsilon_L = u_{A_1}/L \quad \text{και} \quad \varepsilon_\ell = u_{\Delta_1}/\ell \quad (9)$$

(Σχήμα 11). Παρατηρούμε ότι $\varepsilon_L = \varepsilon_\ell$, επειδή η ράβδος υπόκειται σε ομοιόμορφη θλίψη.

3.2.4 Καταστατικές εξισώσεις

Οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων βασίζονται σε ελεγχόμενα πειράματα που γίνονται σε δοκίμια του κάθε υλικού (εφελκυσμός, θλίψη, διάτμηση, κόπωση). Σε ορισμένες εφαρμογές, λόγω της μορφής και του μεγέθους της φόρτισης, είναι απαραίτητη η χρήση *ελαστο-πλαστικών* σχέσεων τάσεων-παραμορφώσεων όπου λαμβάνεται υπόψη ότι το υλικό υπόκειται σε μόνιμες, μη-αντιστρεπτές, *πλαστικές* παραμορφώσεις. Γενικά σε πολλές μηχανολογικές και ναυπηγικές κατασκευές, όπου πρωτεύοντα ρόλο έχουν τα μεταλλικά κράματα, μπορεί να θεωρηθεί ότι η συμπεριφορά του υλικού είναι *ελαστική*.



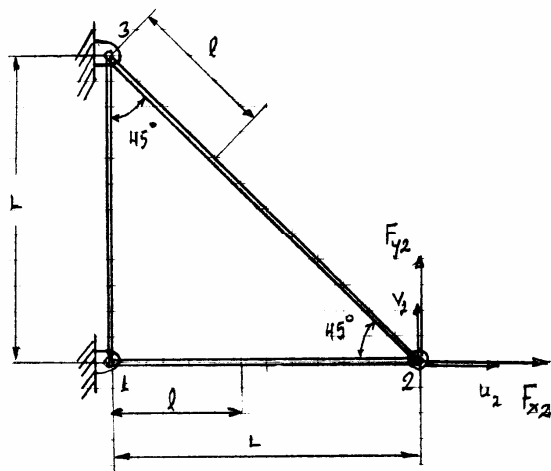
Σχήμα 11 Αξονικές μετατοπίσεις λόγω θλίψης του άκρου A_1 και σε τυχαίο σημείο A_1' της ράβδου A_1B_1 (Σχήμα 10)

Οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι αντιστρεπτές και οι σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων αποτελούν μία γενίκευση του νόμου του Hooke, ο οποίος για μονοδιάστατη φόρτιση δίνεται από την γνωστή γραμμική σχέση $\sigma = E\varepsilon$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

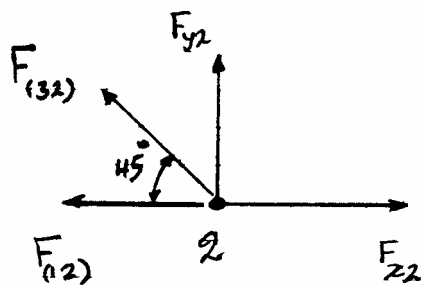
Στο παρακάτω παράδειγμα γίνεται η εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας, συμβιβαστού, και του νόμου του Hooke για να ευρεθούν οι μετατοπίσεις σε μία απλή κατασκευή που φέρει εξωτερικό φορτίο.

Παράδειγμα 1

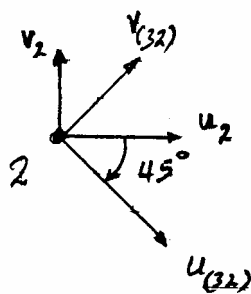
Το διδιάστατο πλαίσιο του Σχήματος 12 αποτελείται από τις τρεις ράβδους (1-2), (2-3), και (3-1) οι οποίες συνδέονται στα σημεία (1), (2), και (3) με αρθρωτές συνδέσεις. Τα άκρα (1) και (3) του πλαισίου είναι αμετάθετα ενώ στο ελεύθερο άκρο (2) ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις F_{x2} και F_{y2} . Ζητείται να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις του σημείου (2). Δίνεται ότι οι τρεις ράβδοι έχουν την ίδια μορφή διατομής με εμβαδόν A .



(α) Γεωμετρία



(β) Ισορροπία δυνάμεων στο σημείο 2



(γ) Περιστροφές στο σημείο 2

Σχήμα 12 Διδιάστατο πλαίσιο

Λύση

Θεωρούμε ότι λόγω των αρθρωτών συνδέσεων οι ράβδοι φορτίζονται μόνον αξονικά. Λαμβάνουμε ως θετικές τις φορές των δυνάμεων F_{x2} και F_{y2} και επίσης τις αντίστοιχες μετατοπίσεις u_2 και v_2 στο σημείο (2), όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 12α. Για την επίλυση του παραδείγματος αυτού χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί:

$$\begin{aligned} F_{(12)}, F_{(32)} &= \text{αξονικές δυνάμεις στις ράβδους 1-2 και 3-2 αντίστοιχα} \\ \sigma_{(12)}, \sigma_{(32)} &= \text{αξονικές (ορθές) τάσεις στις ράβδους 1-2 και 3-2 αντίστοιχα} \\ \varepsilon_{(12)}, \varepsilon_{(32)} &= \text{αξονικές παραμορφώσεις στις ράβδους 1-2 και 3-2 αντίστοιχα} \\ u_{(12)}, u_{(32)} &= \text{αξονικές μετατοπίσεις των ράβδων 1-2 και 3-2 αντίστοιχα} \end{aligned}$$

Εξετάζεται αρχικά η φόρτιση και η παραμόρφωση κάθε ράβδου του πλαισίου. Σύμφωνα με το ζητούμενο επαρκεί η ανάλυση των ράβδων 1-2 και 3-1. Σε κάθε σημείο των ράβδων αυτών ισχύουν, λόγω της συνθήκης συμβιβαστού, οι σχέσεις:

$$\varepsilon_{(12)} = \frac{u_{(12)}}{l} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{(32)} = \frac{u_{(32)}}{l} \quad (10)$$

όπου το l συμβολίζει ένα τυχαίο τμήμα της κάθε ράβδου. Επίσης, λόγω της συνθήκης ισορροπίας έχουμε:

$$\sigma_{(12)} A = F_{(12)} \quad \text{και} \quad \sigma_{(32)} A = F_{(32)} \quad (11)$$

Παρατηρείται ότι οι αξονικές δυνάμεις και οι αντίστοιχες τάσεις δεν μεταβάλλονται κατά μήκος κάθε ράβδου. Έστω ότι κάθε ράβδος είναι κατασκευασμένη από το ίδιο υλικό, με μέτρο ελαστικότητας E . Επομένως όταν οι ράβδοι 1-2 και 2-3 παραμορφώνονται ελαστικά, έχουμε:

$$\varepsilon_{(12)} E = \sigma_{(12)} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{(32)} E = \sigma_{(32)} \quad (12)$$

Όσον αφορά στη συνολική κατασκευή, η ισορροπία στο σημείο (2) ικανοποιείται εφόσον, (Σχήμα 12β):

$$F_{(12)} + \frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} = F_{x2} \quad \text{και} \quad \frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} = -F_{y2} \quad (13)$$

Επίσης, για να υπάρχει συμβατότητα παραμορφώσεων - μετατοπίσεων στο σημείο (2), (Σχήμα 12γ), θα πρέπει:

$$\varepsilon_{(12)}L = u_{(12)} = u_2 \quad \text{και} \quad \varepsilon_{(32)}\sqrt{2}L = u_{(32)} = \frac{u_2}{\sqrt{2}} - \frac{v_2}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

