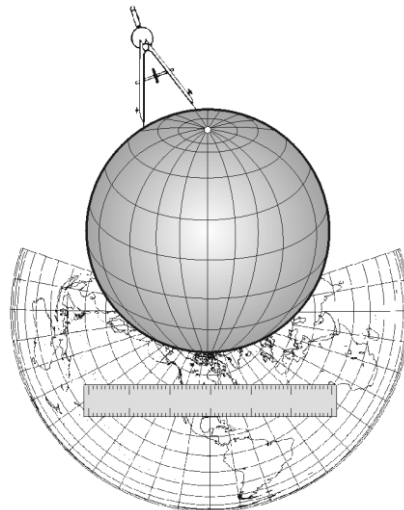




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ & ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

---

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ



ΒΥΡΩΝΑΣ ΝΑΚΟΣ

---

ΑΘΗΝΑ 2011



## Περιεχόμενα

<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	i
<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	vii
<b>ΜΕΡΟΣ Α΄ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ</b>	1
<b>Κεφάλαιο 1 - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ</b>	3
1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές	3
1.2 Γεωγραφικές συντεταγμένες	5
1.3 Παραμορφώσεις	7
1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής	8
1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης	10
1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις	13
1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης	13
1.6.2 Κύριες διευθύνσεις - κύριες κλίμακες	14
1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση	14
1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών	15
1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης	17
1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot	17
1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης - Δείκτρια Tissot	19
1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών	21
1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής	21
1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας	22
1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνίας διεύθυνσης - σύγκλιση των μεσημβρινών	23
1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου	24
1.8 Βιβλιογραφία	25
<b>Κεφάλαιο 2 - ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ</b>	27
2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων	27
2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών	27

<b>2.3 Γεωμετρική μορφή εικόνων μεσημβρινών και παραλλήλων</b>	30
<b>2.4 Βιβλιογραφία</b>	32
<b>Κεφάλαιο 3 - ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ</b>	33
<b>3.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές απεικονίσεις</b>	33
<b>3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις</b>	33
3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή	33
3.2.2 Μερκατορική προβολή	36
3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή	40
<b>3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις</b>	42
3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή	43
3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert	45
3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers	48
3.3.4 Ισοδύναμη προβολή Bonne	50
3.3.5 Ισοδύναμη προβολή Sanson	51
3.3.6 Ισοδύναμη προβολή Mollweide	52
3.3.7 Διακοπτόμενες προβολές	53
<b>3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις</b>	54
3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel	54
3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή	56
3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert	58
3.4.4 Πολική γνωμονική προβολή	60
3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή	62
3.4.6 Συγκριτική παρουσίαση ορθών επίπεδων προβολών	64
<b>3.5 Εγκάρσιες απεικονίσεις</b>	64
3.5.1 Εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini	66
3.5.2 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή	67
<b>3.6 Πλάγιες απεικονίσεις</b>	72
3.6.1 Πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή - Hatt	73
<b>3.7 Βιβλιογραφία</b>	77
<b>Κεφάλαιο 4 – ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</b>	79
<b>4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα</b>	79
<b>4.2 Πολυκεντρικό σύστημα</b>	79
<b>4.3 Σύστημα Hatt</b>	84
<b>4.4 Σύστημα Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής των 6°</b>	86
<b>4.5 Σύστημα Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των 3°</b>	89
<b>4.6 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς του 1987 (ΕΓΣΑ'87)</b>	90



<b>4.7 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών χαρτογραφικών συστημάτων</b>	91
<b>4.8 Βιβλιογραφία</b>	96
<b>ΜΕΡΟΣ Β΄ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ</b>	97
<b>Κεφάλαιο 5 - ΧΑΡΤΟΜΕΤΡΙΑ</b>	99
<b>5.1 Η έννοια της χαρτομετρίας</b>	99
5.1.1 Εφαρμογές της χαρτομετρίας στις επιστήμες	100
5.1.2 Η χαρτομετρία στην πλοήγηση	102
5.1.3 Η χαρτομετρία στη διοίκηση	102
<b>5.2 Η έννοια του μέσου</b>	103
5.2.1 Ο χάρτης ως μέσο	103
5.2.2 Μετρητικοί και μη μετρητικοί χάρτες	105
<b>5.3 Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης</b>	106
5.3.1 Το σχήμα της γης για τις ανάγκες της χαρτομετρίας	107
5.3.2 Η γεωμετρία του χάρτη	107
<b>5.4 Μέθοδοι μέτρησης χαρτομετρίας</b>	108
<b>5.5 Μέτρηση μηκών</b>	109
5.5.1 Μέτρηση ευθυγράμμου τμήματος	109
5.5.2 Μέτρηση με υποδιαίρεσεις ίσου βήματος	110
5.5.3 Μέτρηση με υποδιαίρεσεις άνισου βήματος	112
5.5.4 Μέτρηση αποστάσεων με ψηφιοποιητή	112
5.5.5 Κλασικές αναλογικές μέθοδοι	113
<b>5.6 Μέθοδοι μέτρησης εμβαδού επιφανειών</b>	113
5.6.1 Μετρήσεις εμβαδού απλών γεωμετρικών σχημάτων	114
5.6.2 Υπολογισμός εμβαδού με συντεταγμένες	115
5.6.3 Μέτρηση επιφανειών συγκρίνοντας με σταθερά σχήματα	116
5.6.4 Μέθοδος τετραγωνικού καννάβου	116
5.6.5 Μέθοδοι τετραγωνικού καννάβου με κουκίδες	118
5.6.6 Άμεση μέθοδος μέτρησης εμβαδού με κουκίδες	119
5.6.7 Έμμεση μέθοδος μέτρησης εμβαδού με κουκίδες	120
5.6.8 Μέθοδος των λωρίδων	120
5.6.9 Μέτρηση επιφανειών με εμβαδόμετρο	121
<b>5.7 Υπολογισμοί όγκων</b>	121
<b>5.8 Σχέση μεταξύ μετρήσεων και κλίμακας</b>	123
5.7.1 Σχέση μεταξύ κλίμακας και αναπτύγματος ακανόνιστων γραμμών	125
5.7.2 Η ε-κυκλική περιοχή και αναπτύγματα γραμμών	126
5.7.3 Αναπτύγματα ακανόνιστων γραμμών και κλασματική γεωμετρία	127

<b>5.9 Στατιστικά δείγματα και χαρτομετρία</b>	129
5.9.1 Οι ιδιότητες των στατιστικών δειγμάτων	131
5.9.2 Ένα πείραμα δειγματοληψίας μετρήσεων	132
5.9.3 Το μέγεθος ενός στατιστικού δείγματος	136
<b>5.10 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων</b>	138
<b>5.11 Βιβλιογραφία</b>	139
<b>Κεφάλαιο 6 - ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ</b>	141
<b>6.1 Εισαγωγή</b>	141
<b>6.2 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής</b>	141
<b>6.3 Διαγράμματα και συνέχεια</b>	143
<b>6.4 Παράγωγοι και ομαλότητα</b>	146
<b>6.5 Πολυωνυμικές συναρτήσεις</b>	146
<b>6.6 Προσαρμογή καμπύλων με πολυώνυμα</b>	147
6.6.1 Πολυωνυμική παρεμβολή	147
6.6.2 Υπολογισμός πολυωνυμικών τελεστών παρεμβολής	150
6.6.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	151
6.6.4 Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων	153
<b>6.7 Εξομάλυνση ή προσδιορισμός επιφάνειας τάσης</b>	154
<b>6.8 Βιβλιογραφία</b>	155
<b>Κεφάλαιο 7 - ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΦΩΤΟΣΚΙΑΣΗΣ ΑΝΑΓΛΥΦΟΥ</b>	157
<b>7.1 Εισαγωγή</b>	157
<b>7.2 Βασικές αρχές απόδοσης της φωτοσκίασης του ανάγλυφου</b>	160
<b>7.3 Αλγόριθμοι αναλυτικού προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου</b>	163
7.3.1 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του <i>Peucker</i>	163
7.3.2 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με προσαρμογή της φωτεινής πηγής του <i>Brassel</i>	164
7.3.3 Μαθηματικό μοντέλο φωτοσκίασης	165
7.3.4 Αλγόριθμος κατοπτρικής αντανάκλασης	166
7.3.5 Αλγόριθμος κεκλιμένων καμπυλών του <i>Tanaka</i>	166
7.3.6 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του <i>Wiechel</i>	168
7.3.7 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του <i>Marsik</i>	168
<b>7.4 Διερεύνηση και σύγκριση αλγορίθμων</b>	169
<b>7.5 Η φωτοσκίαση του ανάγλυφου σε χαρακτηριστικές χαρτογραφικές εφαρμογές</b>	174

<b>7.6 Συμπεράσματα</b>	176
<b>7.7 Βιβλιογραφία</b>	177
<b>Κεφάλαιο 8 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ</b>	179
<b>8.1 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί</b>	179
8.1.1 Μετασχηματισμός μετάθεσης	180
8.1.2 Μετασχηματισμός στροφής	181
8.1.3 Μετασχηματισμός κλίμακας	182
8.1.4 Μετασχηματισμός ομοιότητας	183
8.1.5 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός	184
8.1.6 Οδηγίες εφαρμογής γεωμετρικών μετασχηματισμών	185
<b>8.2 Τομή ευθυγράμμων τμημάτων</b>	186
<b>8.3 Χωρικές ιδιότητες διακριτών σημείων</b>	190
8.3.1 Βαρύκεντρο	190
8.3.2 Τυπική απόσταση	191
8.3.3 Ανίχνευση σημείων εντός/εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου	191
8.3.4 Διάγραμμα Voronoi	192
<b>8.4 Τοπολογικές απεικονίσεις</b>	194
8.4.1 Αζιμουθιακή ισόχρονη απεικόνιση	195
8.4.2 Εστιακές απεικονίσεις	196
8.4.3 Πολυ-εστιακές απεικονίσεις	200
<b>8.5 Βιβλιογραφία</b>	201
<b>Κεφάλαιο 9 - ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ</b>	203
<b>9.1 Εισαγωγή</b>	203
<b>9.2 Βασικά στοιχεία της γενίκευσης</b>	203
9.2.1 Το πρόβλημα αλλαγής της κλίμακας	203
9.2.2 Ορισμοί της γενίκευσης	205
9.2.3 Κίνητρα για γενίκευση	207
<b>9.3 Οι διαφορετικές όψεις της γενίκευσης</b>	208
9.3.1 Γενίκευση μοντέλου δεδομένων	208
9.3.2 Χαρτογραφική γενίκευση	209
<b>9.4 Γεωμετρικοί τελεστές χαρτογραφικής γενίκευσης</b>	210
9.4.1 Απλοποίηση	210
9.4.2 Εξομάλυνση	211
9.4.3 Συγχώνευση σημειακών συμβόλων	212
9.4.4 Συγχώνευση γραμμικών συμβόλων	212
9.4.5 Συγχώνευση επιφανειακών συμβόλων	213
9.4.6 Μετάπτωση	214

9.4.7 Εκλέπτυνση	214
9.4.8 Μεγέθυνση	215
9.4.9 Ενίσχυση	216
9.4.10 Μετάθεση	217
<b>9.5 Βασικοί αλγόριθμοι γενίκευσης</b>	<b>218</b>
9.5.1 Επιλογή/απαλοιφή γραφικών αντικειμένων	218
9.5.2 Απλοποίηση γραμμών	220
9.5.3 Αλγόριθμοι ανεξαρτήτων σημείων	222
9.5.4 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας	223
9.5.5 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις	223
9.5.6 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας χωρίς δεσμεύσεις	224
9.5.7 Καθολικοί αλγόριθμοι	225
<b>9.6 Το πρόβλημα της επικάλυψης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση</b>	<b>227</b>
<b>9.7 Βιβλιογραφία</b>	<b>229</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)</b>	<b>231</b>
<b>Π.1 Εισαγωγή</b>	<b>231</b>
<b>Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού</b>	<b>231</b>
Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας	232
Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας	232
Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας	232
<b>Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού</b>	<b>233</b>
<b>Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας</b>	<b>233</b>
<b>Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας</b>	<b>233</b>
<b>Π.6 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων</b>	<b>233</b>
<b>Π.7 Βιβλιογραφία</b>	<b>234</b>

## Πρόλογος

Τα τελευταία 40 χρόνια συντελέστηκαν ραγδαίες εξελίξεις στην περιοχή της χαρτογραφίας, με την ανάπτυξη της αναλυτικής χαρτογραφίας, της χαρτογραφικής επικοινωνίας και της ψηφιακής χαρτογραφίας. Η αναλυτική χαρτογραφία, σήμερα, έχει θεμελιώσει ένα συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο, το οποίο τροφοδοτεί με αποτελεσματικές λύσεις πολλά εφαρμοσμένα χαρτογραφικά προβλήματα. Παράλληλα, το θεωρητικό πλαίσιο της αναλυτικής χαρτογραφίας αποτελεί τον πυρήνα των αρχών που διέπουν την τεχνολογία των συστημάτων διαχείρισης και μετασχηματισμού των χωρικών δεδομένων. Η εξέλιξη αυτή θεωρείται αρκετά σημαντική, γιατί υπήρξε και ίσως υπάρχει έως σήμερα μια τάση αναγνώρισης των επιτευγμάτων της τεχνολογίας και αγνόησης της ουσιαστικής προόδου της αναλυτικής θεωρίας, που όμως είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση μακροχρόνιων επιστημονικών επιτευγμάτων.

Η αναλυτική χαρτογραφία έχει τις ρίζες της στην επιστημονική μελέτη και έρευνα από πολύ παλιά. Στο παρελθόν ήταν πιο συχνή η χρήση του όρου μαθηματική χαρτογραφία που, κυρίως, εστίαζε στη μελέτη των χαρτογραφικών προβολών. Η μαθηματική χαρτογραφία, απασχόλησε τους ερευνητές για πολλούς αιώνες, σχεδόν από τη δημιουργία της επιστήμης και τέχνης της χαρτογραφίας, έως σήμερα. Στην εξελικτική τους πορεία οι αναλυτικές μέθοδοι διαχείρισης και μετασχηματισμού των χωρικών δεδομένων αποτέλεσαν αντικείμενα έρευνας στην επιστήμη της γεωγραφίας καθώς και στις άλλες γεωεπιστήμες, εδώ και πολλές δεκαετίες. Η ιδέα του συνδυασμού μαθηματικών και αναλυτικών μεθόδων για την επίλυση χαρτογραφικών προβλημάτων ανήκει στον Waldo R. Tobler, καθηγητή του πανεπιστημίου Michigan τη δεκαετία του 1960 (Εικόνα 0.1). Ο Tobler ανέπτυξε τον κλάδο αυτό ερευνητικά και εκπαιδευτικά και για το λόγο αυτό θεωρείται, από τους χαρτογράφους, ως «πατέρας» της αναλυτικής χαρτογραφίας. Η δουλειά του συνεχίστηκε από πολλούς χαρτογράφους και σήμερα υπάρχει ένα ευρύ φάσμα χαρτογραφικών θεμάτων τα οποία αποτελούν δυναμικά αντικείμενα μελέτης και έρευνας και εντάσσονται στον τομέα της αναλυτικής χαρτογραφίας. Σύμφωνα με έναν πρόσφατο ορισμό, η αναλυτική χαρτογραφία περιβάλλει τις μαθηματικές έννοιες και μεθόδους που υποστηρίζουν τη χαρτογραφία

και εξετάζει τις εφαρμογές τους στην παραγωγή χαρτών και στην επίλυση γεωγραφικών προβλημάτων. Πιο αναλυτικά, στο πλαίσιο μελέτης και έρευνας της αναλυτικής χαρτογραφίας θεωρείται ότι ανήκουν οι επιστημονικές περιοχές των χαρτογραφικών προβολών, των παρεμβολών, της γενίκευσης, της δημιουργίας ψηφιακών μοντέλων υψομέτρων, της αυτόματης τοποθέτησης ονοματολογίας στους χάρτες, της επεξεργασίας χωρικών δεδομένων κ.ά.



**Εικόνα 0.1:** Ο καθηγητής του πανεπιστημίου του Michigan Waldo Tobler.

Η έκδοση αυτή αποτελεί βασικό εκπαιδευτικό βοήθημα του υποχρεωτικού μαθήματος Χαρτογραφία II του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών.

Το πρώτο μέρος εστιάζεται στη μελέτη των χαρτογραφικών απεικονίσεων από την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή μιας σφαίρας στο επίπεδο. Αρχικά, θεμελιώνεται το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων με το οποίο εντοπίζεται η θέση ενός σημείου επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μελέτη των παραμορφώσεων μηκών, γωνιών ή εμβαδού στοιχειωδών καθώς και πεπερασμένων μεγεθών κατά την απεικόνισή τους στο επίπεδο. Στο επόμενο κεφάλαιο τεκμηριώνονται τα σημαντικότερα ορθά συστήματα κυλινδρικών, κωνικών και επίπεδων απεικονίσεων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των βασικότερων εγκάρσιων και πλάγιων προβολικών συστημάτων. Στο τελευταίο κεφάλαιο του πρώτου μέρους περιγράφονται τα προβολικά συστήματα που εφαρμόστηκαν στον ελληνικό χώρο από τη δημιουργία του ελληνικού εθνικού κράτους μέχρι σήμερα καθώς και οι υφιστάμενοι μέθοδοι μετατροπής συντεταγμένων μεταξύ διαφορετικών προβολικών συστημάτων. Στο παρελθόν το πεδίο αυτό της χαρτογραφίας διδάσκονταν μέσα από ένα μάθημα επιλογής, το μάθημα της Μαθηματικής Χαρτογραφίας.

Στο δεύτερο μέρος, εξετάζονται οι χαρτογραφικοί μετασχηματισμοί. Στην αρχή, αναλύονται οι μέθοδοι με τις οποίες αντλούνται ποσοτικές πληροφορίες από τους χάρτες, μια διεργασία που στη χαρτογραφία ονομάζεται χαρτομετρία. Αρχικά, εξετάζονται οι τρόποι μέτρησης μηκών, εμβαδού και προσδιορισμού όγκων από χάρτες. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα σφάλματα που συνοδεύουν τις παραπάνω μετρήσεις και διερευνάται η σχέση μεταξύ των μετρήσεων και της κλίμακας του χάρτη. Τέλος, αναλύονται οι συνιστώσες της διαδικασίας της χωρικής δειγματοληψίας. Στην επόμενη ενότητα, εξετάζονται οι βασικές αρχές της μαθηματικής διαδικασίας μονοδιάστατης παρεμβολής για την ανάγκη της προσαρμογής καμπύλων γραμμών στη χαρτογραφία. Ακολουθεί μια ολοκληρωμένη παρουσίαση των υφιστάμενων χαρτογραφικών μεθόδων αναλυτικού προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου. Περιγράφονται οι κυριότεροι αλγόριθμοι υπολογισμού της φωτοσκίασης, όταν είναι διαθέσιμη η καταγραφή του ανάγλυφου με τη μορφή ενός ψηφιακού μοντέλου υψομέτρων. Στη συνέχεια, γίνεται αναφορά στα στοιχεία εκείνα της γεωμετρίας που είναι απαραίτητα για την εφαρμογή των χαρτογραφικών μετασχηματισμών. Στην ενότητα αυτή εξετάζονται οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί δίνοντας έμφαση στο μετασχηματισμό ομοιότητας και τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό που χρησιμοποιούνται σε πολλές χαρτογραφικές εφαρμογές. Αναλύονται οι βασικότεροι αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος της αλληλοτομίας γραφικών αντικειμένων στο επίπεδο. Τέλος, παρουσιάζονται ειδικές κατηγορίες προβολών που βασίζονται σε γεωμετρικές αρχές και χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές απεικόνισης τοπολογικά μετασχηματισμένου γεωγραφικού χώρου. Στην τελευταία ενότητα, περιγράφονται οι βασικότεροι τελεστές και αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται στη χαρτογραφία για τη γενίκευση των χαρτογραφικών συμβόλων. Η ενότητα ολοκληρώνεται με αναφορά στις σύγχρονες μεθόδους αντιμετώπισης του προβλήματος της άρσης πιθανών γραφικών συμπτώσεων των συμβόλων λόγω της μετάθεσης που υφίστανται κατά τη διαδικασία της γενίκευσης, οι οποίες προκαλούν οπτική σύγχυση.

Η μελέτη των χαρτογραφικών απεικονίσεων όπως παρατίθεται στην έκδοση αυτή κράτησε ως οδηγό και βασικό βοήθημα τις σημειώσεις του μαθήματος της Μαθηματικής Χαρτογραφίας που συνέθεσε ο ομότιμος καθηγητής της Σχολής Γεώργιος Βέης. Επιπλέον, η έκδοση βασίζεται σε μια μακροχρόνια συνεργασία του συγγραφέα με την καθηγήτρια της Σχολής Βασιλικής Φιλιππακοπούλου. Ειδικότερα, τα κεφάλαια της χαρτομετρίας και της μαθηματικής διαδικασίας της παρεμβολής διαμορφώθηκαν με δική της συμβολή. Πέρα όμως από αυτό, η συνεργασία μαζί της καθόρισε τη συνολική διαμόρφωση της έκδοσης και ως προς το σχεδιασμό του περιεχομένου της ύλης αλλά και ως προς τον τρόπο απόδοσής του. Το κεφάλαιο της απεικόνισης της φωτοσκίασης του ανάγλυφου βασίζεται σε ερευνητική συνεργασία με τον υποψήφιο διδάκτορα της Σχολής Νικόλαο Τζελέπη. Τέλος, σημαντική ήταν η συμβολή της διδάκτορος της Σχολής Ευανθίας Μιχαηλίδου στον εντοπισμό των εκφραστικών ατελειών ή παροραμάτων.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθεται η σχετική με αυτό βιβλιογραφία, στην οποία μπορεί να ανατρέξει κάθε ενδιαφερόμενος.

Την ευθύνη της ύπαρξης πιθανών παροραμάτων φέρει στο ακέραιο ο συγγραφέας. Η υπόδειξή τους από τους αναγνώστες της έκδοσης για τον εντοπισμό και τη διόρθωσή τους είναι ευπρόσδεκτη. Επίσης, ευπρόσδεκτες είναι όσες άλλες παρατηρήσεις αφορούν τη βελτίωση της έκδοσης.

Βύρωνας Νάκος  
Καθηγητής, Ε.Μ.Π.  
Αθήνα, Απρίλιος 2011



ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ  
ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ



## Κεφάλαιο 1

### 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

#### 1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές

Το αντικείμενο της μελέτης των χαρτογραφικών προβολών ονομάζεται παραδοσιακά μαθηματική χαρτογραφία και με τη βοήθειά του γίνεται η μελέτη της απεικόνισης της επιφάνειας της γης πάνω σε ένα επίπεδο, το επίπεδο του χάρτη. Η μελέτη αυτή, της απεικόνισης της γήινης επιφάνειας στο επίπεδο, έχει θεωρητικό αλλά και πρακτικό χαρακτήρα. Θεωρητικό χαρακτήρα, γιατί ερευνώνται και τεκμηριώνονται όλοι οι δυνατοί τρόποι της απεικόνισης, δηλαδή, οι προβολές (ή απεικονίσεις) και οι ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Πρακτικό χαρακτήρα γιατί, με τη βοήθεια του περιεχομένου των χαρτογραφικών προβολών κατασκευάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο του χάρτη, που είναι απαραίτητο για τη σύνθεση οποιουδήποτε χάρτη.

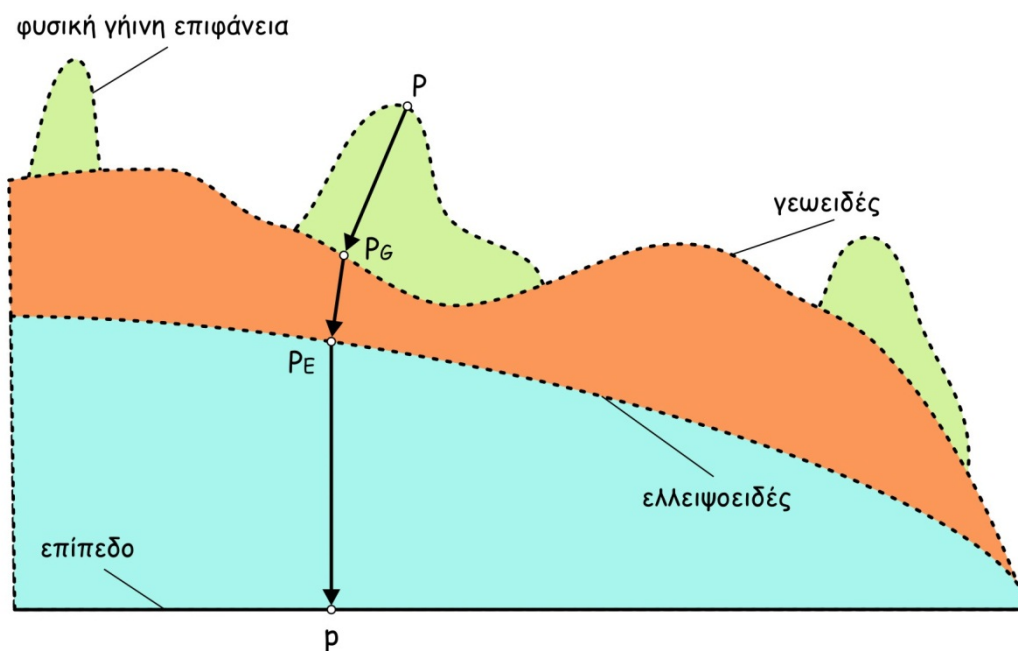
Η έκφραση, όμως, επιφάνεια της γης από μόνη της δεν έχει μαθηματική σημασία αλλά περισσότερο φυσική σημασία. Οι επιστήμονες από πολύ παλιά ασχολήθηκαν με το να προσεγγίσουν το σχήμα και το μέγεθός της, αξιοποιώντας τις γνώσεις που αναπτύχθηκαν κυρίως από τη γεωμετρία<sup>1</sup>. Η προσέγγιση αυτή πολλές φορές στο παρελθόν σχηματοποιήθηκε με βάση φιλοσοφικές θεωρήσεις όσο αφορά το σχήμα και το μέγεθος της Γης. Αφήνοντας την ανάπτυξη της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για να προσεγγίσει την επιφάνεια της Γης στην ενότητα της ιστορίας της χαρτογραφίας, ας δούμε πώς το ζήτημα αυτό αντιμετωπίζεται σήμερα.

Στις γεωεπιστήμες η μορφή της γήινης επιφάνειας προσομοιώνεται από μια επιφάνεια, που ονομάζεται γεωειδές. Το γεωειδές (Εικόνα 1.1) με έναν απλό τρόπο

---

<sup>1</sup> Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της μέτρησης της ακτίνας της γήινης σφαίρας από τον Ερατοσθένη (276-195 π.Χ.) μετρώντας ένα τόξο μεσημβρινού, στην Αίγυπτο, καθώς και την αντίστοιχη γεωκεντρική γωνία με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια, λαμβάνοντας υπόψη τα τεχνολογικά δεδομένα της εποχής.

μπορεί να οριστεί ως η επιφάνεια που διαμορφώνεται από τη μέση στάθμη της θάλασσας και την προέκτασή της στο χώρο που καταλαμβάνουν οι ήπειροι. Μια εικόνα του γεωειδούς μπορεί να έχει κάποιος, αν θεωρήσει ότι «κόβει» όλα τα βουνά των ηπείρων που εξέχουν από τη γήινη επιφάνεια και τα «ρίξει» στις θάλασσες με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματιστεί μια σχετικά ομαλή μορφή επιφάνειας. Το γεωειδές στην πραγματικότητα είναι μια πολύπλοκη επιφάνεια και δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί από απλές μαθηματικές σχέσεις ή να αναπαρασταθεί από ένα γεωμετρικό μοντέλο. Ο προσδιορισμός του γεωειδούς αποτελεί ένα από τα βασικότερα αντικείμενα για την επιστήμη της γεωδαισίας.

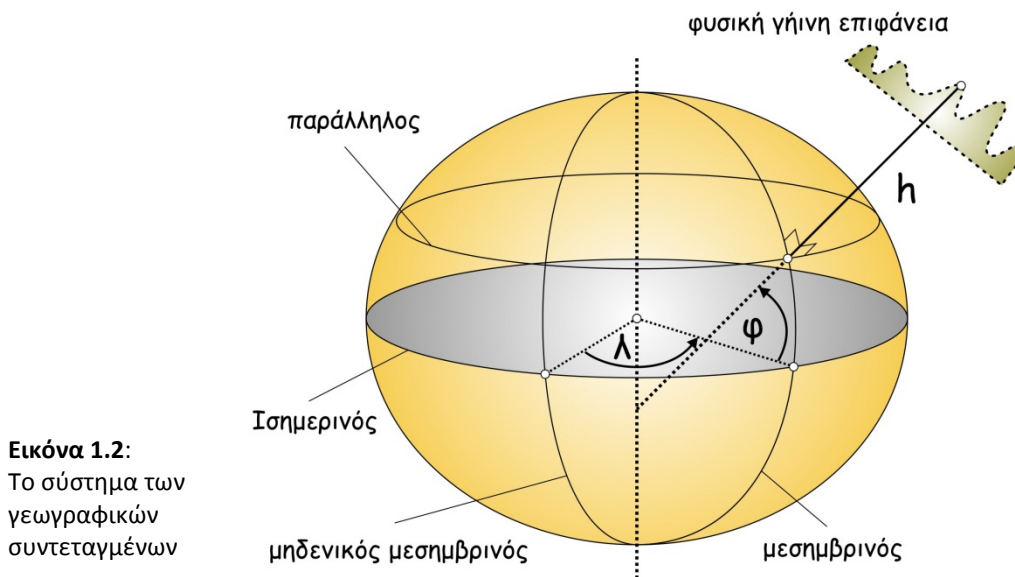


**Εικόνα 1.1:** Φυσική γήινη επιφάνεια, γεωειδές, επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα) και επίπεδο απεικόνισης.

Αντί για το γεωειδές, μπορεί να θεωρήσουμε ότι η μορφή της επιφάνειας της Γης είναι μια ομαλότερη επιφάνεια, μια μαθηματική επιφάνεια που το προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Μια κατάλληλη επιφάνεια για το σκοπό αυτό είναι η επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Για να φανταστούμε, με ένα σχηματοποιημένο τρόπο, τη μορφή που έχει η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Εικόνα 1.1), μπορούμε να θεωρήσουμε μια σφαίρα από ένα ελαστικό μέσο (π.χ. μία μπάλα) την οποίαν πιέζουμε κατά τη διεύθυνση ενός άξονα (τον άξονα περιστροφής της Γης). Οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής της Γης - δηλαδή, με κατακόρυφα επίπεδα - είναι ελλείψεις, ενώ οι τομές με επίπεδα κάθετα ως προς τον άξονα περιστροφής της, είναι κύκλοι. Η γεωμετρική μελέτη του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη γιατί πρόκειται για μια επιφάνεια με μεταβαλλόμενη διπλή καμπυλότητα και

αντιμετωπίζεται από τον τομέα των μαθηματικών της διαφορικής γεωμετρίας και της θεωρίας επιφανειών.

Στις περιπτώσεις εκείνες, για τις οποίες ένας χάρτης δεν προϋποθέτει υψηλά επίπεδα ακριβειών, είναι δυνατόν η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής να αντικατασταθεί από την επιφάνεια μιας σφαίρας. Η μελέτη της γεωμετρίας της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι λιγότερο πολύπλοκη, γιατί πρόκειται για μια επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα.



**Εικόνα 1.2:**  
Το σύστημα των  
γεωγραφικών  
συντεταγμένων

## 1.2 Γεωγραφικές συντεταγμένες

Ο εντοπισμός μιας θέσης πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρα γίνεται με τη βοήθεια δύο μεταβλητών, του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού πλάτους, που συνιστούν το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (Εικόνα 1.2). Το σύστημα αυτό ορίζεται με τη βοήθεια δύο κατηγοριών νοητών γραμμών της επιφάνειας αναφοράς, των μεσημβρινών και των παράλληλων. Μεσημβρινός ενός σημείου είναι η τομή της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με το επίπεδο που ορίζεται από το σημείο και τον άξονα περιστροφής της Γης. Παράλληλος ενός σημείου είναι η τομή της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής οι μεσημβρινοί είναι ελλείψεις ίσες μεταξύ τους ενώ στην περίπτωση της σφαίρας είναι κύκλοι. Οι παράλληλοι στην περίπτωση του ελλειψοειδούς αλλά και της σφαίρας είναι κύκλοι των οποίων η ακτίνα μειώνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους. Ο παράλληλος που διέρχεται από το κέντρο της Γης και είναι σε μέγεθος μεγαλύτερος από όλους τους

άλλους, ονομάζεται Ισημερινός.

Έτσι, κάθε σημείο της φυσικής γήινης επιφάνειας του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση προβάλλεται πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας κατά τη διεύθυνση της καθέτου ως προς την επιφάνεια αυτή. Το μήκος της καθέτου, δηλαδή, η απόσταση του σημείου από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα (Εικόνα 1.2), ονομάζεται γεωμετρικό υψόμετρο ή απλά υψόμετρο ( $h$ ).

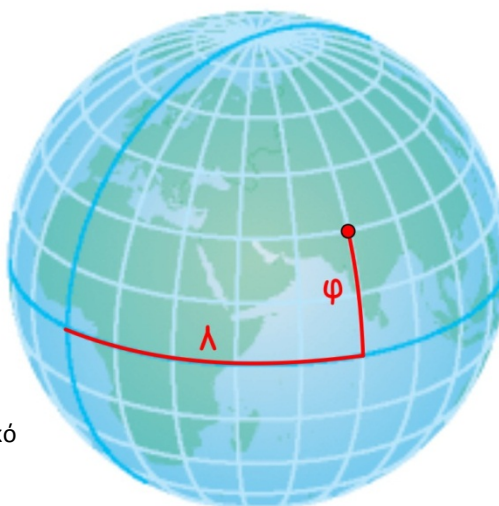


**Εικόνα 1.3:** Το αστεροσκοπείο του Greenwich, όπου διέρχεται ο μηδενικός μεσημβρινός.

Η θέση της προβολής του σημείου πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προσδιορίζεται με τη βοήθεια των γεωγραφικών συντεταγμένων, δηλαδή, δύο γωνιών - του γεωγραφικού μήκους και πλάτους. Η γωνία που σχηματίζει η κάθετος από το σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας (Εικόνα 1.2) με το επίπεδο του ισημερινού ονομάζεται γεωγραφικό πλάτος ( $\phi$ ). Η δίεδρη γωνία που σχηματίζεται από το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο και από έναν αυθαίρετα επιλεγμένο μηδενικό μεσημβρινό (Εικόνα 1.2) ονομάζεται γεωγραφικό μήκος ( $\lambda$ ). Ως μηδενικός μεσημβρινός, συνήθως, ορίζεται ο μεσημβρινός που διέρχεται από το αστεροσκοπείο του Greenwich (Εικόνα 1.3). Οι γεωγραφικές συντεταγμένες μετρώνται σε μοίρες. Το γεωγραφικό πλάτος κυμαίνεται από  $0^\circ$  ως  $90^\circ$  στο βόρειο ημισφαίριο της Γης και από  $0^\circ$  ως  $-90^\circ$  στο νότιο ημισφαίριο ενώ το γεωγραφικό μήκος κυμαίνεται από  $0^\circ$  ως  $360^\circ$ .

Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων είναι ουσιαστικά ένα ορθοκανονικό σύστημα επιφανειακών συντεταγμένων για την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας. Το δίκτυο των συντεταγμένων αυτών (Εικόνα 1.4) πάνω στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα σχηματίζεται από τους μεσημβρινούς και τους παράλληλους. Οι μεσημβρινοί είναι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό μήκος ( $\lambda=c$ ) και οι παράλληλοι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό πλάτος ( $\phi=c$ ). Η θέση ενός σημείου πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, ή ακόμα και ενός σημείου που βρίσκεται μεν πάνω στη φυσική γήινη επιφάνεια αλλά έχει προβληθεί πάνω σε αυτήν, μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του δικτύου των μεσημβρινών και παραλλήλων, δηλαδή, με γραμμικά

μεγέθη και όχι γωνιακά. Το αντίστοιχο του γεωγραφικού μήκους θα μετρηθεί ως το μήκος του τόξου πάνω στον Ισημερινό από το ίχνος του μηδενικού μεσημβρινού μέχρι το ίχνος του μεσημβρινού του σημείου, ενώ, το αντίστοιχο του γεωγραφικού πλάτους ως το μήκος του τόξου του μεσημβρινού του σημείου από τον Ισημερινό μέχρι αυτό (Εικόνα 1.4).



**Εικόνα 1.4:** Το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων ως ένα ορθοκανονικό επιφανειακό σύστημα συντεταγμένων.

### 1.3 Παραμορφώσεις

Η επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν είναι αναπτυσκόμενη επιφάνεια, δηλαδή, η απεικόνισή της στο επίπεδο συνοδεύεται πάντα από παραμορφώσεις. Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να φέρουμε σε επαφή μια ελαστική σφαίρα (μπάλα) με ένα επίπεδο, δεν μπορούμε να κατορθώσουμε να εφάπτονται όλα τα σημεία της σφαίρας στο επίπεδο παρά μόνον αν την τεντώσουμε ή τη σχίσουμε, δηλαδή, αν τελικά την παραμορφώσουμε.

Η μελέτη των παραμορφώσεων γίνεται με τη βοήθεια του τομέα των μαθηματικών της θεωρίας επιφανειών. Η επιφάνεια της Γης στη μαθηματική χαρτογραφία προσομοιώνεται από την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής που την προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Η γεωμετρία του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη και κατά συνέπεια το ίδιο πολύπλοκη γίνεται και η μελέτη των παραμορφώσεων στην επιφάνεια αυτή. Αν προσομοιώσουμε κατά τη μελέτη των παραμορφώσεων την επιφάνεια της Γης με την επιφάνεια μιας σφαίρας, τότε μπορούμε να έχουμε μια συστηματική εικόνα των παραμορφώσεων αξιοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές.

Η βασική μελέτη αναφέρεται σε παραμορφώσεις στοιχειωδών μεγεθών αλλά στη χαρτογραφική πράξη μας ενδιαφέρουν κυρίως οι παραμορφώσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένα μεγέθη. Οι παραμορφώσεις των πεπερασμένων μεγεθών μας

χρειάζονται για τη μελέτη της απεικόνισης στο επίπεδο του χάρτη οντοτήτων που υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο, δηλαδή, αναφέρονται στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή στην απλούστερη εκδοχή στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Μεταφέροντας τα μεγέθη στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) μπορούμε να κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς εύκολα και απλά, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την Ευκλείδια και την επίπεδη αναλυτική γεωμετρία. Επίσης, αν αντιστρέψουμε το συλλογισμό αυτό, μπορούμε από αποτελέσματα που έχουν προκύψει με υπολογισμούς στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) να αναχθούμε στα πραγματικά μεγέθη επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρας. Οι απαραίτητες αναγωγές για τη μετάβαση μεγεθών από τη φυσική επιφάνεια της γης στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρας και το αντίστροφο δεν αφορούν τη χαρτογραφία, καθώς αποτελούν βασικό αντικείμενο της επιστήμης της γεωδαισίας.

#### 1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Θεωρούμε ένα σημείο P πάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Εικόνα 1.5), που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές του συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ). Κοντά στο σημείο P θεωρούμε και ένα δεύτερο σημείο P' με γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi+d\phi, \lambda+d\lambda$ ).

Ας συμβολίσουμε την απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας:  $dS$  και το αζιμούθιο της στοιχειώδους γραμμής (PP'):  $A$ . Από τη γεωδαισία γνωρίζουμε ότι το αζιμούθιο μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς είναι η γωνία που σχηματίζεται από το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο και τη γραμμή και μετράται πάντα δεξιόστροφα με αφετηρία το μεσημβρινό. Θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές, να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν το μέγεθος της στοιχειώδους αυτής γραμμής, δηλαδή, την απόσταση  $dS$  καθώς και το αζιμούθιο της  $A$ .

