

Παράρτημα Β

Υπολογισμός των υδροστατικών δυνάμεων που ασκούνται στη γάστρα του πλοίου

1. Πρόγραμμα υπολογισμού υδροστατικών δυνάμεων

Για τον υπολογισμό των κομβικών δυνάμεων που οφείλονται στις υδροστατικές πιέσεις (π.χ. φόρτιση της γάστρας του σκάφους από τις πιέσεις του θαλασσινού νερού, φόρτιση σε τοιχώματα δεξαμενών υγρών φορτίων) αποφασίσθηκε η σύνταξη κώδικα που υπολογίζει τις δυνάμεις αυτές. Θα αναπτύξουμε τη μέθοδο υπολογισμού που προγραμματίστηκε:

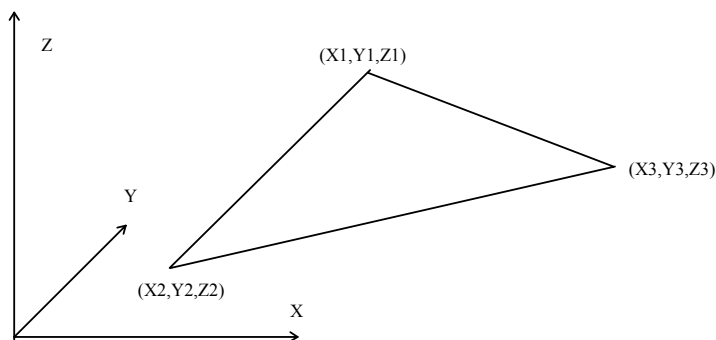
Έστω τριγωνικό στοιχείο με κορυφές 1, 2, 3 και συντεταγμένες κορυφών (X_1, Y_1, Z_1) , (X_2, Y_2, Z_2) και (X_3, Y_3, Z_3) (Σχήμα Β.1).

Έστω 12 και 13 τα διανύσματα μεταξύ των κορυφών 1-2 και 1-3 με αρχή την 1 και τέλος την 2 και 3 αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\underline{12}: (X_2 - X_1, Y_2 - Y_1, Z_2 - Z_1)$$

$$\underline{13}: (X_3 - X_1, Y_3 - Y_1, Z_3 - Z_1)$$

Τότε το εμβαδόν E του τριγώνου 123 δίνεται από τη σχέση:



Σχήμα Β.1 Τριγωνικό στοιχείο σε σύστημα αναφοράς ($Oxyz$)

$$E = |\underline{12} \times \underline{13}| / 2$$

δηλαδή από το μισό του μέτρου του εξωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων. Αναπτύσσοντας κατά τα γνωστά τη σχέση αυτή, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$E = (A^2 + B^2 + C^2)^{1/2} / 2$$

όπου:

$$A = Y_2 Z_3 - Y_2 Z_1 - Y_1 Z_3 - Y_3 Z_2 + Y_3 Z_1 + Y_1 Z_2$$

$$B = Z_2 X_3 - Z_2 X_1 - Z_1 X_3 - Z_3 X_2 + Z_3 X_1 + Z_1 X_2$$

$$C = X_2 Y_3 - X_2 Y_1 - X_1 Y_3 - X_3 Y_2 + X_3 Y_1 + X_1 Y_2$$

Έχουμε εκφράσει το εμβαδό του τριγωνικού στοιχείου ως συνάρτηση των συντεταγμένων των τριών κορυφών του. Ας φανταστούμε τώρα τη γάστρα του πλοίου βυθισμένη σε θαλασσινό νερό και ένα (μικρό) τριγωνικό τμήμα της επιφάνειάς της. Στο σημείο αυτό κάνουμε την παραδοχή ότι το στοιχείο είναι τόσο μικρό ώστε μπορούμε να αγνοήσουμε τη μεταβολή της υδροστατικής πίεσης στην επιφάνειά του. Έτσι θεωρούμε ότι το τριγωνικό στοιχείο δέχεται μια σταθερή κατανεμημένη φόρτιση ίση με την τιμή της υδροστατικής πίεσης στο κ.β. του.