Κάνοντας χρήση των (11) και (12), οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$\frac{F_{(12)}}{AE}L = u_2 \quad \text{και} \quad \frac{F_{(32)}}{AE}\sqrt{2}L = \frac{u_2}{\sqrt{2}} - \frac{v_2}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

Τελικά, η αντικατάσταση των δυνάμεων $F_{(12)}$ και $F_{(32)}$ στις εξισώσεις ισορροπίας (13) από τις σχέσεις (15) δίνει:

$$\frac{EA}{L} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) u_2 - \frac{EA}{L} \frac{1}{2\sqrt{2}} v_2 = F_{x2} \quad (16\alpha)$$

$$\text{και} \quad \frac{EA}{L} \frac{1}{2\sqrt{2}} (u_2 - v_2) = -F_{y2} \quad (16\beta)$$

Οι εξισώσεις (16) εκφράζουν την ισορροπία της κατασκευής συναρτήσει των ζητούμενων μετατοπίσεων. Η λύση τους είναι:

$$u_2 = \frac{L}{EA} (F_{x2} + F_{y2}) \quad (17\alpha)$$

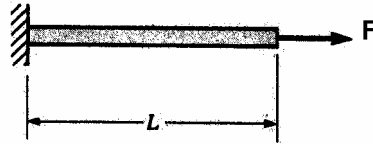
$$\text{και} \quad v_2 = \frac{L}{EA} [F_{x2} + (1 + 2\sqrt{2})F_{y2}] \quad (17\beta)$$

Η μέθοδος επίλυσης του παραπάνω παραδείγματος ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων των μετατοπίσεων διότι υπολογίσθηκαν πρώτα οι μετατοπίσεις, σε αντίθεση με τον υπολογισμό πρώτα των δυνάμεων και τάσεων.

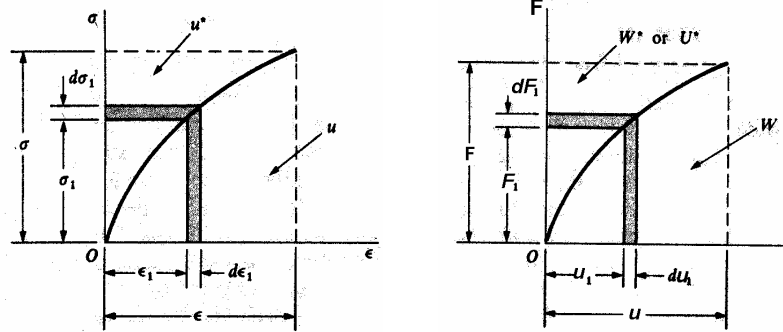
3.3 Ενεργειακές μέθοδοι

3.3.1 Ενέργεια παραμόρφωσης και συμπληρωματική ενέργεια

Οι έννοιες της *ενέργειας παραμόρφωσης* και της *συμπληρωματικής ενέργειας* αποτελούν τη βάση μιας σειράς ισχυρών μεθόδων που χρησιμοποιούνται κατά τη μελέτη των κατασκευών. Στην πιο γενική τους μορφή, οι μέθοδοι αυτές ισχύουν στη γραμμική αλλά και στη μη-γραμμική περιοχή. Αρχικά θα εξετασθούν στη γενική



(α) Ράβδος υπό αξονικό φορτίο F



(β) Διάγραμμα σ - ϵ

(γ) Διάγραμμα F - u

Σχήμα 13 Ενέργεια παραμόρφωσης και συμπληρωματική ενέργεια

τους μορφή, και σε συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις γραμμικές κατασκευές.

Μη-γραμμική συμπεριφορά προκύπτει είτε λόγω μη-γραμμικής απόκρισης του υλικού, είτε λόγω γεωμετρικής μη-γραμμικότητας (μεγάλες μετατοπίσεις). Θα πρέπει να επαναλάβουμε ότι κατά τη μη-γραμμική απόκριση, η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει παρά μόνο σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις.

Θεωρούμε μια ράβδο που φέρει αξονικό εφελκυστικό φορτίο F που έχει ως αποτέλεσμα ένα πεδίο σταθερών τάσεων $\sigma = F/A$ (Σχήμα 13). Η παραμόρφωση της ράβδου ισούται με $\epsilon = u/L$, όπου u είναι η επιμήκυνση και L το μήκος της. Το υλικό της ράβδου επιδεικνύει μη-γραμμική συμπεριφορά, όπως δείχνει το Σχήμα 13β. Το διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης (Σχήμα 13γ) έχει την ίδια μορφή με το διάγραμμα τάσεων-μετατοπίσεων. Το έργο που επιτελείται κατά την επιβολή του φορτίου F δίνεται από τη σχέση:

$$W = \int_0^u F_1 du_1 \quad (18)$$

Στη σχέση αυτή $F > F_1 > 0$, u_1 είναι η αντίστοιχη επιμήκυνση και u είναι η μέγιστη επιμήκυνση. Εφόσον η συμπεριφορά είναι ελαστική, και επειδή αμελούμε τυχόν απώλειες ενέργειας κατά την επιβολή του φορτίου καθώς και κατά την αποφόρτιση, όλο το έργο που επιτελεί το εξωτερικό φορτίο αποθηκεύεται στη ράβδο ως ενέργεια παραμόρφωσης που μπορεί να ανακτηθεί κατά την αποφόρτιση. Συνεπώς, η ενέργεια παραμόρφωσης ισούται αριθμητικά με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων και ισχύει:

$$U = W = \int_0^u F_1 du_1 \quad (19)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα παριστάνεται γεωμετρικά με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα Ox στο Σχήμα 13β. Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης⁷ U' , δηλαδή η ενέργεια παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου του σώματος, λαμβάνεται θεωρώντας ένα στοιχείο όγκου του σώματος στο οποίο αναπτύσσεται τάση σ_1 και παραμόρφωση ε_1 . Συνεπώς,

$$U' = \int_0^{\varepsilon} \sigma_1 d\varepsilon_1 \quad (20)$$

όπου $\varepsilon (=u/L)$ είναι η μέγιστη παραμόρφωση. Το ολοκλήρωμα της σχέσης (20) παριστάνεται γεωμετρικά με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και τον άξονα Ox του Σχήματος 13β. Θα εξετάσουμε τώρα μια άλλη μορφή έργου που περιέχεται στο Σχήμα 13β. Το έργο αυτό καλείται συμπληρωματικό έργο,⁸ W^* , και ορίζεται ως ακολούθως:

$$W^* = \int_0^P u_1 dF_1 \quad (21)$$

Το συμπληρωματικό έργο παριστάνεται γεωμετρικά με το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα Oy στο Σχήμα 13γ. Στο συμπληρωματικό έργο δεν αποδίδεται κάποια φυσική σημασία ισχύει όμως η παρακάτω σχέση:

$$W + W^* = Fu \quad (22)$$

⁷ πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης = strain energy density