Πρώτα, φέρνουμε τους μεσημβρινούς και τους παράλληλους που διέρχονται από τα δύο αυτά σημεία P και P'. Γνωρίζουμε, ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός μεσημβρινού είναι:  $\rho$  και η ακτίνα καμπυλότητας ενός παράλληλου είναι:  $r$ , όπου:  $r=N\cos\phi$ , με  $N$ : την ακτίνα της κυρίας καθέτου τομής και  $\phi$ : το γεωγραφικό πλάτος του παράλληλου. Η ακτίνα καμπυλότητας του μεσημβρινού ( $\rho$ ) και η ακτίνα της κυρίας καθέτου ( $N$ ) είναι γνωστό από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς ότι δίνονται από τις σχέσεις:

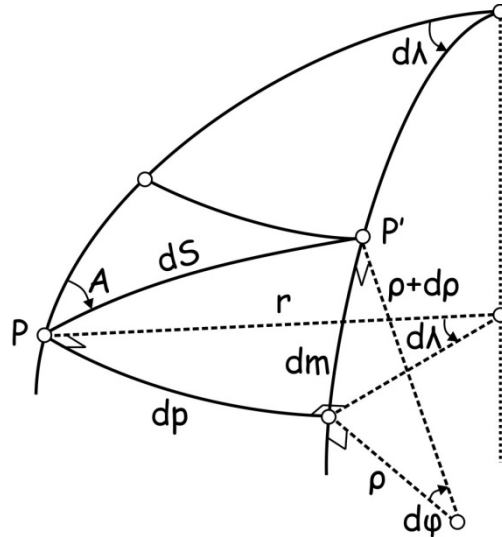
$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\phi)^3}} \text{ και}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}}.$$



όπου:  $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και  $e$  η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς που συνδέεται με την επιπλάτυνσή του ( $f$ ) από τη σχέση:

$$e = \sqrt{2f - f^2}.$$



**Εικόνα 1.5:** Στοιχειώδης γραμμή στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Η ακτίνα του παράλληλου ( $r$ ) ενός ελλειψοειδούς μεταβάλλεται ανάλογα με το γεωγραφικό του πλάτος ( $\phi$ ), δηλαδή στον ισημερινό (όπου:  $\phi=0^\circ$ ) είναι ίση με το μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και όσο αυξάνει το γεωγραφικό πλάτος μειώνεται, ώστε στους πόλους να τείνει προς το μηδέν.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες της γραμμής κατά μήκος των μεσημβρινών ( $dm$ ) και των παράλληλων ( $dp$ ) μεταξύ των δύο σημείων  $P$  και  $P'$  (Εικόνα 1.5) εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = \rho d\phi \text{ και}$$

$$dp = r d\lambda \Rightarrow dp = N \cos \phi d\lambda.$$

Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Εικόνα 1.5) το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής  $PP'$ , δηλαδή, η απόσταση  $dS$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$dS = \sqrt{dm^2 + dp^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2}.$$

Από το ίδιο τρίγωνο προκύπτει και η σχέση που εκφράζει το αζιμούθιο  $A$  της στοιχειώδους γραμμής  $PP'$ , δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\tan A = \frac{dp}{dm} \Rightarrow A = \arcsin \frac{dp}{dS} = \arccos \frac{dm}{dS},$$

$$\text{ή } A = \arctan \frac{r d\lambda}{\rho d\phi} = \arcsin \frac{r d\lambda}{dS} = \arccos \frac{\rho d\phi}{dS}.$$

Τέλος, μεταξύ των μεσημβρινών και των παραλλήλων που διέρχονται από τα σημεία P και P' σχηματίζεται ένα στοιχειώδες χωρίο, το εμβαδόν ( $d\Psi$ ) του οποίου θα εκφράζεται από τη σχέση:

$$d\Psi = dm dp \Rightarrow d\Psi = \rho r d\phi d\lambda.$$

Στις περιπτώσεις εκείνες που οι απαιτήσεις σε ακρίβειες είναι περιορισμένες, τότε οι σχέσεις απλουστεύονται αν θεωρήσουμε ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια της σφαίρας (ακτίνας R). Εύκολα προκύπτει ότι τα αντίστοιχα μεγέθη της στοιχειώδους γραμμής, στην επιφάνεια της σφαίρας, εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = R d\phi \text{ και}$$

$$dp = R \cos\phi d\lambda.$$

Οπότε θα έχουμε για το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής ( $dS$ ) και το αζιμούθιο της (A), αντίστοιχα:

$$dS = R \sqrt{d\phi^2 + \cos^2\phi d\lambda^2},$$

$$\text{και } A = \arctan \frac{\cos\phi d\lambda}{d\phi}.$$

Επιπλέον, για το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου ( $d\Psi$ ), θα έχουμε:

$$d\Psi = R^2 \cos\phi d\phi d\lambda.$$

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς απεικονίζεται η στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο της απεικόνισης, δηλαδή, στο επίπεδο του χάρτη.

### 1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης

Ο νόμος της απεικόνισης της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο, στη γενική του μορφή θα εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$x = x(\phi, \lambda),$$

$$y = y(\phi, \lambda).$$

Έτσι λοιπόν, κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) θα απεικονίζεται στο επίπεδο του χάρτη σε θέση που θα ορίζεται από τις ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) με τον τρόπο

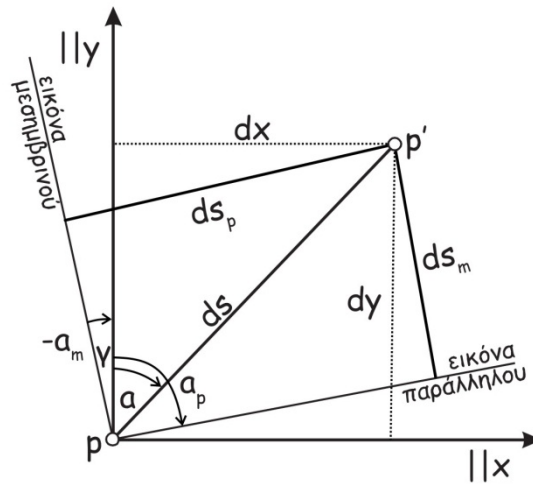
που θα καθορίζει ο νόμος της απεικόνισης.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  ( $dx$ ) και του άξονα  $y$  ( $dy$ ) στο επίπεδο της απεικόνισης στην πραγματικότητα αποτελούν τα διαφορικά των συναρτήσεων:  $x(\phi, \lambda)$  και  $y(\phi, \lambda)$  που ορίζουν το νόμο της απεικόνισης. Οι στοιχειώδεις αυτές συνιστώσες χρειάζεται να εκφραστούν για να διευκολύνουν τον προσδιορισμό των σχέσεων που θα συνοδεύουν την απεικόνιση στο επίπεδο μιας στοιχειώδους γραμμής από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας. Επομένως ισχύει ότι:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Σύμφωνα λοιπόν, με το νόμο της απεικόνισης το σημείο  $P$  που θεωρήσαμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς θα απεικονιστεί στο επίπεδο στο σημείο  $p$  και αντίστοιχα το  $P'$  στο  $p'$  (Εικόνα 1.6). Η στοιχειώδης γραμμή  $PP'$  θα απεικονιστεί στο επίπεδο στη γραμμή  $pp'$ . Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής  $pp'$  στο επίπεδο ( $ds$ ), δηλαδή, την απόσταση μεταξύ των  $p$  και  $p'$  καθώς και τη γωνία διεύθυνσης  $\alpha$  της γραμμής  $pp'$ . Η γωνία διεύθυνσης μιας γραμμής στο επίπεδο είναι η γωνία που σχηματίζεται από την παράλληλο προς τον άξονα  $y$  και τη γραμμή και μετράται πάντα δεξιόστροφα με αφετηρία την παράλληλο προς τον άξονα  $y$ .



Εικόνα 1.6: Στοιχειώδης γραμμή στο επίπεδο της απεικόνισης.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με τα προηγούμενα, το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής στο επίπεδο ( $ds$ ) θα δίνεται από τη σχέση:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Αν χρησιμοποιηθεί ως βάση η απλή αυτή σχέση και αντικατασταθούν οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  που προηγουμένως

προσδιορίστηκαν και εκτελεστούν ορισμένες πράξεις θα προκύψει για το στοιχειώδες μέγεθος της γραμμής  $pp'$  στο επίπεδο η παρακάτω έκφραση:

$$ds = \sqrt{E d\phi^2 + 2F d\phi d\lambda + G d\lambda^2},$$

όπου:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2, \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right), \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2.$$

Οι παραστάσεις  $E$ ,  $G$  και  $F$  ονομάζονται θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξεως και εξαρτώνται από το νόμο της εκάστοτε απεικόνισης (προβολής) καθώς και τη θέση στην οποία βρίσκεται η στοιχειώδης γραμμή.

Αν κινηθούμε κατά μήκος ενός μεσημβρινού, δηλαδή αν το  $\lambda=c$  και επομένως:  $d\lambda=0$ , τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά μεσημβρινό ( $ds_m$ ) θα είναι:

$$ds_m = \sqrt{E} d\phi.$$

Αντίστοιχα, αν κινηθούμε κατά μήκος ενός παραλλήλου, δηλαδή αν το  $\phi=c$  και επομένως:  $d\phi=0$ , τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά παράλληλο ( $ds_p$ ) θα είναι:

$$ds_p = \sqrt{G} d\lambda.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι γωνίες διεύθυνσης στο επίπεδο της απεικόνισης των μεσημβρινών και των παραλλήλων, καθώς επίσης, και της στοιχειώδους γραμμής  $pp'$ . Η γωνία διεύθυνσης ( $\alpha$ ) της εικόνας μιας στοιχειώδους γραμμής είναι:

$$\alpha = \arctan \frac{dx}{dy} = \arcsin \frac{dx}{ds} = \arccos \frac{dy}{ds}.$$

Αν η γραμμή αυτή είναι μεσημβρινός, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του μεσημβρινού ( $\alpha_m$ ) θα είναι (με:  $\lambda=c$ , δηλαδή:  $d\lambda=0$ ):

$$\alpha_m = \arctan \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} : \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \phi} = \arccos \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \phi}.$$

Αν η γραμμή είναι παράλληλος, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του παράλληλου ( $\alpha_p$ ) θα είναι (με:  $\phi=c$ , δηλαδή:  $d\phi=0$ ):

$$\alpha_p = \arctan \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \arccos \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

Η αντίθετη γωνία της διεύθυνσης του μεσημβρινού ( $\gamma = -\alpha_m$ ), δηλαδή αυτή που μετράται από τον μεσημβρινό προς τον άξονα  $y$ , έχει μεγάλη χρησιμότητα στη χαρτογραφία και ονομάζεται σύγκλιση των μεσημβρινών. Η σύγκλιση των μεσημβρινών

είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της αναγωγής των γωνιών σε αναλυτικά προβλήματα. Η γωνία αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = -\arctan \left( \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi}}{\frac{\partial y}{\partial \phi}} \right).$$

Το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου ( $d\psi$ ) στο επίπεδο της απεικόνισης εκφρασμένο ως προς τις πλευρές του, που αποτελούν στοιχειώδεις μετακινήσεις κατά μεσημβρινό ( $ds_m$ ) και παράλληλο ( $ds_p$ ), θα δίνεται από τη σχέση:

$$d\psi = ds_m ds_p \sin(\alpha_p - \alpha_m).$$

Αναλύοντας όμως, το ημίτονο της διαφοράς των δύο γωνιών ( $\alpha_m$  και  $\alpha_p$ ) σε διαφορά γινομένων των ημιτόνων και συνημιτόνων των γωνιών και αντικαθιστώντας τις σχέσεις που προσδιορίστηκαν πιο πάνω, για τις διευθύνσεις των εικόνων του μεσημβρινού ( $\alpha_m$ ) και του παράλληλου ( $\alpha_p$ ), προκύπτει ότι:

$$\sin(\alpha_p - \alpha_m) = \frac{J}{\sqrt{EG}}.$$

Η παράσταση  $J$  ονομάζεται ιακωβιανή και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \phi}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις παραστάσεις που προσδιορίστηκαν στη σχέση του εμβαδού ενός χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης προκύπτει ότι:

$$d\psi = J d\phi d\lambda.$$

## 1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις

### 1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του μήκους στοιχειώδους γραμμής μελετάται με τη βοήθεια της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης ( $m$ ). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta S} = \frac{ds}{dS}.$$

όπου:  $dS$  είναι το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας (Εικόνα 1.5) και  $ds$  το μήκος της εικόνας της στο επίπεδο της απεικόνισης

(Εικόνα 1.6). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης αναφέρεται αποκλειστικά και μόνο στην απεικόνιση και δεν έχει καμία σχέση με τη σμίκρυνση, την κλίμακα δηλαδή με την οποία σχεδιάζονται οι χάρτες.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης είναι αδιάστατο μέγεθος και όταν έχει ως τιμή τη μονάδα, τότε το μήκος της στοιχειώδους γραμμής απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμόρφωση. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης εν γένει μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και σε κάθε σημείο έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση.

### 1.6.2 Κύριες διευθύνσεις- κύριες κλίμακες

Αν θεωρήσουμε μια ορθή γωνία επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και περιστρέψουμε τη γωνία αυτή γύρω από την κορυφή της, τότε εξετάζοντας την εικόνα της στο επίπεδο της απεικόνισης, θα δούμε ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος προσανατολισμός των πλευρών της που η εικόνα της είναι, επίσης, ορθή γωνία. Οι κάθετες διευθύνσεις στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας που διατηρούν κάθετες και τις εικόνες τους στο επίπεδο της απεικόνισης, ονομάζονται κύριες διευθύνσεις. Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια θέση, όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα, έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση. Οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στις κύριες διευθύνσεις, ονομάζονται κύριες κλίμακες, και συμβολίζονται με:  $m_1$  και  $m_2$ , αντίστοιχα. Οι τιμές των κυρίων κλιμάκων σε κάθε σημείο θα αποδειχθεί παρακάτω, ότι είναι η μέγιστη ( $m_1=\max$ ) και η ελάχιστη ( $m_2=\min$ ) τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης στη θέση αυτή.

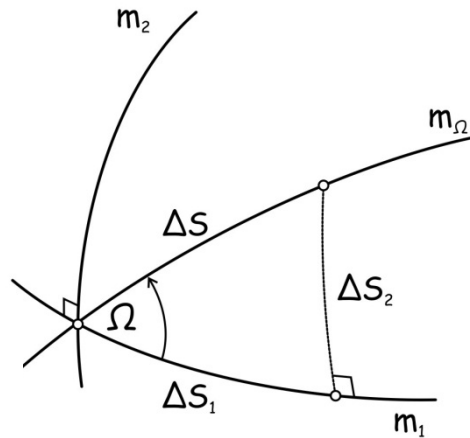
Στις ορθές απεικονίσεις οι κύριες διευθύνσεις σε κάθε σημείο είναι πάντα κατά τη διεύθυνση του μεσημβρινού και του παράλληλου που διέρχεται από το σημείο. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο για τις κύριες διευθύνσεις στις εγκάρσιες και πλάγιες απεικονίσεις.

### 1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση

Γνωρίζοντας τις τιμές των κυρίων κλιμάκων σε ένα σημείο μιας απεικόνισης μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση  $\Omega$  ( $m_\Omega$ ). Η διεύθυνση  $\Omega$  μετράται αριστερόστροφα στο ελλειψοειδές από την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας ( $m_1$ ). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

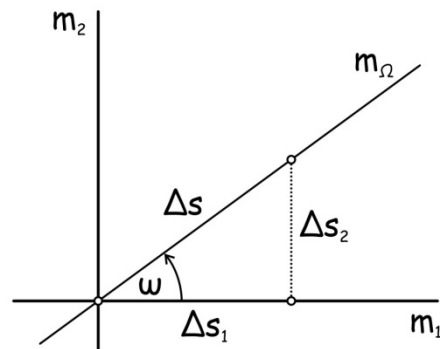
$$m_\Omega = \sqrt{m_1^2 \cos^2 \Omega + m_2^2 \sin^2 \Omega} .$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στις συνιστώσες της ως προς τις κύριες διευθύνσεις και εφαρμόζοντας τον ορισμό της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Εικόνα 1.7).



Σχήμα 1.7: Τυχαία διεύθυνση στο ελλειψοειδές.

Αν οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης είναι ίσες στις δύο κύριες διευθύνσεις ( $m_1=m_2$ ), τότε από τη σχέση αυτή αποδεικνύεται ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε διεύθυνση ( $m_\Omega = m_1=m_2$ ).



Εικόνα 1.8: Τυχαία διεύθυνση στο επίπεδο της απεικόνισης.

1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών

Αν  $\Omega$  είναι η γωνία που σχηματίζεται από μία οποιαδήποτε διεύθυνση με την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης ( $m_1$ ) και  $\omega$  η εικόνα της στο επίπεδο (Εικόνα 1.8) τότε, από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται και αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στην τυχαία αυτή διεύθυνση πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και στο επίπεδο απεικόνισης, οι γωνίες  $\Omega$  και  $\omega$  συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \omega = \frac{m_2}{m_1} \tan \Omega .$$

Αξιοποιώντας τη σχέση αυτή, τις ιδιότητες των αναλογιών και ταυτότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)}.$$

Ορίζοντας λοιπόν ως γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση ( $\varepsilon$ ), τη διαφορά:

$$\varepsilon = \Omega - \omega,$$

τότε, αυτή θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sin \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin(\Omega + \omega).$$

Αξιοποιώντας την τελευταία σχέση, παρατηρούμε ότι η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση ( $E$ ) θα είναι:

$$\sin E = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Η τιμή αυτή της μέγιστης γωνιακής παραμόρφωσης παρουσιάζεται σε διεύθυνση:

$$\Omega = \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2},$$

στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και:

$$\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2},$$

στο επίπεδο της απεικόνισης.

Μια γωνία, επομένως, μπορεί να παραμορφωθεί μέχρι την τιμή  $2E$ . Όταν οι κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης είναι ίσες, δηλαδή, όταν ισχύει  $m_1 = m_2$ , τότε, η απεικόνιση αυτή δεν θα έχει καμία παραμόρφωση στις γωνίες επειδή θα ισχύει:

$$\varepsilon = 0.$$

Οι απεικονίσεις που δεν έχουν παραμόρφωση στις γωνίες, διατηρούν τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο αναλλοίωτη, οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται σύμμορφες.

#### 1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του εμβαδού στοιχειώδους επιφάνειας μελετάται με τη βοήθεια της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης ( $M$ ), ή απλώς επιφανειακής κλίμακας. Η

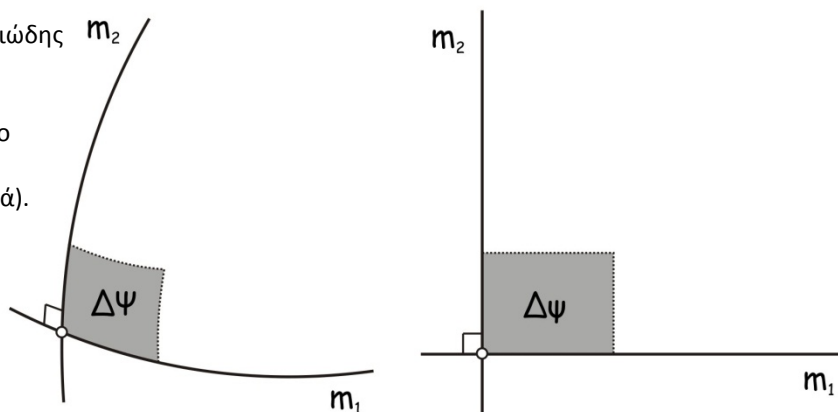


κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$M = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta\Psi} = \frac{d\psi}{d\Psi}.$$

όπου:  $d\Psi$  είναι το εμβαδόν ενός στοιχειώδους χωρίου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας και  $d\psi$  το εμβαδόν της εικόνας του στο επίπεδο (Εικόνα 1.9).

**Σχήμα 1.9:** Στοιχειώδης επιφάνεια στο ελλειψοειδές (αριστερά) και στο επίπεδο της απεικόνισης (δεξιά).



Εύκολα αποδεικνύεται ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης συνδέεται με τις κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης με τη σχέση:

$$M = m_1 m_2.$$

Τέλος, με απλή αντικατάσταση η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προκύπτει ότι είναι:

$$M = \frac{J}{\rho r}.$$

Σε απεικονίσεις που η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι ίση με τη μονάδα ( $M=1$ ) δεν παρουσιάζεται παραμόρφωση στα εμβαδά, δηλαδή, το εμβαδόν στοιχειωδών επιφανειών από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο της απεικόνισης διατηρείται αναλλοίωτο. Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται ισοδύναμες.

#### 1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης για οποιαδήποτε απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρας στο επίπεδο. Σε ένα οποιοδήποτε σημείο η κλίμακα θα δίνεται από τη σχέση:

$$m = \frac{ds}{dS}.$$

Αν υψώσουμε τη σχέση αυτή στο τετράγωνο και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε σε αυτήν το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς καθώς και το μήκος της απεικόνισής της στο επίπεδο, τότε προκύπτει η σχέση:

$$m^2 = \frac{Ed\phi^2 + 2Fd\phi d\lambda + Gd\lambda^2}{\rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2}.$$

Διαιρώντας τη σχέση αυτή με την παράσταση:  $\rho^2 d\phi^2$  και επειδή ισχύει ότι:

$$\tan A = \frac{r d\lambda}{\rho d\phi},$$

προκύπτει για το τετράγωνο της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης η σχέση:

$$m^2 = \frac{\frac{E}{\rho^2} + \frac{2F}{\rho r} \tan A + \frac{G}{r^2} \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

Εξετάζοντας την παράγωγη σχέση παρατηρούμε ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ( $m$ ) είναι συνάρτηση της θέσης, δηλαδή ισχύει ότι:  $m=f(\phi, \lambda)$ , και της διεύθυνσης, άρα:  $m=f(A)$ . Επειδή λοιπόν, η τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια τυχαία θέση μεταβάλλεται στις διευθύνσεις γύρω από αυτή τη θέση, θα υπάρχουν δύο διευθύνσεις που οι τιμές της θα είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε εκείνα τα αζιμούθια  $A$  για τα οποία η συνάρτηση  $m^2$  παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Ξεκινάμε, λοιπόν, μηδενίζοντας την παράγωγο της  $m^2$  ως προς το αζιμούθιο  $A$ , δηλαδή:

$$\frac{dm^2}{dA} = \tan^2 A - \frac{\frac{G}{r^2} - \frac{E}{\rho^2}}{\frac{F}{\rho r}} \tan A - 1 = 0.$$

Βλέπουμε ότι η παράγωγη παράσταση συνιστά ένα τριώνυμο ως προς την εφαιπτομένη του αζιμούθιου ( $\tan A$ ). Οι ρίζες του τριωνύμου εξετάζοντας τους συντελεστές του έχουν την ιδιότητα:

$$\tan A_1 \tan A_2 = -1,$$

οπότε προκύπτει ότι τα αζιμούθια που μηδενίζουν το τριώνυμο βρίσκονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, δηλαδή:

$$A_1 = A_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

οι διευθύνσεις στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στις οποίες η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι κάθετες μεταξύ τους.

Οι διευθύνσεις αυτές ονομάζονται κύριες διευθύνσεις.

Ακολουθώντας ανάλογη πορεία και εξετάζοντας τις απεικονίσεις των κυρίων διευθύνσεων στο επίπεδο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι και:

στο επίπεδο της απεικόνισης οι κύριες διευθύνσεις απεικονίζονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Τα συμπεράσματα αυτά διατυπώνονται στο θεώρημα του Tissot:

Σε κάθε σημείο της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος καθέτων διευθύνσεων οι οποίες και στην απεικόνισή τους παραμένουν κάθετες.

#### 1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης. Δείκτρια Tissot

Αν θεωρήσουμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ένα στοιχειώδη κύκλο που η ακτίνα του είναι ίση με  $dS$ , τότε, η εξίσωση του κύκλου θα είναι:

$$dm^2 + dp^2 = dS^2.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τα μεγέθη των στοιχειωδών γραμμών κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε:

$$\rho^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2 = dS^2.$$

Ο κύκλος αυτός θα απεικονίζεται στο επίπεδο ως μια κλειστή γραμμή, της οποίας θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το σχήμα.

Τα διαφορικά  $dx$  και  $dy$  του νόμου της απεικόνισης εκφράζουν τις στοιχειώδεις μετακινήσεις στο επίπεδο της απεικόνισης κατά τις διευθύνσεις των αξόνων  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε ότι τα διαφορικά αυτά αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, δηλαδή, τα διαφορικά  $d\phi$  και  $d\lambda$ , τότε, για αυτά θα ισχύει:

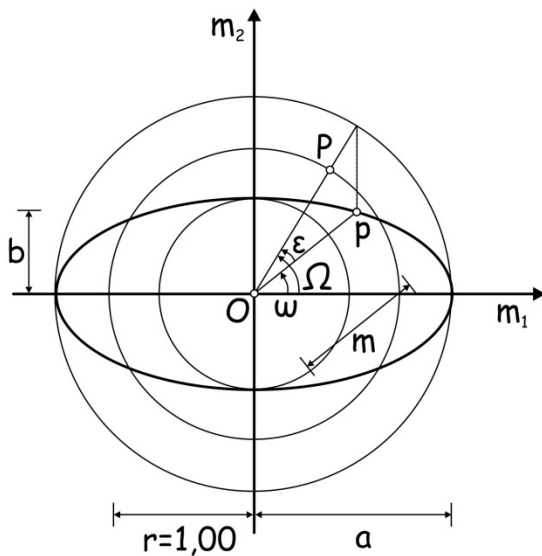
$$d\phi = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} dy - \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx}{J} \quad \text{και} \quad d\lambda = \frac{\frac{\partial y}{\partial \phi} dx - \frac{\partial x}{\partial \phi} dy}{J},$$

όπου η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων του συστήματος είναι η ιακωβιανή ( $J$ ).

Αντικαθιστώντας τα διαφορικά  $d\phi$  και  $d\lambda$  στην εξίσωση του κύκλου και εκτελώντας

ορισμένες πράξεις, θα έχουμε στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνα του κύκλου την κλειστή γραμμή που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left[ \rho^2 \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + r^2 \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dx^2 + \left[ \rho^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + r^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dy^2 - 2 \left[ r^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) + \rho^2 \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \right] dx dy = J^2 dS^2 .$$



Εικόνα 1.10: Δείκτρια Tissot.

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί απλούστερα με την παρακάτω μορφή:

$$a^2 dx^2 + b^2 dy^2 - 2c dx dy = dk^2 .$$

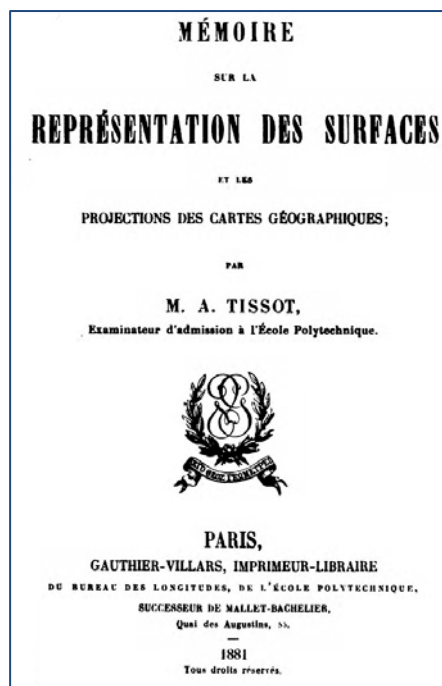
Είναι όμως γνωστό, ότι η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση μιας έλλειψης, της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας είναι στραμμένος ως προς τον άξονα x. Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

κάθε στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) απεικονίζεται στο επίπεδο ως έλλειψη ανεξάρτητα του συγκεκριμένου νόμου της απεικόνισης.

Αν ο στοιχειώδης κύκλος γίνει μοναδιαίος (δηλαδή αν:  $dS=1$ ), τότε η έλλειψη θα μας δίνει μια άμεση εποπτεία των παραμορφώσεων της απεικόνισης (Εικόνα 1.10). Η έλλειψη που αντιστοιχεί σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας είναι γνωστή ως δείκτρια Tissot. Οι ημιάξονες της έλλειψης είναι προσανατολισμένοι στις διευθύνσεις των κυρίων κλιμάκων με το μεγάλο ημιάξονα να είναι ίσος με τη μέγιστη γραμμική κλίμακα ( $m_1$ ) και το μικρό ημιάξονα, αντίστοιχα, να είναι ίσος με την ελάχιστη γραμμική κλίμακα ( $m_2$ ).

Το θεώρημα και η δείκτρια Tissot παρουσιάστηκαν στο βιβλίο με τίτλο: *Mémoire*

*sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques* (μτφ. Μνημόνιο για την αναπαράσταση των επιφανειών και των προβολών των γεωγραφικών χαρτών), του γάλλου μαθηματικού Auguste Tissot (1824-1897), που εκδόθηκε το 1881 (Εικόνα 1.11). Ο Tissot διετέλεσε καθηγητής της γεωδαισίας στην École Polytechnique.



**Εικόνα 1.11:** Το εξώφυλλο του βιβλίου στο οποίο δημοσιεύτηκε το θεώρημα και η δείκτρια του Tissot.

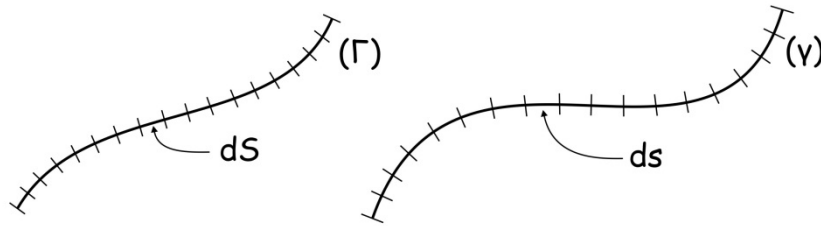
### 1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών

Όλα όσα μελετήθηκαν για τις παραμορφώσεις, αναφέρονται στην απεικόνιση στοιχειωδών μεγεθών από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο. Στις εφαρμογές όμως, χρειάζεται πάντα να υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις για πεπερασμένα μεγέθη. Η μελέτη μιας ολοκληρωμένης αντιμετώπισης των παραμορφώσεων πεπερασμένων μεγεθών ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτών των σημειώσεων. Γι' αυτό το λόγο στη συνέχεια του κεφαλαίου θα διατυπωθούν μόνο ορισμένες βασικές κατευθύνσεις της αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος.

#### 1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής

Ας θεωρήσουμε μια γραμμή  $\Gamma$  μήκους  $S$  πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, τότε η εικόνα της στο επίπεδο της απεικόνισης θα είναι η  $\gamma$  με μήκος  $s$  (Εικόνα 1.12). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$ds = m dS.$$



**Εικόνα 1.12:** Πεπερασμένη γραμμή στο ελλειψοειδές (αριστερά) και στο επίπεδο απεικόνισης (δεξιά).

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η γραμμή αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών γραμμών. Επομένως, το μήκος της γραμμής θα προσδιορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$s = \int_S m dS.$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ( $m$ ) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το μήκος της πεπερασμένης γραμμής θα δίνεται από τη σχέση:

$$s = \left( \frac{1}{S} \int_S m dS \right) S.$$

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος της γραμμής, δηλαδή:

$$\bar{m} = \frac{1}{S} \int_S m dS.$$

Τότε, το μήκος της γραμμής στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

$$s = \bar{m} S.$$

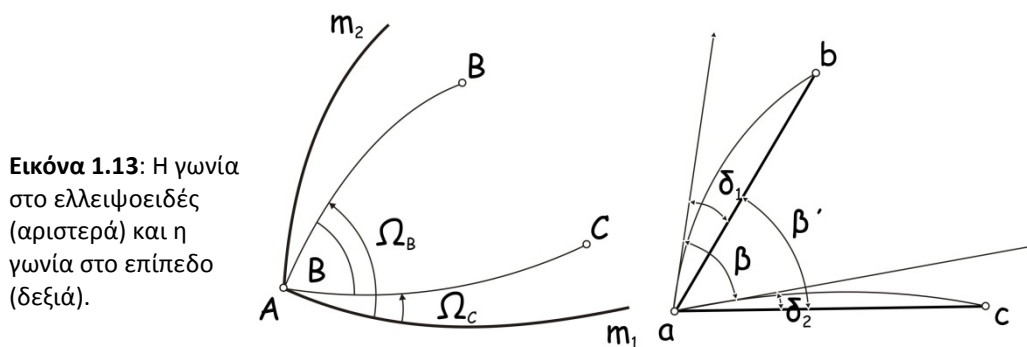
Στην πράξη η μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας τη γραμμή σε τμήματα και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για κάθε τμήμα.

### 1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας

Οι γωνιακές παραμορφώσεις αναφέρονται στις γωνίες που σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες των αντίστοιχων γραμμών στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και των εικόνων τους στο επίπεδο της απεικόνισης. Επειδή είναι χρήσιμο στη μελέτη των γωνιακών παραμορφώσεων να αξιοποιηθούν οι απλές σχέσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας στο επίπεδο και δεδομένου ότι οι εικόνες γραμμών της επιφάνειας του

ελλειψοειδούς στο επίπεδο είναι εν γένει καμπύλες γραμμές, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ χορδής και εφαπτομένης στα άκρα των γραμμών. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γωνία θα πρέπει να διορθώνεται και για τη γωνιακή διαφορά τόξου-χορδής ( $\delta$ ). Έτσι, η γωνία  $\beta'$  στο επίπεδο της απεικόνισης που είναι η εικόνα της γωνίας B στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας (Εικόνα 1.13), όπως ορίζεται από τα σημεία: b, a και c στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνες των σημείων: B, A και C πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, θα είναι:

$$\beta' = B + \varepsilon - \delta_1 + \delta_2, \text{ όπου: } \varepsilon = \beta - B.$$



**Εικόνα 1.13:** Η γωνία στο ελλειψοειδές (αριστερά) και η γωνία στο επίπεδο (δεξιά).

Η διόρθωση  $\varepsilon$  μπορεί να υπολογιστεί από τη διαφορά των διορθώσεων που αντιστοιχούν στις γωνίες διεύθυνσης ( $\Omega_B$  και  $\Omega_C$ ) των δύο πλευρών της γωνίας στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_B - \varepsilon_C.$$

### 1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνία διεύθυνσης - σύγκλιση των μεσημβρινών

Η μέτρηση των διευθύνσεων στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς γίνεται με τη βοήθεια των αζιμουθίων A, ενώ στο επίπεδο με τις γωνίες διεύθυνσης  $\alpha$ . Ως αζιμούθιο (A) μιας γραμμής (με άκρα τα σημεία P και Q) στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς σε κάποιο σημείο P, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο P με την εφαπτομένη της γραμμής στο σημείο αυτό (Εικόνα 1.14 - αριστερά). Το αζιμούθιο μετριέται δεξιόστροφα από τη βορεινή φορά του μεσημβρινού προς τη γραμμή. Ως γωνία διεύθυνσης ( $\alpha$ ) μιας γραμμής στο επίπεδο σε κάποιο σημείο p, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από τη θετική φορά του άξονα  $\gamma$  με τη γραμμή στο σημείο αυτό (Εικόνα 1.14 - δεξιά). Η γωνία διεύθυνσης μετριέται δεξιόστροφα από τον άξονα των  $\gamma$  προς τη γραμμή. Παρατηρώντας την Εικόνα 1.14 η γωνία A' αποτελεί την εικόνα της γωνίας του αζιμουθίου A στο επίπεδο, επομένως για τη γωνία A' ισχύει:

$$A' = A + \varepsilon,$$

όπου:  $\varepsilon$  είναι η γωνιακή παραμόρφωση του αζιμουθίου A.

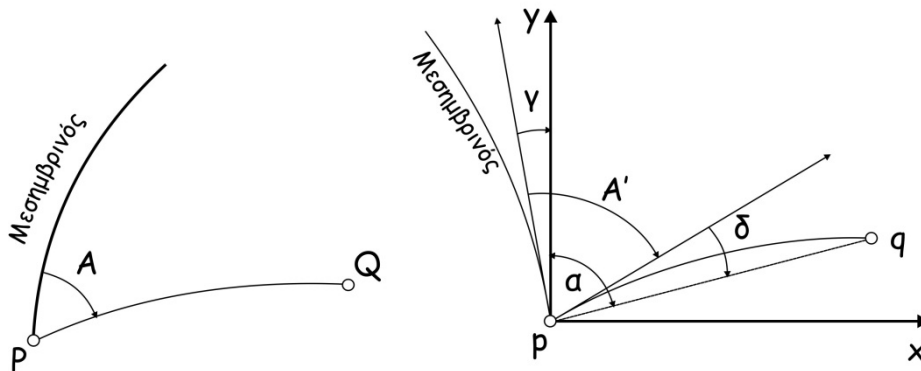
Η γωνία  $A'$  όμως, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1.14 (δεξιά), σχηματίζεται από επαφτόμενες των εικόνων του μεσημβρινού και της γραμμής με άκρα τα σημεία  $p$  και  $q$  στο επίπεδο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$A' = \alpha + \gamma - \delta,$$

όπου:  $\gamma$  είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη θετική φορά του άξονα  $y$  και της επαφτόμενης της εικόνας του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο  $p$  στο επίπεδο και:  $\delta$  είναι η διαφορά τόξου-χορδής της γραμμής με άκρα τα σημεία  $p$  και  $q$ .

Η γωνία  $\gamma$ , που ονομάζεται σύγκλιση μεσημβρινού, έχει οριστεί στην ενότητα 1.5. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις η γωνία διεύθυνσης συνδέεται με τη γωνία του αζιμουθίου ως εξής:

$$\alpha = A - \gamma + \varepsilon + \delta.$$



Εικόνα 1.14: Γωνία αζιμουθίου (αριστερά) και γωνία διεύθυνσης (δεξιά).

Με δεδομένο ότι ένας χάρτης απεικονίζει - στις περισσότερες περιπτώσεις - μια περιοχή έκτασης μερικών μοιρών, οι γωνίες  $\varepsilon$  και  $\delta$  είναι μικρές όμως η γωνία  $\gamma$  μπορεί να είναι, ανάλογα με την προβολή, μεγαλύτερη από μία μοίρα.

#### 1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου

Ας θεωρήσουμε ένα χωρίο εμβαδού  $\Psi$  πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, τότε η εικόνα του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα έχει εμβαδόν  $\psi$  (Εικόνα 1.15). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$d\psi = M d\Psi.$$

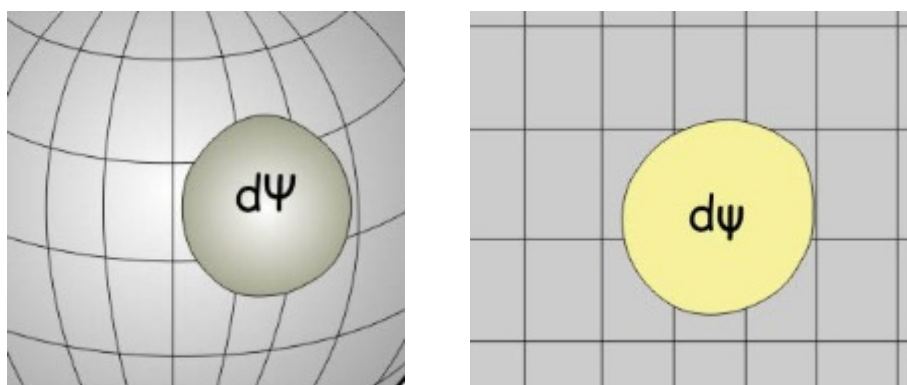
Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το χωρίο αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών χωρίων. Επομένως, το εμβαδόν του θα προσδιορίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:



$$\psi = \int_{\psi} M d\psi .$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης ( $M$ ) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το εμβαδόν του χωρίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \left( \frac{1}{\psi} \int_{\psi} M d\psi \right) \psi .$$



**Εικόνα 1.15:** Χωρίο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και στο επίπεδο της απεικόνισης.

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης κατά την έκταση του χωρίου θα έχουμε:

$$\bar{M} = \frac{1}{\psi} \int_{\psi} M d\psi .$$

και το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \bar{M} \psi .$$

Στην πράξη η μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας το χωρίο σε στοιχειώδεις επιφάνειες και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης για κάθε στοιχειώδη επιφάνεια.

### 1.8 Βιβλιογραφία

Βέης Γ., 1977, *Μαθηματική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας & Χαρτογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Cuenin R., 1972, *Cartographie Generale*, Tome 1, Paris: Editions Eyrolles.

Maling D.H., 1973, *Coordinate systems and map projections*, London: G. Philip & Son Ltd.

Νάκος Β. & Β. Φιλιππακοπούλου, 1993, *Γενική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων

& Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Richardus P. & R.K. Adler, 1972, *Map projections*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Thomas P.D., 1952, *Conformal projections in geodesy and cartography*, Washington: U.S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication 251.

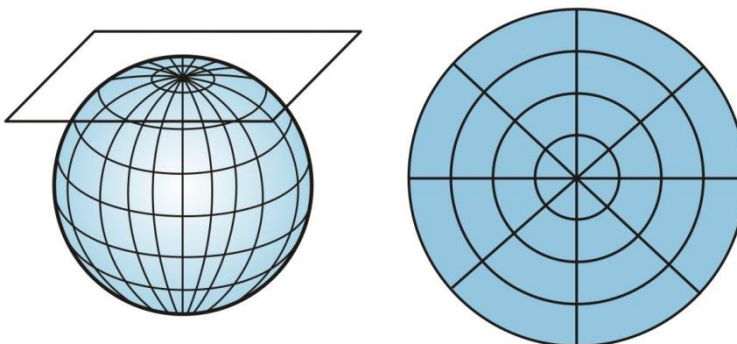
Tissot, M.A., 1881, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les cartes géographiques*. Paris: Gauthier-Villars.

## Κεφάλαιο 2

### 2. ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ

#### 2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων

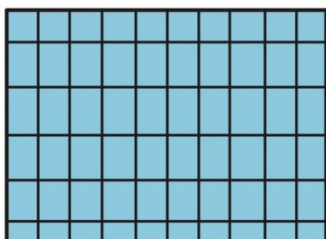
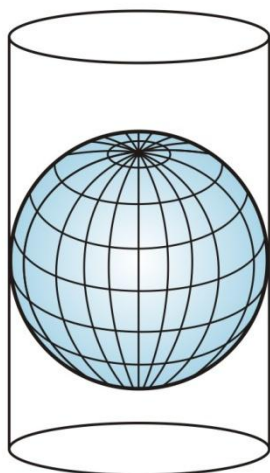
Οι απεικονίσεις στη χαρτογραφία αναφέρονται στην προβολή ή απεικόνιση της επιφάνειας αναφοράς, δηλαδή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στο επίπεδο, δηλαδή στο επίπεδο του χάρτη. Η απεικόνιση αυτή πάντα συνοδεύεται από παραμορφώσεις. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να επινοήσουμε τρόπους απεικόνισης που να διατηρούν ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες των χωρικών οντοτήτων αναλλοίωτες (για παράδειγμα: τα εμβαδά ή τις γωνίες ή τα μήκη σε ορισμένες όμως διευθύνσεις), αλλά είναι αδύνατο να παραμένουν ταυτόχρονα όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες αναλλοίωτες.