Η φόρτιση αυτή δίνει μία συνισταμένη δύναμη με σημείο εφαρμογής το κ.β. του τριγώνου και διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν οι κορυφές του τριγώνου, αφού η υδροστατική δύναμη είναι κάθετη προς την επιφάνεια που ασκείται. Το μέτρο της δύναμης αυτής μπορεί να προκύψει πολλαπλασιάζοντας την επιφάνεια του τριγώνου E με την τιμή της υδροστατικής πίεσης στο κ.β. Η διεύθυνση προκύπτει από τα κατευθύνοντα συνημίτονα του επιπέδου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Το κ.β. του τριγώνου 123 δίνεται από τις σχέσεις:

$$X_G = (X_1 + X_2 + X_3) / 3$$

$$Y_G = (Y_1 + Y_2 + Y_3) / 3$$

$$Z_G = (Z_1 + Z_2 + Z_3) / 3$$

Το μέτρο της υδροστατικής πίεσης στο κ.β. του τριγώνου 123 είναι:

$$f_{hydr o} = \varepsilon Z_{h y d r o}$$

όπου:

$$\varepsilon = \text{ειδικό βάρος υγρού (σε N/m}^3\text{)}$$

$$Z_{h y d r o} = Z - Z_G$$

όπου Z είναι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στη θέση X_G (τα Z και Z_G μετρώνται ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς). Το μέτρο της υδροστατικής δύναμης που ασκείται στο κ.β. του τριγώνου 123 είναι:

$$F_{h y d r o} = f_{h y d r o} E$$

Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία 1, 2 και 3 του τριγωνικού στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$[(Y_2-Y_1)(Z_3-Z_1)-(Y_3-Y_1)(Z_2-Z_1)](X-X_1)+[(Z_2-Z_1)(X_3-X_1)-(X_2-X_1)(Z_3-Z_1)](Y-Y_1)+[(X_2-X_1)(Y_3-Y_1)-(Y_2-Y_1)(X_3-X_1)](Z-Z_1)=0$$

Αν φέρουμε την εξίσωση του επιπέδου στη μορφή:

$$aX+bY+cZ+d=0$$

παρατηρούμε ότι: $a=A$, $b=B$, $c=C$ (τα οποία έχουν είδη υπολογισθεί). Τα συνημίτονα κατεύθυνσης μιας ευθείας κάθετης στο επίπεδο αυτό είναι:

$$\begin{aligned} C_x &= A/(A^2+B^2+C^2)^{1/2} \\ C_y &= B/(A^2+B^2+C^2)^{1/2} \\ C_z &= C/(A^2+B^2+C^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες σχέσεις καθορίζουν και τη διεύθυνση της υδροστατικής δύναμης. Έχουμε λοιπόν υπολογίσει το διάνυσμα της υδροστατικής δύναμης στο κ.β. του τριγωνικού στοιχείου. Απαιτούνται όμως οι δυνάμεις στους κόμβους του στοιχείου. Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η κεντροβαρική υδροστατική δύναμη μπορεί να αναχθεί σε τρεις ίσες κομβικές δυνάμεις που έχουν διεύθυνση ίδια με την αρχική και μέτρο το 1/3 του μέτρου της.

Πράγματι έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με κ.β. K (Σχήμα 3.5.2). Έστω ότι στο K ασκείται δύναμη $\mathbf{F}$ τυχαίας διεύθυνσης. Προφανώς η ροπή της $\mathbf{F}$ ως προς K είναι $\mathbf{M}(\mathbf{F}, K)=\mathbf{0}$. Θεωρούμε και τις τρεις κομβικές δυνάμεις $\mathbf{F}_A, \mathbf{F}_B, \mathbf{F}_\Gamma$ τέτοιες ώστε:

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_\Gamma = \mathbf{F}/3$$

Για να δείξουμε ότι οι τρεις κομβικές δυνάμεις αποτελούν σύστημα στατικής ισοδυναμίας με αυτό της μίας κεντροβαρικής δύναμης, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$1) \quad \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \qquad \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_\Gamma = \mathbf{F}$$

$$\text{και} \quad \mathbf{F}/3 + \mathbf{F}/3 + \mathbf{F}/3 = \mathbf{F}$$

που ισχύει και

$$2) \quad \sum \mathbf{M}_i(\mathbf{F}_i, K) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{F}_A(AK) + \mathbf{F}_B(BK) + \mathbf{F}_\Gamma(\Gamma K) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}/3(AK+BK+\Gamma K) = \mathbf{0}$$

που ισχύει, εφόσον είναι γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση ότι:

$$AK+BK+\Gamma K=\mathbf{0}$$

για οποιοδήποτε τρίγωνο.