⁸ συμπληρωματικό έργο = complementary work

Γεωμετρικά λοιπόν, το συμπληρωματικό έργο αποτελεί συμπλήρωμα του έργου W καθότι συμπληρώνει το ορθογώνιο του Σχήματος 13γ. Η συμπληρωματική ενέργεια U^* ισούται τότε με το συμπληρωματικό έργο του ασκούμενου φορτίου, έτσι ώστε:

$$U^* = W^* = \int_0^F u_1 dF_1 \quad (23)$$

Η πυκνότητα της συμπληρωματικής ενέργειας,⁹ $U^{*'}$, (ή συμπληρωματική ενέργεια ανά μονάδα όγκου), λαμβάνεται τότε θεωρώντας στοιχείο όγκου του σώματος στο οποίο αναπτύσσονται τάσεις σ_1 και παραμορφώσεις ε_1 , όπως και κατά την περίπτωση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης. Συνεπώς,

$$U^{*'} = \int_0^\sigma \varepsilon_1 d\sigma_1 \quad (24)$$

Όταν σε ένα σώμα ασκούνται περισσότερες από μια εξωτερικές φορτίσεις, το συνολικό έργο υπολογίζεται με πρόσθεση των επί μέρους έργων. Οι φορτίσεις πρέπει να ασκούνται ταυτοχρόνως και να αυξάνονται αναλογικά. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$W = \sum_{i=1}^N \int_0^{u_i} F_i du \quad W^* = \sum_{i=1}^N \int_0^{F_i} u dF \quad (25)$$

Στις παραπάνω σχέσεις F_i και u_i είναι οι μέγιστες τιμές της i -οστής φόρτισης και της αντίστοιχης μετατόπισης, ενώ F και u είναι αντίστοιχες ενδιάμεσες τιμές. N είναι ο αριθμός των εξωτερικών φορτίσεων.

3.3.2 Το πρώτο θεώρημα του Castigliano

Θεωρούμε κατασκευή στην οποία ασκούνται n φορτία $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ τα οποία προκαλούν μετατοπίσεις $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Τα φορτία και οι μετατοπίσεις θεωρούνται γενικευμένα, μπορούν δηλαδή να περιλαμβάνουν ροπές και περιστροφές αντίστοιχα, ενώ η απόκριση της κατασκευής επιτρέπεται να είναι μη-γραμμική (Σχήμα 13γ). Η ενέργεια παραμόρφωσης U της κατασκευής είναι τότε ίση με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων. Κάθε δύναμη F_i μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της αντίστοιχης μετατόπισης u_i μέσω της αντίστοιχης σχέσης φορτίου-μετατόπισης.

⁹ πυκνότητα συμπληρωματικής ενέργειας = complementary strain energy density

Εάν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις αυτές στη συνάρτηση έργου, λαμβάνεται η ενέργεια παραμόρφωσης U συναρτήσει των μετατοπίσεων u_i . Είναι δυνατόν τότε να υπολογισθεί η μεταβολή της ενέργειας παραμόρφωσης κατά την αύξηση μιας μετατόπισης u_i κατά δu_i , ενώ οι υπόλοιπες μετατοπίσεις παραμένουν αμετάβλητες. Η αντίστοιχη αύξηση τη ενέργειας παραμόρφωσης dU , δίνεται από τη σχέση

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u_i} du_i \quad (26)$$

όπου η πρώτη παράγωγος $\partial U/\partial u_i$ είναι ο βαθμός μεταβολής της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς τη μετατόπιση u_i . Παρατηρούμε ότι κατά τη μεταβολή της μετατόπισης u_i κατά δu_i , έργο παράγεται από τη δύναμη F_i , όχι όμως και από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στην κατασκευή εκαθόσον οι υπόλοιπες μετατοπίσεις δεν μεταβάλλονται. Το έργο αυτό που είναι $F_i du_i$, ισούται με την αύξηση της ενέργειας παραμόρφωσης της κατασκευής

$$dU = F_i du_i \quad (27)$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (26) και (27), λαμβάνουμε

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \quad (28)$$

Η σχέση αυτή καλείται *πρώτο θεώρημα του Castigliano*, και δηλώνει ότι η μερική παράγωγος της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς οιαδήποτε μετατόπιση u_i ισούται με την αντίστοιχη γενικευμένη δύναμη F_i .

Η σχέση αυτή καλείται συνήθως *πρώτο θεώρημα του Castigliano*. Το πρώτο θεώρημα του Castigliano αποτελεί τη βάση μιας μεθόδου μελέτης κατασκευών που κάνει χρήση της ενέργειας παραμόρφωσης. Για να γίνει καλύτερα κατανοητή η μέθοδος καταφεύγουμε στη χρήση ενός παραδείγματος.

Θεωρούμε μια μη-γραμμική κατασκευή που έχει N άγνωστες κομβικές μετατοπίσεις $U_1, U_2, \dots, U_N$. Οι μετατοπίσεις U_i αποτελούν υποσύνολο του συνόλου των μετατοπίσεων της κατασκευής ενώ τα φορτία F ασκούνται μόνο σε κόμβους της κατασκευής. Συνεπώς, η κάθε μετατόπιση αντιστοιχεί σε μια φόρτιση. Τα φορτία αριθμούνται $F_1, F_2, \dots, F_N$.

Όπως εξηγήθηκε προηγουμένως, η ενέργεια παραμόρφωσης μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των άγνωστων κομβικών μετατοπίσεων $U_1, U_2, \dots, U_N$. Εάν εκ-

φρασθεί η ενέργεια παραμόρφωσης με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το πρώτο θεώρημα του Castigliano ως προς κάθε μετατόπιση και να λάβουμε σύστημα N εξισώσεων.

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1} \quad F_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2} \quad \dots \quad F_N = \frac{\partial U}{\partial u_N} \quad (29)$$

Εάν εξετάσουμε μια τυπική εξίσωση, παρατηρούμε ότι το δεξιό σκέλος περιλαμβάνει όρους που περιέχουν τις N κομβικές μετατοπίσεις ως άγνωστες ποσότητες. Επειδή δε το άθροισμα των όρων αυτών ισούται με το εξωτερικό φορτίο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση εκφράζει την ισορροπία της κατασκευής για τη δύναμη F_i . Οι σχέσεις (29) είναι συνεπώς εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Έχοντας υπολογίσει τις κομβικές μετατοπίσεις είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι αντιδράσεις και οι τάσεις. Η κατασκευή έχει συνεπώς επιλυθεί πλήρως.

Η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω βασίζεται στην επίλυση των κομβικών μετατοπίσεων μέσω εξισώσεων ισορροπίας. Καλείται λοιπόν *μέθοδος των μετατοπίσεων*¹⁰ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών αλλά και μη-γραμμικών κατασκευών. Στην περίπτωση των γραμμικών κατασκευών καλείται *μέθοδος των ακαμμιών*¹¹.

3.3.3 Μέθοδοι συμπληρωματικής ενέργειας

Προηγουμένως δείξαμε ότι η ενέργεια παραμόρφωσης εκφράζεται ως συνάρτηση μετατοπίσεων ενώ η συμπληρωματική ενέργεια ως συνάρτηση δυνάμεων. Παρακάτω θα αποδείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα που δείχνει τη χρησιμότητα της συμπληρωματικής ενέργειας κατά την επίλυση των κατασκευών.

