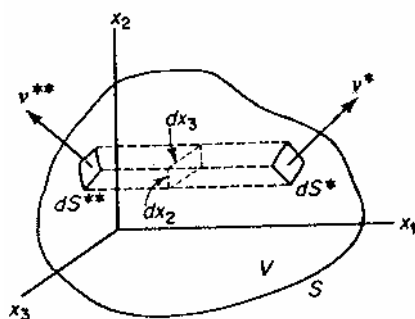


Παράρτημα Α

Το θεώρημα απόκλισης του Gauss¹

Θεωρούμε τον κυρτό χώρο V που φράσσεται από την επιφάνεια S , η οποία αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων, οι εξωτερικές κάθετοι των οποίων συνιστούν συνεχές διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα Π.01

Έστω τότε συνάρτηση $A(x_1, x_2, x_3)$, η οποία ορίζεται στο χώρο $V+S$ και η οποία είναι συνεχής σε αυτό. Τότε, ολοκληρώνοντας, λαμβάνεται η παρακάτω σχέση:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S (A^* - A^{**}) dx_2 dx_3 \quad (1)$$

όπου A^* και A^{**} είναι οι τιμές του A στην επιφάνεια S στο δεξιό και στο αριστερό άκρο γραμμής παράλληλης προς τον άξονα x_1 . Οι παράγοντες $\pm dx_2 dx_3$ στο επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι κατ' ουσία οι προβολές του πεδίου $x_2 x_3$ στα άκρα ευθείας παράλληλης προς τον άξονα x_1 . Εάν n_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της εξωτερικής κάθετου στην επιφάνεια S , τότε $dx_2 dx_3 = -n_1^* dS^*$ στο δεξιό άκρο και $dx_2 dx_3 = -n_1^{**} dS^{**}$ στο αριστερό άκρο. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα (1) γράφεται τότε:

$$\int_S A n_i^* dS^* + A^{**} n_i^{**} dS^{**} = \int_S A n_i dS$$

¹ θεώρημα απόκλισης = divergence theorem

Η σχέση (1) γράφεται τότε:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dV = \int_S A n_1 dS$$

όπου dS και dV είναι στοιχεία επιφάνειας και όγκου αντίστοιχα. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για το ολοκλήρωμα όγκου της ποσότητας $\partial A/\partial x_2$, ή $\partial A/\partial x_3$. Άρα,

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A n_i dS \quad (2)$$

Η σχέση αυτή καλείται *θεώρημα απόκλισης του Gauss* (σε τρεις διαστάσεις) και ισχύει για κάθε κυρτό χώρο που μπορεί να υποδιαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό κυρτών κανονικών περιοχών. Η γενίκευση του θεωρήματος για τανυστή A ισχύει και γράφεται ως εξής:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl\dots} dV = \int_S n_i A_{jkl\dots} dS \quad (3)$$

Βιβλιογραφία

1. Fung Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall Inc., New Jersey, U.S.A., 1965.