Από τα προηγούμενα έχουμε τελικά ότι:

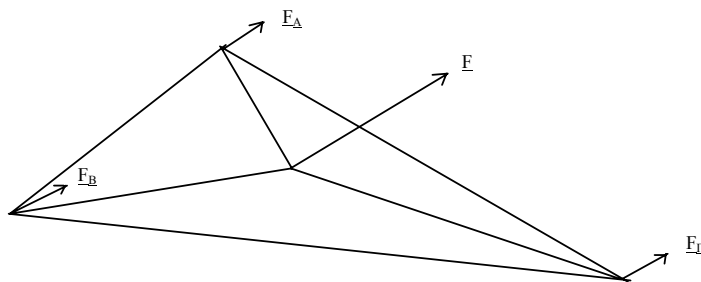
$$F_{AX} = F_{BX} = F_{GX} = 1/3 F_{hydr o} C_X$$

$$F_{AY} = F_{BY} = F_{GY} = 1/3 F_{hydr o} C_Y$$

$$F_{AZ} = F_{BZ} = F_{GZ} = 1/3 F_{hydr o} C_Z$$

Έχουμε δηλαδή υπολογίσει τις τρεις συνιστώσες της υδροστατικής δύναμης σε κάθε κόμβο του τριγωνικού στοιχείου σε συνάρτηση των συντεταγμένων των κορυφών του. Η γάστρα του πλοίου (και γενικά οποιοδήποτε πλέγμα) αποτελείται από τριγωνικά και τετράπλευρα στοιχεία. Στην πρώτη περίπτωση ο υπολογισμός είναι άμεσος. Στη δεύτερη θεωρούμε ότι το τετράπλευρο στοιχείο αποτελείται από δύο τριγωνικά στοιχεία και έτσι αναγόμεστε στην πρώτη περίπτωση. Αυτοί οι υπολογισμοί επαναλαμβάνονται σε κάθε στοιχείο του πλέγματος και οι δυνάμεις σε κάθε κόμβο προκύπτουν από την άθροιση των επιμέρους δυνάμεων των στοιχείων που συντρέχουν στον κόμβο αυτό. Πιο συγκεκριμένα αθροίζονται οι τρεις συνιστώσες των δυνάμεων που αντιστοιχούν στα στοιχεία που περιλαμβάνουν τον κοινό κόμβο. Οι συνιστώσες αυτές αναφέρονται ως προς το ολικό σύστημα συντεταγμένων του μοντέλου, αφού ως προς αυτό αναφέρονται και οι συντεταγμένες των κόμβων.

Ο υπολογισμός των υδροστατικών φορτίων που ασκούνται σε μια επιφάνεια με τον τρόπο που περιγράφηκε προϋποθέτει ότι είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος της επιφάνειας και ο τρόπος σύνδεσης μεταξύ των κόμβων για το σχηματισμό των στοιχείων της επιφάνειας. Και τα δύο αυτά στοιχεία μπορεί κανείς να τα διαβάσει με το κατάλληλο format από το *ASCII* αρχείο εισόδου που φτιάχνει ο αποκωδικοποιητής. Τέλος εννοείται ότι τα παραπάνω έχουν νόημα για γνωστή γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού.



Σχήμα Β.2

2. Υπολογισμός υδροστατικών φορτίων

Τέτοιες ρουτίνες συντάχθηκαν για τον υπολογισμό του Z_{hydro} (προηγούμενη παράγραφος). Αυτές καλούνται από το πρόγραμμα υδροστατικών δυνάμεων με δεδομένα τα X_G και Z_G για κάθε στοιχείο.

Καταρχήν, για τα υδροστατικά φορτία που δέχεται η γάστρα του πλοίου σε κατάσταση ήρεμου νερού κάνουμε τα εξής: Για κάθε κατάσταση φόρτωσης του σκάφους γνωρίζουμε τα βυθίσματα της ισάλου ισορροπίας. Παίρνοντας δύο βυθίσματα από αυτά, μπορούμε με γραμμική παρεμβολή (η ίσαλος είναι μια ευθεία γραμμή) να υπολογίσουμε το βύθισμα στην τυχαία θέση X_G του σκάφους, οπότε αφαιρώντας το Z_G βρίσκουμε το ύψος της στήλης υγρού που ζητάμε.