Θεωρούμε μια μη-γραμμική κατασκευή που φέρει N εξωτερικά φορτία $F_1, F_2, \dots, F_N$ που προκαλούν αντίστοιχες μετατοπίσεις $u_1, u_2, \dots, u_N$. Η συμπληρωματική ενέργεια U^* είναι τότε ίση με το συμπληρωματικό έργο W^* των φορτίων. Κατά τον υπολογισμό αυτού του έργου, εκφράζουμε τις μετατοπίσεις συναρτήσει των φορτίων και επιτελούμε την ολοκλήρωση που δίνεται στη σχέση (25β). Η ενέργεια παραμόρφωσης U εκφράζεται τότε ως συνάρτηση των φορτίων $F_1, F_2, \dots, F_N$. Εάν αυξηθεί ένα φορτίο, F_i , κατά dF_i , ενώ τα άλλα φορτία παραμείνουν αμετάβλητα, η συμπληρωματική ενέργεια αυξάνεται κατά dU^* , σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial F_i} dF_i \quad (30)$$

¹⁰ μέθοδος των μετατοπίσεων = displacement method

¹¹ μέθοδος των ακαμμιών = stiffness method

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η μεταβολή της συμπληρωματικής ενέργειας ισούται με το ρυθμό μεταβολής της επί τη μεταβολή του φορτίου.

Εναλλακτικά, η επαύξηση της συμπληρωματικής ενέργειας μπορεί να αποκτηθεί θεωρώντας το συμπληρωματικό έργο των δυνάμεων όταν το φορτίο F_i αυξηθεί κατά dF_i . Το συμπληρωματικό αυτό έργο ισούται με τη συμπληρωματική ενέργεια της κατασκευής. Το μόνο φορτίο που μεταβάλλεται και επιτελεί συμπληρωματικό έργο είναι το F_i . Συνεπώς, η αύξηση της συμπληρωματικής ενέργειας είναι το γινόμενο της μετατόπισης u_i και της επαύξησης του φορτίου, dF_i :

$$dU^* = u_i dF_i \quad (31)$$

Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$u_i = \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \quad (32)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, η μετατόπιση ενός σημείου κατασκευής ισούται με τη (μερική) παράγωγο της συμπληρωματικής ενέργειας ως προς την εξωτερική δύναμη που ασκείται στο συγκεκριμένο σημείο. Η σχέση αυτή καλείται *θεώρημα Crotti-Engesser* και αντιστοιχεί στο πρώτο θεώρημα του Castigliano.

3.3.4 Το δεύτερο θεώρημα του Castigliano

Στην περίπτωση που μια κατασκευή φορτίζεται στη γραμμική ελαστική περιοχή, ισχύει η *αρχή της επαλληλίας* (βλέπε παρακάτω) και η συμπληρωματική ενέργεια είναι ίση με την ενέργεια παραμόρφωσης.

Θεωρούμε ότι η γραμμική κατασκευή παραλαμβάνει φορτία $F_1, F_2, \dots, F_N$ και ότι τα φορτία αυτά αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις $u_1, u_2, \dots, u_N$. Τότε οι ποσότητες U και U^* μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις δεύτερης τάξης των φορτίων. Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε το U^* με U στο θεώρημα Crotti-Engesser. Λαμβάνουμε τότε:

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad (33)$$

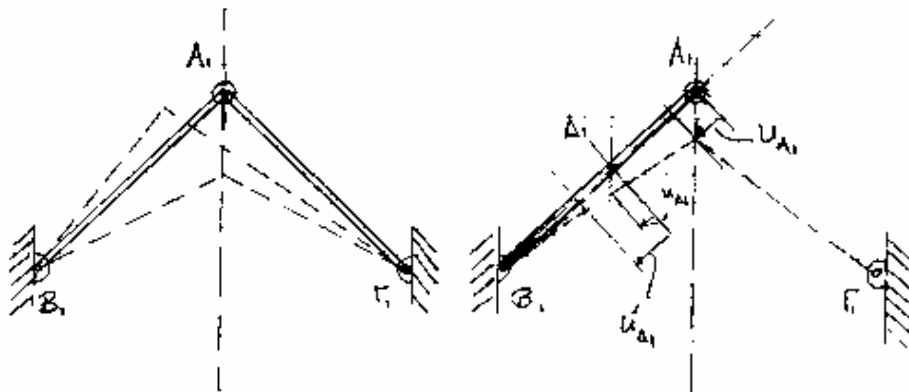
Η παραπάνω σχέση καλείται *δεύτερο θεώρημα του Castigliano* και διατυπώνεται ως εξής:

σε μια γραμμική κατασκευή, η μερική παράγωγος της ενέργειας παραμόρφωσης ως προς οποιοδήποτε φορτίο F_i ισούται με την αντί-

στοιχη μετατόπιση u_i , εφόσον η ενέργεια παραμόρφωσης εκφράζεται συναρτήσει των φορτίων

3.3.5 Η αρχή των δυνατών έργων

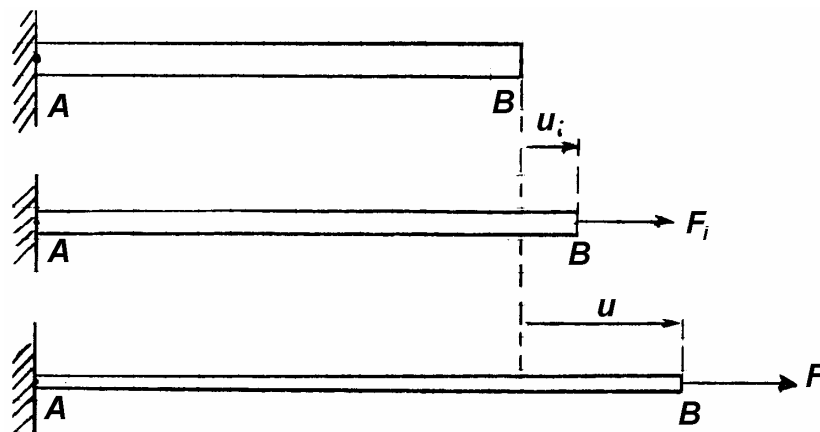
Στο Παράδειγμα 1 υπολογίσθηκαν οι ζητούμενες μετατοπίσεις εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας και συμβιβαστού και θεωρώντας ελαστική συμπεριφορά. Εξετάζουμε στην συνέχεια την *αρχή των δυνατών έργων* που αποτελεί τη βάση μίας εναλλακτικής μεθόδου για την μελέτη των κατασκευών. Όπως θα γίνει κατανοητό, αρχικά για το διδιάστατο πλαίσιο του Παραδείγματος 1, η εφαρμογή της αρχής αυτής ικανοποιεί έμμεσα την συνθήκη ισορροπίας της κατασκευής.



(α) Κινηματικά επιτρεπτές διατάξεις

(β) Μη-επιτρεπτή διάταξη

Σχήμα 14 Διδιάστατη κατασκευή ($A_i B_i \Gamma_i$)



Σχήμα 15 Αρχική, ενδιάμεση, και τελική διάταξη της ράβδου AB λόγω φόρτισης F

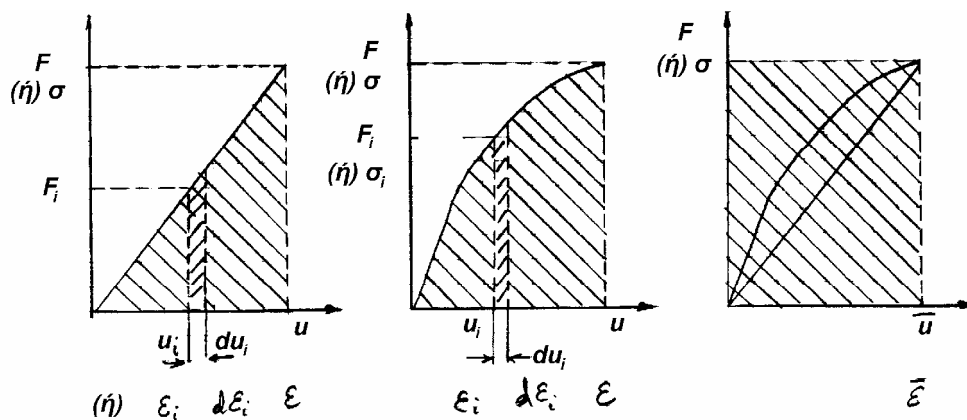
Η απόδειξη της αρχής των δυνατών έργων για ένα τυχαίο σώμα που παραμορφώνεται υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων θα δοθεί σε μεταγενέστερο κεφάλαιο.