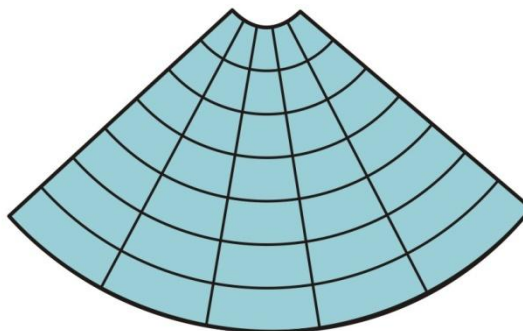
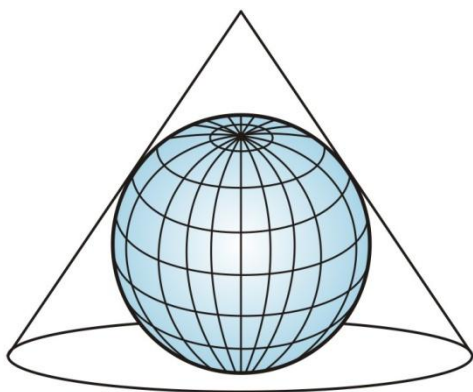
Εικόνα 2.1: Επίπεδη απεικόνιση.

#### 2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών

Η απεικόνιση αντί να γίνει απ' ευθείας στην επιφάνεια ενός επιπέδου (Εικόνα 2.1), μπορεί να γίνει πρώτα πάνω σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια και στη συνέχεια αυτή να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Τέτοιες κατάλληλες αναπτυσσόμενες επιφάνειες είναι η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου (Εικόνα 2.2) ή ενός κώνου (Εικόνα 2.3). Οι απεικονίσεις λοιπόν, ανάλογα με την αναπτυσσόμενη επιφάνεια που χρησιμοποιούμε, ονομάζονται κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες ή αζιμουθιακές.



**Εικόνα 2.2:** Κυλινδρική απεικόνιση.

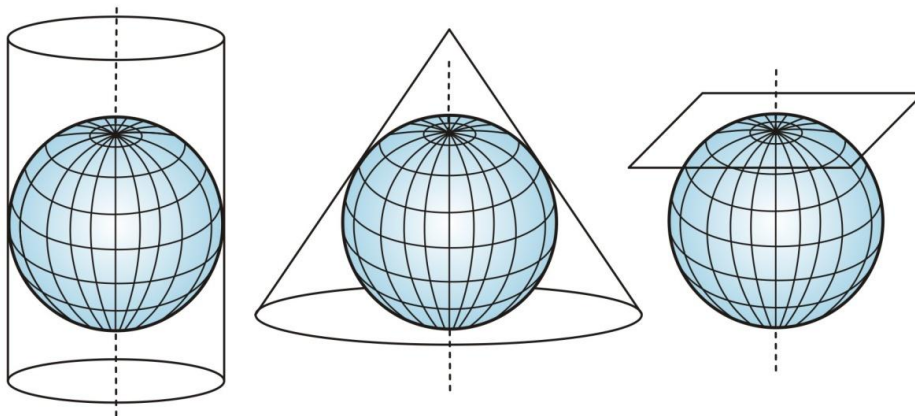


**Εικόνα 2.3:** Κωνική απεικόνιση.

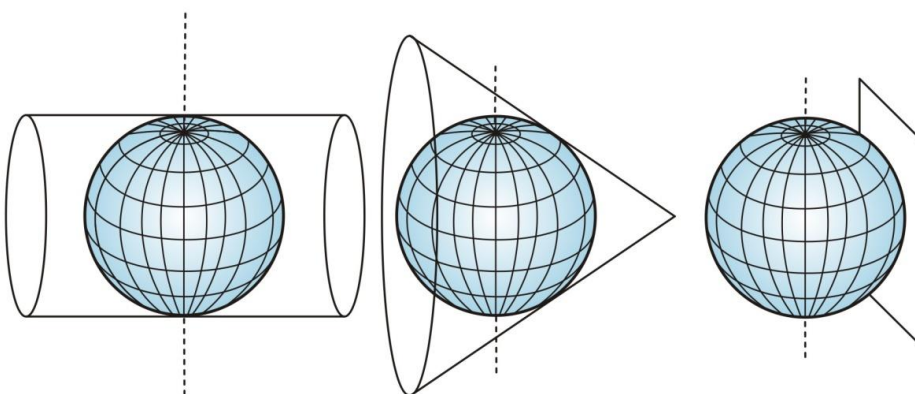
Ανάλογα με τον προσανατολισμό του κυλίνδρου, του κώνου ή του επιπέδου σε σχέση με την επιφάνεια αναφοράς (έλλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα) οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: ορθές (Εικόνα 2.4), εγκάρσιες (Εικόνα 2.5) και πλάγιες (Εικόνα 2.6). Ορθές ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της Γης. Εγκάρσιες ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας είναι κάθετος με τον άξονα περιστροφής της Γης. Πλάγιες, τέλος, ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας σχηματίζει τυχασία γωνία με τον άξονα περιστροφής της Γης.

Οι απεικονίσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους. Αρκεί να προβάλλουμε τα σημεία του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας σε ένα επίπεδο ή σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια. Γι' αυτόν το λόγο άλλωστε πολλές φορές χρησιμοποιούμε και τον όρο προβολή. Η προβολή αυτή μπορεί να είναι κεντρική ή παράλληλη. Στις περισσότερες περιπτώσεις μια κεντρική προβολή απεικονίζει μονοσήμαντα μόνο ένα μέρος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, για παράδειγμα μόνο το ένα ημισφαίριο. Η απεικόνιση όμως μπορεί να πραγματοποιηθεί και με καθαρά

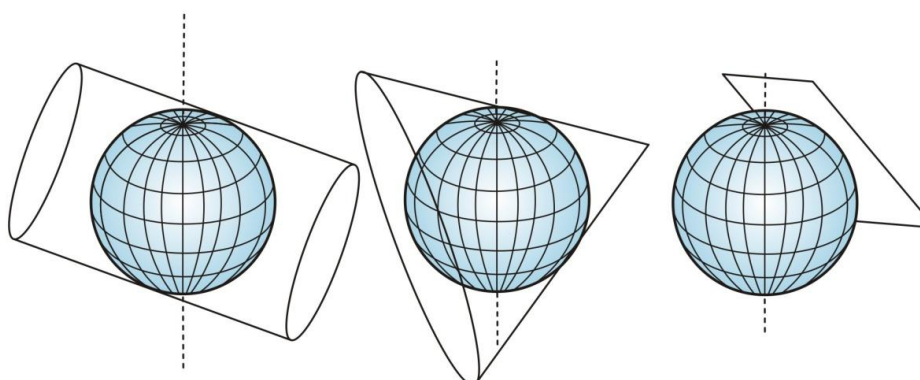
αναλυτικό τρόπο, χωρίς να προέρχεται από γεωμετρική προβολή, ή και να προκύψει από συνδυασμό αναλυτικής και γεωμετρικής μεθόδου.



**Εικόνα 2.4:** Ορθές κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες απεικονίσεις.



**Εικόνα 2.5:** Εγκάρσιες κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες απεικονίσεις.



**Εικόνα 2.6:** Πλάγιες κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες απεικονίσεις.

### 2.3 Γεωμετρική μορφή εικόνων μεσημβρινών και παραλλήλων

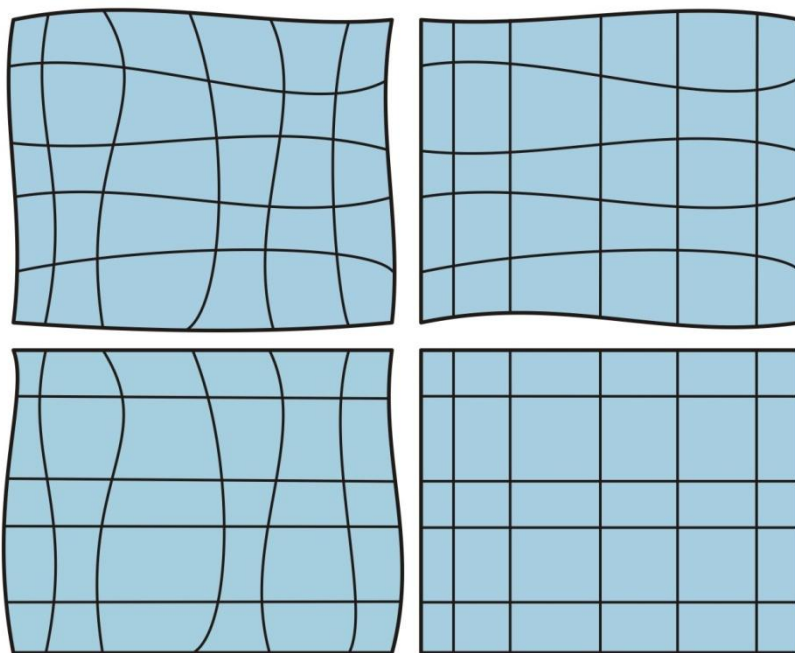
Στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα εντοπίζουμε μία θέση χρησιμοποιώντας το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων ( $\phi, \lambda$ ), ενώ στο επίπεδο τις ορθογώνιες ( $x, y$ ) ή τις πολικές συντεταγμένες ( $\rho, \theta$ ).

Κάθε απεικόνιση ορίζεται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων  $f, g$  οι οποίες και καθορίζουν τις παραμορφώσεις των γεωμετρικών μεγεθών από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα στο επίπεδο. Επομένως, ο νόμος κάθε απεικόνισης ή προβολής εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$x = f(\phi, \lambda) \text{ και}$$

$$y = g(\phi, \lambda).$$

Στην Εικόνα 2.7 παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων, που αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις συναρτήσεων  $f$  και  $g$  ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ( $x, y$ ) για το χάρτη.



**Εικόνα 2.7** Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με ορθογώνιες συντεταγμένες.

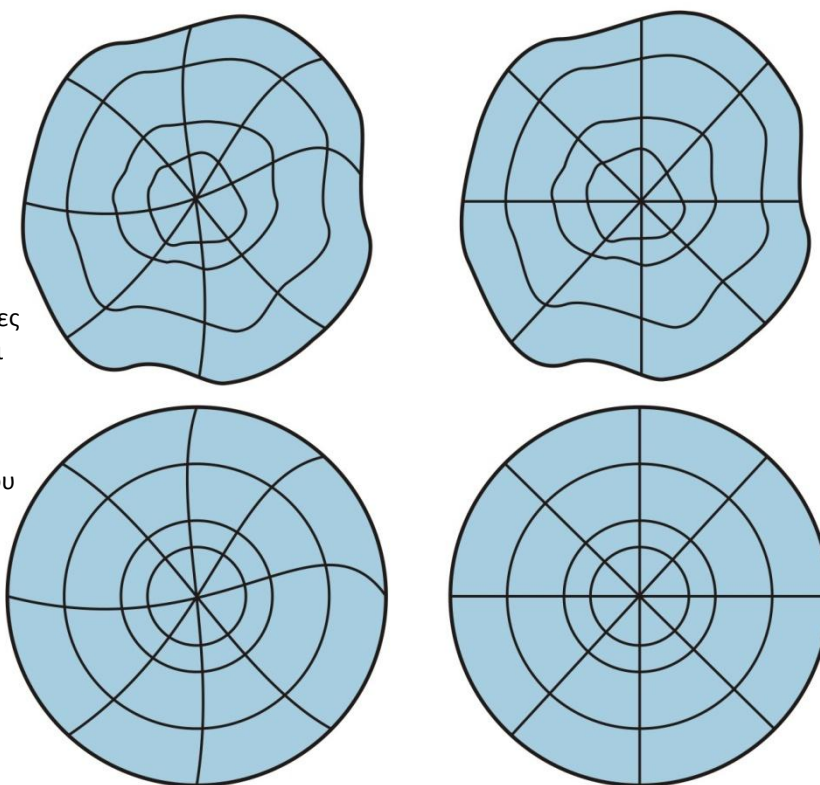
Στην πρώτη περίπτωση (Εικόνα 2.7-πάνω αριστερά) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι:  $x=f(\phi, \lambda)$  και  $y=g(\phi, \lambda)$  και οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων είναι εν γένει καμπύλες γραμμές. Στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 2.7-πάνω δεξιά) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει:  $x=f(\lambda)$  και  $y=g(\phi, \lambda)$ . Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη:  $x$  είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση (Εικόνα 2.7-κάτω αριστερά) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει:  $x=f(\phi, \lambda)$  και  $y=g(\phi)$ . Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη:  $y$  είναι συνάρτηση μόνον του



γεωγραφικού πλάτους, οπότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Τέλος, όταν ισχύει:  $x=f(\lambda)$  και  $y=g(\phi)$ , τότε και οι μεσημβρινοί αλλά και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών (Εικόνα 2.7-κάτω δεξιά). Η τελευταία αυτή περίπτωση αναφέρεται στις ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις.

Στην Εικόνα 2.8 απεικονίζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων χαρακτηριστικών περιπτώσεων συναρτήσεων  $f$  και  $g$  ως προς ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων  $(\rho, \theta)$  για το χάρτη.

**Σχήμα 2.8:** Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με πολικές συντεταγμένες.



Στην πρώτη περίπτωση (Εικόνα 2.8-πάνω αριστερά) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, όταν οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι:  $\rho=f(\phi, \lambda)$  και  $\theta=g(\phi, \lambda)$  τότε εικόνες των παραλλήλων είναι κλειστές καμπύλες γραμμές και των μεσημβρινών κεντρική δέσμη καμπύλων γραμμών. Στη δεύτερη περίπτωση (Εικόνα 2.8-πάνω δεξιά) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει:  $\rho=f(\phi, \lambda)$  και  $\theta=g(\lambda)$ . Δηλαδή, η πολική γωνία:  $\theta$  είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια κεντρική δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση (Εικόνα 2.8- κάτω αριστερά) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει:  $\rho=f(\phi)$  και  $\theta=g(\phi, \lambda)$ . Δηλαδή, η πολική ακτίνα:  $\rho$  είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού πλάτους, τότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν ομόκεντρους κύκλους. Τέλος, όταν ισχύει:  $\rho=f(\phi)$  και  $\theta=g(\lambda)$ ,

τότε οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι (Εικόνα 2.8-κάτω δεξιά).

Ανάλογα με τις παραμορφώσεις που επιφέρουν σε γεωμετρικά μεγέθη, οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: σύμμορφες, ισοδύναμες και ισαπέχουσες. Σύμμορφες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων, δηλαδή διατηρούν το σχήμα τους. Ισοδύναμες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα εμβαδά. Τέλος, ισαπέχουσες ονομάζονται εκείνες οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη σε ορισμένες μόνο διευθύνσεις.

Συνήθως, επιλέγουμε μια απεικόνιση με βασικό κριτήριο την απλότητα των σχέσεων που την ορίζουν, όμως πολλές φορές το είδος του χάρτη που πρόκειται να δημιουργηθεί είναι δυνατό να καθορίζει το είδος της απεικόνισης που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι, για τους θεματικούς χάρτες χρησιμοποιούμε συνήθως ισοδύναμες απεικονίσεις ενώ για τους τοπογραφικούς χάρτες σύμμορφες. Πολλές φορές, χρησιμοποιούμε πλάγιες απεικονίσεις για να ελαχιστοποιήσουμε τις παραμορφώσεις σε μια περιορισμένη περιοχή.

#### 2.4 Βιβλιογραφία

- Βέης Γ., 1977, *Μαθηματική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας & Χαρτογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Cuenin R., 1972, *Cartographie Generale*, Tome 1, Paris: Editions Eyrolles.
- Maling D.H., 1973, *Coordinate systems and map projections*, London: G. Philip & Son Ltd.
- Νάκος Β. & Β. Φιλίππακοπούλου, 1993, *Γενική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Richardus P. & R.K. Adler, 1972, *Map projections*, Amsterdam: North-Holland Pub. Co.
- Tobler W.R., 1962, "A classification of map projections", *Annals of the Association of American Geographers*, 52: 167-75.



## Κεφάλαιο 3

### 3. ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

#### 3.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές απεικονίσεις

Από το πλήθος των απεικονίσεων που μπορούμε να φανταστούμε για να απεικονίσουμε την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς ή μιας σφαίρας στο επίπεδο μόνο ένας μικρός σχετικά αριθμός χρησιμοποιείται στην πράξη για χαρτογραφικούς σκοπούς και μάλιστα, ένας ακόμη μικρότερος για γεωδαιτικούς σκοπούς.

Ένα σύστημα προβολής ή απεικόνισης μπορεί να προκύψει με γεωμετρικό ή αναλυτικό τρόπο. Ο νόμος της απεικόνισης μπορεί να ορισθεί ακόμα και αυθαίρετα αλλά συνήθως στην πράξη προκύπτει από την ολοκλήρωση μιας διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες. Ένας απλός τρόπος δημιουργίας μιας οικογένειας συστημάτων απεικόνισης είναι να ξεκινήσουμε με μια απλή ισαπέχουσα απεικόνιση στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου ή κώνου ή στο επίπεδο, και στη συνέχεια, να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη ή ισοδύναμη. Μπορούμε ακόμα να εφαρμόσουμε στροφή  $90^\circ$  στην αναπτυσσόμενη επιφάνεια μιας ορθής απεικόνισης για να παραχθεί μια εγκάρσια ή μια τυχαία στροφή με σκοπό να δημιουργηθεί μια πλάγια απεικόνιση.

#### 3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις

Οι κυλινδρικές απεικονίσεις προκύπτουν από την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου, η οποία εφάπτεται σε αυτήν.

##### 3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή

Η ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή ορίζεται στη σφαίρα από τις σχέσεις:

$$x = R \lambda,$$

$$y = R \phi,$$

όπου:  $R$  η ακτίνα της σφαίρας.

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις αυτές οι γεωγραφικές συντεταγμένες, συναρτήσει των ορθογωνίων δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\phi = \frac{y}{R}.$$

Οι σχέσεις της προβολής για την απεικόνιση της επιφάνειας ενός ελλειψοειδούς, είναι:

$$x = a \lambda \text{ και}$$

$$y = M,$$

όπου:  $a$  ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και  $M$  το μήκος του τόξου του μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι το πλάτος  $\phi$ .

Το μήκος του τόξου του μεσημβρινού ( $M$ ) υπολογίζεται με τη βοήθεια του παρακάτω αναπτύγματος σειρών:

$$M = a(1 - e^2)(M_0\phi - M_2\sin 2\phi + M_4\sin 4\phi - M_6\sin 6\phi).$$

Οι παραστάσεις  $M_0$ ,  $M_2$ ,  $M_4$  και  $M_6$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots$$

$$M_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \dots$$

$$M_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \dots$$

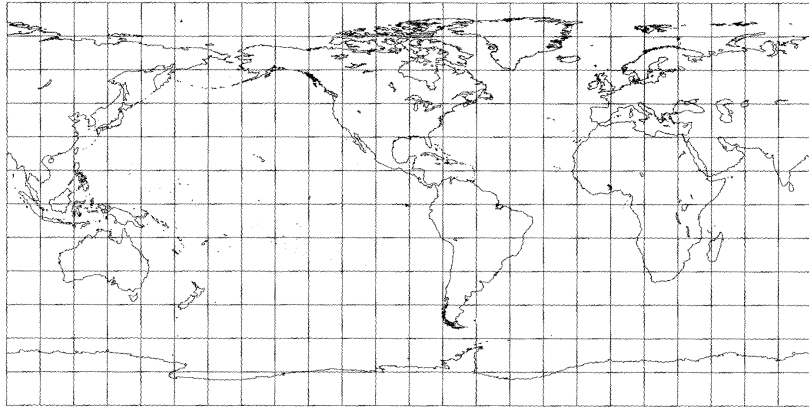
$$M_6 = \frac{35}{3072}e^6 + \dots,$$

όπου:  $e$  η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Εξετάζοντας τις σχέσεις αυτές εύκολα παρατηρούμε ότι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται σε ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που μάλιστα στην περίπτωση της σφαίρας ισαπέχουν. Δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας, το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων απεικονίζεται στο επίπεδο σε ένα δίκτυο τετραγώνων (Εικόνα 3.1).

Οι κύριες κλίμακες της απεικόνισης, δηλαδή οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, για τη σφαίρα θα είναι:

**Εικόνα 3.1:** Η Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή.



$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{R d\phi} = \frac{R d\phi}{R d\phi} = 1,$$

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{R \cos\phi d\lambda} = \frac{R d\lambda}{R \cos\phi d\lambda} = \frac{1}{\cos\phi}.$$

Ενώ για το ελλειψοειδές θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{dM} = \frac{dM}{dM} = 1,$$

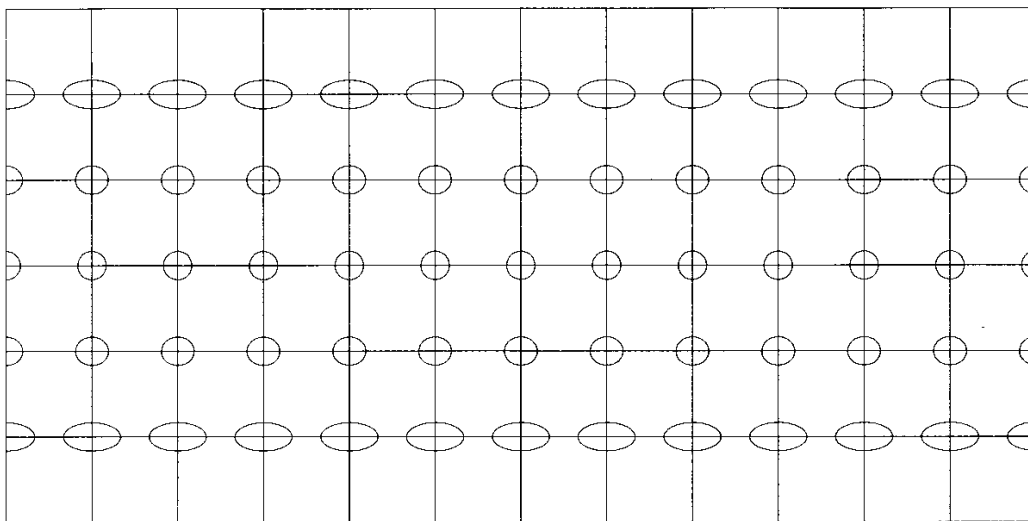
$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{N \cos\phi d\lambda} = \frac{a d\lambda}{\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} \cos\phi d\lambda} = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}}{\cos\phi}.$$

Εξετάζοντας τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, συμπεραίνουμε ότι τα μήκη των μεσημβρινών διατηρούνται αναλλοίωτα στο επίπεδο της απεικόνισης και επειδή ισχύει  $m_p \geq m_m$ , ο μεγάλος ημιάξονας της δείκτριας Tissot είναι προσανατολισμένος κατά τη διεύθυνση των παραλλήλων.

Για τις παραμορφώσεις επιφανειών και γωνιών, εάν αντικαταστήσουμε στις γνωστές σχέσεις τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε για τη σφαίρα:

$$M = \frac{1}{\cos\phi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\phi}{2}.$$

Η προβολή αυτή δεν είναι σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Είναι όμως ιδιαίτερα απλή. Οι παραμορφώσεις είναι αρκετά σημαντικές εκτός από τις περιοχές που βρίσκονται κοντά στον ισημερινό (Εικόνα 3.2).



**Εικόνα 3.2:** Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισαπέχουσας προβολής.

### 3.2.2 Μερκατορική προβολή

Η Μερκατορική προβολή είναι μια σύμμορφη ορθή κυλινδρική απεικόνιση. Προκύπτει από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με κατάλληλη μετάθεση των θέσεων των παραλλήλων στο επίπεδο της απεικόνισης ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της συμμορφίας. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{R d\phi} = \frac{dx}{R \cos \phi d\lambda}.$$

Όμως:  $dx = R d\lambda$ , οπότε θα έχουμε:

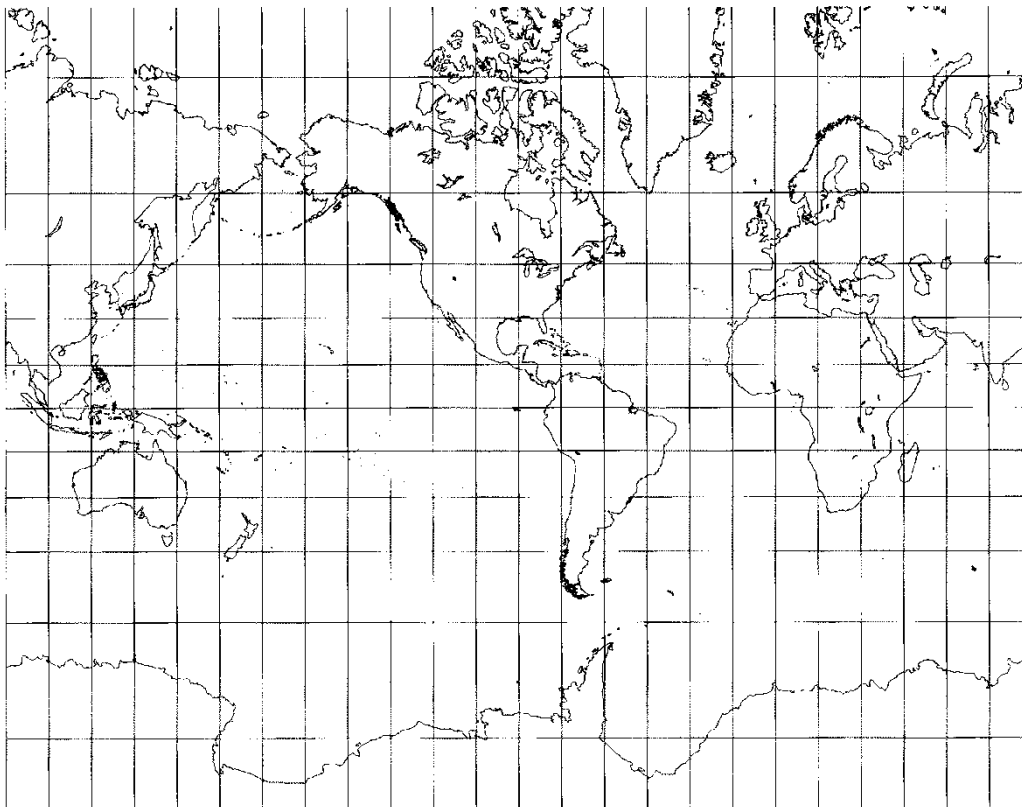
$$dy = \frac{R}{\cos \phi} d\phi \Rightarrow y = R \int_0^{\phi} \frac{1}{\cos \phi} d\phi.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = R \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right).$$

Στην απεικόνιση αυτή οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών και μάλιστα οι μεσημβρινοί ισαπέχουν μεταξύ τους (Εικόνα 3.3). Η ορθή Μερκατορική προβολή είναι σύμμορφη απεικόνιση ( $\epsilon=0$ ), δηλαδή

οι ελλείψεις παραμόρφωσης εκφυλίζονται σε κύκλους (Εικόνα 3.4). Οι κύριες κλίμακες (δηλαδή, οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο) δίνονται από τις σχέσεις:



Εικόνα 3.3: Η Μερκατορική προβολή.

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos \phi},$$

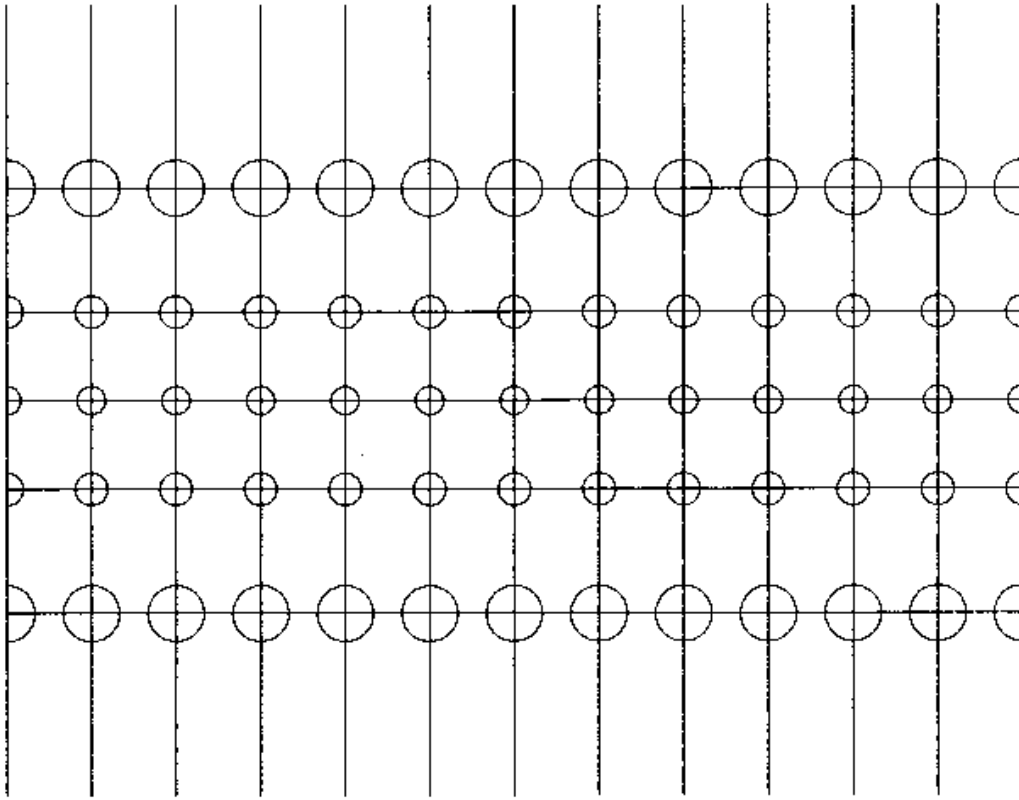
ενώ, η επιφανειακή κλίμακα θα είναι:

$$M = \frac{1}{\cos^2 \phi}.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την προβολή, προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\phi = 2 \arctan \left( e^{\frac{y}{R}} \right) - \frac{\pi}{2}.$$



**Εικόνα 3.4:** Οι εκφυλισμένες σε κύκλους ελλείψεις παραμόρφωσης της Μερκατορικής προβολής.

Στην περίπτωση που θέλουμε να απεικονίσουμε την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο, διατηρούμε τη σχέση:

$x = a \lambda$ , όπου:  $a$  είναι ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, λόγω του ότι επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{\rho d\phi} = \frac{dx}{N \cos \phi d\lambda}$$

Επειδή όμως:  $dx = a d\lambda$ , θα έχουμε:

$$dy = \frac{\rho a}{N \cos \phi} d\phi = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} d\phi \Rightarrow y = a \int_0^{\phi} \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} d\phi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = a \ln \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right].$$

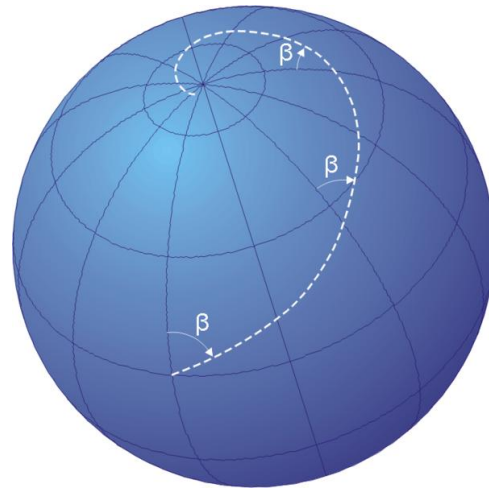
Εύκολα αποδεικνύεται ότι για τη σύμμορφη αυτή απεικόνιση οι κύριες κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στο ελλειψοειδές είναι:

$$m_m = m_p = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}{\cos \phi}.$$

Τέλος, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι:

$$M = \frac{1 - e^2 \sin^2 \phi}{\cos^2 \phi}.$$

Η Μερκατορική προβολή έχει την ιδιότητα να απεικονίζει τις λοξοδρομίες σε ευθείες γραμμές στο επίπεδο του χάρτη, γιατί, αφενός είναι σύμμορφη, αφετέρου, η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι μηδενική σε κάθε σημείο της προβολής. Οι λοξοδρομίες (Εικόνα 3.5) είναι γραμμές στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που έχουν σε κάθε σημείο σταθερό αζιμούθιο.

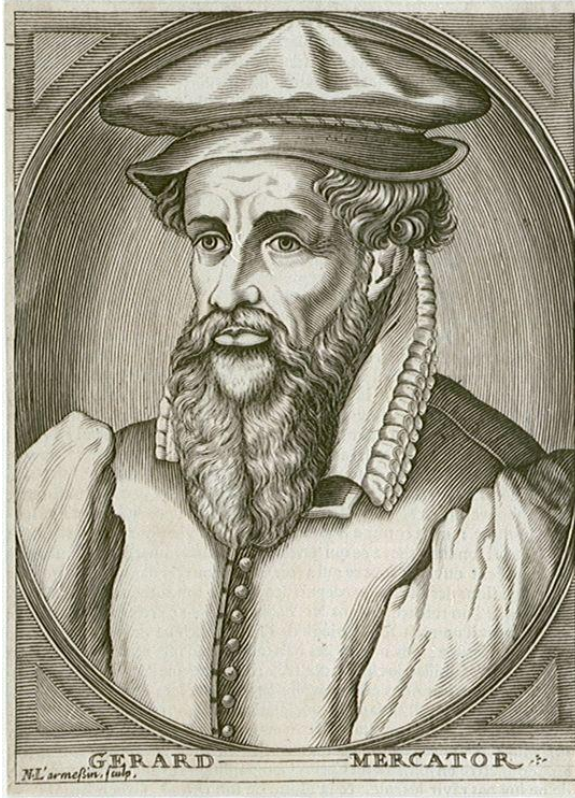


**Εικόνα 3.5:** Η λοξοδρομία στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς.

Η Μερκατορική προβολή επινοήθηκε από τον φλαμανδό χαρτογράφο Gerardus Mercator (1512-1594). Ο Mercator (Εικόνα 3.6) γεννήθηκε στην πόλη Rupelmonde. Σπούδασε στο πανεπιστήμιο της Leuven και υπήρξε μαθητής και, στη συνέχεια, συνεργάτης του μαθηματικού Gemma Frisius. Ασχολήθηκε επαγγελματικά με την κατασκευή χαρτών και υδρόγειων σφαιρών.

Η προβολή αυτή, με το να απεικονίζει τις λοξοδρομίες σε ευθείες γραμμές, αποτέλεσε μια επαναστατική τεχνολογικά επινόηση για την τεχνική της πλοήγησης. Η χρήση της εξασφαλίζει την ασφαλή και αποτελεσματική ναυσιπλοΐα σε συνδυασμό με

τη μαγνητική πυξίδα. Για το λόγο αυτό, το σύνολο των ναυτικών χαρτών, σε παγκόσμιο επίπεδο, είναι κατασκευασμένο σε Μερκατορική προβολή.



Εικόνα 3.6: Ο φλαμανδός χαρτογράφος Gerardus Mercator.

### 3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή

Ξεκινώντας πάλι από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να δημιουργήσουμε μια απεικόνιση που να είναι ισοδύναμη. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε ξανά τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της ισοδυναμίας, θα έχουμε:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{R d\phi} \frac{dx}{R \cos \phi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως:  $dx = R d\lambda$ , αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$dy = R \cos \phi d\phi \Rightarrow y = R \int_0^{\phi} \cos \phi d\phi .$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

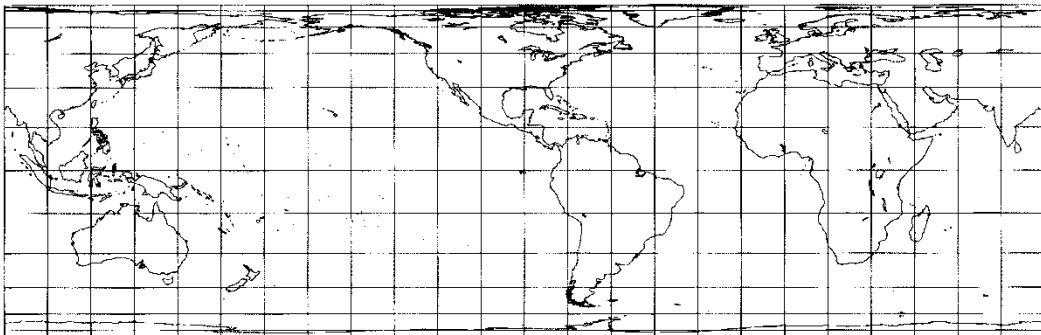


$$y = R \sin \phi.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση θα έχουμε για τις γεωγραφικές συντεταγμένες:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\phi = \arcsin \frac{y}{R}.$$



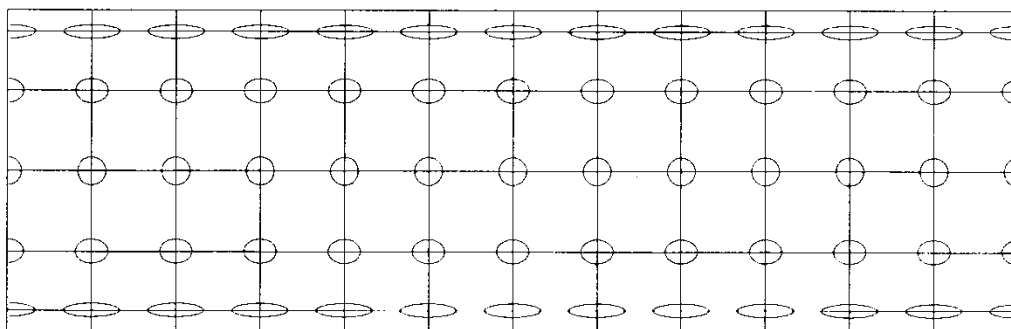
**Εικόνα 3.7:** Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή.

Η απεικόνιση αυτή (Εικόνα 3.7) είναι ισοδύναμη (δηλαδή  $M=1$ ). Οι κύριες κλίμακες στην επιφάνεια της σφαίρας, δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_m = \cos \phi \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \phi},$$

Ενώ, για τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση θα ισχύει:

$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \phi}{1 + \cos^2 \phi}.$$

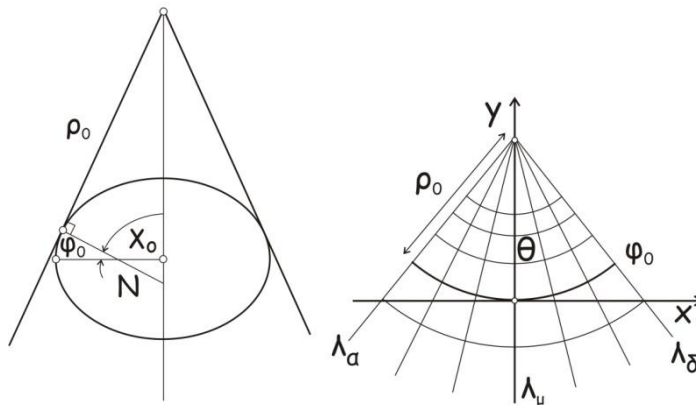


**Εικόνα 3.8:** Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισοδύναμης προβολής.

Όπως και με τις υπόλοιπες ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις, οι παραμορφώσεις και σε αυτήν αυξάνουν όσο αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος (Εικόνα 3.8). Η ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή έχει περιορισμένες εφαρμογές που κατά κανόνα αναφέρονται σε άτλαντες οι οποίοι περιλαμβάνουν χάρτες με πολύ μικρές κλίμακες και απεικονίζουν συνήθως ολόκληρη την επιφάνεια της Γης. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί η χρήση των σχέσεων της απεικόνισης στη σφαίρα.

### 3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις

Οι κωνικές προβολές προκύπτουν από ένα κώνο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα κατά μήκος ενός παράλληλου. Ο παράλληλος αυτός ονομάζεται βασικός παράλληλος και χαρακτηρίζεται από το γεωγραφικό του πλάτος ( $\phi_0$ ). Οι κωνικές προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων ( $\rho, \theta$ ). Όταν ο κώνος αναπτυχθεί στο επίπεδο οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο την κορυφή του κώνου και οι παράλληλοι ως τόξα ομόκεντρων κύκλων με το ίδιο κέντρο (Εικόνα 3.9). Η πολική ακτίνα του βασικού παράλληλου ( $\rho_0$ ) από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Εικόνα 3.9) θα είναι, για το ελλειψοειδές:



Εικόνα 3.9: Η γεωμετρία των κωνικών απεικονίσεων.

$$\rho_0 = \frac{N}{\tan \phi_0} = N \tan \chi_0,$$

όπου:  $\chi$  η πολική απόσταση, δηλαδή η συμπληρωματική γωνία του γεωγραφικού πλάτους,  $\chi = 90^\circ - \phi$ ,

ή για τη σφαίρα:

$$\rho_0 = \frac{R}{\tan \phi_0} = R \tan \chi_0.$$

Λόγω της επαφής του κώνου με την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας ο βασικός παράλληλος θα απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμορφώσεις. Επομένως,

για την πολική γωνία ( $\theta$ ) θα ισχύει:

$$d\theta = \frac{ds_{\rho_0}}{\rho_0} = \frac{N \cos \phi_0 d\lambda}{N \cot \phi_0},$$

δηλαδή:  $\theta = \lambda \sin \phi_0 = \lambda \cos \chi_0$ .