Ανάλογη είναι η διαδικασία και στην περίπτωση που έχουμε υγρά φορτία μέσα σε δεξαμενές. Από το βάρος των υγρών με τη βοήθεια του ειδικού βάρους υπολογίζουμε τον όγκο των υγρών σε κάθε δεξαμενή. Επίσης υπολογίζουμε την επιφάνεια πυθμένα της δεξαμενής και διαιρώντας τον όγκο του υγρού με αυτή βρίσκουμε το ύψος του υγρού στη δεξαμενή (αμελήσαμε μεταβολές που οφείλονται σε αλλαγή της στάθμης του υγρού λόγω μεταβολής της διαγωγής του σκάφους). Αφαιρώντας κάθε φορά το Z_G βρίσκουμε το ύψος της στήλης υγρού για κάθε στοιχείο της δεξαμενής. Ουσιαστικά εκείνο που αλλάζει από την προηγούμενη περίπτωση είναι η εξίσωση της ευθείας που περιγράφει κάθε φορά τη στάθμη του υγρού ή την ίσαλο πλευσης.

Κάπως πιο σύνθετη είναι η κατάσταση για τις ρουτίνες υπολογισμού των βυθισμάτων του πλοίου στην περίπτωση που αυτό βρίσκεται στο κοίλο ή στην κορυφή τροχοειδούς κύματος. Οι ρουτίνες είναι σχεδόν ίδιες με μία μικρή τροποποίηση στην εξίσωση του τροχοειδούς κύματος. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που το πλοίο βρίσκεται σε κοίλο κύματος κάνουμε τα εξής:

Για κάθε τιμή του X_G υπολογίζουμε την τιμή γωνίας Θ που αποτελεί λύση της παραμετρικής εξίσωσης τροχοειδούς καμπύλης:

$$X_G = R\Theta - r \sin \Theta$$

όπου $R = L/2\pi$, $r = h/2$ (L , h το μήκος και το ύψος του τροχοειδούς κύματος αντίστοιχα). Ο υπολογισμός γίνεται με διαδοχικές δοκιμές, δηλαδή δίνουμε τιμές στη μεταβλητή Θ μέχρι το δεύτερο μέλος της εξίσωσης να συγκλίνει στο πρώτο.

Αφού υπολογισθεί το Θ βρίσκουμε την ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας με τη δεύτερη παραμετρική εξίσωση τροχοειδούς καμπύλης:

$$Y = r \cos \Theta$$

Όταν το πλοίο για μια συγκεκριμένη κατάσταση φόρτωσης βρεθεί από το ήρεμο νερό σε κοίλο κύματος, η ίσαλος ως προς την οποία αναφέρεται η τροχοειδής καμπύλη δεν είναι ίδια με την ίσαλο του ήρεμου νερού αλλά διαφέρει (εξακολουθεί όμως να είναι μια ευθεία γραμμή). Άρα το τελικό βύθισμα του πλοίου προκύπτει από την άθροιση:

$$Z = Z_I + Z_2 + Y$$

Το Z_1 είναι το βύθισμα σε ήρεμο νερό (είναι είδη γνωστή με τον τρόπο που περιγράφηκε στην αρχή της παραγράφου η ίσαλος ισορροπίας σε ήρεμο νερό) και είναι Z_2 μία διόρθωση που λαμβάνει υπόψη τη μεταβολή της ισάλου αναφοράς της τροχοειδούς καμπύλης ως προς την ίσαλο ήρεμου νερού.

Το Z_2 υπολογίζεται ως εξής: Υπολογίζεται το $Z'=Z_1+Y$ στις θέσεις δύο νομέων για τους οποίους είναι γνωστά τα βυθίσματα Z για κοίλο κύματος χρησιμοποιώντας πρόγραμμα H/Y . Υπολογίζονται σε συνέχεια και οι διαφορές $\Delta Z=Z-Z'$. Κάνοντας γραμμική παρεμβολή με γνωστές τις ΔZ αποκτάται το Z_2 σε κάθε θέση κατά μήκος του σκάφους. Ανάλογη διαδικασία ακολουθείται και στην περίπτωση που το πλοίο ισορροπεί σε κορυφή κύματος.

Βιβλιογραφία

1. Μπικάκη Γ. *Η μελέτη της μεταλλικής κατασκευής επιβατηγού-οχηματαγωγού με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων*. Διπλωματική Εργασία, Τομέας Θαλασσίων Κατασκευών, Τμήμα Ναυπηγών Μηχανολόγων, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα 1996.