Μία κατασκευή μπορεί να καταλάβει οποιαδήποτε διάταξη στο χώρο που είναι συμβατή με την στήριξή της, δηλαδή με τις συνοριακές συνθήκες του διανύσματος μετατόπισης. Εάν επιπλέον για τις διατάξεις αυτές οι παραμορφώσεις είναι συμβατές με τις μετατοπίσεις, ικανοποιείται δηλαδή η συνθήκη συμβιβαστού, τότε οι διατάξεις της κατασκευής όπως και οι αντίστοιχες μετατοπίσεις καλούνται *κινηματικά επιτρεπτές*¹². Στο Σχήμα 14 απεικονίζονται διάφορες διατάξεις της κατασκευής του Σχήματος 10.

Οι δύο είναι κινηματικά επιτρεπτές (Σχήμα 14α) ενώ αυτή του Σχήματος 14β είναι μη-επιτρεπτή, λόγω της ασυμβατότητας των παραμορφώσεων και μετατοπίσεων στο σημείο Δ_1 , δηλαδή $\varepsilon = u_{\Delta_1}/L = u_{\Delta_1}/\ell \neq u'_{\Delta_1}/\ell$.

Από τις κινηματικά επιτρεπτές διατάξεις της κατασκευής υπάρχει μόνο μια που είναι αποτέλεσμα της εξωτερικής φόρτισης, και συνεπώς είναι η πραγματική. Με την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων προσδιορίζεται η πραγματική αυτή διάταξη. Θεωρούμε λοιπόν ότι η εξωτερική φόρτιση παραμένει σταθερή και υπολογίζουμε το *εξωτερικό δυνατό έργο*, $\bar{W}_{εξ}$, που καταναλώνουν οι εξωτερικές δυνάμεις όταν η κατασκευή παραμορφώνεται σύμφωνα με κάποια κινηματικά επιτρεπτή ή *δυνατή* μετατόπιση.

Η περίπτωση μίας ράβδου που είναι πακτωμένη στο άκρο A και φέρει αξονική φόρτιση, (Σχήμα 15), είναι ένα χρήσιμο παράδειγμα για τον υπολογισμό του (πραγματικού) έργου των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων και αντίστοιχα

**Σχήμα 16** Πραγματικό και δυνατό έργο εξωτερικών και εσωτερικών

¹² κινηματικά επιτρεπτός = kinematically admissible

δυνάμεων στο άκρο B της ράβδου του Σχήματος 12

του δυνατού έργου. Θεωρούμε ότι το φορτιζόμενο άκρο B της ράβδου μετατοπίζεται κατά u λόγω της αξονικής δύναμης F και έστω F_i μία ενδιάμεση τιμή της. Το (πραγματικό) εξωτερικό έργο είναι:

$$W_{εξ} = \int_0^u F_i du_i = \begin{cases} \frac{Fu}{2} \\ \int_0^u p(u_i) du_i \end{cases} \quad (34)$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το εσωτερικό δυνατό έργο, $\overline{W}_{εσ}$, που καταναλώνουν οι εσωτερικές δυνάμεις, δηλαδή οι συνισταμένες των τάσεων που αναπτύσσονται σε μία διατομή της κατασκευής. Τότε, σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, εξισώνουμε το εξωτερικό με το εσωτερικό δυνατό έργο:

$$\overline{W}_{εξ} = \overline{W}_{εσ} \quad (35)$$

ανάλογα με την συμπεριφορά της ράβδου, δηλαδή γραμμική ελαστική και μη γραμμική με $F_i = f(u_i)$ αντιστοίχως. Οι δύο όροι δεξιά της αγκύλης δίνουν το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση της σχέσης δύναμη-μετατόπιση, (Σχήμα 16). Παρομοίως το αντίστοιχο έργο της εσωτερικής δύναμης F στο άκρο B δίνεται από την σχέση:

$$W_{εσ} = \int_0^u F_i du_i = \int_0^ε A \sigma_i d(L \varepsilon_i) = AL \int_0^ε \sigma d\varepsilon_i = AL \begin{cases} \frac{\sigma \varepsilon}{2} \\ \int_0^ε f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i \end{cases} \quad (36)$$

όπου F_i είναι μία ενδιάμεση τιμή της F κατά την διάρκεια της φόρτισης. Παρατηρούμε ότι οι δύο όροι δεξιά της αγκύλης δίνουν τώρα το εμβαδόν κάτω από την γραφική παράσταση της σχέσης τάση-παραμόρφωση, (Σχήμα 16α, 16β), και ορίζουν την *ενέργεια παραμόρφωσης* της ράβδου U_o ανά μονάδα όγκου. Για γραμμική ελαστική συμπεριφορά ($\sigma = E\varepsilon$), ισχύει:

$$U_o = \sigma \varepsilon / 2 = \sigma^2 / 2E$$

ενώ για μη-γραμμική συμπεριφορά η U_o εξαρτάται από την συνάρτηση $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τις αντίστοιχες σχέσεις για το δυνατό έργο. Έστω $\bar{u}$ μία δυνατή μετατόπιση στο άκρο B της ράβδου και $\bar{\varepsilon} = \bar{u} / L$ η αντίστοιχη συμβατή παραμόρφωση. Το δυνατό έργο της εξωτερικής δύναμης F και της εσωτερικής δύναμης $F = A\sigma$ είναι αντίστοιχα:

$$\bar{W}_{\varepsilon\xi} = F\bar{u} \quad \bar{W}_{\varepsilon\sigma} = A\sigma\bar{u} = AL(\sigma\bar{\varepsilon}) \quad (37)$$

Παρατηρούμε από τις παραπάνω σχέσεις και το Σχήμα 16γ ότι το δυνατό έργο είναι ανεξάρτητο από τις σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης που διέπουν το υλικό. Αυτό αποτελεί και ένα σημαντικό πλεονέκτημα της αρχής των δυνατών έργων, δηλαδή ότι χρησιμοποιείται για τη μελέτη κατασκευών ανεξάρτητα της γραμμικής ή μη γραμμικής (π.χ. μη-γραμμικής ελαστικής, ελαστο-πλαστικής) συμπεριφοράς τους.

Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα αυτό γίνεται χρήση της αρχής των δυνατών έργων για να αποδειχθεί ότι έμμεσα ικανοποιούνται οι εξισώσεις ισορροπίας στην φορτιζόμενο άκρο (2) του διδιάστατου πλαισίου του Σχήματος 12.