Είναι φανερό, ότι στις κωνικές απεικονίσεις η σύγκλιση των μεσημβρινών θα είναι:  $\gamma = \theta$ . Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο επίπεδο του χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = \rho_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου:  $\theta = (\lambda - \lambda_\mu) \sin \phi_0 = (\lambda - \lambda_\mu) \cos \chi_0$ , με  $\lambda_\mu$  τον μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής. Τότε, ο άξονας:  $y$  ταυτίζεται με τον μέσο μεσημβρινό της περιοχής και ο άξονας:  $x$  εφάπτεται στο βασικό παράλληλο (Εικόνα 3.9).

### 3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή

Όπως και με την προηγούμενη κατηγορία των απεικονίσεων έτσι και στις κωνικές ξεκινάμε με την ισαπέχουσα, που αποτελεί την απλούστερη των περιπτώσεων. Ο νόμος της απεικόνισης για τη σφαίρα θα ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\theta = \lambda \sin \phi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + R(\phi_0 - \phi).$$

Είναι φανερό ότι στην ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή ο πόλος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν απεικονίζεται ως σημείο αλλά ως τόξο κύκλου (Εικόνα 3.10).

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση, έχουμε για τις γεωγραφικές συντεταγμένες:

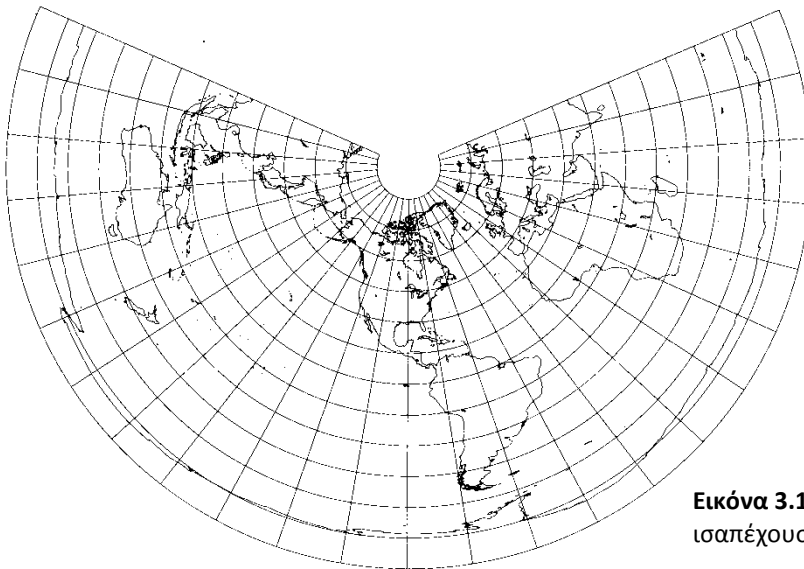
$$\lambda = \frac{\theta}{\sin \phi_0},$$

$$\phi = \phi_0 - \frac{\rho - \rho_0}{R}.$$

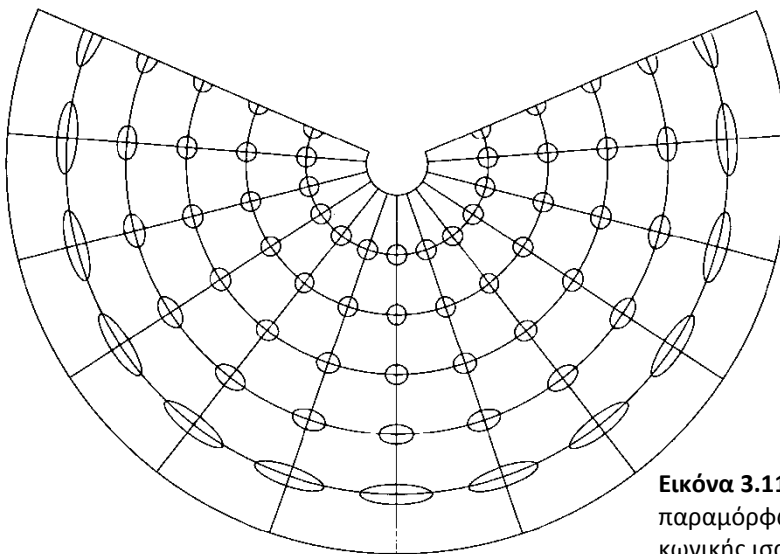
Οι κύριες κλίμακες, δηλαδή οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης κατά μεσημβρινό και παράλληλο της σφαίρας θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\phi} = \frac{R d\phi}{R d\phi} = 1,$$

και:



**Εικόνα 3.10:** Η ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή.



**Εικόνα 3.11:** Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής.

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = \frac{\rho \sin \phi_0 d\lambda}{R \cos \phi d\lambda} = \frac{\rho \sin \phi_0}{R \cos \phi}$$

Εξετάζοντας τη σχέση της κλίμακας κατά παράλληλο ( $m_p$ ) παρατηρούμε, αφενός, ότι ο βασικός παράλληλος παραμένει αναλλοίωτος, αφετέρου, ότι οι παραμορφώσεις αυξάνονται όσο απομακρυνόμαστε από το βασικό παράλληλο (Εικόνα 3.11).

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης αυτής αν η επιφάνεια της σφαίρας αντικατασταθεί από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Τότε, θα έχουμε:

$$\theta = \lambda \sin \phi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

$$\rho = \rho_0 - \mathbf{M}.$$

όπου:  $\mathbf{M}$  το τόξο μεσημβρινού από το πλάτος  $\phi_0$  μέχρι το πλάτος  $\phi$ .

### 3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert

Ξεκινώντας από την ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη μεταθέτοντας τις θέσεις των παραλλήλων (Εικόνα 3.12). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία  $\theta$ :

$$\theta = \lambda \sin \phi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε την πολική ακτίνα ( $\rho$ ) με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της σύμμορφιας. Θα πρέπει, λοιπόν, οι κύριες κλίμακες να είναι ίσες, δηλαδή:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-dp}{R d\phi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = \frac{\rho \sin \phi_0}{R \cos \phi}.$$

Επειδή όμως  $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$  και  $d\chi = -d\phi$ , θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho \cos \chi_0}{R \cos \phi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \cos \chi_0 \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\ln \rho = \cos \chi_0 \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = k \left( \tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

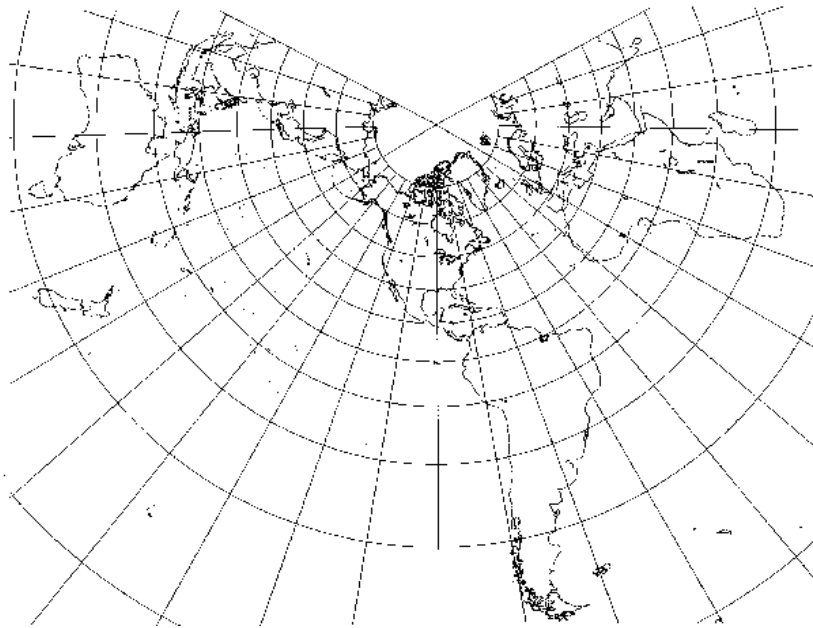
Η σταθερά  $k$  προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για  $\chi = \chi_0$  γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι:  $\rho = R \tan \chi_0$ . Επιλύοντας ως προς τη σταθερά  $k$ , θα έχουμε:

$$k = R \tan \chi_0 \left( \cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0},$$

Με αντικατάσταση, λοιπόν, για τη σύμμορφη απεικόνιση της σφαιρικής επιφάνειας στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κώνου, η πολική ακτίνα θα ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho = R \tan \chi_0 \left( \cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0} \left( \tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

Αντιστρέφοντας προκύπτουν οι σχέσεις των γεωγραφικών συντεταγμένων:



**Εικόνα 3.12:** Η σύμμορφη κωνική προβολή.

$$\lambda = \frac{\theta}{\cos \chi_0} \text{ και}$$

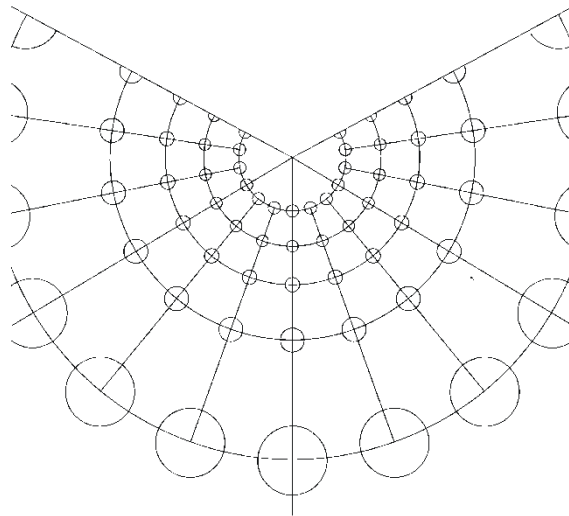
$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left( \left( \frac{\rho}{R \tan \chi_0} \right)^{\frac{1}{\cos \chi_0}} \tan \frac{\chi_0}{2} \right).$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο (δηλαδή, οι κύριες κλίμακες) θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{\rho \sin \phi_0}{R \cos \phi}.$$

Στην Εικόνα 3.13, παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής σε σκαρίφημα καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης, οι οποίες λόγω της συνθήκης της σύμμορφιας εκφυλίζονται σε κύκλους. Η σύμμορφη κωνική προβολή είχε πολύ μεγάλη διάδοση στην Ευρώπη στο διάστημα του μεσοπολέμου, για χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές. Σήμερα, έχει αντικατασταθεί από την εγκάρσια Μερκατορική προβολή.

Με ανάλογη διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

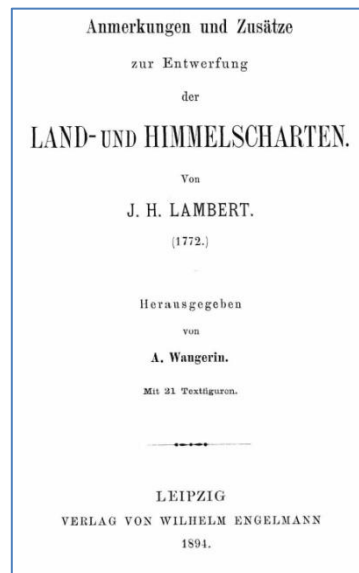


**Εικόνα 3.13:** Οι κύκλοι παραμόρφωσης της σύμμορφης κωνικής προβολής.

$$\theta = \lambda \sin \phi_0, \text{ και: } \rho = N_0 \tan \chi_0 \left( \frac{\tan \left( 45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \phi}{1 - e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}}}{\tan \left( 45^\circ - \frac{\phi_0}{2} \right) \left( \frac{1 + e \sin \phi_0}{1 - e \sin \phi_0} \right)^{\frac{e}{2}}} \right)^{\sin \phi_0} .$$



**Εικόνα 3.14:** Ο ελβετός μαθηματικός-χαρτογράφος Johann Heinrich Lambert.



**Εικόνα 3.15:** Το εξώφυλλο της εργασίας του Johann Heinrich Lambert που εισήγαγε τις επτά απεικονίσεις σε αναδημοσίευση του 1894.

Οι κύριες κλίμακες στο ελλειψοειδές είναι:

$$m = m_m = m_p = \frac{\rho \sin \phi_0}{N \cos \phi}$$

Η σύμμορφη κωνική προβολή επινοήθηκε από τον ελβετό μαθηματικό και χαρτογράφο Johann Heinrich Lambert (Εικόνα 3.14). Η προβολή ήταν η πρώτη από τις επτά απεικονίσεις που εισήγαγε σε μια προσπάθεια διαμόρφωσης γενικευμένης θεωρίας αναπαράστασης της επιφάνειας της σφαίρας στο επίπεδο, διατηρώντας αναλλοίωτες είτε τις γωνίες ή τα εμβαδά. Η εργασία του είχε τον τίτλο: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (μτφ. *Σημειώσεις και σχόλια για τη σύνθεση γήινων και ουράνιων χαρτών*) και δημοσιεύτηκε το 1772 (Εικόνα 3.15). Ο Lambert (1728-1777) γεννήθηκε στο Mülhausen της Αλσατίας και διετέλεσε μέλος της Πρωσικής Ακαδημίας των Επιστημών του Βερολίνου ύστερα από εισήγηση του μαθηματικού Leonhard Euler.

### 3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers

Η ορθή κωνική προβολή μετατρέπεται σε ισοδύναμη αν η πολική ακτίνα προσδιοριστεί με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της ισοδυναμίας (Εικόνα 3.16). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία  $\theta$ :

$$\theta = \lambda \sin \phi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$

Ας προσδιορίσουμε τώρα την πολική ακτίνα εξασφαλίζοντας τη συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή για να διαμορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση της πολικής ακτίνας ( $\rho$ ), θα έχουμε:

$$\frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\phi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως:  $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$  και  $d\chi = -d\phi$ . Θα έχουμε:

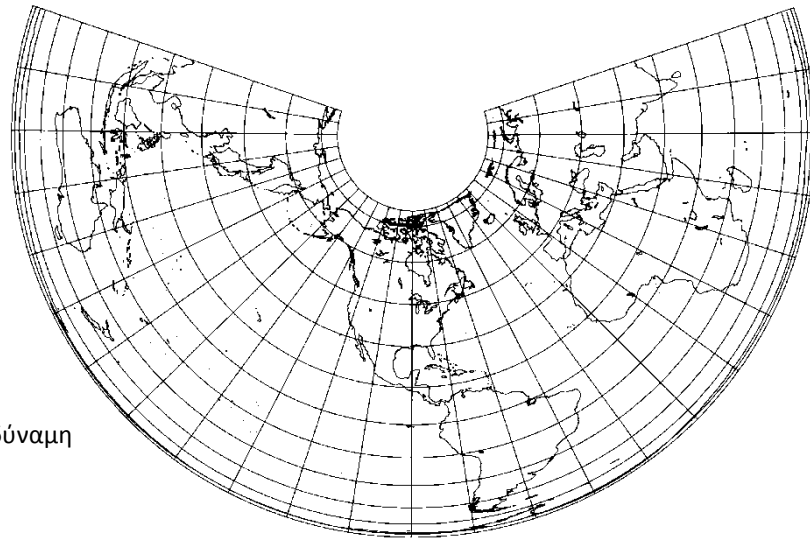
$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho \cos \chi_0}{R \sin \chi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \frac{\sin \chi}{\cos \chi_0} d\chi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

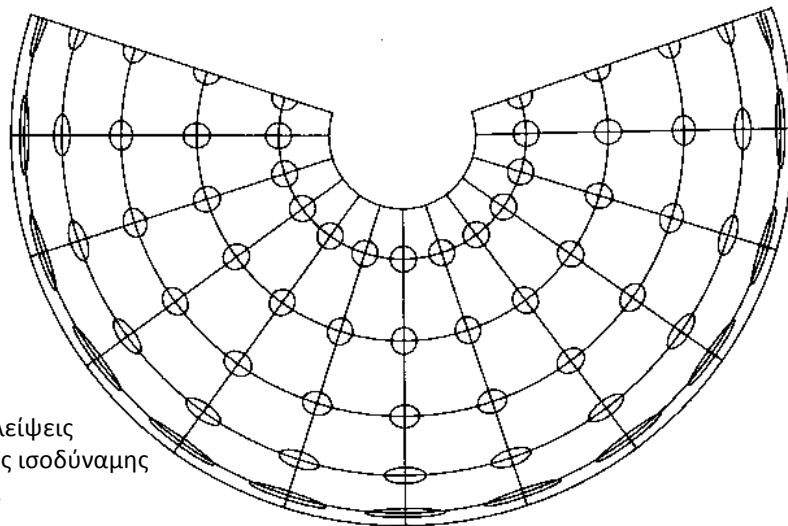
$$\rho^2 = -2R^2 \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} + C.$$

Η σταθερά  $C$  προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για  $\chi = \chi_0$  γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι:  $\rho = R \tan \chi_0$ . Επιλύοντας ως προς τη





**Εικόνα 3.16:** Η ισοδύναμη κωνική προβολή.



**Εικόνα 3.17:** Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ισοδύναμης κωνικής προβολής.

σταθερά  $C$ , θα έχουμε:

$$C = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2.$$

Με αντικατάσταση, λοιπόν, για την ισοδύναμη απεικόνιση της επιφάνειας της σφαίρας στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κώνου, η πολική ακτίνα ( $\rho$ ) θα ορίζεται από τη σχέση:

$$\rho^2 = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2 \left( 1 - \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} \right).$$

Ας σημειωθεί, ότι και σε αυτήν την απεικόνιση η εικόνα του πόλου του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν θα είναι σημείο αλλά τόξο κύκλου. Στην Εικόνα 3.17, παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων και οι ελλείψεις παραμόρφωσης σε σκαρίφημα.

Η ισοδύναμη κωνική προβολή επινοήθηκε από τον γερμανό χαρτογράφο Heinrich Christian Albers (1773-1833).

### 3.3.4 Ισοδύναμη προβολή του Bonne

Η ισοδύναμη προβολή του Bonne είναι μια ισοδύναμη απεικόνιση που διατηρεί τους παράλληλους της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής αλλά μετασχηματίζει τους μεσημβρινούς με τρόπο που να ικανοποιείται η ιδιότητα της ισοδυναμίας. Επειδή στην απεικόνιση αυτή διατηρούνται οι παράλληλοι της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής η κλίμακα κατά τη διεύθυνση των μεσημβρινών είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή τα μήκη κατά τον παράλληλο ( $dp$ ) θα πρέπει να είναι ίσα με τα αντίστοιχα στην επιφάνεια της σφαίρας. Δηλαδή θα ισχύει:

$$dp = R \cos \phi d\lambda = R \sin \chi d\lambda .$$

Επομένως η πολική γωνία ( $\theta$ ) θα δίνεται από τις σχέσεις:

$$d\theta = \frac{ds_p}{\rho} = \frac{R \sin \chi}{\rho} d\lambda = \frac{R \cos \phi}{\rho} d\lambda \Rightarrow \theta = \frac{R \sin \chi}{\rho} \lambda = \frac{R \cos \phi}{\rho} \lambda ,$$

όπου:  $\rho$  η πολική ακτίνα που διατηρείται ίση με την πολική ακτίνα της ορθής κωνικής προβολής.

Δηλαδή:

$$\rho = \rho_0 + R(\phi_0 - \phi) = \rho_0 + R(\chi - \chi_0) ,$$

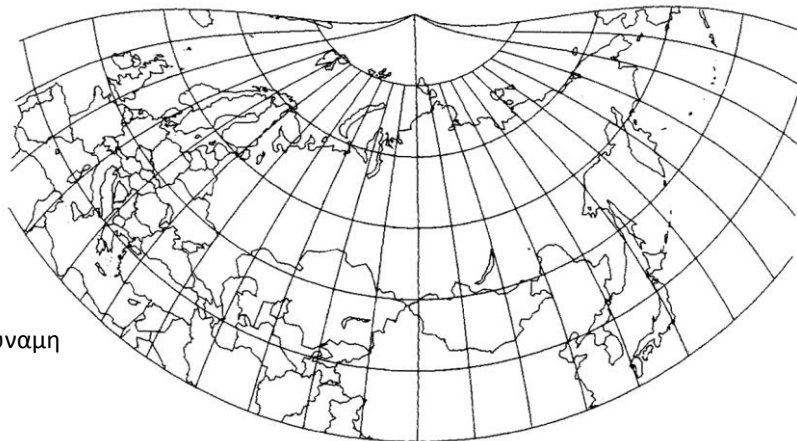
με  $\rho_0$ :

$$\rho_0 = \frac{R}{\tan \phi_0} = R \tan \chi_0 .$$

Στην προβολή του Bonne ο πόλος απεικονίζεται ως σημείο ενώ αντίθετα στις τρεις προηγούμενες κωνικές προβολές ο πόλος απεικονιζόταν ως κυκλικό τόξο (Εικόνα 3.18). Επίσης, ενώ οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στις διευθύνσεις των μεσημβρινών και των παραλλήλων είναι ίσες με τη μονάδα δεν είναι οι κύριες κλίμακες της απεικόνισης και μάλιστα οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων τους στο επίπεδο της απεικόνισης εν γένει δεν τέμνονται κάθετα. Η προβολή του Bonne είχε μεγάλη χρήση σε χαρτογραφικές εφαρμογές στις αρχές του 20ου αιώνα στην Ευρώπη.

Η προβολή πήρε την ονομασία της από τον γάλλο γεωγράφο Rigobert Bonne (1727–1795). Ο Bonne υπήρξε, παράλληλα, ένας από τους σημαντικότερους

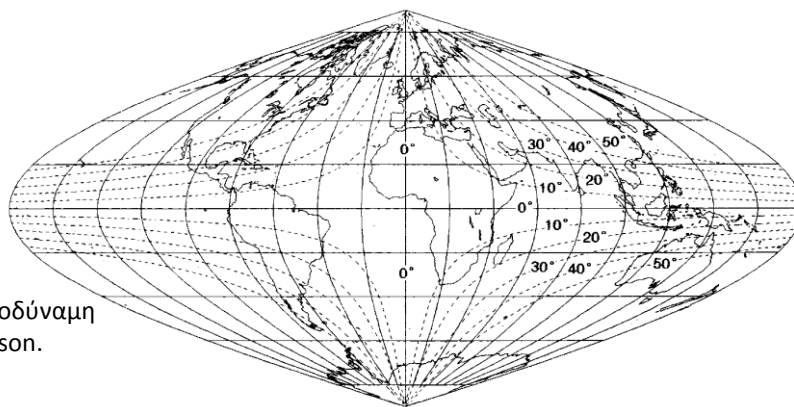
χαρτογράφους του τέλους του 18ου αιώνα.



**Εικόνα 3.18:** Η ισοδύναμη προβολή του Bonne.

### 3.3.5 Ισοδύναμη προβολή του Sanson

Η ισοδύναμη προβολή του Sanson αποτελεί μια απλοποιημένη έκφραση της ισοδύναμης προβολής του Bonne μετατρέποντας την αναπτυσσόμενη επιφάνεια από κώνο σε κύλινδρο. Επομένως οι σχέσεις της απεικόνισης μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις της ισοδύναμης προβολής του Bonne αν θέσουμε όπου  $\phi_0=0^\circ$  ή  $\chi_0=90^\circ$ .



**Εικόνα 3.19:** Η ισοδύναμη προβολή του Sanson.

Δηλαδή θα έχουμε:

$$x = R \lambda \cos \phi \text{ και}$$

$$y = R \phi.$$

Στο επίπεδο της προβολής οι παράλληλοι απεικονίζονται ως δέσμη παράλληλων ευθειών και οι μεσημβρινοί ως ημιτονικές καμπύλες (Εικόνα 3.19). Η ισοδύναμη προβολή του Sanson χρησιμοποιείται σε θεματικούς χάρτες που κατά κανόνα περιλαμβάνονται σε άτλαντες, οι οποίοι, συνήθως, απεικονίζουν σε πολύ μικρές κλίμακες ολόκληρη την επιφάνεια της Γης.

Η προβολή πήρε την ονομασία της από τον γάλλο χαρτογράφο Nicolas Sanson (1600–1667)(Εικόνα 3.20).



Εικόνα 3.20: Ο Γάλλος χαρτογράφος Nicolas Sanson.

### 3.3.6 Ισοδύναμη προβολή του Mollweide

Με την ισοδύναμη προβολή του Mollweide απεικονίζεται ολόκληρη η επιφάνεια της Γης ως μια έλλειψη της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας - εικόνα του ισημερινού - είναι διπλάσιος του μικρού ημιάξονα - εικόνα του κεντρικού μεσημβρινού. Στην απεικόνιση οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως ελλείψεις που τέμνουν τον ισημερινό σε ισαπέχουσες αποστάσεις. Ο μεσημβρινός που αντιστοιχεί σε γεωγραφικό πλάτος  $\lambda = \pm 90^\circ$  απεικονίζεται ως κύκλος. Οι παράλληλοι απεικονίζονται ως δέσμη παράλληλων ευθειών που δεν ισαπέχουν (Σχήμα 3.21). Οι αποστάσεις των παραλλήλων από την εικόνα του ισημερινού ( $y$ ) ικανοποιούν τη συνθήκη της ισοδυναμίας και δίνονται από τη σχέση:

$$y = R\sqrt{2} \sin\omega,$$

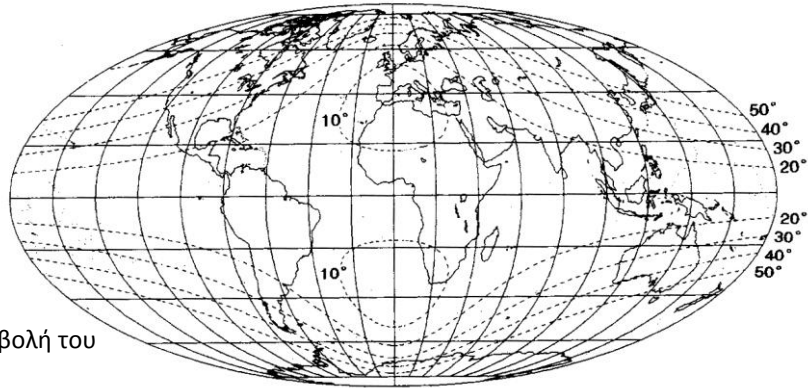
όπου:  $\omega$  μια βοηθητική γωνία.

Η βοηθητική γωνία συνδέεται με το γεωγραφικό πλάτος ( $\phi$ ) από τη σχέση:

$$\sin\phi = \frac{2\omega}{\pi} + \frac{\sin 2\omega}{\pi}.$$

Η προβολή επινοήθηκε από τον γερμανό μαθηματικό και χαρτογράφο Karl Brandan Mollweide (1774-1825). Το 1881 έγινε καθηγητής της αστρονομίας στο αστεροσκοπείο του πανεπιστημίου του Leipzig, και στη συνέχεια, το 1814 έγινε καθηγητής των μαθηματικών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Ο Mollweide εισηγήθηκε τη χρήση της συγκεκριμένης προβολής το 1805, ως καταλληλότερης σε σχέση με τη Μερκατορική

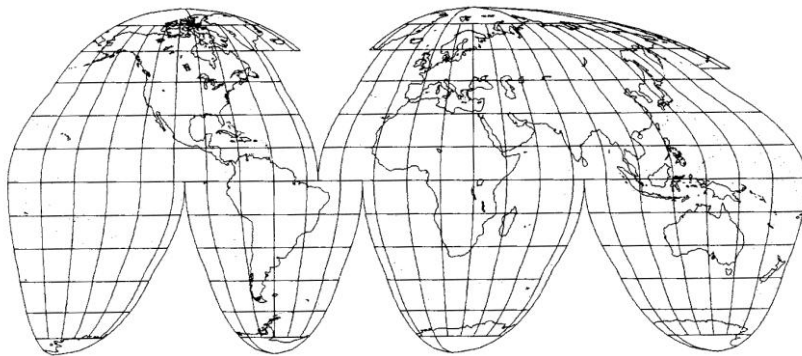
προβολή για παγκόσμιους χάρτες, δεδομένου ότι αφενός, απεικονίζει ολόκληρη την επιφάνεια της Γης, αφετέρου έχει μικρότερες παραμορφώσεις.



**Εικόνα 3.21:** Η προβολή του Mollweide.

### 3.3.7 Διακοπτόμενες προβολές

Οι προβολές των Mollweide και Sanson έχουν μικρές σχετικά παραμορφώσεις κοντά στο κέντρο της προβολής αλλά σχετικά μεγάλες παραμορφώσεις στα άκρα. Για αυτόν το λόγο συχνά οι προβολές αυτές εφαρμόζονται σε παγκόσμιους χάρτες ως διακοπτόμενες χρησιμοποιώντας περισσότερους του ενός κεντρικούς μεσημβρινούς και μάλιστα ορισμένες φορές διαφορετικούς για το βόρειο και νότιο ημισφαίριο (Εικόνα 3.22). Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται η συνέχεια των ηπειρών στην απεικόνιση.



**Εικόνα 3.22:** Παράδειγμα διακοπτόμενης προβολής.

Οι κεντρικοί μεσημβρινοί που χρησιμοποιούνται επιλέγονται με τρόπο που να απεικονίζονται με μικρές παραμορφώσεις όσες περιοχές επιθυμούμε. Η μέθοδος αυτή των διακεκομμένων προβολών μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλες απεικονίσεις.

### 3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις

Οι επίπεδες προβολές προκύπτουν από ένα επίπεδο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα σε κάποιο σημείο. Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις το σημείο αυτό είναι ο πόλος της Γης. Στη συνέχεια, τα σημεία από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προβάλλονται στο επίπεδο. Οι επίπεδες προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων  $(\rho, \theta)$ . Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις, ή αζιμουθιακές όπως αλλιώς λέγονται, οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο τον πόλο της Γης και οι παράλληλοι ως ομόκεντροι κύκλοι με το ίδιο κέντρο.

Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = y_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου:  $\theta = \lambda - \lambda_\mu$ , με  $\lambda_\mu$ : το μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής.

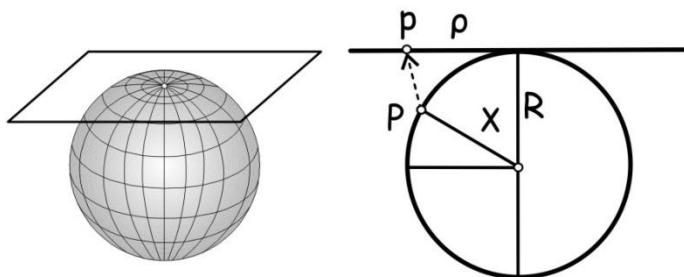
Ο άξονας  $y$  ταυτίζεται με την εικόνα του μέσου μεσημβρινού της περιοχής και ο άξονας  $x$  εφάπτεται στον παράλληλο για τον οποίο η πολική ακτίνα είναι ίση με  $\rho = y_0$ .

#### 3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να οριστεί σε αντιστοιχία με την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή αν αντί για ορθογώνιες χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες. Ο πόλος της σφαίρας απεικονίζεται σε σημείο, οι μεσημβρινοί σε κεντρική δέσμη ευθειών που συντρέχουν στον πόλο και οι παράλληλοι σε ομόκεντρος κύκλους με κέντρο τον πόλο. Οι ακτίνες των παραλλήλων είναι ίσες με τις πραγματικές τους αποστάσεις πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, με αφετηρία μέτρησης τον πόλο (Εικόνα 3.23). Για την απεικόνιση αυτή θα έχουμε:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \chi.$$



**Εικόνα 3.23:** Η γεωμετρική αρχή της ορθής επίπεδης ισαπέχουσας προβολής.

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις, έχουμε:

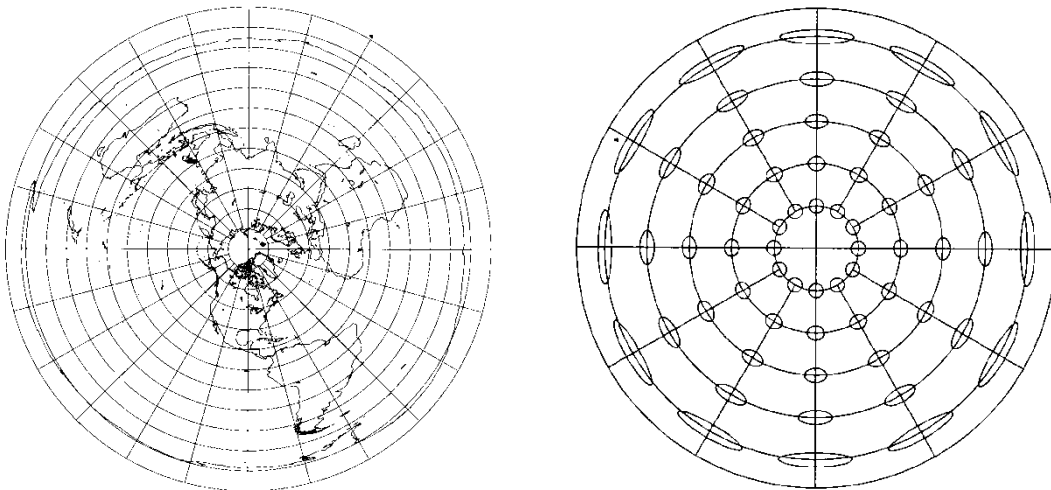
$$\lambda = \theta \text{ και } \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\phi} = \frac{-R d\chi}{-R d\chi} = 1.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos\phi d\lambda} = \frac{R \chi d\lambda}{R \sin\chi d\lambda} = \frac{\chi}{\sin\chi}.$$



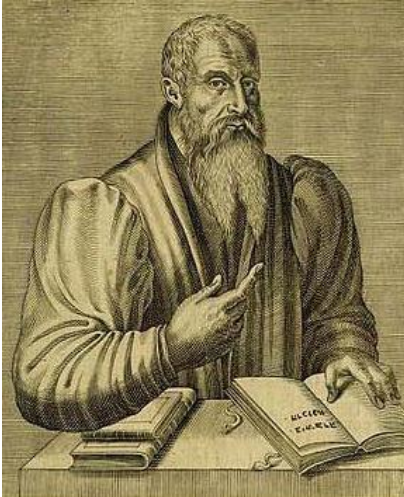
**Εικόνα 3.24:** Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή του βόρειου ημισφαιρίου της Γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

Εξετάζοντας την κλίμακα κατά μεσημβρινό παρατηρούμε ότι:  $m_p \geq 1$ . Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{\chi}{\sin\chi} \text{ και } \sin E = \frac{\chi - \sin\chi}{\chi + \sin\chi}.$$

Η προβολή είναι πολύ απλή στην κατασκευή της και οι παραμορφώσεις στην περιοχή του πόλου είναι αρκετά μικρές. Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Στην Εικόνα 3.24 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρη την επιφάνεια της Γης και (δεξιά) οι ελλείψεις παραμόρφωσης της απεικόνισης.

Η προβολή επινοήθηκε από τον γάλλο αστρονόμο και χαρτογράφο Guillaume Postel (1510-1581) (Εικόνα 3.25).



**Εικόνα 3.25:** Ο Γάλλος αστρονόμος και χαρτογράφος Guillaume Postel.

### 3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε σύμμορφη ακολουθώντας την ίδια γνωστή πλέον διαδικασία. Επομένως, για την πολική γωνία διατηρούμε τη σχέση:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της σύμμορφιας, δηλαδή:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-dp}{R d\phi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda}.$$

Επειδή όμως,  $d\theta = d\lambda$  και  $d\chi = -d\phi$ . Θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho}{R \cos \phi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

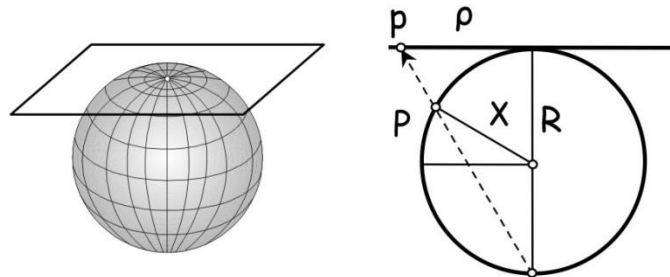
$$\ln \rho = \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = c \tan \frac{\chi}{2}.$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης μας δίνει μια οικογένεια από σύμμορφες απεικονίσεις, τα μέλη της οποίας εξαρτώνται από τη σταθερά  $c$ . Για την τιμή όμως της σταθεράς  $c=2R$ , η απεικόνιση που προκύπτει προέρχεται από κεντρική προβολή της



σφαίρας από τον αντίποδα του πόλου στο επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο (Εικόνα 3.26).

**Εικόνα 3.26:** Η γεωμετρική αρχή στερεογραφικής προβολής.



Επομένως, αν επιλέξουμε η σταθερά  $c$  να είναι:  $c=2R$ , τότε, θα έχουμε:

$$\rho = 2R \tan \frac{\chi}{2}.$$

Αντιστρέφοντας, θα έχουμε για τις γεωγραφικές συντεταγμένες:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες της προβολής κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}},$$

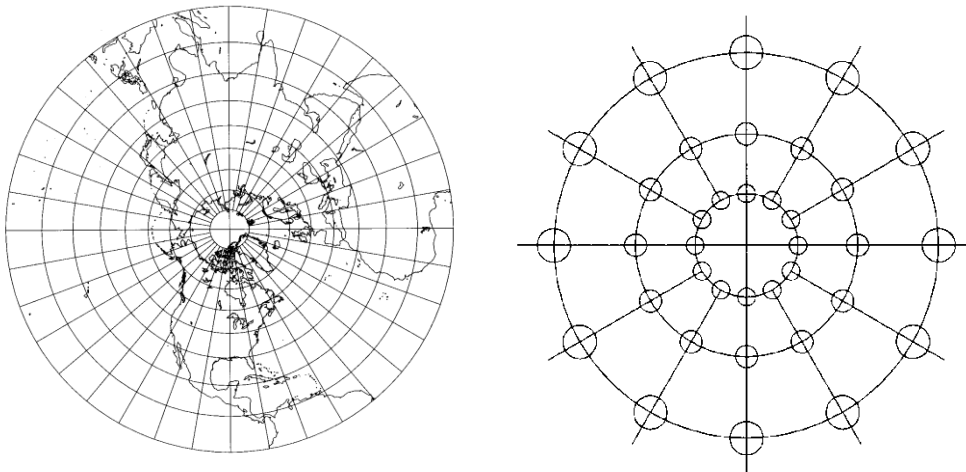
ενώ, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης θα είναι:

$$M = \frac{1}{\cos^4 \frac{\chi}{2}}.$$

**Εικόνα 3.27:** Ο Ίππαρχος, αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος.



Η προβολή αυτή ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες με την ονομασία στερεογραφική προβολή. Θεωρείται ότι επινοήθηκε από τον Ίππαρχο (190-120 π.Χ.) (Εικόνα 3.27). Χαρακτηριστική ιδιότητα της συγκεκριμένης προβολής είναι η απεικόνιση των κύκλων της σφαίρας σε κύκλους στο επίπεδο (σύμμορφη). Στην Εικόνα 3.28 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της γης.



**Εικόνα 3.28:** Η στερεογραφική προβολή (αριστερά) και οι κύκλοι παραμόρφωσης (δεξιά).

Με ανάλογη διαδικασία, μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = \left( \frac{2a^2}{b} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \tan \left( 45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) \left( \frac{1-e \sin \phi}{1+e \sin \phi} \right)^{\frac{e}{2}}.$$

### 3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμη. Για την πολική γωνία θα διατηρήσουμε τη σχέση:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{-dp}{R d\phi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως  $d\theta = d\lambda$  και  $d\chi = -d\phi$ , θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho}{R \cos \phi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \sin \chi d\chi.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\rho^2 = -2R^2 \cos \chi + C \Rightarrow \rho^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} - 2R^2 + c.$$

Η σταθερά  $c$  προσδιορίζεται για την οριακή θέση, όπου  $\chi=0$  και επομένως θα πρέπει:  $\rho=0$ , τότε:

$$c = 2R^2.$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$\rho = 2R \sin \frac{\chi}{2}.$$

Με αντιστροφή των σχέσεων θα έχουμε για τις γεωγραφικές συντεταγμένες:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = \cos \frac{\chi}{2} \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \frac{\chi}{2}}.$$

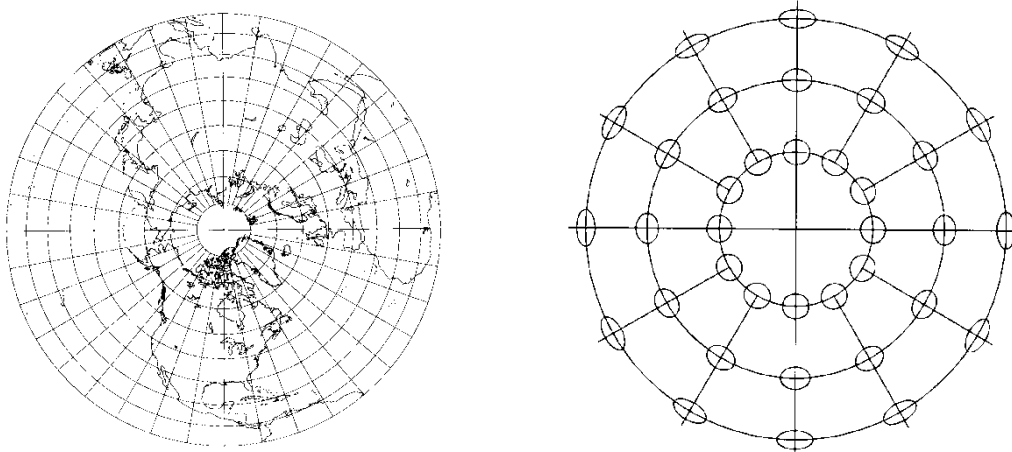
Η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης ως ισοδύναμη απεικόνιση, φυσικά, θα είναι μονάδα ( $M=1$ ), ενώ, η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση ( $E$ ) σε διεύθυνση θα είναι:

$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\chi}{2}}.$$

Στην Εικόνα 3.29 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της Γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

Η ορθή επίπεδη ισοδύναμη προβολή ονομάζεται και επίπεδη προβολή Lambert. Είναι η έκτη από τις επτά απεικονίσεις που εισήγαγε ο Johann Heinrich Lambert προσπαθώντας να διαμορφώσει μια γενικευμένη θεωρία αναπαράστασης της

επιφάνειας της σφαίρας στο επίπεδο, διατηρώντας αναλλοίωτες είτε τις γωνίες ή τα εμβαδά (δες ενότητα 3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert).