Λύση

Έστω $\bar{u}_2$ και $\bar{v}_2$ οι δυνατές μετατοπίσεις στο σημείο (2) του πλαισίου. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\bar{W}_{\varepsilon\xi} = F_{x2} \bar{u}_2 + F_{y2} \bar{v}_2 \quad (38)$$

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο κοινό άκρο (2) των ράβδων (12) και (32) δίνεται από την σχέση:

$$\bar{W}_{\varepsilon\sigma} = F_{(12)} \bar{u}_{(12)} + F_{(32)} \bar{u}_{(32)} \quad (39)$$

όπου $\bar{u}_{(12)}$ και $\bar{u}_{(32)}$ είναι οι αξονικές δυνατές μετατοπίσεις των ράβδων (12) και (32) αντιστοίχως. Για να είναι οι δυνατές μετατοπίσεις κινηματικά επιτρεπτές πρέπει να ισχύουν επίσης οι σχέσεις:

$$\bar{\varepsilon}_{(12)} L = \bar{u}_{(12)} = \bar{u}_2 \quad (40)$$

και

$$\bar{e}_{(32)}\sqrt{2}L = \bar{u}_{(32)} = \frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{v}_2}{\sqrt{2}} \quad (41)$$

δηλαδή να υπάρχει συμβατότητα των μετατοπίσεων-παραμορφώσεων στο άκρο (2) των δύο ράβδων. Από τις σχέσεις (39), (40) και (41) γράφουμε το δυνατό έργο $\bar{W}_{\varepsilon\sigma}$ συναρτήσει των δυνατών μετατοπίσεων $\bar{u}_2$ και $\bar{v}_2$. Η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων, δηλαδή $\bar{W}_{\varepsilon\sigma} = \bar{W}_{\varepsilon\sigma}$, δίνει την σχέση:

$$F_{(12)}\bar{u}_2 + F_{(32)}\left(\frac{\bar{u}_2}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{v}_2}{\sqrt{2}}\right) = F_{x2}\bar{u}_2 + F_{y2}\bar{v}_2 \quad (42)$$

ή, συλλέγοντας τους αντίστοιχους όρους,

$$\left(F_{(12)} + \frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} - F_{x2}\right)\bar{u}_2 + \left(\frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} - F_{y2}\right)\bar{v}_2 = 0 \quad (43)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνατές μετατοπίσεις $\bar{u}_2$ και $\bar{v}_2$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και μπορεί να επιλέξουμε οποιεσδήποτε κινηματικά επιτρεπτές τιμές τους. Εφόσον η σχέση (46) ισούται με μηδέν, επιλέγοντας διαδοχικά $\bar{u}_2 = 1, \bar{v}_2 = 0$ και $\bar{u}_2 = 0, \bar{v}_2 = 1$, καταλήγουμε στις σχέσεις (13):

$$F_{(12)} + \frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} = F_{x2} \quad \text{και} \quad \frac{F_{(32)}}{\sqrt{2}} = -F_{y2} \quad (44)$$

που είναι οι εξισώσεις ισορροπίας στο σημείο (2). Αποδείχθηκε συνεπώς για το συγκεκριμένο παράδειγμα ότι η αρχή των δυνατών έργων αποτελεί μία *ικανή* συνθήκη για την ισορροπία της κατασκευής. Εργαζόμενοι με τον αντίστροφο τρόπο, δηλαδή ξεκινώντας από τις σχέσεις (44), μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\bar{W}_{\varepsilon\sigma} = \bar{W}_{\varepsilon\sigma}$, δηλαδή ότι η αρχή των δυνατών έργων είναι επίσης μία *αναγκαία* συνθήκη για την ισορροπία της κατασκευής. Το σημαντικό συμπέρασμα από το παραπάνω παράδειγμα¹³ επομένως είναι ότι κατά την μελέτη μίας κατασκευής με την αρχή των δυνατών έργων δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για την συνθήκη ισορροπίας. Για μία δεδομένη φόρτιση, η λύση που βρίσκουμε με την αρχή των δυνατών έργων είναι υποχρεωτικά συμβατή με την ισορροπία της κατασκευής. Περαιτέρω πλεονεκτήματα της αρχής των δυνατών έργων θα γίνουν κατανοητά σε παρακάτω κεφάλαιο κατά τη διακριτοποίηση κατασκευών με πεπερασμένα στοιχεία.

¹³ όπως μπορεί και να αποδειχθεί και για ένα τυχαίο τρισδιάστατο σώμα.

Η αρχή της επαλληλίας¹⁴

Πριν αναφερθούμε στην καθαυτό μητρική διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας μιας κατασκευής, πρέπει να διασαφηνισθούν οι βασικές παραδοχές που διέπουν τη συμπεριφορά των κατασκευών που προτιθέμεθα να μελετήσουμε. Κατά κανόνα, θεωρούμε ότι η μετατόπιση κάποιου σημείου ή τμήματος κατασκευής είναι ευθέως ανάλογη προς το μέγεθος της επιβαλλόμενης φόρτισης. Η παραδοχή αυτή βασίζεται στην σχέση αναλογίας¹⁵ και αντιστρεπτότητας¹⁶ της τάσης με την παραμόρφωση σε κάποιο στοιχείο της κατασκευής (θεωρία ελαστικότητας). Εάν όμως οι μετατοπίσεις επιφέρουν σημαντική μεταβολή στη γεωμετρία της κατασκευής και προκύψει αλλαγή της μορφής της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης (π.χ. από καμπτική σε καμπτική-στρεπτική), μια επακόλουθη αύξηση της εξωτερικής φόρτισης δεν θα έχει ως αποτέλεσμα μια αντίστοιχη ανάλογη μεταβολή της μετατόπισης. Σε ένα ευρύ φάσμα περιπτώσεων μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πράγματι ισχύουν οι συνθήκες αναλογίας και αντιστρεπτότητας έτσι ώστε να μπορεί να ληφθεί υπόψη η επίδραση περισσοτέρων της μίας εξωτερικών φορτίσεων. Μπορούμε τότε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της επίδρασης περισσοτέρων της μιας φορτίσεων στη μετατόπιση ενός σημείου ή τμήματος μιας κατασκευής με πρόσθεση των επί μέρους μετατοπίσεων. Λέμε τότε ότι ισχύει η *αρχή της επαλληλίας*.

Συμβολίζουμε με U_{iF_j} τη μετατόπιση στον κόμβο i στη διεύθυνση F_i λόγω της δύναμης F_j που ασκείται στον κόμβο j . Από την αρχή της επαλληλίας, έχουμε:

$$U_i = U_{iF_1} + U_{iF_2} + \dots + U_{iF_N} \quad (45)$$

Η παραδοχή όμως της γραμμικότητας της σχέσης τάσεων-παραμορφώσεων δεν συνεπάγεται και τη γραμμικότητα στη σχέση φορτίου με μετατόπιση, λόγω α) της μεταβολής της γεωμετρίας της κατασκευής ή β) της αλλαγής του τρόπου αποθήκευσης της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης της κατασκευής. Για να γίνουν καλύτερα κατανοητά τα παραπάνω παραθέτουμε δύο παραδείγματα.

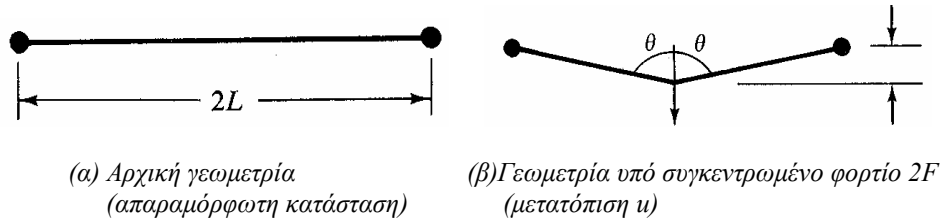
Παράδειγμα 3

Να διερευνηθεί η σχέση φορτίου-μετατόπισης στο σύστημα του σχήματος.

¹⁴ αρχή της επαλληλίας = principle of superposition

¹⁵ αναλογία = proportionality

¹⁶ αντιστρεπτότητα = reversibility



Σχήμα 17 Ελαστικό σχοινί υπό συγκεντρωμένο φορτίο

Λύση

Η κατασκευή αποτελείται από ένα λεπτό ελαστικό σχοινί μήκους $2L$ που στηρίζεται στα άκρα του που παραμένουν αμετακίνητα. Εάν ασκηθεί φορτίο $2F$ στο μεσοδιάστημα το σχοινί θα επιμηκυνθεί και θα μετατοπισθεί το σημείο επιβολής του φορτίου στην κατακόρυφη κατεύθυνση. Ισχύει τότε:

$$2\sigma \cos\theta = 2F \quad (46)$$

όπου σ είναι η τάση που αναπτύσσεται στο σχοινί.

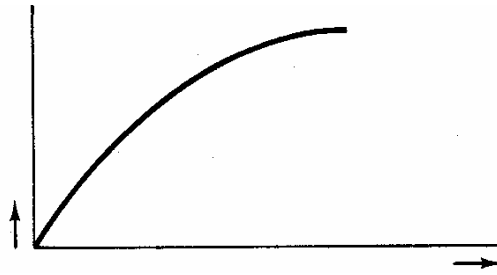
$$\text{Άρα, } \sigma = \frac{\sqrt{(L^2 + u^2)}}{u} F \quad (47)$$

Εάν η μοναδιαία ακαμψία είναι τότε k , δηλαδή η επιμήκυνση λόγω φορτίου k ισούται με τη μονάδα, έχουμε:

$$\sqrt{(L^2 + u^2)} - L = \frac{\sqrt{(L^2 + u^2)}}{ku} F$$

$$\text{ή } u \left[1 - \frac{L}{\sqrt{(L^2 + u^2)}} \right] = \frac{F}{k}$$

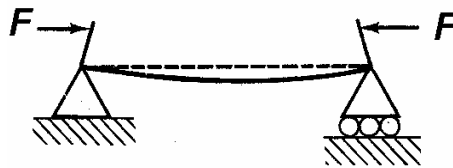
Από την τελευταία σχέση διαφαίνεται ότι για μικρές μετατοπίσεις u , η μεταβολή της μετατόπισης για κάθε αύξηση φορτίου F είναι μεγάλη. Η μεταβολή της μετατόπισης u μειώνεται όμως όσο αυξάνεται το φορτίο, όπως δείχνει το Σχήμα 18.

Σχήμα 18 Διάγραμμα φορτίου-μετατόπισης ($u-F$)**Παράδειγμα 3**

Θεωρούμε τον ελαστικό αμφιέρειστο πρισματικό φορέα του σχήματος. Στο φορέα αυτό ασκείται έκκεντρο φορτίο, παράλληλο με τον κεντροβαρικό του άξονα. Δεν συμπίπτει δηλαδή ο άξονας επιβολής της φόρτισης με τον κεντροβαρικό άξονα της διατομής, αλλά ασκείται σε απόσταση e από αυτόν.



(α) Διάταξη φορέα



(β) Παραμορφωμένη μορφή

Σχήμα 19 Πρισματικός φορέας υπό έκκεντρη φόρτιση

Στην διατομή αυτή η εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης οφείλεται αρχικά αποκλειστικά στη θλιπτική φόρτίσή της. Όσο όμως αυξάνεται η αξονική φόρτιση, τόσο περισσότερο συμμετέχει και η κάμψη. Η μέγιστη τάση, σ_{max} , που αναπτύσσεται σε κάποιο σημείο της διατομής δίνεται γενικά από τη σχέση:

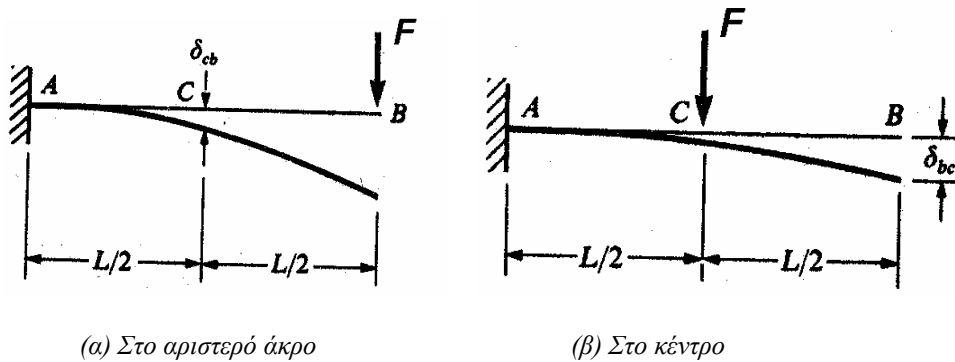
$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F(\varepsilon + w)}{Z}$$

Στη σχέση αυτή A είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής και Z είναι η ροπή αντίστασής της. Το βέλος κάμψης, w , εξαρτάται από αλλά δεν είναι ευθέως ανάλογο προς το επιβαλλόμενο φορτίο. Συμπεραίνεται λοιπόν ότι η μέγιστη τάση δεν μπορεί να είναι ανάλογη προς το επιβαλλόμενο φορτίο.

3.3.6 Θεωρήματα αντιστροφής

Τα θεωρήματα αντιστροφής των Maxwell και Betti-Rayleigh αποτελούν τη βάση ορισμένων πράξεων μητρωικής άλγεβρας που βρίσκουν εφαρμογή σε αριθμητικές μεθόδους και παρατίθενται αμέσως παρακάτω. Αφορούν τη συμπεριφορά γραμμικών κατασκευών όταν ισχύει η αρχή της επαλληλίας. Για να επιτευχθεί αυτό θα πρέπει α) το αποτέλεσμα των εξωτερικών φορτίσεων να είναι μικρές μετατοπίσεις και β) το υλικό να επιδεικνύει γραμμική (ελαστική) συμπεριφορά. Τα δύο θεωρήματα αποδεικνύονται με αναφορά στην έννοια της ενέργειας.

Το θεώρημα αντιστροφής των μετατοπίσεων (Maxwell)



Σχήμα 20 Πρόβολος με συγκεντρωμένα εγκάρσια φορτία σε δύο σημεία του

Εξετάζουμε αρχικά το αποτέλεσμα της διαδοχικής επιβολής εξωτερικού φορτίου σε δύο διαφορετικά σημεία μιας κατασκευής. Έστω λοιπόν ο πρόβολος που δείχνεται στο Σχήμα 20. Ο φορέας αυτός παραλαμβάνει αρχικά σημειακό φορτίο στο ελεύθερο άκρο της δοκού. Η μετατόπιση του σημείου C ισούται τότε με:

$$v_{cb} = \frac{5FL^3}{48EI} \quad (48)$$

όπου ο πρώτος δείκτης υποδηλώνει το σημείο στο οποίο δίνεται η μετατόπιση ενώ ο δεύτερος δείκτης το σημείο επιβολής του φορτίου. Έστω τώρα ότι η φόρτιση

ασκείται στο σημείο C , σε απόσταση $L/2$ από τα άκρα της διατομής. Επιζητούμε τώρα το βέλος κάμψης στο ελεύθερο άκρο της δοκού, v_{bc} . Ισχύει:

$$v_{bc} = \frac{5FL^3}{48EI} \quad (49)$$

Παρατηρούμε ότι η μετατόπιση στο C που οφείλεται σε φορτίο F στο B είναι ίση με τη μετατόπιση στο B που οφείλεται σε φορτίο F στο C .