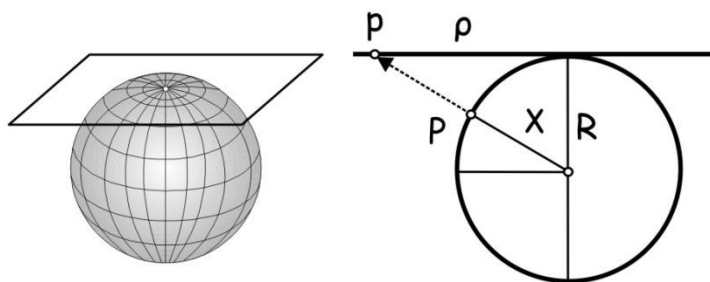
**Εικόνα 3.29:** Η ορθή επίπεδη ισοδύναμη προβολή για το βόρειο ημισφαίριο της Γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

### 3.4.4 Πολική γωνιομετρική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από γεωμετρική κεντρική προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε ένα επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο με κέντρο προβολής το κέντρο της σφαίρας. Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι (Εικόνα 3.30):

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \tan \chi.$$



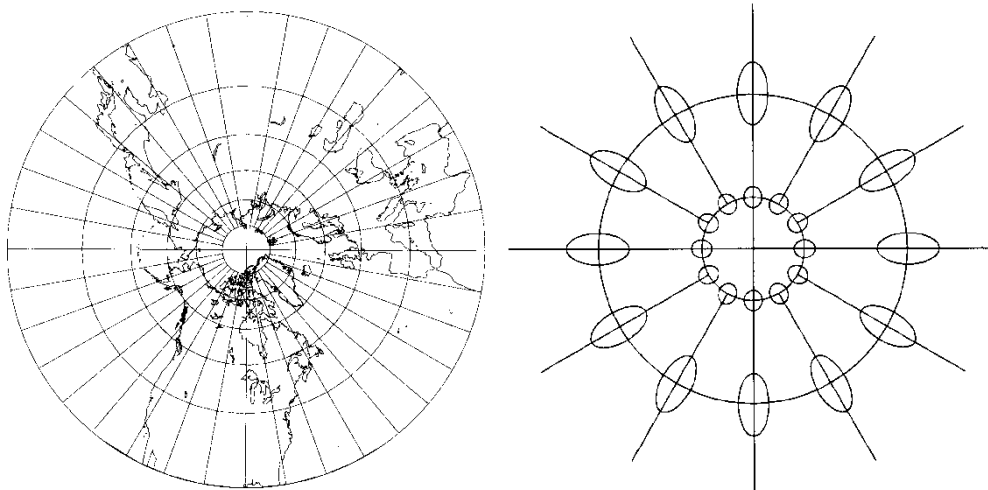
**Εικόνα 3.30:** Η γεωμετρική αρχή πολικής γωνιομετρικής προβολής.

Οι αντίστροφες σχέσεις της απεικόνισης είναι:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\rho}{R}.$$

Στην Εικόνα 3.31 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της Γης καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).



**Εικόνα 3.31:** Η γωνιοκτική προβολή (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-dp}{R d\phi} = \frac{-\frac{R}{\cos^2 \chi} d\chi}{-R d\chi} = \frac{1}{\cos^2 \chi}.$$

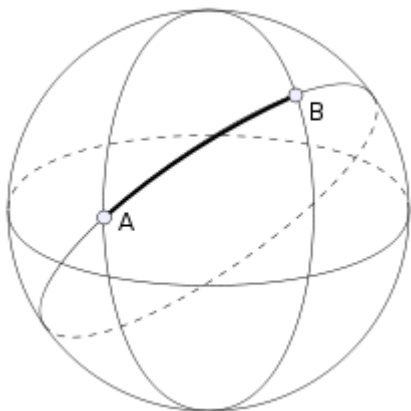
Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = \frac{R \tan \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} \Rightarrow m_p = \frac{1}{\cos \chi}.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{1}{\cos^3 \chi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}$$

Η πολική γωνιοκτική προβολή έχει τη σημαντική ιδιότητα να προβάλλονται οι μέγιστοι κύκλοι της επιφάνειας της σφαίρας σε ευθείες γραμμές. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, η συντομότερη οδός μεταξύ δύο σημείων στην επιφάνεια της σφαίρας, δηλαδή, η ορθοδρομία (Εικόνα 3.32), θα είναι στην απεικόνιση η ευθεία γραμμή που ενώνει τις προβολές των δύο σημείων.



**Εικόνα 3.32:** Η ορθοδρομία (AB) είναι η συντομότερη οδός μεταξύ των σημείων A και B πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.



**Εικόνα 3.33:** Ο αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος και γεωμέτρης Θαλής ο Μιλήσιος (~624-~547 π.Χ.).

Η γωνμονική προβολή χρησιμοποιήθηκε από τον Θαλή τον Μιλήσιο (Εικόνα 3.33) για την κατασκευή χαρτών των ουρανίων σωμάτων.

#### 3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από ορθή παράλληλη προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο της Γης (Εικόνα 3.34). Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι:

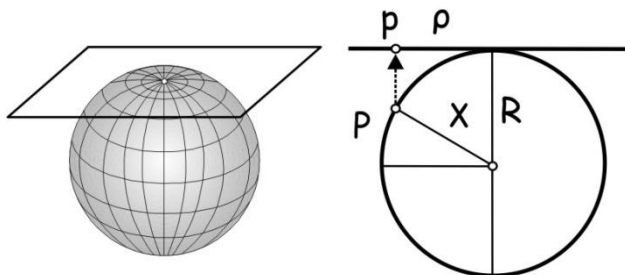
$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \sin \chi.$$

Αντιστρέφοντας προκύπτει για τις γεωγραφικές συντεταγμένες ότι:

$\lambda = \theta$  και

$$\phi = \arccos \frac{\rho}{R}$$



**Εικόνα 3.34:** Η γεωμετρική αρχή της ορθογραφικής προβολής.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

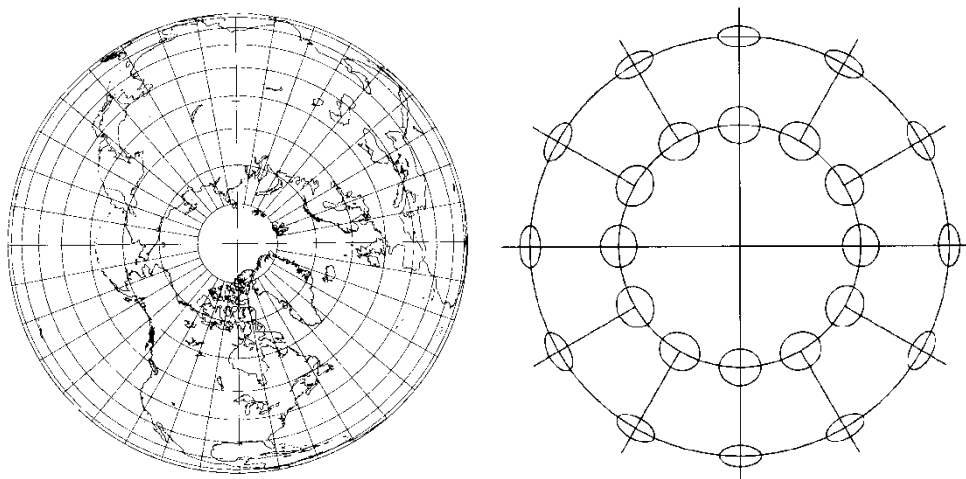
$$m_m = \frac{-d\rho}{R d\phi} = \frac{R \cos \chi d\chi}{R d\chi} = \cos \chi$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{d\rho} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \phi d\lambda} = \frac{R \sin \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} = 1$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και την μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

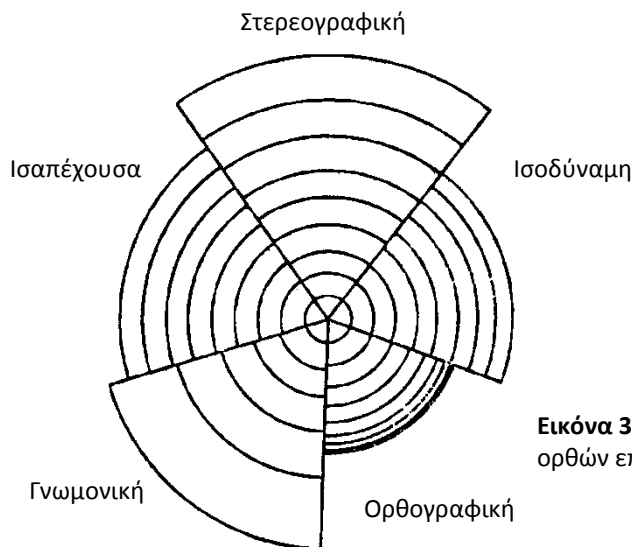
$$M = \cos \chi \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}$$



**Εικόνα 3.35:** Η ορθογραφική προβολή και οι ελλείψεις παραμόρφωσης.

Στην Εικόνα 3.35 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της Γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

Η ορθογραφική προβολή χρησιμοποιήθηκε από τον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό, αστρονόμο και γεωγράφο Ίππαρχο.



**Εικόνα 3.36:** Συγκριτική παρουσίαση των ορθών επίπεδων απεικονίσεων.

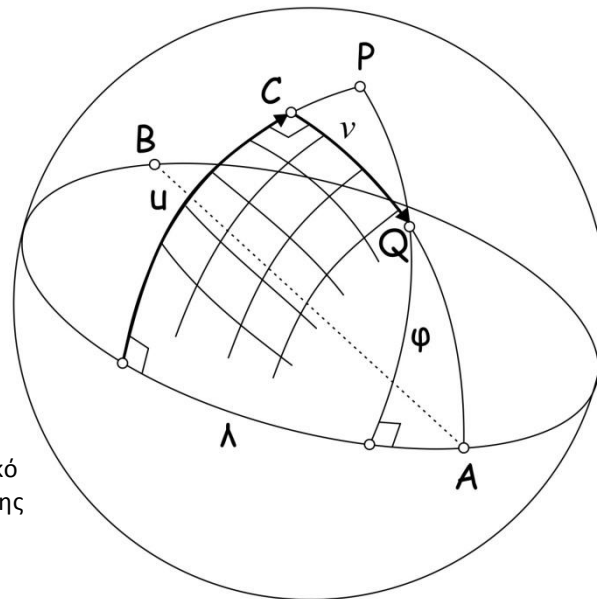
#### 3.4.6 Συγκριτική παρουσίαση ορθών επίπεδων προβολών

Είναι χρήσιμη η συγκριτική παρουσίαση των εικόνων των παραλλήλων των πέντε ορθών επίπεδων απεικονίσεων. Παρατηρώντας την Εικόνα 3.36, βλέπουμε ότι οι εικόνες των παραλλήλων της σύμμορφης απεικόνισης (στερεογραφική) απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουν προς τον ισημερινό σε σχέση με την ισαπέχουσα. Αντίθετα οι εικόνες των παραλλήλων της ισοδύναμης προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό. Ανάλογη εικόνα έχουμε και για τις δύο άλλες προβολές λόγω της γεωμετρικής αρχής ορισμού τους. Στη γνωμονική προβολή οι εικόνες των παραλλήλων απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς όμως να είναι σύμμορφη. Ενώ, οι εικόνες των παραλλήλων της ορθογραφικής προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς βέβαια να είναι ισοδύναμη.

### 3.5 Εγκάρσιες απεικονίσεις

Όλες οι απεικονίσεις που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες είναι δυνατό να μετατραπούν σε εγκάρσιες. Όλες οι εγκάρσιες απεικονίσεις μπορούν να προκύψουν από τις ορθές εφαρμόζοντας στροφή του γεωγραφικού συστήματος αναφοράς (φ,λ) κατά μία ορθή γωνία.





**Εικόνα 3.37:** Το εγκάρσιο επιφανειακό σύστημα αναφοράς στην επιφάνεια της σφαίρας.

Για την εφαρμογή της στροφής κατά  $90^\circ$  ορίζουμε στην επιφάνεια της σφαίρας ένα δίκτυο εγκάρσιων επιφανειακών συντεταγμένων  $(u, v)$  τέτοιο ώστε ο άξονας:  $v$  να ταυτίζεται με τον ισημερινό της σφαίρας και ο άξονας:  $u$  με τον κεντρικό μεσημβρινό. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο  $Q$  πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας (Εικόνα 3.37). Η θέση του στο εγκάρσιο σύστημα αναφοράς  $(u, v)$  προσδιορίζεται φέροντας την προβολή του στον άξονα  $u$ . Στο εγκάρσιο σύστημα αναφοράς  $(u, v)$  οι γραμμές με  $u = \text{σταθερό}$  είναι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας και διέρχονται από τα σημεία  $A$  (με  $\phi=0^\circ$  και  $\lambda=90^\circ$ ) και  $B$  (με  $\phi=0^\circ$  και  $\lambda=-90^\circ$ ) και οι γραμμές με  $v = \text{σταθερό}$  είναι μικροί παράλληλοι μεταξύ τους κύκλοι της σφαίρας με πόλους τα σημεία  $A$  και  $B$  (Εικόνα 3.37). Επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο  $PQC$ , οι συντεταγμένες του εγκάρσιου συστήματος αναφοράς  $(u, v)$  συναρτήσει των γεωγραφικών συντεταγμένων  $(\phi, \lambda)$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$u = \arctan\left(\frac{1}{\cot\phi \cos\lambda}\right) \text{ και } v = \arcsin(\cos\phi \sin\lambda),$$

και οι αντίστροφές τους από τις σχέσεις:

$$\phi = \arcsin(\cos v \sin u) \text{ και } \lambda = \arctan\left(\frac{1}{\cot v \cos u}\right).$$

Στις σχέσεις αυτές έχει ληφθεί ως κεντρικός μεσημβρινός αυτός που διέρχεται από το αστεροσκοπείο του Greenwich με  $\lambda_0=0^\circ$ .

Τέλος, ας σημειωθεί ότι στις εγκάρσιες απεικονίσεις οι κύριες διευθύνσεις, δηλαδή, οι διευθύνσεις στις οποίες η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης λαμβάνει την

ελάχιστη και μέγιστη τιμή, δεν είναι οι διευθύνσεις του πλέγματος των μεσημβρινών και παραλλήλων.

### 3.5.1 Εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini

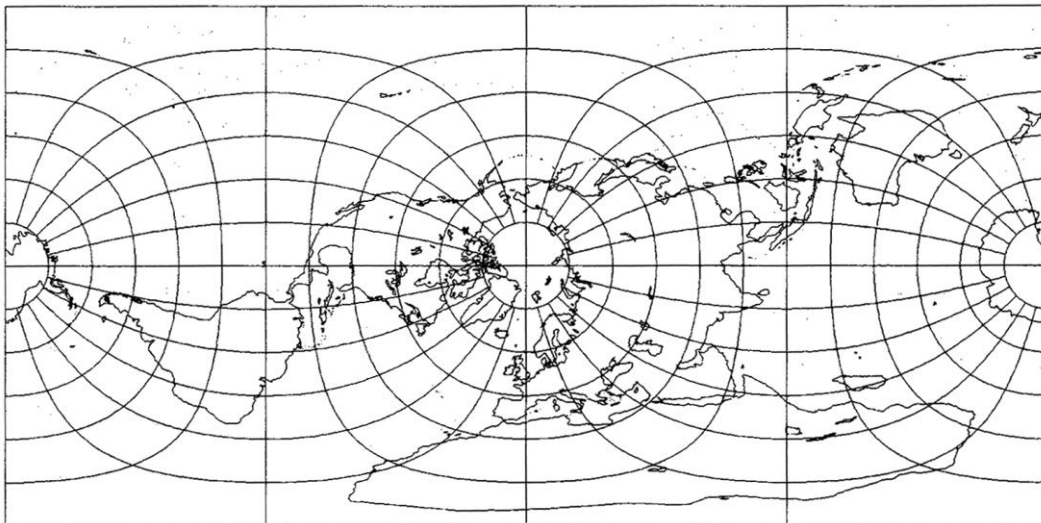
Η ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.2.1 έχει ένα σημαντικό πλεονέκτημα: την απλότητα, όμως, μόνον οι περιοχές γύρω από τον ισημερινό απεικονίζονται με μικρές παραμορφώσεις. Αν η προβολή αυτή γίνει εγκάρσια και επιλεγεί κεντρικός μεσημβρινός στο κέντρο της απεικονιζόμενης περιοχής τότε η παράγωγη προβολή θα απεικονίζει την έκταση που μας ενδιαφέρει με μικρές σχετικά παραμορφώσεις. Έτσι, λοιπόν ορίζεται ως εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή (προβολή Cassini) η απεικόνιση που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x = Rv,$$

$$y = Ru.$$

Η κλίμακα κατά τη διεύθυνση  $v$  θα είναι:  $m_2=1$ , ενώ κατά τη διεύθυνση  $u$  είναι:

$$m_1 = \frac{1}{\cos v}.$$



Εικόνα 3.38: Η προβολή του Cassini.

Στην Εικόνα 3.38 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής του Cassini για ολόκληρη την επιφάνεια της Γης.

Η εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή επινοήθηκε από τον γάλλο αστρονόμο και χαρτογράφο César-François Cassini de Thury (1714-1784), από τον οποίο πήρε και την ονομασία της. Ο Cassini de Thury (Εικόνα 3.39) έγινε το 1735 μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών και το 1744 ανέλαβε να εκπονήσει το σημαντικό έργο της

κατασκευής του τοπογραφικού χάρτη της Γαλλίας, που μετά την ολοκλήρωσή του απετέλεσε ένα ορόσημο στην ιστορική εξέλιξη της χαρτογραφίας σε παγκόσμιο επίπεδο. Το 1771 με την ανεξαρτητοποίηση του αστεροσκοπείου του Παρισιού από την Γαλλική Ακαδημία Επιστημών διετέλεσε ο πρώτος διευθυντής του.



**Εικόνα 3.39:** Ο γάλλος αστρονόμος και χαρτογράφος César-François Cassini de Thury.

### 3.5.2 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή

Ακολουθώντας τη διαδικασία που εφαρμόστηκε στην ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με σκοπό να μετατραπεί στην ορθή Μερκατορική, η εγκάρσια Μερκατορική προβολή προκύπτει από την προβολή του Cassini τροποποιώντας τις τετμημένες  $x$  με κατάλληλο τρόπο ώστε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας. Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή στη σφαίρα ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x = R \ln \tan \left( 45^\circ + \frac{\nu}{2} \right),$$

$$y = R u.$$

Επειδή η απεικόνιση είναι σύμμορφη, για τις κύριες κλίμακες θα ισχύει:

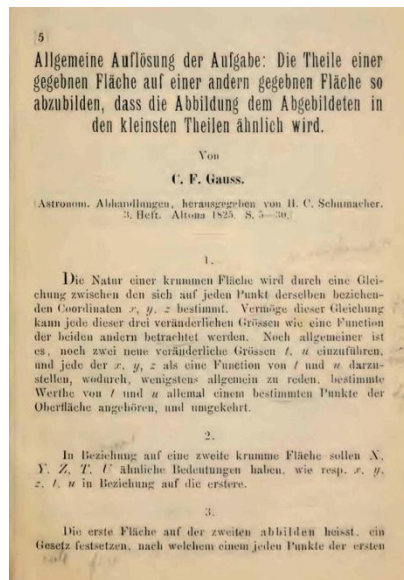
$$m_1 = m_2 = \frac{1}{\cos \nu}.$$

Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή είναι η τρίτη από τις επτά απεικονίσεις που εισήγαγε ο Johann Heinrich Lambert προσπαθώντας να διαμορφώσει μια γενικευμένη θεωρία αναπαράστασης της επιφάνειας της σφαίρας στο επίπεδο, διατηρώντας

αναλλοιώτες είτε τις γωνίες ή τα εμβαδά το 1772 (δες ενότητα 3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert).



**Εικόνα 3.40:** Ο γερμανός μαθηματικός Carl Friedrich Gauss.



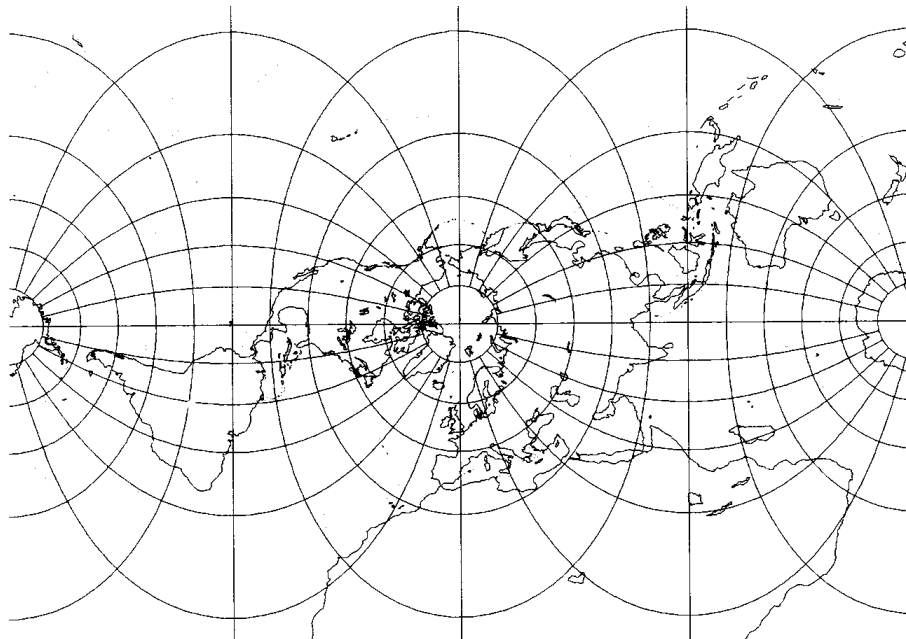
**Εικόνα 3.41:** Η πρώτη σελίδα της ανακοίνωσης του Carl Friedrich Gauss.

Πέντε δεκαετίες αργότερα, το 1822, σε ανακοίνωση του γερμανού μαθηματικού και γεωδαίτη Carl Friedrich Gauss (1777–1855) (Εικόνα 3.40), που παρουσιάστηκε με την ευκαιρία της βράβεισής του από τη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Δανίας (Copenhagen), διατύπωσε μια γενικευμένη θεωρία σύμμορφης απεικόνισης μιας επιφάνειας ως προς οποιαδήποτε άλλη (μτφ. *Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*) (Εικόνα 3.41). Στο πλαίσιο αυτής της θεωρίας ανέπτυξε ως μερική περίπτωση τις αναλυτικές σχέσεις της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής από την επιφάνεια της σφαίρας στο επίπεδο με τη χρήση της θεωρίας των μιγαδικών συναρτήσεων. Ο Gauss γεννήθηκε στο Braunschweig. Σε ηλικία μόλις 18 ετών διατύπωσε τη θεωρία των ελαχίστων τετραγώνων. Στη συνέχεια, σπούδασε μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Göttingen. Διετέλεσε διευθυντής του αστεροσκοπείου του Göttingen από το 1807 μέχρι το θάνατό του.

Στην Εικόνα 3.42 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρη την επιφάνεια της Γης. Παρατηρώντας την Εικόνα 3.42, βλέπουμε ότι ο κεντρικός μεσημβρινός απεικονίζεται ως ευθεία γραμμή, ενώ, οι εικόνες των υπόλοιπων μεσημβρινών καθώς και των παραλλήλων είναι καμπύλες.

Στις αρχές του 20ου αιώνα, ο γερμανός καθηγητής Johann Heinrich Louis Krüger, αντλώντας από το έργο του Gauss, ανέπτυξε σε σειρές τις σχέσεις της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής από το ελλειψοειδές στο επίπεδο σε εργασία που δημοσίευσε

με τίτλο: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene* (μτφ. *Σύμμορφες απεικονίσεις των ελλειψοειδών στο επίπεδο*) (Εικόνα 3.43). Η προβολή ονομάστηκε Gauss-Krüger και υιοθετήθηκε το 1927 ως το επίσημο προβολικό σύστημα της Γερμανίας.



Εικόνα 3.42 Η εγκάρσια Μερκατορική προβολή.

**Εικόνα 3.43:** Το εξώφυλλο της εργασίας του Johann Heinrich Louis Krüger, όπου διατυπώνονται οι σχέσεις της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής για την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς στο επίπεδο.



Στη συνέχεια, η χρήση της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής επεκτάθηκε διεθνώς και υιοθετήθηκε ως επίσημο κρατικό προβολικό σύστημα στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Από το 1950, χρησιμοποιείται σε διεθνή κλίμακα ως Παγκόσμια Εγκάρσια Μερκατορική σε ζώνες των  $6^\circ$  (Universal Transverse Mercator - UTM). Από το 1987 το κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας εφαρμόζεται σε αυτήν την προβολή.

Οι σχέσεις της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής στο ελλειψοειδές μπορούν να προκύψουν από την εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini εφαρμόζοντας τη συνθήκη της συμμορφίας ή με τη βοήθεια των μιγαδικών συναρτήσεων. Οι σχέσεις της προβολής μπορούν, επιπλέον, να αναπτυχθούν με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων σε σειρές. Έτσι, για περιοχές έκτασης  $10^\circ$ - $12^\circ$  κατά τη διεύθυνση του γεωγραφικού μήκους ( $\lambda$ ) και μέχρι το γεωγραφικό πλάτος ( $\phi$ ) των  $61^\circ$ , οι ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) προσδιορίζονται από τις γεωγραφικές ( $\phi, \lambda$ ) με τις σχέσεις:

$$x = N\Delta\lambda \cos\phi + \frac{N\Delta\lambda^3 \cos^3\phi}{6} (1-t^2+n^2) + \frac{N\Delta\lambda^5 \cos^5\phi}{120} \begin{pmatrix} 5-18t^2+t^4+14n^2- \\ -58t^2n^2+13n^4+4n^6- \\ -64t^2n^4-24t^2n^6 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{N\Delta\lambda^7 \cos^7\phi}{5.040} (61-479t^2+179t^4-t^6),$$

$$y = M + \frac{N\Delta\lambda^2 \sin\phi \cos\phi}{2} + \frac{N\Delta\lambda^4 \sin\phi \cos^3\phi}{24} (5-t^2+9n^2+4n^4) +$$

$$+ \frac{N\Delta\lambda^6 \sin\phi \cos^5\phi}{720} \begin{pmatrix} 61-58t^2+t^4+270n^2-330t^2n^2+445n^4+324n^6- \\ -680t^2n^4+88n^8-600t^2n^6-192t^2n^8 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{N\Delta\lambda^8 \sin\phi \cos^7\phi}{40.320} (1.385-3.111t^2+543t^4-t^6),$$

όπου  $t = \tan\phi$ ,  $n^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2\phi$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς,  $M$

το τόξο μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι το πλάτος  $\phi$ ,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό  $\lambda_0$  και  $N$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου.

Οι γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) προσδιορίζονται από τις ορθογώνιες ( $x, y$ ) με τις αντίστροφες σχέσεις:

$$\Delta\phi = -\frac{x^2 t_1}{2\rho_1 N_1} + \frac{x^4 t_1}{24\rho_1 N_1^3} (5+3t_1^2+n_1^2-4n_1^4-9t_1^2 n_1^2) -$$

$$- \frac{x^6 t_1}{720\rho_1 N_1^5} \begin{pmatrix} 61+90t_1^2+46n_1^2+45t_1^4-252t_1^2 n_1^2-3n_1^4+100n_1^6-66t_1^2 n_1^4- \\ -90t_1^4 n_1^2+88n_1^8+225t_1^4 n_1^4+84t_1^2 n_1^6-192t_1^2 n_1^8 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^8 t_1}{40.320 \rho_1 N_1^7} (1.385 + 3.633 t_1^2 + 4.095 t_1^4 + 1.574 t_1^6), \\
\Delta\lambda = & \frac{x}{N_1 \cos\phi_1} - \frac{x^3}{6N_1^3 \cos\phi_1} (1 + 2t_1^2 + n_1^2) + \frac{x^5}{120N_1^5 \cos\phi_1} \left( \begin{array}{l} 5 + 28t_1^2 + 6n_1^2 + 24t_1^4 + \\ + 8t_1^2 n_1^2 - 3n_1^4 - 4n_1^6 + \\ + 4t_1^2 n_1^4 + 24t_1^2 n_1^6 \end{array} \right) - \\
& - \frac{x^7}{5.040N_1^7 \cos\phi_1} (61 + 662t_1^2 + 1.320t_1^4 + 720t_1^6),
\end{aligned}$$

όπου  $\phi_1$  είναι το γεωγραφικό πλάτος του ίχνους της προβολής κάθε σημείου προς τον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής, είναι δηλαδή εκείνο το γεωγραφικό πλάτος που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού  $M_1 = \gamma$ ,  $\Delta\phi = \phi - \phi_1$  και  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό  $\lambda_0$ ,  $N_1$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου και  $\rho_1$  η ακτίνα καμπυλότητας του μεσημβρινού στο γεωγραφικό πλάτος  $\phi_1$ ,  $t_1 = \tan\phi_1$  και  $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_1$  στο γεωγραφικό πλάτος  $\phi_1$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών ( $\gamma$ ) από γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) δίδεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\gamma = & \Delta\lambda \sin\phi + \frac{\Delta\lambda^3 \sin\phi \cos^2 \phi}{3} (1 + 3n^2 + 2n^4) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^5 \sin\phi \cos^4 \phi}{15} \left( \begin{array}{l} 2 - t^2 + 15n^2 + 35n^4 - 15t^2 n^2 + 33n^6 - \\ - 50t^2 n^4 + 11n^8 - 60t^2 n^6 - 24t^2 n^8 \end{array} \right) + \\
& + \frac{\Delta\lambda^7 \sin\phi \cos^6 \phi}{315} (17 - 26t^2 + 2t^4).
\end{aligned}$$

Όπου  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  η διαφορά του γεωγραφικού μήκους από τον κεντρικό μεσημβρινό  $\lambda_0$ ,  $t = \tan\phi$  και  $n^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ενώ ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών ( $\gamma$ ) από ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) γίνεται με τη σχέση:

$$\gamma = \frac{x t_1}{N_1} - \frac{x^3 t_1}{3N_1^3} (1 + t_1^2 - n_1^2 - 2n_1^4) + \frac{x^5 t_1}{15N_1^5} \left( \begin{array}{l} 2 + 5t_1^2 + 2n_1^2 + 3t_1^4 + t_1^2 n_1^2 + 9n_1^4 + 20n_1^6 - \\ - 7t_1^2 n_1^4 - 27t_1^2 n_1^6 + 11n_1^8 - 24t_1^2 n_1^8 \end{array} \right) -$$

$$-\frac{x^7 t_1}{315 N_1^7} (17 + 77 t_1^2 + 105 t_1^4 + 45 t_1^6).$$

όπου  $N_1$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου,  $t_1 = \tan \phi_1$  και  $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_1$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi_1$  το γεωγραφικό πλάτος του ίχνους της προβολής κάθε σημείου προς τον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ( $m$ ) προσδιορίζεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) με τη βοήθεια της σχέσης:

$$m = 1 + \frac{\Delta \lambda^2 \cos^2 \phi}{2} (1 + n^2) + \frac{\Delta \lambda^4 \cos^4 \phi}{24} \left( \begin{array}{l} 5 - 4t^2 + 14n^2 + 13n^4 - 28t^2 n^2 + \\ + 4n^6 - 48t^2 n^4 - 24t^2 n^6 \end{array} \right) + \frac{\Delta \lambda^6 \cos^6 \phi}{720} (61 - 148t^2 + 16t^4).$$

όπου  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$  η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος από τον κεντρικό μεσημβρινό  $\lambda_0$ ,  $t = \tan \phi$  και  $n^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ενώ, ο προσδιορισμός της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης ( $m$ ) από τις ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2N_1^2} (1 + n_1^2) + \frac{x^4}{24N_1^4} (1 + 6n_1^2 + 9n_1^4 + 4n_1^6 - 24t_1^2 n_1^4 - 24t_1^2 n_1^6) + \frac{x^6}{720N_1^6}.$$

όπου  $N_1$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου,  $t_1 = \tan \phi_1$  και  $n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_1$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi_1$  το γεωγραφικό πλάτος του ίχνους της προβολής κάθε σημείου προς τον κεντρικό μεσημβρινό κατά τη διεύθυνση της γεωδαισιακής γραμμής.

### 3.6 Πλάγιες απεικονίσεις

Όλες οι ορθές απεικονίσεις μπορούν να μετατραπούν σε πλάγιες εφαρμόζοντας στροφή του συστήματος των γεωγραφικού συντεταγμένων ( $\phi, \lambda$ ). Επιλέγοντας κατάλληλα τη στροφή μπορούμε να περιορίσουμε σημαντικά τις παραμορφώσεις στην περιοχή που μας ενδιαφέρει, προσαρμόζοντας την αναπτυσσόμενη επιφάνεια να εφάπτεται γύρω από αυτήν. Από τη μεγάλη ποικιλία των πλαγίων απεικονίσεων θα μελετήσουμε μία εξ' αυτών την πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή, ή αλλιώς, την προβολή



Hatt, γιατί σε αυτήν την απεικόνιση εφαρμοζόταν το παλιό κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας.

### 3.6.1 Πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή - Hatt

Η πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή είναι επίπεδη απεικόνιση. Το επίπεδο της απεικόνισης εφάπτεται στην επιφάνεια της σφαίρας σε σημείο  $O$  που ονομάζεται κέντρο της προβολής. Ο μεσημβρινός που διέρχεται από το σημείο  $O$  είναι η αφετηρία των αζιμουθίων (Εικόνα 3.44). Κάθε σημείο της επιφάνειας της σφαίρας  $Q$  μπορεί να οριστεί από τις πολικές του συντεταγμένες  $(S,A)$ , όπως και η εικόνα του  $q$  στο επίπεδο  $(s,\alpha)$ . Η πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή ορίζεται από τις σχέσεις:

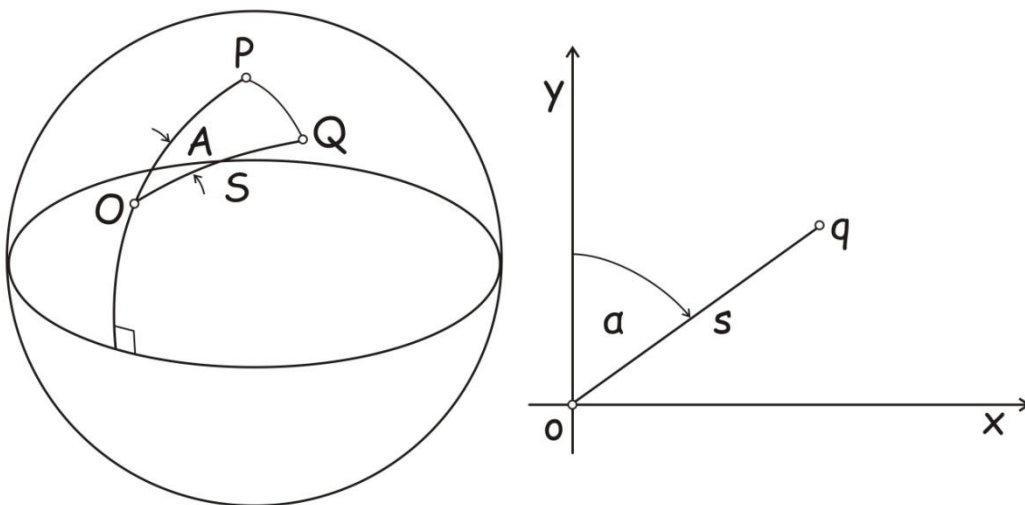
$$s = S,$$

$$\alpha = A.$$

Εάν εκφράσουμε τις σχέσεις ως προς το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων θα έχουμε:

$$x = s \sin \alpha = S \sin A,$$

$$y = s \cos \alpha = S \cos A.$$



**Εικόνα 3.44:** Η γεωμετρική αρχή της πλάγιας αζιμουθιακής ισαπέχουσας προβολής.

Επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο:  $OPQ$  (Εικόνα 3.44) οι πολικές συντεταγμένες  $(S,A)$  ως προς τις γεωγραφικές συντεταγμένες  $(\phi,\lambda)$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$S = R \arccos(\sin \phi_0 \sin \phi + \cos \phi_0 \cos \phi \cos(\lambda - \lambda_0)),$$

$$A = \arcsin\left(\frac{\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \phi}{\sin S}\right),$$

όπου  $\phi_0, \lambda_0$  οι γεωγραφικές συντεταγμένες του κέντρου της προβολής (σημείο O).

Οι αντίστροφες σχέσεις της πλάγιας αζιμουθιακής ισαπέχουσας προβολής είναι:

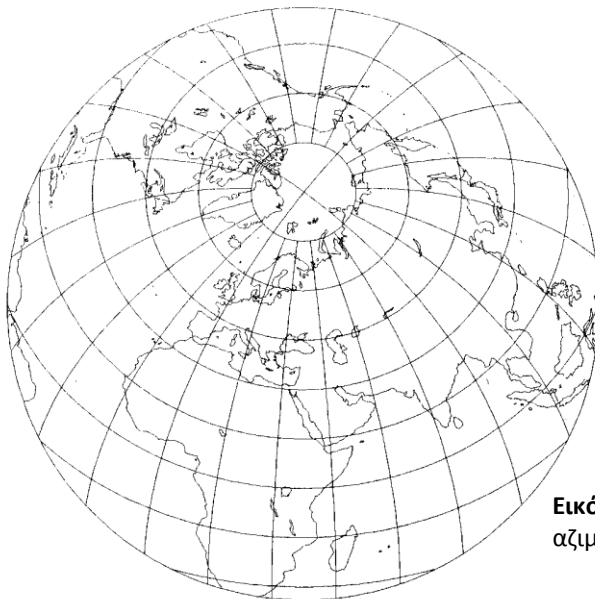
$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin\left(\frac{\sin S \sin A}{\cos \phi}\right) \text{ και}$$

$$\phi = \arcsin(\cos S \sin \phi_0 + \sin S \cos \phi_0 \cos A),$$

όπου:

$$A = \arctan \frac{x}{y} \text{ και}$$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



**Εικόνα 3.45** Παγκόσμιος χάρτης σε πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή.

Η πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Η προβολή αυτή είναι, όμως, ισαπέχουσα, διατηρεί, δηλαδή, αναλλοίωτες τις αποστάσεις κατά τη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας - τη διεύθυνση που ορίζεται μεταξύ του σημείου επαφής με κάθε σημείο του χώρου. Επομένως, ισχύει ότι:

$$m_2 = 1,$$

ενώ, κατά την κάθετο διεύθυνση προς την επιβατική ακτίνα η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης είναι:

$$m_1 = \frac{S}{\sin S}$$

Στην Εικόνα 3.45 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής Hatt.

Οι σχέσεις της πλάγιας αζιμουθιακής ισαπέχουσας προβολής για την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς στο επίπεδο προσδιορίστηκαν από τον γάλλο υδρογράφο Philippe Hatt το 1886. Έτσι, στη χαρτογραφική βιβλιογραφία, συνήθως, ονομάζεται και προβολή του Hatt. Με την προβολή του Hatt η επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής απεικονίζεται σε επίπεδο που εφάπτεται σε κάποιο σημείο στην επιφάνειά του. Η απεικόνιση ορίζεται με τρόπο ώστε για κάθε σημείου του χώρου η απόσταση ως προς το σημείο επαφής και η γωνία διεύθυνσης στο επίπεδο της προβολής να ταυτίζονται με το μήκος και το αζιμούθιο της γεωδαισιακής γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς.