Για να δοθεί μια γενική διατύπωση του παραπάνω αποτελέσματος εξετάζουμε μια κατασκευή γενικής μορφής, π.χ. μια δοκό. Στη δοκό αυτή ασκούνται δύο διαφορετικές φορτίσεις. Στην πρώτη από αυτές ασκείται δύναμη F σε τυχαίο σημείο A . Στη δεύτερη, ασκείται η ίδια δύναμη σε διαφορετικό, τυχαίο σημείο, B . Οι μετατοπίσεις στα σημεία A και B για την πρώτη περίπτωση συμβολίζονται τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω ως v_{aa} και v_{ba} . Αντίστοιχα οι μετατοπίσεις κατά τη δεύτερη φόρτιση συμβολίζονται με v_{ab} και v_{bb} . Έτσι λοιπόν, οι μετατοπίσεις v_{aa} και v_{ab} αντιστοιχούν στο φορτίο F όταν αυτό ασκείται στο σημείο A (Σχήμα 20α). Για να γίνει αυτό πιο σαφές, υπενθυμίζουμε ότι η μετατόπιση που αντιστοιχεί σε μια δύναμη είναι αυτή που μετριέται κατά τη διεύθυνση της δύναμης και έχει φορά ίδια με τη δύναμη. Μια μετατόπιση όμως δεν απαιτείται να οφείλεται στη δύναμη στην οποία αντιστοιχεί. Η μετατόπιση v_{aa} προκύπτει από τη δύναμη F όταν αυτή ασκείται στο σημείο A και η μετατόπιση v_{ab} είναι το αποτέλεσμα της δύναμης F στη δεύτερη περίπτωση φόρτισης. Ωστόσο, και οι δύο μετατοπίσεις αντιστοιχούν στο φορτίο F της πρώτης περίπτωσης. Για τον ίδιο λόγο, οι μετατοπίσεις v_{ba} και v_{bb} αντιστοιχούν στο φορτίο F της δεύτερης περίπτωσης, παρ' όλο που η μετατόπιση v_{ba} οφείλεται στο πρώτο φορτίο και η μετατόπιση v_{bb} οφείλεται στο δεύτερο φορτίο.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που και τα δύο φορτία ασκούνται ταυτοχρόνως. Η τελική κατάσταση της δοκού λαμβάνεται με επαλληλία. Η μετατόπιση που οφείλεται στη δύναμη F που ασκείται στο A είναι $v_{aa}+v_{ab}$ και η μετατόπιση που οφείλεται στη δύναμη F που ασκείται στο B είναι $v_{ba}+v_{bb}$. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το έργο που παράγεται κατά την ταυτόχρονη επιβολή των δυνάμεων F στα σημεία A και B . Το έργο ισούται με τη συνολική εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης του φορέα¹⁷ που είναι:

$$U = \frac{1}{2}F(v_{aa} + v_{ab}) + \frac{1}{2}F(v_{ba} + v_{bb}) \quad (50)$$

Το θεώρημα αντιστροφής έργου (Betti-Rayleigh)

¹⁷ σύμφωνα με το θεώρημα του Clapeyron, για γραμμικές ελαστικές κατασκευές, το έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με την εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης ($U = W = F\delta / 2$).

Θεωρούμε μία γραμμική ελαστική κατασκευή η οποία φέρει δύο ανεξάρτητα συστήματα εξωτερικών δυνάμεων, F_1 και F_2 . Οι μετατοπίσεις σε κάθε κόμβο της κατασκευής που οφείλονται στις F_1 είναι οι U_1 ενώ αυτές που οφείλονται στις F_2 είναι οι U_2 . Τότε, εάν μετά την επιβολή των F_1 επιβληθούν οι F_2 , το έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$W_{1,2} = \frac{1}{2} F_1^t U_1 + \frac{1}{2} F_2^t U_2 + F_1^t U_2 \quad (51)$$

ενώ εάν αντιστρεφόταν η σειρά επιβολής των εξωτερικών δυνάμεων θα είχαμε:

$$W_{2,1} = \frac{1}{2} F_2^t U_2 + \frac{1}{2} F_1^t U_1 + F_2^t U_1 \quad (52)$$

Και στις δύο περιπτώσεις το εσωτερικό παραγόμενο έργο είναι ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης, U . Το μέγεθός της είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις εφόσον η τελική κατάσταση είναι ανεξάρτητη της φοράς επιβολής των εξωτερικών δυνάμεων. Συνεπώς $U = W_{1,2} = W_{2,1}$, άρα,

$$F_1^t U_2 = F_2^t U_1 \quad (53)$$

Η παραπάνω σχέση συνιστά την αρχή Betti.

Έστω τώρα, U_{ij} η μετατόπιση στη διεύθυνση i στον κόμβο i λόγω μοναδιαίας δύναμης στον κόμβο j στη διεύθυνση j . Τότε, $F_i = iF_i$ είναι η φόρτιση στην διεύθυνση i στον κόμβο i και $F_j = jF_j$ είναι η δύναμη στη διεύθυνση j στον κόμβο j . Τότε F_i και F_j είναι κλιμακωτές ποσότητες. Εφαρμόζοντας την αρχή Betti έχουμε:

$$\begin{bmatrix} F_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ij} F_j \\ U_{ji} F_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & F_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ii} F_i \\ U_{ji} F_i \end{bmatrix}$$

άρα $F_i U_{ij} F_j = F_j U_{ji} F_i$ και εφόσον $F_i \neq 0, F_j \neq 0$,

$$U_{ij} = U_{ji} \quad (54)$$

Η σχέση αυτή καλείται *θεώρημα αντιστροφής ή αρχή των Betti-Maxwell*, η οποία διατυπώνεται και ως εξής:

Σε μία γραμμική ελαστική κατασκευή η γενικευμένη μετατόπιση στον i -οστό κόμβο στη διεύθυνση της δύναμης Q_i που προκύπτει από τη μοναδιαία γενικευμένη δύναμη Q_j έχει το ίδιο μέγεθος με τη μετατόπιση στον κόμβο j στη διεύθυνση Q_j που προκύπτει από τη μοναδιαία γενικευμένη δύναμη Q_i .

Προκύπτει λοιπόν ότι $C_{ij} = C_{ji}$ και $K_{ij} = K_{ji}$ τα μητρώα $\mathbf{C}$ και $\mathbf{K}$ είναι δηλαδή συμμετρικά.

Στην παραπάνω διατύπωση της αρχής Betti-Maxwell έγινε χρήση του όρου γενικευμένη δύναμη για να υποδηλωθεί ότι ισχύει για κατανεμημένες δυνάμεις, ροπές, διατμητικές δυνάμεις κ.ά. Ο όρος γενικευμένη μετατόπιση περιλαμβάνει και τυχόν περιστροφές των κόμβων.

Βιβλιογραφία

1. Gere J.T., Timoshenko S.P., *Mechanics of Materials*, Second Edition, CBS Distributors and Publishers, Delhi, India, 1984.
2. Coates R.C., Coutie M.G., Kong F.K. *Structural Analysis*. Nelson, London, 1972.
3. Chamberlain P. *Matrix Methods of Structural Analysis*, Department of Mechanical Engineering, University College London, 1976.