Ο Hatt (Εικόνα 3.46) πρότεινε την υιοθέτηση της προβολής για υδρογραφικές αποτυπώσεις μικρών και μεσαίων εκτάσεων, γιατί ακριβώς συνοδεύονται από μικρές παραμορφώσεις, συμβιβαστές με το επίπεδο της γραφικής ακρίβειας. Άλλωστε, στο επιστημονικό του έργο μελέτησε σε βάθος τεχνικές επίλυσης γεωδαιτικών ζητημάτων και ειδικότερα προβλημάτων τριγωνισμού με τη βοήθεια γραφικών μεθόδων. Ο Philippe Hatt γεννήθηκε στο Στρασβούργο το 1840. Το 1859 εισήχθηκε στην École Polytechnique και μετά από την αποφοίτηση υπηρέτησε στο Σώμα των Υδρογράφων Μηχανικών της Γαλλίας. Από το 1897 διετέλεσε μέλος της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών, και την περίοδο 1912-15 ήταν μέλος του Bureau des longitudes. Απεβίωσε το 1915.



**Εικόνα 3.46:** Ο γάλλος υδρογράφος Philippe Hatt.

Οι σχέσεις της πλάγιας αζιμουθιακής ισαπέχουσας προβολής (Hatt) στο ελλειψοειδές μπορούν να αναπτυχθούν με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων σε σειρές. Έτσι, για περιοχές έκτασης  $1^\circ \times 1^\circ$  κατά τη διεύθυνση του γεωγραφικού μήκους ( $\lambda$ ) και του γεωγραφικού πλάτους ( $\phi$ ), οι ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) προσδιορίζονται από τις γεωγραφικές ( $\phi, \lambda$ ) με τις σχέσεις:

$$x = N_0 \Delta\lambda \cos \phi_0 - \rho_0 \Delta\lambda \Delta\phi \sin \phi_0 - \frac{1}{6} \rho_0 \Delta\lambda \Delta\phi^2 \cos \phi_0 (2 + 9t_0^2 n_0^2) - \frac{1}{6} N_0 \Delta\lambda^3 \cos \phi_0 \sin^2 \phi_0,$$

$$y = \rho_0 \Delta\phi + \frac{1}{2} N_0 \Delta\lambda^2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 + \frac{3}{2N_0} \rho_0^2 \Delta\phi^2 t_0 n_0^2 + \frac{1}{6} \rho_0 \Delta\lambda^2 \Delta\phi (1 - 4 \sin^2 \phi_0 + n_0^2 \cos^2 \phi_0).$$

όπου  $N_0$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου και  $\rho_0$  η ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού στο σημείο επαφής του επιπέδου της προβολής ( $\phi_0, \lambda_0$ ),  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  και  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$  η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος και πλάτος από το σημείο επαφής,  $t_0 = \tan \phi_0$  και  $n_0^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_0$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi_0$  το γεωγραφικό πλάτος του σημείου επαφής.

Οι γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) προσδιορίζονται από τις ορθογώνιες ( $x, y$ ) στην απεικόνιση αυτή με τις σχέσεις:

$$\Delta\phi = \frac{y}{\rho_0} - \frac{x^2 t_0}{2\rho_0 N_0} - \frac{3y^2 t_0 n_0^2}{2\rho_0 N_0} - \frac{x^2 y (1 + 3t_0^2 + n_0^2 - 9t_0^2 n_0^2)}{6\rho_0 N_0^2},$$

$$\Delta\lambda = \frac{x}{N_0 \cos \phi_0} + \frac{x y t_0}{N_0^2 \cos \phi_0} + \frac{x y^2 (1 + 3t_0^2 + n_0^2)}{3N_0^3 \cos \phi_0} - \frac{x^3 t_0^2}{3N_0^3 \cos \phi_0},$$

όπου  $N_0$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου και  $\rho_0$  η ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού στο σημείο επαφής ( $\phi_0, \lambda_0$ ),  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  και  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$  η διαφορά κατά γεωγραφικό μήκος και πλάτος από το σημείο επαφής,  $t_0 = \tan \phi_0$  και  $n_0^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_0$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi_0$  το γεωγραφικό πλάτος του σημείου επαφής.

Ο προσδιορισμός της σύγκλισης των μεσημβρινών ( $\gamma$ ) από ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x, y$ ) γίνεται με τη σχέση:

$$\gamma = \frac{x t_0}{N_0} + \frac{x y (2 + 3t_0^2 + 2n_0^2)}{3N_0^2} + \frac{(3x y^2 - x^3) \sin \phi_0}{3N_0^3 \cos^3 \phi_0},$$

όπου  $N_0$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου στο σημείο επαφής  $(\phi_0, \lambda_0)$ ,  $t_0 = \tan \phi_0$  και  $n_0^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi_0$ , με  $e$  την πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς και  $\phi_0$  το γεωγραφικό πλάτος του σημείου επαφής.

Η προβολή αυτή είχε μεγάλη εφαρμογή στο παρελθόν στη Ελλάδα, γιατί σε αυτήν εφαρμοζόταν το κρατικό σύστημα αναφοράς της χώρας.

### 3.7 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α.Μ., 1985, "Τα προβολικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα", Εισήγηση στο Σεμινάριο: Τάσεις και εξελίξεις στην επιστήμη του Αγρονόμου και Τοπογράφου Μηχανικού, Αθήνα: Πανελλήνιος Σύλλογος Διπλωματούχων Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών.
- Βέης Γ., 1977, *Μαθηματική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας & Χαρτογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Bugayevskiy L.M. & J.P. Snyder, 1995, *Map Projections. A Reference Manual*, London: Taylor & Francis.
- Cuenin R., 1972, *Cartographie Generale*, Tome 1, Paris: Editions Eyrolles.
- Gauss H.C., 1847, *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie*, Göttingen: Dieterichschen Buchhandlung.
- Grafarend W.E. & Krumm W F., 2006, *Map Projections*, Berlin: Springer Verlag.
- Hatt Ph., 1886, "Définition et emploi des coordonnées azimuthales", *Annales Hydrographiques*, 2me sem.: 477-504.
- Krüger L., 1912, *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*, Leipzig: Druck und von B.G. Teubner.
- Lambert J.H., 1772, "Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten", Στο *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Berlin: Buchhandlung der Realchule.
- Maling D.H., 1973, *Coordinate systems and map projections*, London: G. Philip & Son Ltd.
- Maling D.H., 1989, *Measurements from Maps*, Oxford: Pergamon Press.
- Μπαντέκας Ι., 1963, "Η αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή του Hatt", *Τεχνικά Χρονικά*, 40(5): 463-81.
- Νάκος Β. & Β. Φιλιππακοπούλου, 1993, *Γενική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Richardus P. & R.K. Adler, 1972, *Map projections*, Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

- Schumacher H.C., 1825, *Astronomische Abhandlungen*, Altona: Hammerich- und Heineking'schen Buchdruckerey.
- Snyder J.P., 1987, *Map Projections - A working manual*, Washington: United States Geological Survey, Professional Paper 1395.
- Snyder J.P., 1989, *An Album of Map Projections*, Washington: United States Geological Survey, Professional Paper 1453.
- Snyder J.P., 1997, *Flattening the Earth. Ten thousand years of map projections*, Chicago: The University of Chicago Press.
- Thomas P.D., 1952, *Conformal projections in geodesy and cartography*, Washington U. S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey, Special Publication 251.

## Κεφάλαιο 4

### 4. ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

#### 4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα

Με τον όρο χαρτογραφικό σύστημα ορίζουμε μια απεικόνιση εφαρμοσμένη σε ένα συγκεκριμένο ελλειψοειδές στο οποίο εκφράζονται οι συντεταγμένες των σημείων του γεωγραφικού χώρου. Το χαρτογραφικό σύστημα έτσι όπως ορίστηκε αποτελεί ένα επίσημο κρατικό σύστημα αναφοράς. Ένα χαρτογραφικό σύστημα αξιοποιείται σε γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εργασίες προσδιορίζοντας τη θέση στο επίπεδο της απεικόνισης οποιουδήποτε αντικειμένου του γεωγραφικού χώρου. Στον ελλαδικό χώρο έχουν θεσμοθετηθεί και χρησιμοποιηθεί πέντε χαρτογραφικά συστήματα: το πολυκεντρικό, το σύστημα Hatt, η Παγκόσμια Εγκάρσια Μερκατορική των 6°, η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή των 3° και και η εγκάρσια Μερκατορική προβολή του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς του 1987. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, περιγράφονται οι παράμετροι και τα χαρακτηριστικά των πέντε αυτών χαρτογραφικών συστημάτων. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάπτυξη των μεθόδων με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να γίνει η μετατροπή χωρικών δεδομένων που αναφέρονται σε διαφορετικά χαρτογραφικά συστήματα.

#### 4.2 Πολυκεντρικό σύστημα

Η δημιουργία του ελληνικού εθνικού κράτους σηματοδότησε θεσμικές καινοτομίες. Η μέτρηση και η οριοθέτηση του γεωγραφικού χώρου, που θα οδηγούσε στη διαμόρφωση και στη διαχείρισή του με όρους νεωτερικούς, αποτέλεσε οργανικό μέρος της συγκρότησης του κράτους. Το εγχείρημα αυτό τα πρώτα χρόνια, υλοποίησε η Γαλλική Αποστολή, υπό την έννοια ότι το νεοπαγές ελληνικό κράτος δεν διέθετε την απαραίτητη οικονομική, τεχνική και θεσμική υποδομή. Πράγματι, το διάστημα 1828-33, στην Πελοπόννησο ανέπτυξε τη δραστηριότητά της η Γαλλική Αποστολή υπό την εποπτεία του στρατηγού Nicolas Joseph Maison. Στο πλαίσιο των ευρύτερων επιστημονικών εργασιών της Αποστολής, εντάσσεται το έργο μιας ομάδας γεωγράφων στρατιωτικών, με σκοπό να δημιουργηθεί ακριβής και αξιόπιστη χαρτογραφική υποδομή για τις ανάγκες του νεοσύστατου κράτους. Η διεύθυνση της ομάδας

ανατέθηκε στους λοχαγούς Peytier και Servier και στον υπολοχαγό Puillon de Boblaye. Συνοψίζοντας, μπορούμε να επισημάνουμε, ότι οι γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εργασίες της πρόδρομης αυτής περιόδου μέχρι τη δεκαετία του 1880, δεν συνοδεύονται από ικανοποιητική ακρίβεια και ποιότητα σε σχέση με τις τεχνολογικές δυνατότητες της περιόδου. Ως εκ τούτου, τα παράγωγα χαρτογραφικά προϊόντα δεν ήταν ικανά να καλύψουν τις άμεσες ανάγκες για τη δημιουργία σύγχρονων έργων υποδομής. Επιπρόσθετα, αξίζει να σημειωθεί, ότι το έργο της Γαλλικής Αποστολής προσανατολίστηκε στη δημιουργία ενός τριγωνομετρικού δικτύου που εκτείνονταν στο σύνολο της χώρας χωρίς, όμως, παράλληλα να προχωρά στη θεσμοθέτηση ενός επίσημου κρατικού συστήματος γεωγραφικής αναφοράς και κατ' επέκταση στη δημιουργία ενός χαρτογραφικού συστήματος.



**Εικόνα 4.1:** Ο αντισυνταγματάρχης Heinrich Hartl.

Το 1889 ο πρωθυπουργός Χαρίλαος Τρικούπης στο πλαίσιο του εκσυγχρονισμού και εκδυτικισμού του ελληνικού κράτους, συγκρότησε το Γεωδαιτικό Απόσπασμα, με στόχο τη σύνταξη βασικού τοπογραφικού και κτηματικού χάρτη. Το Απόσπασμα στελεχώθηκε από αυστριακούς και έλληνες μηχανικούς-αξιωματικούς και η διεύθυνση των εργασιών ανατέθηκε στον αντισυνταγματάρχη Heinrich Hartl<sup>1</sup> (Εικόνα 4.1). Συγκεκριμένα, στη σύνθεσή του συμμετείχαν ο λοχαγός Lehl, ο υποπλοίαρχος Lohr και οι έλληνες αξιωματικοί Ε. Μεσσαλάς, Κ. Κωνσταντινόπουλος και Κ. Νίδερ<sup>2</sup>. Οι εργασίες δημιουργίας ενός νέου τριγωνομετρικού δικτύου για τη χώρα ξεκίνησαν τον Οκτώβριο του ίδιου έτους με τη μέτρηση της βάσης Κασκαδάμι-Μεγάλο Κατερίνι, στο Θριάσιο

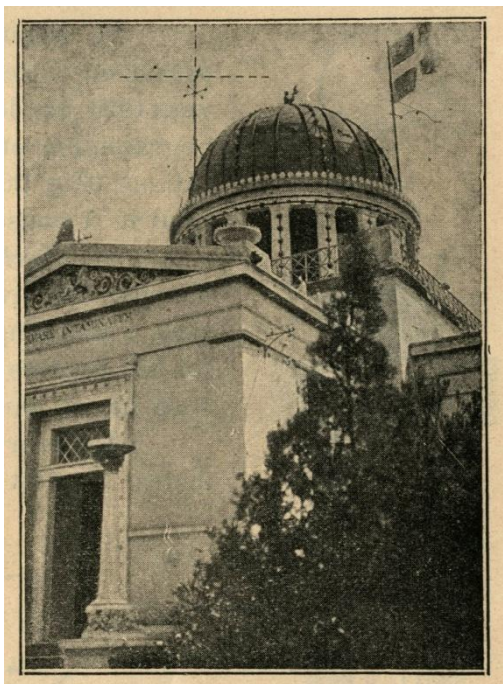
<sup>1</sup> Ο Heinrich Hartl γεννήθηκε το 1840 στο Brünn της Αυστρίας. Από το 1859, ως στέλεχος του Στρατιωτικού Γεωγραφικού Ινστιτούτου της Αυστρίας, συμμετείχε σε επιστημονική επιτροπή στην Τουρκία (1873-75), και την περίοδο 1889-97 ηγήθηκε του Γεωδαιτικού Αποσπάσματος στην Ελλάδα και της ίδρυσης του κρατικού τριγωνομετρικού δικτύου. Το 1899 εκλέχθηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης. Απεβίωσε στη Βιέννη το 1903.

<sup>2</sup> Ο Κωνσταντίνος Νίδερ (1865-1942), γιός βαυαρού στρατιωτικού γιατρού Φραγκίσκου Ξαβιέ Νίδερ που εγκαταστάθηκε στην Ελλάδα με την άφιξη του βασιλιά Όθωνα. Με την αποφοίτησή του από την Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων (1887) υπηρέτησε στη Γεωδαιτική Αποστολή για διάστημα οκτώ ετών. Ως υποστράτηγος του ελληνικού στρατού, και υποστηρικτής του βασιλιά Κωνσταντίνου έλαβε μέρος στον 1ο Παγκόσμιο Πόλεμο και στη Μικρασιατική Εκστρατεία. Διετέλεσε υφυπουργός Στρατιωτικών το 1925.

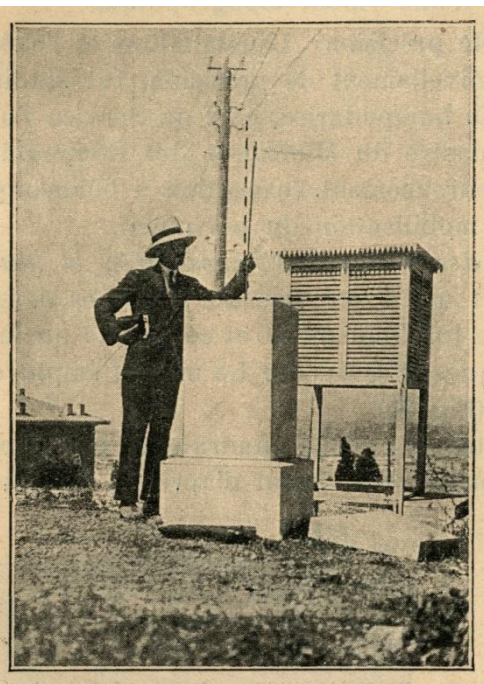


πεδίο. Κατά την περίοδο 1890-96 εκτελέστηκαν οι εργασίες τριγωνισμού (1ης, 2ης, 3ης και 4ης τάξης) σε ολόκληρη την έκταση της χώρας, ενώ παράλληλα, ιδρύθηκε το Τοπογραφικό Τμήμα με αρμοδιότητα την τοπογραφική αποτύπωση και τη σύνταξη στη συνέχεια τοπογραφικού χάρτη. Το Φεβρουάριο του 1897 οι εργασίες του Γεωδαιτικού Αποσπάσματος διακόπηκαν και Hartl επέστρεψε στη Βιέννη.

Η σημαντικότερη συνεισφορά του Hartl στο πλαίσιο της δραστηριότητάς του στο Γεωδαιτικό Αποσπασμα, ήταν η ίδρυση του επίσημου κρατικού συστήματος γεωγραφικής αναφοράς. Ο Hartl όρισε ως αφετηρία του συστήματος το αστεροσκοπείο των Αθηνών (λόφος των Νυμφών) (Εικόνα 4.2), όπου τον Ιούνιο του 1890 πραγματοποίησε αστρονομικές παρατηρήσεις. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες όλων των τριγωνομετρικών σημείων του δικτύου της χώρας, υπολογίστηκαν με αναφορά το μεσημβρινό που διέρχεται από το αστεροσκοπείο των Αθηνών (Εικόνα 4.3), εφαρμόζοντας τις παραμέτρους του ελλειψοειδούς Bessel 1841.



**Εικόνα 4.2:** Το Αστεροσκοπείο Αθηνών στο λόφο των Νυμφών.



**Εικόνα 4.3:** Το βάθρο που διέρχεται ο μηδενικός μεσημβρινός.

Ο Hartl, δηλαδή, επέλεξε ως κρατικό σύστημα αναφοράς, ένα σύστημα το οποίο εφαρμόζεται στο ελλειψοειδές Bessel 1841 (με μεγάλο ημιάξονα  $a=6.377.397,155\text{m}$  και επιπλάτυνση  $f=0,003342773$ ), υπό την έννοια, ότι ήταν το πλέον κατάλληλο για τοπογραφικές χαρτογραφήσεις εθνικής κλίμακας και είχε ευρεία εφαρμογή σε πολλές κεντροευρωπαϊκές χώρες εκείνη την εποχή, δεδομένου ότι για τον προσδιορισμό του

σχήματος και του μεγέθους της Γης, λάμβανε υπόψη όχι μόνο γεωμετρικά στοιχεία, αλλά και φυσικά μεγέθη, όπως είναι η επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας.

Ως χαρτογραφικό σύστημα ο Hartl σχεδίασε ένα σύστημα πολυκεντρικής (ή πολυεδρικής) προβολής που βασίστηκε στην προβολή του Soldner. Ο γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος Johann Georg von Soldner (1776-1833) ανέπτυξε τις σχέσεις εφαρμογής της εγκάρσιας κυλινδρικής ισαπέχουσας προβολής του César François Cassini de Thury από το ελλειψοειδές στο επίπεδο (δες ενότητα: 3.5.1 *Η εγκάρσια ισαπέχουσα προβολή - Cassini*). Η υλοποίηση του προβολικού συστήματος προϋποθέτει: Πρώτον, τη διαίρεση της έκτασης της χώρας σε σφαιροειδή τραπέζια (τοπογραφικά φύλλα), διαστάσεων 6'x6' (κατά μεσημβρινό και παράλληλο) και δεύτερον, το κέντρο των φύλλων να ορίζεται ως αφετηρία του τοπικού συστήματος συντεταγμένων, ταυτίζοντας τον άξονα  $\gamma$  με το μεσημβρινό που διέρχεται από αυτό. Η διανομή των σφαιροειδών τραπεζίων στο χώρο σχηματίζεται ως προς το μηδενικό μεσημβρινό που διέρχεται από το αστεροσκοπείο των Αθηνών και τον Ισημερινό.

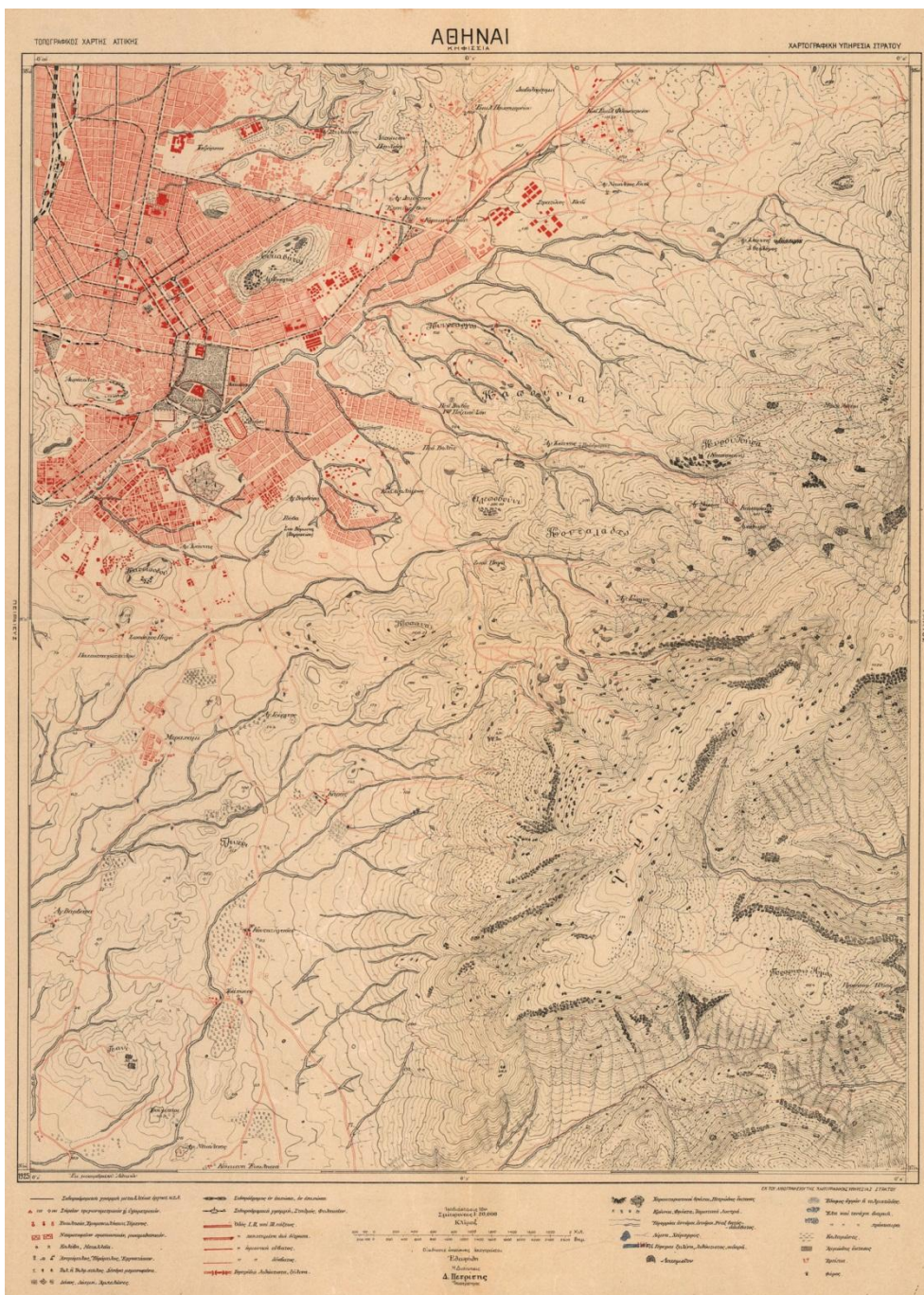
Η συγκεκριμένη προβολή ορίζεται, ώστε, κάθε σημείο του σφαιροειδούς τραπέζιου του ελλειψοειδούς να προβάλλεται στο επίπεδο με τρόπο που η τετμημένη του  $x$  να ταυτίζεται με το μήκος της γεωδαισιακής γραμμής της προβολής του σημείου προς το μεσημβρινό που διέρχεται από το κέντρο, ενώ η τεταγμένη  $y$  να ταυτίζεται με το μήκος του τόξου μεσημβρινού από το κέντρο μέχρι το ίχνος της προβολής. Είναι σαφές, ότι ο καθορισμός πολυάριθμων τοπογραφικών φύλλων λόγω της περιορισμένης έκτασης που αντιπροσωπεύουν, εξασφαλίζουν το μοναδικό πλεονέκτημα -παρά το γεγονός ότι η προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη αλλά ούτε και ισοδύναμη- των μικρών παραμορφώσεων σε ολόκληρη την έκταση του σφαιροειδούς τραπέζιου που είναι σαφώς μικρότερες από το επίπεδο της γραφικής ακρίβειας, καθιστώντας το προβολικό σύστημα πλήρως εναρμονισμένο με τη χρήση του γεωδαιτικού οργάνου της μετροτράπεζας<sup>3</sup>, ενός οργάνου μέτρησης και ταυτόχρονα χαρτογραφικής απόδοσης που επικρατούσε τεχνολογικά εκείνη την περίοδο.

Σε κάθε τοπογραφικό φύλλο (Εικόνα 4.4) απεικονίζεται έκταση διαστάσεων περίπου 11 χιλιόμετρα κατά τη διεύθυνση του μεσημβρινού και 9 χιλιόμετρα κατά τη διεύθυνση του παράλληλου. Οι διαστάσεις αυτές για ένα χάρτη κλίμακας 1:20.000 μεταφράζονται σε 55x45 εκατοστά. Με δεδομένη την έκταση της χώρας, την εποχή εκείνη, το σύνολο της επικράτειας αποτυπωνόταν σε 600 περίπου τοπογραφικά φύλλα άρα και ανεξάρτητα τοπικά συστήματα συντεταγμένων. Εικοσιτέσσερα τοπογραφικά φύλλα, τέσσερα κατά τη διεύθυνση του μεσημβρινού και έξι κατά τη διεύθυνση του

<sup>3</sup> Η μετροτράπεζα είναι ένα γεωδαιτικό όργανο, ένα εύχρηστο μέσο χαρτογραφικής αποτύπωσης, η χρήση του οποίου χρονολογείται από τον 16ο αιώνα, δεδομένου ότι ο χάρτης παράγεται ταυτόχρονα με τις μετρήσεις στο πεδίο. Ο χρήστης του έχει τη δυνατότητα να αποτυπώνει με μεγάλη ταχύτητα, καθώς δεν απαιτούνται υπολογισμοί και καταγραφή των μετρήσεων, να ελέγχει εύκολα τα σφάλματα των παρατηρήσεων στο πεδίο και να εξασφαλίζει αποτελέσματα ακρίβειας του επιπέδου των γραφικών μεθόδων. Οι μηχανικοί αξιωματικοί της Γεωδαιτικής Αποστολής, χρησιμοποίησαν για την εκπόνηση των χαρτογραφικών αποτυπώσεων, υψηλής ποιότητας μετροτράπεζες P. & A. Rost, αυστριακής τεχνονομίας.



παράλληλου, συνενώνονται για να συνθέσουν το βασικό τοπογραφικό χάρτη κλίμακας 1:100.000 με διαστάσεις 44x53 εκατοστά.

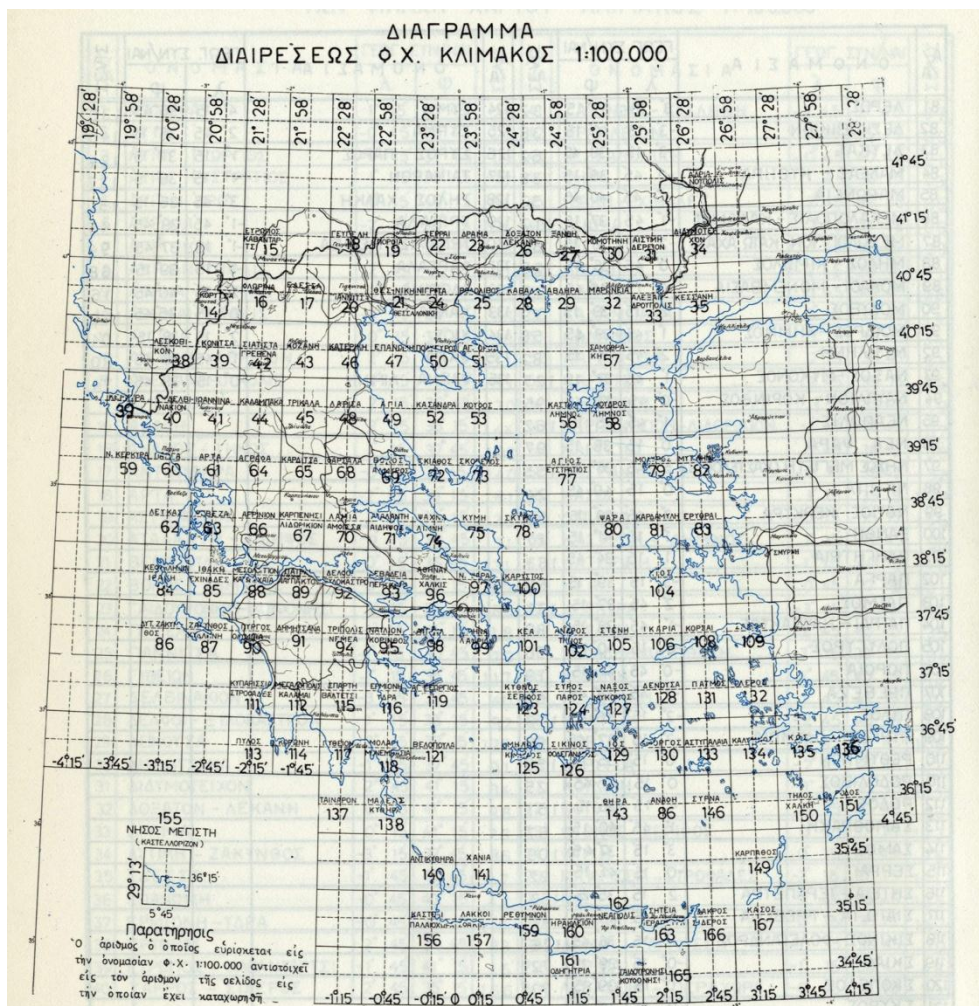


Εικόνα 4.4: Τοπογραφικό φύλλο κλίμακας 1:20.000 διαστάσεων 6'x6'.



4.3 Σύστημα Hatt

Οι σχέσεις υπολογισμού των τοπικών συντεταγμένων του συστήματος της πολυκεντρικής προβολής του Soldner παρέιχαν ικανοποιητική ακρίβεια εφαρμογής για μια περιορισμένη μόνον έκταση που αντιπροσωπεύει ένα σφαιροειδές τραπέζιο διαστάσεων 18'x18'. Το γεγονός αυτό καθιστούσε αναποτελεσματική την αντιμετώπιση χαρτογραφικών προβλημάτων που αφορούσαν ευρύτερες περιοχές της τυπικής διανομής του υφιστάμενου χαρτογραφικού συστήματος. Για το λόγο αυτό, το σύστημα της πολυκεντρικής προβολής του Soldner αντικαταστάθηκε από την πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή του Philippe Hatt (δες ενότητα: 3.6.1 Πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή - Hatt), η οποία παρέιχε μεγαλύτερα επίπεδα ακρίβειας στην εφαρμογή της.



Εικόνα 4.5: Η διανομή του συστήματος Hatt.

Με την προβολή του Hatt η επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής απεικονίζεται σε επίπεδο (φύλλο χάρτη), που εφάπτεται σε αυτήν σε σημείο που ονομάζεται κέντρο φύλλου. Η απεικόνιση ορίζεται με τρόπο ώστε για κάθε σημείο του χώρου η απόσταση ως προς το κέντρο φύλλου και η γωνία διεύθυνσης στο επίπεδο της προβολής να ταυτίζονται με το μήκος και το αζιμούθιο της γεωδαισιακής γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Βασική, επομένως, ιδιότητα που χαρακτηρίζει την προβολή είναι ότι οι αποστάσεις όλων των σημείων του χώρου ως προς το κέντρο φύλλου να διατηρούνται αναλλοίωτες. Η προβολή του Hatt, όμως, δεν διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες (συμμορφία) ή τα εμβαδά (ισοδυναμία) στοιχειωδών επιφανειών κατά την απεικόνισή τους στο επίπεδο.

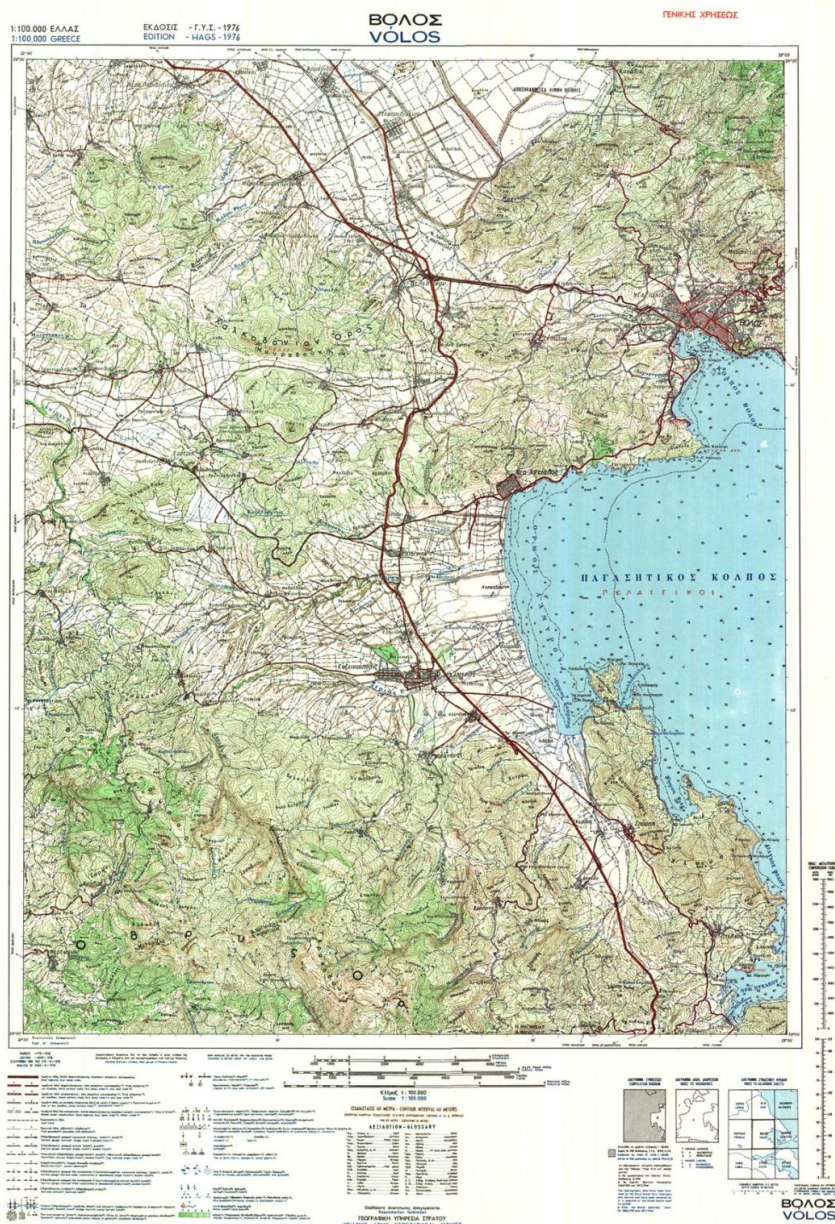
Το προβολικό σύστημα Hatt εφαρμόστηκε και αυτό στο ελλειψοειδές Bessel 1841. Το σχήμα της διανομής (Εικόνα 4.5) της σειράς των βασικών τοπογραφικών χαρτών σε φύλλα χάρτη, συσχετίζεται άμεσα με το κρατικό χαρτογραφικό σύστημα συντεταγμένων. Η κλίμακα των χαρτών είναι 1:100.000 και απεικονίζει ένα σφαιροειδές τραπέζιο της επιφάνειας του ελλειψοειδούς διαστάσεων 30'x30' στο επίπεδο του χάρτη (Εικόνα 4.6).

Κάθε φύλλο χάρτη αποτελεί ανεξάρτητο τοπικό προβολικό σύστημα συντεταγμένων με αφετηρία το κέντρο του και ως εκ τούτου στη χώρα αναπτύσσονται περίπου 130 διαφορετικά τοπικά συστήματα συντεταγμένων. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες των κέντρων φύλλων είναι πολλαπλάσια ακέραιων μοιρών και 15' ή 45'. Στην έκταση κάθε φύλλου χάρτη εξασφαλίζεται μέγιστη παραμόρφωση των μηκών της τάξης των 5 ppm ή 1/200.000, δηλαδή, παραμόρφωση 5 χιλιοστών σε απόσταση ενός χιλιομέτρου, και βέβαια, πρόκειται για ακρίβεια που είναι πλήρως συμβατή με την εφαρμογή γραφικών μεθόδων στην επίλυση τοπογραφικών προβλημάτων.

Μολονότι από τις αρχές του 20ου αιώνα οι γεωγραφικοί φορείς σε παγκόσμιο επίπεδο στρέφονται στην αξιοποίηση χαρτογραφικών συστημάτων σύμμορφων απεικονίσεων και ειδικότερα συστημάτων βασισμένων στην εγκάρσια Μερκατορική προβολή, ωστόσο παραμένει αδιευκρίνιστο το ερώτημα: γιατί στην Ελλάδα επιλέχθηκε η εφαρμογή μιας μη σύμμορφης προβολής; Αδιευκρίνιστο επίσης παραμένει το ερώτημα: πότε ακριβώς εφαρμόστηκε το σύστημα Hatt; Με βάση το υφιστάμενο αρχαικό υλικό (σε εκθέσεις πεπραγμένων των διοικητών της Γεωγραφικής Υπηρεσίας του Στρατού και εκθέσεις της Ελληνικής Γεωδαιτικής και Γεωφυσικής Επιτροπής σε συνέδρια της Διεθνούς Ένωσης Γεωδαισίας και Γεωφυσικής), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα Hatt θα πρέπει να εφαρμόστηκε στη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού, διάδοχο θεσμό της Χαρτογραφικής Υπηρεσίας, περί το τέλος του πρώτου τετάρτου του 20ου αιώνα.

Σήμερα, το σύστημα αυτό έχει αντικατασταθεί από το ΕΓΣΑ'87. Ας σημειωθεί η ασυμβατότητά του με τις σύγχρονες τεχνολογίες δεδομένου ότι το ελλειψοειδές δεν είναι γεωκεντρικό και ως εκ τούτου δεν μπορούν εύκολα σε αυτό να εκφραστούν δεδομένα προερχόμενα από την τεχνολογία των Παγκοσμίων Συστημάτων Εντοπισμού (Global Positioning Systems - GPS).



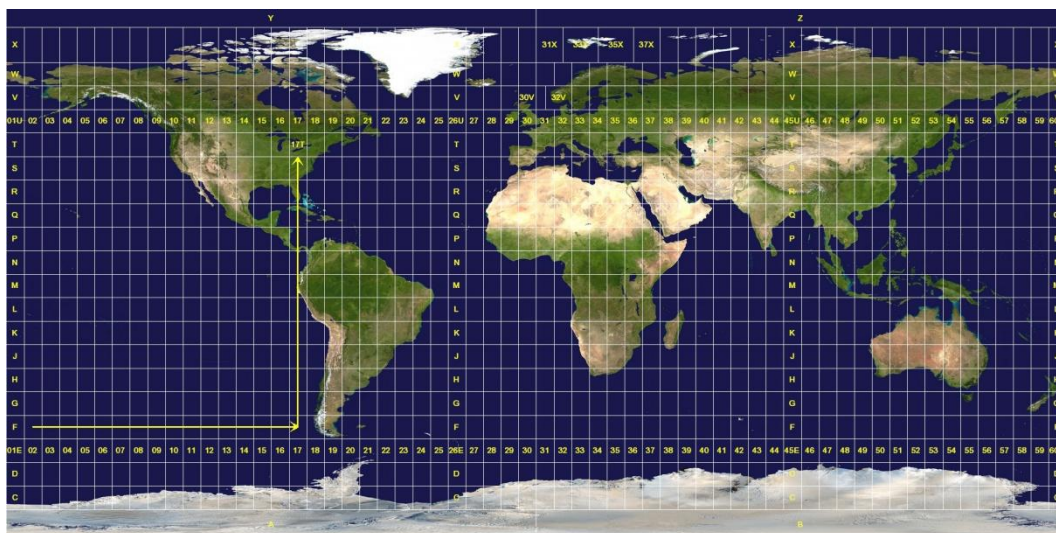


Εικόνα 4.6: Τοπογραφικός χάρτης γενικής χρήσης κλίμακας 1:100.000.

#### 4.4 Σύστημα Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής των 6°

Οι πρώτες σκέψεις για τη δημιουργία ενός παγκόσμιου προβολικού συστήματος διατυπώθηκαν στις εργασίες της 6ης Γενικής Συνέλευσης του Συνεδρίου της Διεθνούς Ένωσης Γεωδαισίας και Γεωφυσικής, που διεξήχθη στη Σκωτία (Endingburgh) το 1936.

Το τέλος των εργασιών ανέδειξε το σαφή προσανατολισμό της παγκόσμιας κοινότητας των γεωδαιτών και γεωφυσικών: την εφαρμογή της εγκάρσιας Μερκατορικής προβολής σε εξήντα διαδοχικές ζώνες πλάτους  $6^\circ$ , ως προς το γεωγραφικό μήκος, προκειμένου να καλύπτεται ολόκληρη η επιφάνεια της Γης. Μετά το τέλος του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου διαμορφώθηκαν οι κατάλληλες συνθήκες δημιουργίας του παγκόσμιου χαρτογραφικού συστήματος για στρατιωτική χρήση. Η θεσμοθέτηση του συστήματος της Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής των  $6^\circ$  (Universal Transverse Mercator - UTM) ήταν άμεση: αρχικά υιοθετήθηκε από τις στρατιωτικές υπηρεσίες των ΗΠΑ, το 1947, ακολούθως από τον Οργανισμό Βορειοατλαντικού Συμφώνου και κατ' επέκταση από τις στρατιωτικές υπηρεσίες των δυτικοευρωπαϊκών κρατών. Είναι γεγονός, ότι το σύστημα αυτό βρήκε ευρεία εφαρμογή, σε σημείο που πολλά κράτη το υιοθέτησαν ως επίσημο προβολικό σύστημα ακόμα και για πολιτική χρήση.



**Εικόνα 4.7:** Οι ζώνες της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των  $6^\circ$ .

Αρχικά το σύστημα της Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής εφαρμόστηκε στο Διεθνές Ελλειψοειδές (ελλειψοειδές Hayford) και τη δεκαετία του 1980 εφαρμόστηκε στο σύγχρονο ελλειψοειδές GRS-80 (με μεγάλο ημιάξονα  $a=6378137\text{m}$  και επιπλάτυνση  $f=1/298,25722$ ). Η επιφάνεια του ελλειψοειδούς χωρίζεται σε 60 ζώνες πλάτους  $6^\circ$  ως προς το γεωγραφικό μήκος, ξεκινώντας την αρίθμηση των ζωνών από το μεσημβρινό των  $180^\circ$  δυτικά του αστεροσκοπείου του Greenwich (Εικόνα 4.7). Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται 60 τοπικά συστήματα συντεταγμένων που καλύπτουν ολόκληρη την επιφάνεια της Γης<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Οι ζώνες της Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής των  $6^\circ$  εκτείνονται μέχρι το γεωγραφικό πλάτος των  $84^\circ$  στο βόρειο ημισφαίριο και αντίστοιχα μέχρι το γεωγραφικό πλάτος των  $80^\circ$  στο νότιο ημισφαίριο της Γης. Στις περιοχές γύρω από το βόρειο και το νότιο πόλο αναπτύσσεται ένα

Ως συντελεστής κλίμακας<sup>5</sup> ( $k$ ) λήφθηκε η τιμή 0,9996 και στις τετμημένες  $E$  (Eastings) προστίθεται η σταθερά 500.000 ώστε να αποφεύγονται, στην έκταση κάθε ζώνης, οι αρνητικές τιμές. Οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό, όμως, σε κάθε ζώνη οι παραμορφώσεις μηκών είναι μικρότερες από  $1/2.500$ , δηλαδή, παραμόρφωση σαράντα εκατοστών σε απόσταση ενός χιλιομέτρου. Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της προβολής αλλά και τις υπόλοιπες παραμέτρους με τις οποίες θεσμοθετήθηκε το σύστημα της Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής ικανοποιούνται τα κριτήρια:

1. Εξασφαλίζεται η ιδιότητα της συμμορφίας, ώστε να ελαχιστοποιούνται οι παραμορφώσεις των διευθύνσεων.
2. Ικανοποιείται η «συνέχεια» των απεικονιζόμενων περιοχών με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των ζωνών.
3. Η παραμόρφωση των αποστάσεων δεν υπερβαίνει μια καθορισμένη ανοχή.
4. Διαμορφώνεται ενιαίο σύστημα τοπικών συντεταγμένων για όλες τις ζώνες.
5. Οι σχέσεις μετασχηματισμού μεταξύ των ζωνών είναι ομοιόμορφες (θεωρώντας ένα συγκεκριμένο ελλειψοειδές αναφοράς).
6. Η σύγκλιση των μεσημβρινών στην έκταση της κάθε ζώνης δεν υπερβαίνει τις πέντε μοίρες.

Στο πλαίσιο ένταξης της Ελλάδας στον Οργανισμό Βορειοατλαντικού Συμφώνου με το πέρας του 2ου Παγκόσμιου Πολέμου, η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού υιοθέτησε για τις στρατιωτικές της αποκλειστικά ανάγκες το σύστημα της Παγκόσμιας Εγκάρσιας Μερκατορικής των  $6^\circ$ . Η έκταση της χώρας περιλαμβάνεται στην  $34^{\text{η}}$  και  $35^{\text{η}}$  ζώνη με κεντρικούς μεσημβρινούς, αντίστοιχα, τις  $21^\circ$  και  $27^\circ$  ανατολικά του αστεροσκοπείου του Greenwich. Αξίζει να σημειωθεί, ότι σχεδόν το σύνολο των τοπογραφικών χαρτών γενικής χρήσης της χώρας που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, συντάχθηκε στην εγκάρσια Μερκατορική προβολή, με απαλοιφή βεβαίως της αναγραφής του χαρτογραφικού της κανάβου για λόγους στρατιωτικού απορρήτου, ενώ το επίσημο προβολικό σύστημα της χώρας, για πολιτική χρήση, ήταν το σύστημα Hatt μέχρι το

---

παγκόσμιο σύστημα βασισμένο στην πολική στερεογραφική προβολή που ονομάζεται σύστημα Παγκόσμιας Πολικής Στερεογραφικής.

<sup>5</sup> Στην εγκάρσια Μερκατορική προβολή ο κύλινδρος της αναπτυκτής επιφάνειας εφάπτεται στον κεντρικό μεσημβρινό. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος του μεσημβρινού να είναι ίση με τη μονάδα, ενώ, σε όλη την υπόλοιπη έκταση της απεικόνισης να είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα. Επομένως, η εφαρμογή της απεικόνισης παρουσιάζει το μειονέκτημα η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε όλη την έκταση της απεικονιζόμενης περιοχής να είναι πάντα μεγαλύτερη της μονάδας, δηλαδή, τα μήκη να απεικονίζονται μεγαλύτερα από τα πραγματικά. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί να διορθωθεί αν σμικρύνουμε την απεικόνιση κατά ένα συντελεστή κλίμακας ( $k$ ) μικρότερο της μονάδας, δηλαδή αν πολλαπλασιασθούν οι ορθογώνιες συντεταγμένες της προβολής ( $x, y$ ) με το συντελεστή κλίμακας. Τότε, επιτυγχάνεται μια ισοκατανομή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης στην έκταση της απεικόνισης γύρω από μια τιμή που είναι ίση με τη μονάδα.



1987. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της σειράς βασικών τοπογραφικών διαγραμμάτων κλίμακας 1:5.000, η οποία καλύπτει ολόκληρη την έκταση της χώρας και συντάχθηκε στην προβολή του Hatt.

#### 4.5 Σύστημα Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των 3°

Τη δεκαετία του 1960, ορισμένα από τα μειονεκτήματα του κρατικού προβολικού συστήματος Hatt καθιστούσαν πλέον προβληματική τη χρήση του για την κάλυψη των χαρτογραφικών αναγκών των πολιτικών υπηρεσιών της χώρας. Η αιχμή της κριτικής εστιάζονταν, αφενός, στο γεγονός ότι η προβολή δεν ήταν σύμμορφη, αφετέρου, στην ύπαρξη περίπου 130 διαφορετικών τοπικών συστημάτων συντεταγμένων που δυσχέραιναν την αποτελεσματική διαχείριση ευρύτερων περιοχών. Επομένως, η ανάγκη αντικατάστασής του ήταν εμφανής.

Το διάδοχο χαρτογραφικό σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των 3°, αντικατέστησε την προβολή του Hatt και υιοθετήθηκε τη δεκαετία του 1970, προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα δύο αυτά σημαντικά προβλήματα. Πράγματι, η νέα σύμμορφη προβολή, ως εγκάρσια Μερκατορική προβολή, διαιρούσε την ελληνική επικράτεια σε τρεις ζώνες, πλάτους 3° ως προς το γεωγραφικό μήκος, με κεντρικούς μεσημβρινούς, αντίστοιχα, τις -3°, 0° και 3° ως προς το μεσημβρινό του αστεροσκοπείου Αθηνών. Όπως είναι αναμενόμενο, για το σύνολο της χώρας αναπτύσσονται πλέον μόνον τρία τοπικά συστήματα συντεταγμένων αντί 130. Για την αποφυγή αρνητικών τιμών στις τετμημένες  $x$  προστίθεται η σταθερά 200.000, ενώ για τις τεταγμένες  $y$ , ως αφετηρία ορίζεται η τεταγμένη σε γεωγραφικό πλάτος 34°, ώστε να προκύπτουν τιμές με εξαψήφιο ακέραιο μέρος. Ορίζοντας ως συντελεστή κλίμακας ( $k$ ) την τιμή 0,9994, εξασφαλίζεται παραμόρφωση μηκών μικρότερη από 1/10.000, δηλαδή, παραμόρφωση δέκα εκατοστών σε απόσταση ενός χιλιομέτρου για ολόκληρη την έκταση κάθε ζώνης.

Οι υπόλοιπες παράμετροι σχετικά με το κρατικό σύστημα γεωγραφικής αναφοράς παρέμειναν ως είχαν. Για παράδειγμα, οι πίνακες υπολογισμού των συντεταγμένων προσδιορίστηκαν εφαρμόζοντας το υφιστάμενο ελλειψοειδές Bessel 1841. Τέλος, προσδιορίστηκαν κατάλληλες σχέσεις και οι αντίστοιχοι πίνακες για την απευθείας μετατροπή των συντεταγμένων του συστήματος Hatt στο σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής 3°. Το σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των 3° μελετήθηκε από την καθηγήτρια της Σχολής Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Αμαλία Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου, στο πλαίσιο των μεταπτυχιακών της σπουδών, το 1971.

Το προβολικό αυτό σύστημα υιοθετήθηκε από το Υπουργείο Δημοσίων Έργων και μια δεκαετία αργότερα, το 1983, εφαρμόστηκε στην Επιχείρηση Πολεοδομικής Ανασυγκρότησης, όπου συντάχθηκαν φωτογραμμετρικά διαγράμματα των οικισμών της χώρας σε κλίμακες 1:1.000 (αστικές περιοχές) και 1:5.000 (ημιαστικές περιοχές).

#### 4.6 Εγκάρσια Μερκατορική προβολή του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς του 1987 (ΕΓΣΑ'87)

Η εξέλιξη της τεχνολογίας στα τέλη του 20ου αιώνα -γεωδαιτικά όργανα που παρείχαν μετρήσεις υψηλής ακρίβειας, διάχυση της χρήσης των ηλεκτρονικών υπολογιστών, ανάπτυξη του Παγκόσμιου Συστήματος Εντοπισμού που αξιοποιούσε την τεχνολογία των τεχνητών δορυφόρων- καθιστούσε το υφιστάμενο κρατικό σύστημα γεωγραφικής αναφοράς για πολιτική χρήση αδύναμο να ανταποκριθεί στα επίπεδα της ακρίβειας που απαιτούνταν. Ήταν πλέον επιτακτική η ανάγκη άμεσης εκπόνησης προγραμμάτων κτηματογράφησης και χαρτογράφησης, προκειμένου να δημιουργηθεί η απαραίτητη υποδομή για την ανάπτυξη της χώρας. Είναι προφανές ότι το όλο εγχείρημα προϋπέθετε τη δημιουργία ενός σύγχρονου κρατικού συστήματος γεωγραφικής αναφοράς -βασισμένο στις καινοτόμες εξελίξεις της τεχνολογίας- που θα εξασφάλιζε υψηλά επίπεδα ακρίβειας και ποιότητας.

Το 1987 δημιουργείται το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς του 1987, στη βάση επίγειων και δορυφορικών μετρήσεων. Χαρακτηριστικά, τα δεδομένα για την πρώτη κατηγορία μετρήσεων προήλθαν από τη Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού, ενώ για τη δεύτερη, από το Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, θέση που εξάλλου αποτελεί και την αφετηρία του συστήματος αναφοράς (Εικόνα 4.8). Το σύστημα δημιουργήθηκε από τον καθηγητή της Σχολής Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου Γεώργιο Βέη. Τη θεσμοθέτηση του νέου συστήματος αναφοράς ανέλαβε ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων της Ελλάδος, φορέας που τελούσε υπό την εποπτεία του Υπουργείου Περιβάλλοντος, Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων.



**Εικόνα 4.8:** Το βάθρο, στο Κέντρο Δορυφόρων Διονύσου του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, αφετηρία του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς του 1987.

Ως επιφάνεια αναφοράς επιλέχθηκε το γεωκεντρικό ελλειψοειδές GRS-80, ο προσανατολισμός του οποίου προσαρμόστηκε στο γεωειδές του ελληνικού χώρου με τη βοήθεια δορυφορικών παρατηρήσεων. Αναφορικά με το χαρτογραφικό σύστημα επιλέχθηκε η επικρατούσα διεθνώς σύμμορφη προβολή, δηλαδή, η εγκάρσια Μερκατορική προβολή. Η προβολή εφαρμόστηκε σε ολόκληρη την έκταση της χώρας, δηλαδή, χωρίς να ορίζονται πλέον τοπικά συστήματα συντεταγμένων, με συντελεστή κλίμακας ( $k$ ) 0,9996 και κεντρικό μεσημβρινό το μεσημβρινό με γεωγραφικό μήκος  $24^\circ$  ανατολικά του αστεροσκοπείου του Greenwich. Για την αποφυγή αρνητικών τιμών στις τετμημένες  $X$  προστίθεται η σταθερά 500.000. Με τον τρόπο αυτό η παραμόρφωση των μηκών δεν υπερβαίνει τα 670 ppm σε ολόκληρη την έκταση της χώρας, δηλαδή παραμόρφωση εξήντα-επτά εκατοστών σε απόσταση ενός χιλιομέτρου.

Για την αξιοποίηση του υπάρχοντος χαρτογραφικού υλικού, που ήταν εκφρασμένο στο σύστημα Hatt, δημιουργήθηκαν πίνακες άμεσης μετατροπής των συντεταγμένων στο νέο σύστημα. Οι απαραίτητοι υπολογισμοί εκπονήθηκαν με τη συνεργασία τριών φορέων: του Οργανισμού Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων, της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού και του Εργαστηρίου Ανώτερης Γεωδαισίας του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

#### 4.7 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών χαρτογραφικών συστημάτων

Σε πολλές χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές οι συντεταγμένες ενός συνόλου σημείων του γεωγραφικού χώρου χρειάζεται να μετατραπούν από ένα χαρτογραφικό σύστημα σε κάποιο άλλο. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απλή αν τα δύο συστήματα αναφέρονται στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum - ελλειψοειδές) και υλοποιείται εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν οι δύο προβολές. Αν όμως τα δύο συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum - ελλειψοειδή), τότε η διαδικασία της μετατροπής γίνεται πιο πολύπλοκη και σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις μπορεί να υλοποιηθεί μόνο προσεγγιστικά με τη βοήθεια γεωμετρικών μετασχηματισμών (π.χ. ομοπαράλληλο μετασχηματισμό) ή πολυωνύμων (π.χ. 2ου βαθμού).

Στις περιπτώσεις που τα δύο χαρτογραφικά συστήματα ανήκουν στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum - ελλειψοειδές), τότε, η μετατροπή γίνεται προσδιορίζοντας τις γεωγραφικές συντεταγμένες ( $\phi, \lambda$ ) από τις ορθογώνιες ( $x_1, y_1$ ), εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο χαρτογραφικό σύστημα. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x_2, y_2$ ) από τις γεωγραφικές ( $\phi, \lambda$ ), εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο χαρτογραφικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι αν κάποιο από τα δύο συστήματα εφαρμόζεται σε κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων ( $\rho, \theta$ ) σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με την ακρίβεια που συνοδεύει τις σχέσεις που ορίζουν τα δύο χαρτογραφικά συστήματα και επομένως, αν η ακρίβεια είναι ικανοποιητική, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε γεωδαιτικές όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες. Κλασικό

παράδειγμα της περίπτωσης αυτής αποτελεί η μετατροπή συντεταγμένων από το σύστημα Hatt στο σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής των 3° (ΕΜΠ-3°) και αντίστροφα.

Στις περιπτώσεις που τα δύο χαρτογραφικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum - ελλειψοειδή) και είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, δηλαδή, γνωρίζουμε το διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες  $[\Delta X_{12}, \Delta Y_{12}, \Delta Z_{12}]$  μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς για κάθε σημείο του γεωγραφικού χώρου, τότε η μετατροπή μπορεί να γίνει με τα ακόλουθα στάδια.

Αρχικά, προσδιορίζονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες  $(\phi_1, \lambda_1)$  από τις ορθογώνιες  $(x_1, y_1)$ , εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο χαρτογραφικό σύστημα. Ακολουθεί η μετατροπή των γεωγραφικών συντεταγμένων  $(\phi_1, \lambda_1)$  σε γεωκεντρικές  $(X_1, Y_1, Z_1)$  στο πρώτο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς με τη βοήθεια των σχέσεων:

$$\begin{aligned} X_1 &= N_1 \cos \phi_1 \cos \lambda_1, \\ Y_1 &= N_1 \cos \phi_1 \sin \lambda_1, \\ Z_1 &= N_1 (1 - e_1^2) \sin \phi_1, \end{aligned}$$

όπου  $N_1$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου και  $e_1$  πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος  $\phi_1$ .

Στο επόμενο στάδιο, εφαρμόζεται το γνωστό διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς ώστε να προκύψουν οι γεωκεντρικές  $(X_2, Y_2, Z_2)$  στο δεύτερο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{pmatrix}.$$

Ακολουθεί η μετατροπή των γεωκεντρικών συντεταγμένων σε γεωγραφικές  $(\phi_2, \lambda_2)$  στο δεύτερο γεωδαιτικό σύστημα, χρησιμοποιώντας τις αντίστροφες των σχέσεων που εφαρμόστηκαν προηγουμένως:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \arctan \left( \frac{Y_2}{X_2} \right), \\ \phi_2 &= \arctan \left( \frac{Z_2 + e_2^2 N_2 \sin \phi_2}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \right). \end{aligned}$$

όπου  $N_2$  η ακτίνα της κυρίας καθέτου και  $e_2$  πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος  $\phi_2$ .

Από τις σχέσεις αυτές ο προσδιορισμός του γεωγραφικού πλάτους  $(\phi_2)$  γίνεται με προσεγγιστική τεχνική μέσω διαδοχικών επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί η

απαραίτητη ακρίβεια. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες  $(x_2, y_2)$  από τις γεωγραφικές  $(\phi_2, \lambda_2)$ , εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο χαρτογραφικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι και στην περίπτωση αυτή αν κάποιο από τα δύο χαρτογραφικά συστήματα είναι κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων  $(\rho, \theta)$  σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με ακρίβεια της τάξης μερικών εκατοστών του μέτρου, επομένως, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε ορισμένες γεωδαιτικές όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες.

Τέλος, στις περιπτώσεις που τα δύο χαρτογραφικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum - ελλειψοειδή) και δεν είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, η μετατροπή μπορεί να γίνει με προσεγγιστικές τεχνικές. Η διαδικασία της μετατροπής προϋποθέτει να είναι γνωστές οι συντεταγμένες ορισμένων σημείων και στα δύο χαρτογραφικά συστήματα. Εφαρμόζοντας είτε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ή πολυώνυμα μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των γεωμετρικών μετασχηματισμών ή των πολυώνυμων με τη βοήθεια των σημείων με γνωστές συντεταγμένες, και στη συνέχεια, μέσω των συντελεστών να γίνει η μετατροπή ακολουθώντας μια προσεγγιστική τεχνική. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται περισσότερα των απαραίτητων σημείων με γνωστές συντεταγμένες στα δύο συστήματα ώστε οι συντελεστές να προσδιοριστούν ύστερα από διαδικασία συνόρθωσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (MET). Έτσι, είναι δυνατός ο έλεγχος της ακρίβειας της μετατροπής, ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες της ενδεχόμενης εφαρμογής.

Σε αρκετές περιπτώσεις μετατροπών εφαρμόζεται ως γεωμετρικός μετασχηματισμός ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

όπου  $(x_1, y_1)$  οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο χαρτογραφικό σύστημα,  $(x_2, y_2)$  οι συντεταγμένες στο δεύτερο χαρτογραφικό σύστημα και  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) οι συντελεστές του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού.

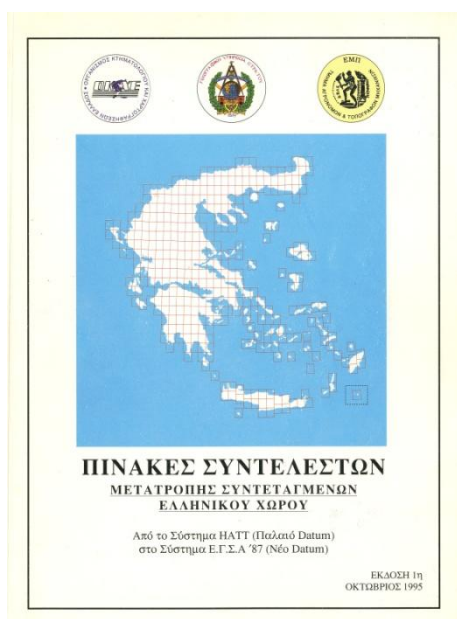
Περισσότερα στοιχεία για τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό καθώς και άλλων γεωμετρικών μετασχηματισμών δίνονται στο Κεφάλαιο 9, που περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίασή τους.

Σε περιπτώσεις μετατροπών που εφαρμόζονται πολυώνυμα, συνήθως, χρησιμοποιείται ένα πλήρες πολυώνυμο 2ου βαθμού, το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_1^2 \\ y_1^2 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

όπου  $(x_1, y_1)$  οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο χαρτογραφικό σύστημα,  $(x_2, y_2)$  οι συντεταγμένες στο δεύτερο σύστημα και  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 12$ ) οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Περισσότερα στοιχεία για την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, όταν έχουμε γνωστά περισσότερα από τα απαραίτητα σημεία για τον προσδιορισμό των συντελεστών είτε του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού ή του πολυωνύμου 2ου βαθμού, δίνονται στο Κεφάλαιο 6, το οποίο περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίαση των μεθόδων παρεμβολής.

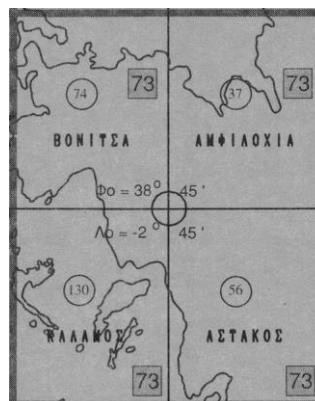


**Εικόνα 4.9:** Φυλλάδιο πινάκων συντελεστών μετατροπής συντεταγμένων ελληνικού χώρου.

Ειδικότερα για χαρτογραφικές εφαρμογές σχετικές με τη μετατροπή από το παλιό χαρτογραφικό σύστημα της χώρας (σύστημα Hatt) στο νέο (ΕΓΣΑ'87) και με τη βοήθεια συντεταγμένων των τριγωνομετρικών σημείων του κρατικού δικτύου της χώρας, εκφρασμένες και στα δύο συστήματα, προσδιορίστηκαν οι συντελεστές πολυωνύμων 2ου βαθμού για κάθε φύλλο χάρτη (του συστήματος Hatt) κλίμακας 1:50.000. Με τη βοήθεια των συντελεστών αυτών μπορεί να γίνει η μετατροπή των συντεταγμένων από το παλιό σύστημα (Hatt) στο σύγχρονο (ΕΓΣΑ'87) με ακρίβεια της τάξης μερικών δεκάδων εκατοστών του μέτρου. Οι συντελεστές των πολυωνύμων περιλαμβάνονται σε

ειδική έκδοση (Εικόνα 4.9) του Οργανισμού Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδος, της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού και της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Τα πολυώνυμα 2ου βαθμού που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή είναι της μορφής:

Περιλαμβανόμενα Φύλλα Χαρτών Κλίμακας 1:50.000		Υπολογισθέντες Πολυωνυμικοί Συντελεστές 2ου Βαθμού			
Κωδικός	Όνομα	A <sub>i</sub>	Τιμή	B <sub>i</sub>	Τιμή
037	Αμφιλοχία	A0	236395.18	B0	4293221.14
056	Αστακός	A1	0.9999088	B1	-0.0331876
074	Βόνιτσα	A2	0.0331796	B2	0.9999168
		A3	-3.30 E-09	B3	0.13 E-09
		A4	3.21 E-09	B4	-0.00 E-09
		A5	-0.52 E-09	B5	-6.47 E-09
		130	Κάλαμος	A0	236395.55
		A1	0.9998981	B1	-0.0332230
		A2	0.0331868	B2	0.9998956
		A3	-4.86 E-09	B3	1.17 E-09
		A4	3.06 E-09	B4	-0.37 E-09
		A5	-0.03 E-09	B5	-8.87 E-09



**Εικόνα 4.10:** Υπόδειγμα συντελεστών μετατροπής συντεταγμένων μεταξύ παλαιού χαρτογραφικού συστήματος (Hatt) και νέου (ΕΓΣΑ'87).

$$X = A_0 + A_1x + A_2y + A_3x^2 + A_4y^2 + A_5xy,$$

$$Y = B_0 + B_1x + B_2y + B_3x^2 + B_4y^2 + B_5xy,$$

όπου (X, Y) είναι οι ζητούμενες συντεταγμένες στο χαρτογραφικό σύστημα ΕΓΣΑ'87, (x,y) είναι οι γνωστές συντεταγμένες στο χαρτογραφικό σύστημα Hatt, A<sub>0</sub>, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>, A<sub>5</sub> και B<sub>0</sub>, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, B<sub>3</sub>, B<sub>4</sub>, B<sub>5</sub> οι συντελεστές μετατροπής.

Στην Εικόνα 4.10 παρουσιάζεται ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των πινάκων μετατροπής συντεταγμένων από το σχετικό φυλλάδιο. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι συντελεστές μιας περιοχής του νομού Αιτωλοακαρνανίας που απεικονίζεται σε τέσσερα φύλλα τοπογραφικών χαρτών κλίμακας 1:50.000 γενικής χρήσης της Γεωγραφικής Υπηρεσίας του Στρατού. Εκτός από τους συντελεστές των πολυωνύμων 2ου βαθμού δίνονται όλες οι άλλες σχετικές πληροφορίες που είναι χρήσιμες για τον εντοπισμό μιας περιοχής, όπως είναι οι ονομασίες και οι κωδικοί των χαρτών και οι γεωγραφικές συντεταγμένες του κέντρου φύλλου στο οποίο ανήκουν καθώς και η απεικόνιση της περιοχής σε μικρότερη κλίμακα.

#### 4.8 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α., 1973, "Εν προβολικόν σύστημα διά την Ελλάδα", *Τεχνικά Χρονικά*, 10: 920-31.
- Βέης Γ., 1977, *Μαθηματική Χαρτογραφία*, Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας & Χαρτογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Βέης Γ., 1987, *Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς*, Αθήνα: Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας.
- Bugayevskiy L.M. & J.P. Snyder, 1995, *Map Projections. A Reference Manual*, London: Taylor & Francis.
- Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού, 1995, *Πίνακες συντελεστών μετατροπής συντεταγμένων Ελληνικού χώρου*, Έκδοση 1η, Αθήνα.
- Eginitis D.D. & D. Lampadarios, 1924, "Rapport sur les travaux exécutés en Grèce", 2me Assemblée Générale de Madrid, Union Géodésique et Géophysique Internationale - Section de Géodesie.
- Hartl H., 1890, "Die Landesvermessung in Grichenland", *Mitth. d. k. u. k. mil.geogr. Inst.*, X: 187-217.
- Hartl H., 1901, "Griechenland: Berichtüber die Dreiecksmessungen". *Comptes Rendus de la 13me Conférence Général de l'Association Géodésique International*, Leyden: J. Brill.
- Hayford F.J., 1909, *The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States*, Washington: U.S. Government Printing Office.
- Κατσιμήδης Α., 1907, *Στρατιωτική Τοπογραφία*, 2η Έκδοση, Αθήνα: Τυπογραφείο Εστία.
- Maling D.H., 1973, *Coordinate systems and map projections*. London: G. Philip & Son Ltd.
- Moritz H., 1988, "Geodetic Reference System 1980", *Journal of Geodesy*, 62(3): 348-58.
- Νάκος Β. & Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*, Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Soldner J.G., 1810, *Theorie der Landesvermesung*, Leipzig: Wilhelm Engelmann.
- Thomas, P.D., 1952, *Conformal projections in geodesy and cartography*, Washington: U. S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey, Special Publication 251.
- Yang Q., J.P. Snyder & W.R. Tobler, 2000, *Map Projection Transformation. Principles and Applications*, London: Taylor & Francis.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ  
ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ



## Κεφάλαιο 5

### 5. ΧΑΡΤΟΜΕΤΡΙΑ

#### 5.1 Η έννοια της χαρτομετρίας

Χαρτομετρία σύμφωνα με τη Διεθνή Χαρτογραφική Ένωση (International Cartographic Association – ICA) έχει ορισθεί ως: «Η χαρτογραφική διαδικασία μέτρησης και υπολογισμού ποσοτικών πληροφοριών από τους χάρτες ...». Τέσσερις κατηγορίες μετρήσεων μπορούν να θεωρηθούν ως οι βασικές τεχνικές της χαρτομετρίας:

- η μέτρηση αποστάσεων,
- η μέτρηση εμβαδού,
- η μέτρηση διευθύνσεων,
- η καταμέτρηση του αριθμού στοιχείων που απεικονίζονται στους χάρτες.

Παράγωγα μεγέθη μπορούν να προκύψουν από συνδυασμούς των ανωτέρω μετρήσεων με άλλα δεδομένα. Για παράδειγμα, η πυκνότητα ενός χωρικού φαινομένου προκύπτει από συνδυασμό του αριθμού των στοιχείων του χωρικού φαινομένου με το εμβαδόν της έκτασης στην οποία αυτά αναφέρονται. Οι όγκοι προκύπτουν από μετρήσεις του εμβαδού επιφανειών και από τις υψομετρικές διαστάσεις που απεικονίζονται στους χάρτες με ένα συγκεκριμένο τρόπο (π.χ. με ισarithμικές καμπύλες), για να εισαχθεί η τρίτη διάσταση. Η κλίση προκύπτει από τη μέτρηση απόστασης μεταξύ σημείων με γνωστά υψόμετρα. Δύο από τις προαναφερθείσες πράξεις, η μέτρηση αποστάσεων και η μέτρηση εμβαδού, είναι ιδιαίτερης σημασίας για πολλούς χρήστες χαρτών με διαφορετικά ενδιαφέροντα. Η μέτρηση των διευθύνσεων, ενώ πρακτικά δεν ενδιαφέρει τους περισσότερους χρήστες των χαρτών, αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ορισμένες ειδικές κατηγορίες χρηστών, όπως είναι οι μηχανικοί και οι πλοηγοί.

Προφανώς πρέπει να είναι γνωστός ο σκοπός της μέτρησης, πριν αρχίσει κάθε διαδικασία μέτρησης. Από τον ορισμό της χαρτομετρίας προκύπτουν τρία στάδια που συνθέτουν την όλη διαδικασία. Το πρώτο στάδιο, το οποίο ουσιαστικά υπονοείται και δεν ορίζεται, είναι ο καθορισμός των ορίων του αντικειμένου που μετριέται. Το δεύτερο στάδιο, είναι η μέτρηση αυτή καθαυτή. Το τρίτο αναφέρεται στη μετατροπή

των αποτελεσμάτων της μέτρησης σε μια αριθμητική μορφή, που να καθιστά δυνατή τη σύγκρισή της με άλλα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί από διαφορετικές πηγές.

Σε ποιές ανθρώπινες δραστηριότητες όμως είναι απαραίτητη η χαρτομετρία; Οι χρήσεις των χαρτών, στις οποίες προκύπτει ανάγκη για μετρήσεις, μπορούν να διακριθούν σε:

- επιστημονικές,
- πλοήγησης και
- διοικητικές.

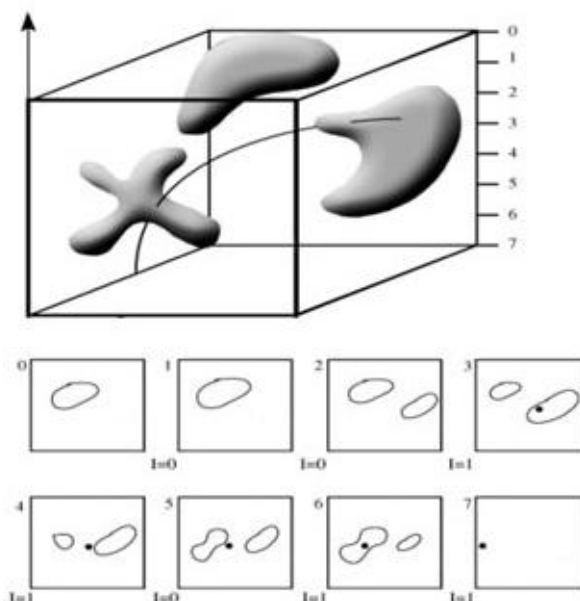
#### 5.1.1 Εφαρμογές της χαρτομετρίας στις επιστήμες

Η χαρτομετρία αποτελεί μια σημαντική τεχνική ενταγμένη στις φυσικές επιστήμες, όπως και σε ορισμένους κλάδους μηχανικών. Ο χάρτης αποτελεί βασικό εργαλείο στην επιστήμη της γεωγραφίας, της γεωλογίας, σε συγκεκριμένες περιοχές της βιολογίας καθώς και σε εφαρμογές αυτών των επιστημών στη γεωργία, στη δασονομία, στη μεταλλουργία κ.α.

Για τους μηχανικούς η χαρτομετρία αποτελεί μια χρήσιμη και σημαντική τεχνική, ειδικότερα για όσους διαχειρίζονται χωρικά δεδομένα. Η χρήση, όμως, των χαρτομετρικών τεχνικών επεκτείνεται και σε άλλα γραφικά μέσα εκτός των χαρτών, όπως είναι τα διαγράμματα, οι φωτογραφίες (αεροφωτογραφίες) ή οι δορυφορικές εικόνες καθώς και σε άλλου είδους γραφικές αποδόσεις, για παράδειγμα, σε γραφικές παραστάσεις αποτελεσμάτων εργαστηριακών ερευνών διαφόρων βασικών επιστημών. Ειδικότερο ενδιαφέρον, όσο αφορά τις εργαστηριακές μελέτες, παρουσιάζει η ανάπτυξη των μεθόδων της στερεολογίας, η οποία μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των μαθηματικών μεθόδων συσχέτισης των τρισδιάστατων παραμέτρων που προσδιορίζουν μια κατασκευή, με τις διδιάστατες μετρήσεις που προκύπτουν από τομές της κατασκευής (Εικόνα 5.1). Ισοδύναμοι με τη στερεολογία όροι χρησιμοποιούνται σε άλλα επιστημονικά αντικείμενα, όπως είναι η ποσοτική μικροσκοπία και η μορφομετρία.

Από το φάσμα των διαφόρων τεχνικών μέτρησης, η χαρτομετρία αντιπροσωπεύει εκείνο το τμήμα των τεχνικών που ερευνά με σκοπό να κατανοήσει τα διάφορα χωρικά φαινόμενα, από πληροφορίες που έχουν αναπαρασταθεί δια μέσου γραφικών αποδόσεων υπό σμίκρυνση με βάση την αναλογία που ορίζει η κλίμακα. Ένα άλλο τμήμα τεχνικών μέτρησης αποτελούν οι ποσοτικές μέθοδοι της μικροσκοπίας, όπου τα αντικείμενα που μελετώνται και μετρώνται έχουν μεγεθυνθεί πολλές φορές, σε σχέση με τις φυσικές τους διαστάσεις. Αξίζει να επισημανθεί ότι δεν υπάρχει πραγματική διαφορά στις μετρήσεις που γίνονται στους χάρτες με αυτές που γίνονται σε μια μικρογραφία. Και στις δύο περιπτώσεις μετρώνται αποστάσεις, εμβαδά, διευθύνσεις και γίνονται καταμετρήσεις (που δηλώνουν πλήθος στοιχείων). Όμως, υπάρχει μια σημαντική διάκριση μεταξύ του σκοπού των μετρήσεων. Ο σκοπός της χαρτομετρικής

μέτρησης είναι η ανακάλυψη των ποσοτικών σχέσεων μεταξύ αντικειμένων που απεικονίζονται στο χάρτη, δηλαδή, σε μια διδιάστατη επιφάνεια, όπου δεν είναι δυνατό να μετρηθούν όλες οι συνθήκες που επικρατούν στον πραγματικό τρισδιάστατο κόσμο.



**Εικόνα 5.1:** Οπτικοποίηση αντιπροσωπευτικής εφαρμογής στερεολογίας.

Σχεδόν σε όλες τις ποσοτικές μικροσκοπικές μελέτες γίνεται χρήση των τομών ή διατομών των τρισδιάστατων αντικειμένων, ανεξάρτητα του είδους του υλικού, δηλαδή, αν είναι ένα ανθρώπινο όργανο, ή ένα κομμάτι μέταλλο, ή ένας κάποιος βράχος (Εικόνα 5.1). Σε αυτές τις περιπτώσεις, υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας τομών, οι οποίες απεικονίζουν διαφορετικά επίπεδα ή όψεις του αντικειμένου. Η χαρτογραφική αναλογία θα ήταν μια σειρά χαρτών που ο καθένας από αυτούς θα απεικόνιζε το χωρικό φαινόμενο σε διαφορετικό υψομετρικό επίπεδο, παράλληλο με τον ορίζοντα. Για παράδειγμα, μια σειρά χαρτών που να απεικονίζει τις ατμοσφαιρικές ζώνες ή τις διευθύνσεις των γεωλογικών δομών. Όμως αυτοί οι χάρτες θα μπορούσαν να σχεδιαστούν μόνον αν υπήρχαν επαρκείς πληροφορίες για τις συνθήκες που επικρατούν σε κάθε υψομετρικό επίπεδο του ορίζοντα.

Η εφαρμογή της διαδικασίας αναπαράστασης της τρίτης διάστασης από δειγματοληπτική συλλογή δεδομένων, έχει ως αποτέλεσμα, πολλές από τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στη μέτρηση αποστάσεων και εμβαδού να βασίζονται σε μεθόδους πιθανολογικές. Ορισμένες πιθανολογικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται από ευχρηστία και αποτελεσματικότητα και οδηγούν σε ακριβείς εκτιμήσεις των μετρούμενων μεγεθών, με αποτέλεσμα να είναι εξίσου χρήσιμες σε μετρήσεις χαρακτηριστικών τόσο του χάρτη όσο και μιας μικρογραφίας.

### 5.1.2 Η χαρτομετρία στην πλοήγηση

Η πλοήγηση περιλαμβάνει ένα μεγάλο φάσμα δραστηριοτήτων, από τη στοιχειώδη ανάγνωση του χάρτη, έως τις εξειδικευμένες τεχνικές πλοήγησης κινούμενων μέσων. Ένας πεζός που χρησιμοποιεί το χάρτη για να αναγνωρίσει τη θέση του και τη διαδρομή που επιθυμεί να ακολουθήσει, μετρά αποστάσεις και διευθύνσεις πάνω στο χάρτη, όπως ακριβώς και ένας πλοηγός. Ο πλοηγός μετρά τα ίδια ακριβώς στοιχεία στο χάρτη και προσδιορίζει το στίγμα του (εντοπισμός θέσης) με γραφικές τεχνικές. Η μόνη πραγματική διαφορά είναι ότι ο πεζός, πιθανά, να χρησιμοποιήσει μια πυξίδα για εφαρμογή των μετρήσεων που έκανε στο χάρτη, επομένως, οι μετρήσεις του να συνοδεύονται από ακρίβεια της τάξης των 2°, ενώ, ο πλοηγός θα εκτιμήσει τη διεύθυνση κίνησής του με ακρίβεια της τάξης 0,5°, γιατί πιθανά χρησιμοποιεί ακριβέστερο όργανο μέτρησης. Και στις δυο περιπτώσεις η οπτική αναγνώριση των απεικονιζόμενων χαρακτηριστικών είναι σημαντική γιατί στο χάρτη απεικονίζονται πολλές πληροφορίες που επιβεβαιώνουν τη συγκεκριμένη θέση.

### 5.1.3 Η χαρτομετρία στη διοίκηση

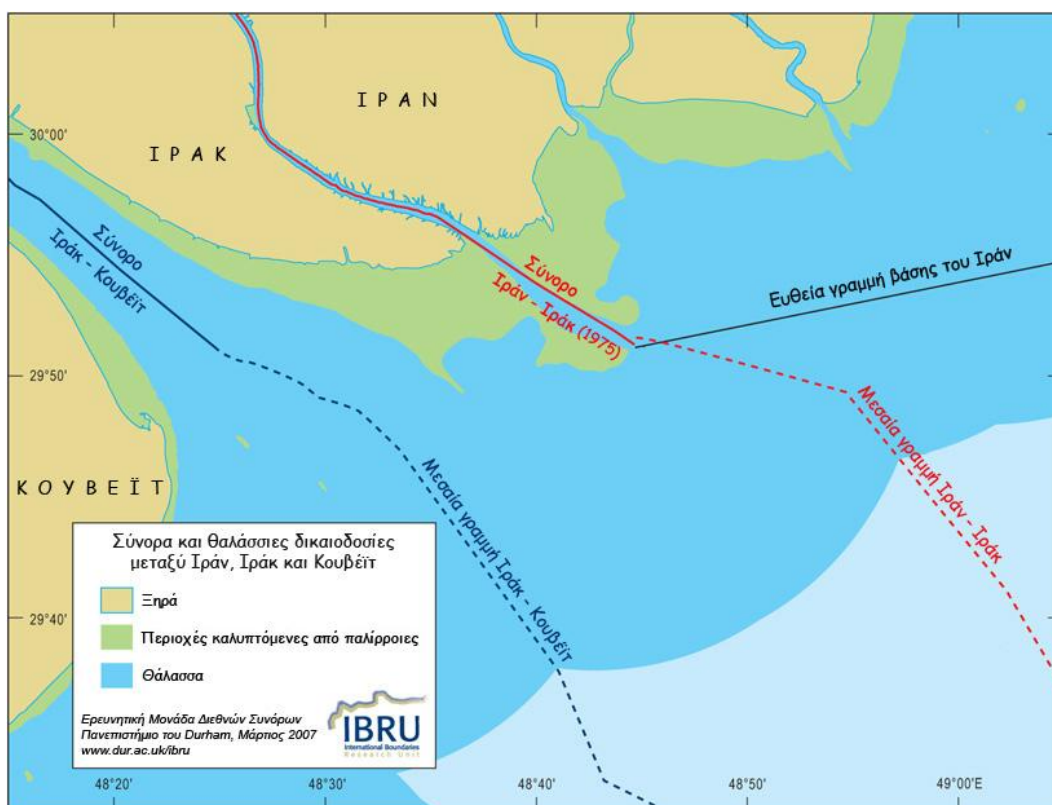
Η τρίτη βασική εφαρμογή της χαρτομετρίας αναφέρεται σε τεχνικές εργασίες που αφορούν τη διοίκηση. Τα τμήματα της δημόσιας διοίκησης που ασχολούνται με το σχεδιασμό, τον προγραμματισμό, τις μελέτες και την εκτέλεση των δημόσιων έργων έχουν συνεχή ενασχόληση με εκπόνηση χαρτομετρικών μετρήσεων που χρησιμοποιούνται σε οικονομικές και τεχνικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, ο ρόλος των χαρτών στον προσδιορισμό του εμβαδού εκτάσεων, στις διάφορες δραστηριότητες του δημόσιου φορέα είναι πολύ σημαντικός. Οι δραστηριότητες αυτές αναφέρονται, στη γενική διοίκηση, στο σχεδιασμό, στη διαχείριση των υδατικών πόρων, στον καθορισμό ορίων ιδιοκτησίας, στον καθορισμό αντικειμενικών αξιών, στη γεωργία, στην προφύλαξη των δασών κ.α.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εφαρμογή της χαρτομετρίας στη διοίκηση, αποτελεί η διαδικασία τροποποίησης των διεθνών νόμων που καθορίζουν τα εθνικά δικαιώματα στο θαλάσσιο χώρο. Γενικά έχει θεσμοθετηθεί μια διεθνής συμφωνία, σύμφωνα με την οποία τα ύδατα της ναυσιπλοΐας μπορούν να χωριστούν σε τέσσερις περιοχές, σε κάθε μία από τις οποίες ισχύει και διαφορετικό νομικό καθεστώς. Οι περιοχές αυτές είναι:

- τα διεθνή ύδατα,
- τα χωρικά ύδατα,
- η προσκείμενη ζώνη και
- η ανοικτή θάλασσα.

Ο τρόπος προσδιορισμού των τεσσάρων αυτών θαλάσσιων περιοχών δεν είναι καθόλου απλός. Γιατί, ενώ είναι εύκολο να οριστεί σύμφωνα με το διεθνή νόμο, ότι μια χώρα έχει χωρικά ύδατα πλάτους συγκεκριμένων μιλίων, είναι πολύ δύσκολο να ορισθεί η αφετηρία μέτρησής τους. Η ακτογραμμή δεν είναι μια απλή γραμμή. Η

πολυπλοκότητα της ακτογραμμής πολλές φορές οφείλεται σε επάλληλους βαθείς κόλπους, στην ύπαρξη νησιών εντός των χωρικών υδάτων, στις έντονες παλίρροιες που μεταβάλλουν τη θέση της κ.α. (Εικόνα 5.2). Όταν υπάρχει διαφωνία μεταξύ γειτονικών χωρών για τον καθορισμό των χωρικών τους υδάτων, οι παραπάνω παράμετροι αποτελούν προβλήματα που δύσκολα αντιμετωπίζονται, γιατί δεν προβλέπονται ανάλογες ρυθμίσεις για όλες αυτές τις ειδικές περιπτώσεις στους ισχύοντες νόμους. Σε αυτές τις πολύ σοβαρές διευθετήσεις, η λειτουργία αξιόπιστων ναυτικών χαρτών και οι μέθοδοι χαρτομετρίας αποκτούν ιδιαίτερη σημασία για την αποτελεσματική και ακριβή επίλυση των διαφωνιών.



Εικόνα 5.2: Χάρτης συνόρων και θαλάσσιων δικαιοδοσιών μεταξύ Ιράν, Ιράκ και Κουβέιτ.

## 5.2 Η έννοια του μέσου

### 5.2.1 Ο χάρτης ως μέσο

Εξ' ορισμού οι χαρτομετρικές εργασίες εκτελούνται σε χάρτες και διαγράμματα, με σκοπό τον προσδιορισμό διαστάσεων πάνω στη γήινη επιφάνεια. Όμως, ο χάρτης, ή το διάγραμμα, δεν είναι μια πιστή αναπαραγωγή της γήινης επιφάνειας. Άρα πρέπει να

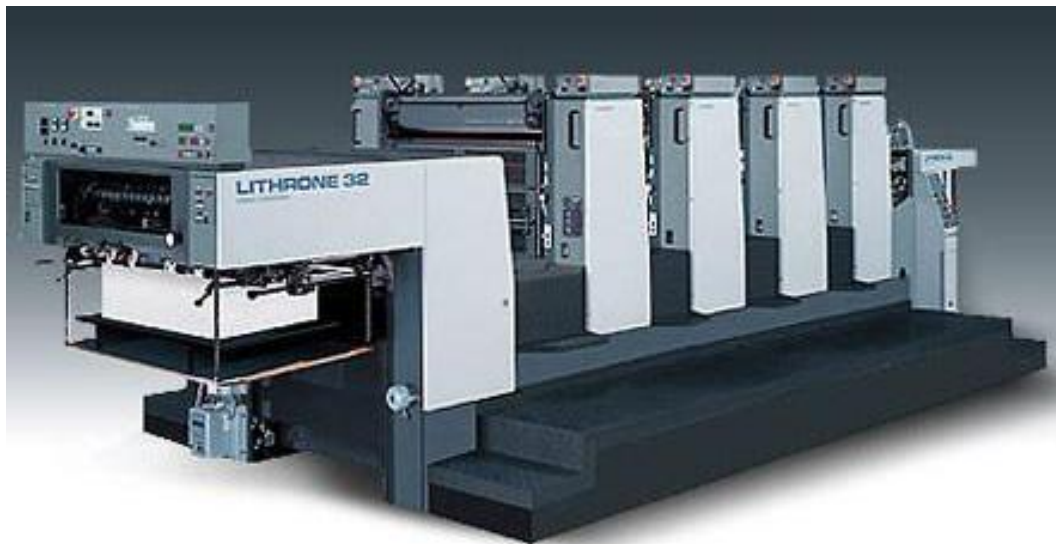
μελετηθούν οι τρόποι δημιουργίας των χαρτών δια μέσου των οποίων η εικόνα της γήινης επιφάνειας μετασχηματίζεται σε χάρτη, καθώς οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι προφανές ότι επηρεάζουν τις μετρήσεις. Ας ξεκινήσουμε από ένα συμβατικό ορισμό του χάρτη.

«Ένας χάρτης είναι μια αναπαράσταση, συνήθως υπό κλίμακα και σε ένα επίπεδο μέσο, επιλεγμένων αντικειμένων ή αφαιρετικών χαρακτηριστικών, τα οποία βρίσκονται ή σχετίζονται με την επιφάνεια της γης, ή άλλου ουράνιου σώματος.»

(International Cartographic Association)

Παρόλο που μπορεί πάντα να υπάρχουν εξαιρέσεις, υπάρχουν πέντε βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη μεγαλύτερη πλειοψηφία των χρησιμοποιούμενων χαρτών και οφείλονται στον τρόπο που έχουν δημιουργηθεί:

- Ο χάρτης έχει τυπωθεί με την τεχνική της λιθογραφίας τύπου offset σε δυο ή περισσότερα χρώματα επάνω σε ένα φύλλο χαρτιού.
- Για να τυπωθεί σε περισσότερα από ένα χρώματα, κάθε φύλλο χαρτιού πρέπει να περάσει περισσότερες από μια φορές από τη μηχανή εκτύπωσης (Εικόνα 5.3). Επιπλέον, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ξεχωριστή εκτυπωτική πλάκα για την εκτύπωση του κάθε χρώματος. Αυτό σημαίνει ότι, πρέπει να κατασκευαστούν περισσότερα του ενός δοκίμια για να δημιουργηθούν οι ανάλογες εκτυπωτικές πλάκες.



**Εικόνα 5.3:** Εκτυπωτική μηχανή offset.

- Κάθε χάρτης απεικονίζει μόνον ένα επιλεγμένο σύνολο χαρακτηριστικών της γήινης επιφάνειας. Οι διαδικασίες της γενίκευσης, δηλαδή, η επιλογή και η απλοποίηση,



έχουν τροποποιήσει τα χαρακτηριστικά, για να επιτευχθεί ευκρίνεια και εποπτεία του χώρου στις μικρές κλίμακες.

- Οι λεπτομέρειες του χάρτη, οι γραμμές και τα σύμβολα που απεικονίζουν διάφορα χαρακτηριστικά του εδάφους, έχουν σχεδιαστεί από αεροφωτογραφίες (Εικόνα 5.4) ή δορυφορικές εικόνες, με εφαρμογή φωτογραμμετρικών μεθόδων, ή έχουν προκύψει από προϋπάρχοντες χάρτες. Αν οι χάρτες είναι παράγωγοι έχουν, δηλαδή, δημιουργηθεί από άλλους χάρτες-πηγές μεγαλύτερης κλίμακας, ισχύει η ίδια διαπίστωση, καθώς η πρωτογενής τους πληροφορία έχει επίσης σχεδιαστεί με φωτογραμμετρική απόδοση, εκτός και αν είναι πολύ παλαιοί οπότε έχουν προκύψει από γεωδαιτικές αποτυπώσεις.



**Εικόνα 5.4:** Φωτο-γραμμετρικό όργανο χαρτογραφικής απόδοσης.

- Οι φωτογραμμετρικές μέθοδοι απόδοσης λεπτομερειών στηρίζονται, με τη σειρά τους, στην ύπαρξη τριγωνομετρικών και φωτοσταθερών σημείων.

### 5.2.2 Μετρητικοί και μη μετρητικοί χάρτες

Μια χρήσιμη για τη χαρτομετρία ταξινόμηση των χαρτών είναι η διάκριση μεταξύ μετρητικών και μη-μετρητικών χαρτών. Πολλοί χάρτες έχουν σκοπό τη μετάδοση πληροφοριών γενικού περιεχομένου, όπως είναι οι οδικοί χάρτες, οι εικονογραφικοί και ορισμένοι χάρτες ατλάντων. Μπορούν να ξεχωρίσουν γιατί δεν έχουν κανένα μαθηματικό πλαίσιο και η πληροφορία για την κλίμακά τους μπορεί και να μην αναγράφεται. Αυτοί οι χάρτες μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη-μετρητικοί και να διαχωριστούν από όλους του άλλους που απεικονίζουν το χαρτογραφικό κλίμακα ή άλλα αξιόπιστα στοιχεία σχετικά με την κλίμακά τους. Ένας απάραβτος κανόνας που ισχύει σχετικά με την μετρητική αξιοποίηση ενός χάρτη, διατυπώνεται ως εξής: αν ένας χάρτης δεν περιέχει ενδείξεις για το μαθηματικό του πλαίσιο, δεν είναι κατάλληλος για να γίνουν μετρήσεις σ' αυτόν.

Το μαθηματικό πλαίσιο ενός χάρτη αποτελείται από το πλέγμα των γεωγραφικών συντεταγμένων, ή από το χαρτογραφικό κλίμακα, δηλαδή, τον κλίμακα των ορθογωνίων συντεταγμένων της χαρτογραφικής προβολής, ή και από τα δυο. Οι χάρτες μεγάλων αλλά και μεσαίων κλιμάκων, έως την κλίμακα 1:500.000, απεικονίζουν το χαρτογραφικό κλίμακα, ανά 100m, 1km, 10km, ή και 100km, ανάλογα με την κλίμακα. Ο χαρτογραφικός κλίμακας ή το πλέγμα των γεωγραφικών συντεταγμένων του χάρτη χρησιμοποιούνται για το γεωμετρικό έλεγχο όλων των μετρήσεων που γίνονται σ' αυτόν. Οι διαστάσεις του πλέγματος ή του κλίμακας μπορούν να υπολογιστούν γνωρίζοντας το σχήμα και το μέγεθος της Γης, την κλίμακα και τις αναλυτικές σχέσεις που ορίζουν τη συγκεκριμένη χαρτογραφική προβολή. Συσχετίζοντας τις θεωρητικές διαστάσεις, που υπολογίζονται από αυτά τα δεδομένα, με αυτές που μετρώνται στους χάρτες μπορεί να προσδιοριστεί το μέγεθος της παραμόρφωσης του συγκεκριμένου χάρτη, ή να εκτιμηθεί η αναγωγή που πρέπει να ληφθεί υπόψη για την κλίμακα σμίκρυνσης του χάρτη, ώστε να εφαρμοστούν οι διορθώσεις που οφείλονται στις παραμορφώσεις λόγω των προβολικών σχέσεων.

Στους μετρητικούς χάρτες οι αποστάσεις και τα εμβαδά μπορούν να μετρηθούν και να διορθωθούν με ακρίβεια, είτε σε ένα μόνο φύλλο χάρτη, ή σε σειρά φύλλων, η οποία ανήκει στο ίδιο προβολικό σύστημα και στην ίδια επιφάνεια αναφοράς. Οποιαδήποτε προσπάθεια να αναχθούν μετρήσεις από έναν μη-μετρητικό σε ένα μετρητικό χάρτη, μπορεί να δημιουργήσει σημαντικά σφάλματα.

### 5.3 Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης

Η γεωμετρία του μέσου μέτρησης έχει μεγάλη σημασία για τη χαρτομετρία. Με βάση τη γεωμετρία του μέσου μέτρησης προσδιορίζονται οι αναγωγές που πρέπει να γίνουν στις μετρήσεις, ώστε να εξαλειφθούν τα σφάλματα που οφείλονται στον τρόπο δημιουργίας του. Έτσι, οι αναγωγές που γίνονται σε μετρήσεις από αεροφωτογραφίες είναι διαφορετικές από τις αναγωγές που γίνονται σε μετρήσεις από δορυφορικές εικόνες και αυτές με τη σειρά τους, είναι διαφορετικές σε μετρήσεις που γίνονται από χάρτες. Επομένως, οι θέσεις σημείων που εμφανίζονται σε μια αεροφωτογραφία διαφέρουν από τις αντίστοιχες θέσεις των σημείων που απεικονίζονται σε ένα χάρτη. Μια συνέπεια αυτής της διαφοράς είναι ότι δεν είναι ορθό να δημιουργηθεί ένας χάρτης από την απλή γραφική αντιγραφή μιας αεροφωτογραφίας. Πρέπει να χρησιμοποιηθούν περισσότερο πολύπλοκες μέθοδοι, ακόμα και για τη μεταφορά ορισμένων μόνο σημείων ή γραμμών από μια αεροφωτογραφία στο χάρτη. Αν και η μέτρηση αποστάσεων, εμβαδού ή διευθύνσεων μπορεί να γίνει με παρόμοια τεχνική πάνω σε μια αεροφωτογραφία, η μετατροπή των μετρήσεων σε πραγματικές μονάδες στο έδαφος αποτελεί μια πολύπλοκη διαδικασία επεξεργασίας, που οφείλεται στις μετατοπίσεις και παραμορφώσεις που έχουν υποστεί τα γραφικά αντικείμενα στην εικόνα της αεροφωτογραφίας, λόγω της γεωμετρίας της κεντρικής προβολής και του ανάγλυφου της φυσικής γήινης επιφάνειας.

### 5.3.1 Το σχήμα της Γης για τις ανάγκες της χαρτομετρίας

Κατά τη διαδικασία της αναγωγής των μετρήσεων είναι επιθυμητό το σχήμα της Γης να απλοποιηθεί σε συμβατό επίπεδο με την ακρίβεια των μετρήσεων. Έτσι σχετικά απλές τοπογραφικές τεχνικές περιορισμένων εκτάσεων, στις οποίες χρησιμοποιείται, για παράδειγμα, η μετροταινία για τη μέτρηση των αποστάσεων ή η πυξίδα για μέτρηση γωνιών, δηλαδή, σε εφαρμογές τοπογραφίας, αρκεί η επιφάνεια της Γης να αντικατασταθεί από το οριζόντιο επίπεδο της περιοχής. Σε ανάλογες περιπτώσεις εάν τα δεδομένα υποστούν επεξεργασία με αναφορά στην καμπύλη γήινη επιφάνεια, η διαφοροποίηση είναι μικρότερη από τα σφάλματα των μετρήσεων, τα οποία προκύπτουν από τα όργανα μέτρησης και τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει ο χάρτης. Στο αντίθετο άκρο, εκεί όπου απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στον προσδιορισμό των θέσεων σημείων ή τη χαρτογράφηση ορίων, ειδικά σε μακρινές αποστάσεις από την αρχή της τοπογράφησης, όχι μόνον πρέπει τα όργανα και οι μέθοδοι τοπογράφησης να είναι υψηλής ακρίβειας, αλλά, οι θέσεις των σημείων είναι αναγκαίο να υπολογιστούν με αναφορά σε ένα πιο σύνθετο μοντέλο της Γης. Ένα σημαντικό παράδειγμα, είναι η ανάγκη εντοπισμού, με μεγάλη ακρίβεια, των θαλασσίων ορίων πετρελαιοπηγών, όπου οι αξίες των εργασιών είναι πολύ υψηλές. Ο εντοπισμός αυτών των ορίων με επαρκή ακρίβεια, απαιτεί την εφαρμογή γεωδαιτικών μεθόδων με σκοπό τη συλλογή κατάλληλων παρατηρήσεων πεδίου και επεξεργασία των δεδομένων, χρησιμοποιώντας ένα ικανοποιητικό γεωειδές αναφοράς, ως επιφάνεια αναφοράς του υπολογισμού των θέσεων.

Οι μετρήσεις επιφανειών που γίνονται πάνω σε τοπογραφικό χάρτη μεγάλης ή μεσαίας κλίμακας δεν χρειάζεται να αναφέρονται σε σφαιρική ή σφαιροειδή γήινη επιφάνεια, επειδή η επίδραση της γήινης καμπυλότητας είναι μικρότερη από τα σφάλματα των διαδικασιών μέτρησης. Αντίθετα, η μέτρηση της επιφάνειας μιας μεγάλης χώρας ή μιας εκτεταμένης θαλάσσιας περιοχής από ένα χάρτη μικρής κλίμακας απαιτεί την αναγωγή των μετρούμενων ποσοτήτων με αναφορά σε σφαιρική ή σφαιροειδή Γη, θεωρώντας τα γραφικά αντικείμενα ως σφαιρικά ή σφαιροειδή τμήματα.

### 5.3.2 Η γεωμετρία του χάρτη

Ο χάρτης είναι μια επίπεδη επιφάνεια. Οι παραμορφώσεις των γεωμετρικών μεγεθών επηρεάζουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Πιο συγκεκριμένα, όταν γίνεται χρήση της κλίμακας του χάρτη, γίνεται η λανθασμένη υπόθεση ότι η κλίμακα είναι ενιαία σε όλη την έκταση του χάρτη. Όμως η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης, μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και γύρω από κάθε σημείο η μεταβολή της εξαρτάται από τη διεύθυνση, επομένως η υπόθεση της ενιαίας κλίμακας του χάρτη σε ολόκληρη την έκτασή του δεν ισχύει.

Μια δεύτερη υπόθεση που γίνεται κατά τη διαδικασία μέτρησης αποστάσεων είναι το ότι μια ευθεία γραμμή του χάρτη απεικονίζει μια ευθεία γραμμή στο έδαφος.

Ούτε αυτή η υπόθεση όμως ισχύει, εξ αιτίας της γεωμετρίας του χάρτη. Μια ευθεία γραμμή στο έδαφος απεικονίζεται εν γένει με καμπύλη γραμμή στο χάρτη. Βέβαια, σε πολλές χαρτομετρικές εφαρμογές, οι ανωτέρω δύο υποθέσεις μπορούν να ισχύουν. Οι μετρήσεις που γίνονται σε χάρτες ή διαγράμματα μεγάλων ή μεσαίων κλιμάκων αφορούν πολύ μικρά τμήματα της γήινης επιφάνειας. Επομένως, σε ανάλογους χάρτες η απόκλιση της κλίμακας λόγω παραμόρφωσης των μηκών είναι πολύ μικρή και δεν απαιτείται να εκτιμηθεί για να γίνουν οι απαραίτητες αναγωγές. Υπολογίσιμες μεταβολές της κλίμακας προκύπτουν όταν μια εκτεταμένη περιοχή της γήινης επιφάνειας απεικονίζεται σε ένα μόνο φύλλο χάρτη, δηλαδή, σε χάρτη μικρής κλίμακας. Επειδή δε η φύση και το μέγεθος της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης, αλλά και των άλλων παραμορφώσεων, εξαρτώνται από το είδος της προβολής του χάρτη, πρέπει να επιλέγεται εκείνος ο χάρτης που παρουσιάζει τις μικρότερες παραμορφώσεις για το είδος των μετρήσεων που πρόκειται να γίνουν. Η ανάπτυξη των ψηφιακών μεθόδων για την επεξεργασία των χαρτομετρικών μετρήσεων τείνει να απλοποιήσει σήμερα τέτοιου είδους προβλήματα.

Ένα άλλο στοιχείο της γεωμετρίας του χάρτη που πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στις μετρήσεις είναι το ανάγλυφο. Παρόλο που οι μεταβολές του είναι μικρές σε σχέση με την καμπυλότητα της Γης, εν τούτοις επηρεάζει την κλίμακα του χάρτη. Οι χάρτες αποτελούν ορθή προβολή της γήινης επιφάνειας στο επίπεδο. Κάθε απόσταση πάνω στην επιφάνεια της Γης έχει προβληθεί στο οριζόντιο επίπεδο και αυτή η προβολή έχει απεικονιστεί στο χάρτη. Ως εκ τούτου για να μετρηθεί η κλίση ή η κεκλιμένη απόσταση μιας γραμμής από το χάρτη, μετράται η (οριζόντια) απόσταση της γραμμής και με βάση τα υψόμετρα των δυο άκρων της προκύπτει η κλίση της ή η κεκλιμένη απόσταση.

#### 5.4 Μέθοδοι μέτρησης χαρτομετρίας

Οι μέθοδοι μέτρησης που εφαρμόζονται στη χαρτομετρία μπορούν να διακριθούν σε δυο κατηγορίες (Πίνακας 5.1):

- Στις κλασικές μεθόδους, που συνήθως βασίζονται στη χρήση ενός ειδικού οργάνου, με το οποίο εκτελείται μια πλήρης μέτρηση ενός αντικειμένου.
- Στις πιθανολογικές μεθόδους μέτρησης, οι οποίες βασίζονται σε αρχές και μεθόδους στατιστικής δειγματοληψίας.

Όταν χρησιμοποιούμε τη διαδικασία της δειγματοληψίας εργαζόμαστε με όρους εκτίμησης, όχι ακριβούς μέτρησης, αλλά επαναλαμβάνοντας την υπολογιστική ή μετρητική διαδικασία μπορούμε να καταστήσουμε την εκτίμηση τόσο ακριβή όσο επιτρέπει η διακριτική ανάλυση της μετρητικής διαδικασίας. Από τις μεθόδους αυτές δεν είναι όλες στον ίδιο βαθμό κατάλληλες, ή εξίσου χρήσιμες για όλες τις περιπτώσεις. Από την αναλυτική περιγραφή τους προκύπτει ότι η κάθε μια είναι κατάλληλη για τη μέτρηση συγκεκριμένου είδους χαρακτηριστικών, σε συγκεκριμένα είδη χαρτών.

Επιπλέον, καμιά τεχνική δεν είναι εξίσου κατάλληλη για τη μέτρηση οποιασδήποτε γραμμής σε οποιαδήποτε κλίμακα.

**Πίνακας 5.1:** Συνοπτική παρουσίαση μεθόδων μέτρησης στη χαρτομετρία.

ΚΛΑΣΙΚΕΣ	ΠΙΘΑΝΟΛΟΓΙΚΕΣ
<i>Μέτρηση μηκών</i>	
Με υποδεκάμετρο Με υποδιαίρεσεις ίσου βήματος Με υποδιαίρεσεις άνισου βήματος Με ψηφιοποιητή Με ροδάκι Με σχοινί	
<i>Μέτρηση εμβαδού</i>	
Με γεωμετρικά σχήματα Με συντεταγμένες Με σύγκριση σταθερών σχημάτων Με τετραγωνικό κάναβο	Με τετραγωνικό κάναβο και κουκίδες Με άμεση καταμέτρηση κουκίδων Με έμμεση καταμέτρηση κουκίδων
Με λουρίδες Με εμβαστόμετρο	

## 5.5 Μέτρηση μηκών

### 5.5.1 Μέτρηση ευθύγραμμου τμήματος

Ας υποτεθεί ότι το αντικείμενο μέτρησης είναι το μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, το οποίο απεικονίζεται σε ένα χάρτη. Χρησιμοποιώντας αναλογικές τεχνικές σχεδίασης και μέτρησης (π.χ. υποδεκάμετρο ή διαστημόμετρο), αυτή η εργασία μπορεί να γίνει με τις ακόλουθες τεχνικές:

1. Τοποθετούμε το υποδεκάμετρο μεταξύ των άκρων του ευθυγράμμου τμήματος. Η απόσταση μεταξύ τους μπορεί να προσδιοριστεί από τη διαφορά των αναγνώσεων στα δύο άκρα. Η απόσταση μετριέται στις μονάδες που είναι χαραγμένες πάνω στο υποδεκάμετρο, π.χ. σε mm.
2. Ανοίγουμε τα σκέλη με τις ακίδες ενός διαστημόμετρου ώστε να συμπέσουν με τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος. Το διαστημόμετρο μεταφέρεται προσεκτικά στην ακμή του υποδεκάμετρου και η απόσταση μετριέται με σύγκριση των θέσεων των δύο ακίδων του διαστημόμετρου με τις διαβαθμίσεις του υποδεκάμετρου.

3. Ανοίγουμε τα σκέλη με τις ακίδες ενός διαστημόμετρου ώστε το άνοιγμα (βήμα) να είναι 10mm ή 20mm. Τοποθετούμε διαδοχικά κατά μήκος της γραμμής τις ακίδες του διαστημόμετρου, με τρόπο ώστε η γραμμή να μετρηθεί με ίσα βήματα. Συνήθως το μήκος της γραμμής δεν είναι πολλαπλάσιο του αρχικού βήματος και επομένως το τελευταίο τμήμα θα μετρηθεί ξεχωριστά.

Σε επόμενο στάδιο μετατρέπουμε το αποτέλεσμα της μέτρηση σε μονάδες ανοιγμένες στο έδαφος, με βάση την κλίμακα του χάρτη. Επομένως και οι τρεις μέθοδοι που περιγράφηκαν περιλαμβάνουν κατ' αρχήν, τη διαδικασία μέτρησης και στη συνέχεια, την αναγωγή της μέτρησης δια μέσου υπολογισμών.

Υπάρχουν άλλοι τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η μέτρηση και η αναγωγή χωρίς να χρειάζονται υπολογισμοί.

4. Ο πρώτος τρόπος αποτελεί ειδική περίπτωση μιας προαναφερθείσας τεχνικής, η οποία εφαρμόζεται από μηχανικούς που χρησιμοποιούν χάρτες ή διαγράμματα μεγάλης κλίμακας. Η μέτρηση γίνεται με ειδικό κλιμακόμετρο, με το οποίο εφόσον η κλίμακα υποδιαίρεσης συμπίπτει με την κλίμακα του χάρτη, η απόσταση στο έδαφος μετριέται άμεσα.
5. Ο δεύτερος τρόπος αντιστοιχεί και αυτός σε μια προαναφερθείσα τεχνική, με τη διαφορά ότι οι ακίδες του διαστημόμετρου τοποθετούνται στην ακμή του κλιμακόμετρου ή στη γραφική κλίμακα που είναι τυπωμένη στο περιθώριο του χάρτη.
6. Ο τελευταίος τρόπος αντιστοιχεί στην τρίτη τεχνική, με τη διαφορά ότι με το διαστημόμετρο επαναλαμβάνεται ο αριθμός των βημάτων πάνω στη γραφική κλίμακα του χάρτη για την άμεση μέτρηση της απόστασης σε μονάδες που αντιστοιχούν στο έδαφος.

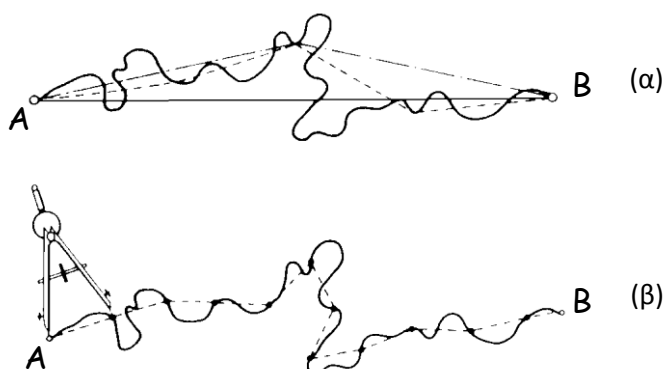
Στις δύο τελευταίες τεχνικές υπάρχουν δύο στάδια μέτρησης. Η τεχνική (4) είναι η μοναδική που ολοκληρώνει τη διαδικασία μέτρησης σε ένα στάδιο. Συνήθως βέβαια, μια ακανόνιστη χαρτογραφική γραμμή είναι πιο πολύπλοκη από ένα απλό ευθύγραμμο τμήμα και για να μετρηθεί το μήκος της πρέπει να εφαρμοστεί μια από τις κλασικές μεθόδους που αναπτύσσονται στις επόμενες ενότητες.

### 5.5.2 Μέτρηση με υποδιαίρεσεις ίσου βήματος

Πολλές από τις κλασικές μεθόδους μέτρησης του μήκους ακανόνιστων χαρτογραφικών γραμμών, βασίζονται στη σύγκριση της γραμμής με μια κατάλληλη κλίμακα, με τη βοήθεια ενός διαστημόμετρου. Χρησιμοποιώντας το διαστημόμετρο υποθέτουμε ότι η χαρτογραφική γραμμή έχει χωριστεί σε μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων και ότι το μήκος της προκύπτει από το άθροισμα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων. Είναι προφανές ότι η διαδικασία αυτή δίνει αποτελέσματα που είναι πάντα μικρότερα από το πραγματικό μήκος της χαρτογραφικής γραμμής. Η Εικόνα 5.5α δείχνει ότι εάν μια ακανόνιστη γραμμή AB μετρηθεί σε δυο τμήματα, το μήκος της είναι μεγαλύτερο από

την ευθεία γραμμή που ενώνει τα άκρα της A και B. Η αιτιολόγηση είναι προφανής γιατί τα δυο μετρημένα τμήματα αποτελούν τις δυο πλευρές του τριγώνου που σχηματίζεται, του οποίου το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η τρίτη πλευρά. Ομοίως, το μήκος της ίδιας γραμμής χωρισμένης σε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα θα είναι μεγαλύτερο από αυτό που θα προκύψει με τη διαίρεσή της, σε ένα ή δυο τμήματα. Εφ' όσον η αύξηση του αριθμού των τμημάτων στα οποία χωρίζεται η γραμμή είναι ισοδύναμη με μείωση του ανοίγματος του διαστημόμετρου, μπορούμε να εκφράσουμε ως κανόνα, ότι: το μετρημένο μήκος της γραμμής αυξάνει όσο το άνοιγμα (βήμα) του διαστημόμετρου μικραίνει. Αυτό φαίνεται στην Εικόνα 5.5β, όπου τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ως βήμα μήκος ίσο με το 1/12 του μήκους της γραμμής.

Εικόνα 5.5: Μέτρηση μήκους με διαστημόμετρο.



Παρ' όλα αυτά το πραγματικό μήκος της γραμμής είναι μεγαλύτερο από το μήκος που μετριέται και σε αυτήν ακόμα την περίπτωση, γιατί εξακολουθούν να μην λαμβάνονται υπόψη κατά τη διαδικασία της μέτρησης ορισμένες λεπτομέρειες της χαρτογραφικής γραμμής. Η τελευταία διαπίστωση δημιουργεί σημαντικές αντιρρήσεις για τη διαδικασία μέτρησης του μήκους γραμμών χρησιμοποιώντας ένα σταθερό βήμα υποδιαίρεσης. Μια εναλλακτική λύση για να μετρηθεί το μήκος μιας ακανόνιστης χαρτογραφικής γραμμής είναι η αξιοποίηση ενός ειδικού οργάνου, όπως είναι το ροδάκι, ή η τοποθέτηση μιας κλωστής με τρόπο που να ταυτίζεται πάνω στη γραμμή και στη συνέχεια να μετρηθεί το ανάπτυγμά της.

Από τη σύγκριση των Εικόνων 5.5α και 5.5β προκύπτει ότι όσο το άνοιγμα του διαστημόμετρου γίνεται μικρότερο, τόσο η τεθλασμένη γραμμή πλησιάζει την απεικονιζόμενη χαρτογραφική γραμμή στο χάρτη. Εάν θεωρήσουμε ότι το άνοιγμα του διαστημόμετρου τείνει προς το μηδέν, τότε οι δυο γραμμές, η τεθλασμένη και η πραγματική, θα τείνουν να ταυτιστούν. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς η μέτρηση του μήκους ακανόνιστων χαρτογραφικών γραμμών που βασίζεται στην τεχνική των υποδιαίρεσεων προσδιορίζει μια οριακή απόσταση. Η οριακή απόσταση κάθε ακανόνιστης γραμμής, στην πράξη, είναι το μήκος της γραμμής που θα προσδιοριζόταν αν τη μετρούσαμε με υποδιαίρεση βήματος ίση με το μηδέν.

Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλών ειδών διαστημόμετρα, διαφορετικής ακρίβειας μέτρησης που εξαρτώνται από τη σταθερότητα που εξασφαλίζει ο μηχανισμός λειτουργίας που συγκρατεί τα δύο σκέλη τους καθώς και το μικρότερο άνοιγμα που μπορούν να επιτύχουν.

### 5.5.3 Μέτρηση με υποδιαίρεσεις άνισου βήματος

Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, η προς μέτρηση γραμμή διαιρείται σε επί μέρους τμήματα τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην ίσα. Προφανώς κάθε άνοιγμα του διαστημόμετρου πρέπει να συγκρίνεται με ένα κλιμακόμετρο και να καταγράφεται η μέτρηση. Το άθροισμα των μηκών όλων των τμημάτων δίνει το ζητούμενο μήκος της χαρτογραφικής γραμμής. Η μέθοδος απαιτεί περισσότερο χρόνο εφαρμογής, συγκρινόμενη με τη μέθοδο της διαίρεσης σε ίσα τμήματα.



**Εικόνα 5.6:** Ψηφιοποιητής, περιφερειακός εξοπλισμός ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη συλλογή χωρικών δεδομένων.

### 5.5.4 Μέτρηση αποστάσεων με ψηφιοποιητή

Μια ψηφιακή τεχνική που είναι ανάλογη με τη μέθοδο μέτρησης με διαστημόμετρο άνισου βήματος, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το μήκος μιας ακανόνιστης χαρτογραφικής γραμμής από τις διαφορές των συντεταγμένων μεταξύ των διαδοχικών σημείων κατά μήκος της. Οι αναγκαίες μετρήσεις γίνονται με τη βοήθεια ενός οργάνου (περιφερειακό ηλεκτρονικού υπολογιστή) που ονομάζεται ψηφιοποιητής (Εικόνα 5. 6). Με τον ψηφιοποιητή καταγράφονται οι συντεταγμένες των σημείων της χαρτογραφικής γραμμής είτε σημείο προς σημείο είτε σε συνεχή ροή, σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Το μήκος της γραμμής προκύπτει από το άθροισμα των



μηκών των επί μέρους ευθυγράμμων τμημάτων, για τα οποία καταγράφονται οι συντεταγμένες των άκρων τους, με εφαρμογή της σχέσης:

$$L = \sum_{1}^{k} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2} .$$

#### 5.5.5 Κλασικές αναλογικές μέθοδοι

Μια εναλλακτική μέθοδος σύγκρισης μηκών μεταξύ χάρτη και υποδεκάμετρου είναι η μέτρηση αποστάσεων με τη βοήθεια μιας κλωστής, ή με το ροδάκι. Η χρήση της κλωστής δημιουργεί πολλά πρακτικά προβλήματα στην τοποθέτησή της πάνω στη χαρτογραφική γραμμή με τρόπο που να ακολουθεί με ακρίβεια τις λεπτομέρειες της γραμμής, καθώς και στη σύμπτωση των δύο άκρων της χαρτογραφικής γραμμής με τα δυο άκρα της κλωστής.



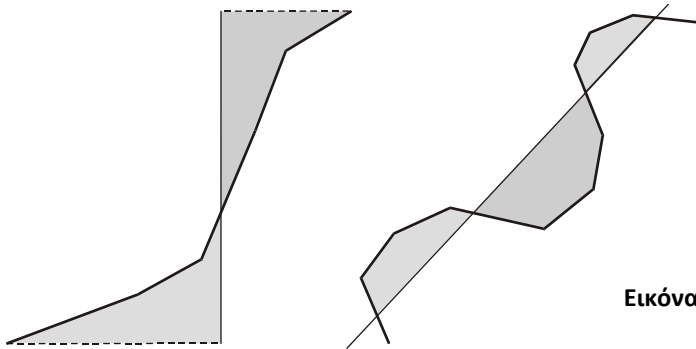
**Εικόνα 5.7:** Το ροδάκι, αναλογικό όργανο μέτρησης του μήκους ακανόνιστων γραμμών.

Το ροδάκι (Εικόνα 5.7) είναι ένα μηχανικό όργανο ειδικά κατασκευασμένο για μέτρηση αποστάσεων κατά μήκος ακανόνιστων γραμμών. Έχει ένα μετρητικό τροχό διαμέτρου της τάξης των 10-12mm, ο οποίος στερεώνεται σε ένα διαβαθμισμένο κύκλο, έτσι ώστε κάθε πλήρης περιστροφή του τροχού να μετακινεί μια ακίδα πάνω στον κύκλο κατά μία υποδιαίρεση. Όταν ο τροχός διατρέχει μια χαρτογραφική γραμμή καταγράφονται οι πλήρεις περιστροφές του κύκλου και με βάση το ανάπτυγμα της περιφέρειας του τροχού, υπολογίζεται το μήκος της γραμμής.

#### 5.6 Μέθοδοι μέτρησης εμβαδού επιφανειών

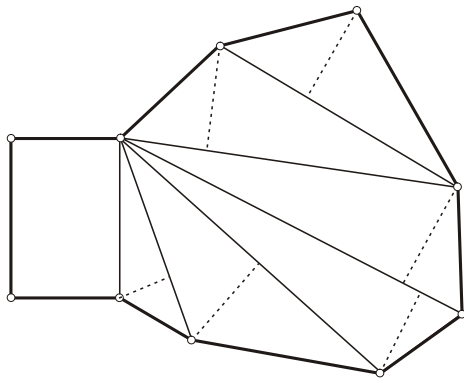
Πριν αναλυθούν οι μέθοδοι μέτρησης του εμβαδού επιφανειών, είναι χρήσιμο να οριστούν χαρακτηριστικά είδη επιφανειακών χωρικών φαινομένων των οποίων το εμβαδό μετράται στις διάφορες εφαρμογές της χαρτομετρίας. Για παράδειγμα, στις

μελέτες κτηματολογίου χρησιμοποιείται ο όρος γεωτεμάχιο, για το χαρακτηρισμό μιας διακριτής επιφανειακής μονάδας της φυσικής γήινης επιφάνειας, η οποία έχει κάποια ταυτότητα. Μια επιφάνεια είναι μια κλειστή περιοχή, δηλαδή, αναπαριστάται στο χάρτη από ένα κυρτό ή μη-κυρτό πολύγωνο. Το πολύγωνο είναι ένα γεωμετρικό πρότυπο που περιγράφει τα όρια μιας κλειστής περιοχής.



**Εικόνα 5.8:** «Ισεμβαδικές ευθείες».

Σε αναλογικές μεθόδους μέτρησης εμβαδού, πολλές φορές, είναι χρήσιμη η αξιοποίηση μιας νοητής γραμμής που ονομάζεται «ισεμβαδική γραμμή». Η «ισεμβαδική ευθεία» είναι μια ευθεία γραμμή που επιλέγεται να αντικαταστήσει το ακανόνιστο τμήμα του περιγράμματος μιας επιφάνειας, η οποία έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα εκατέρωθεν σχηματιζόμενα πολύγωνα μεταξύ αυτής και του περιγράμματος της επιφάνειας να είναι ισοδύναμα (Εικόνα 5.8).



**Εικόνα 5.9** Μέτρηση εμβαδού με απλά γεωμετρικά σχήματα.

### 5.6.1 Μετρήσεις απλών γεωμετρικών σχημάτων

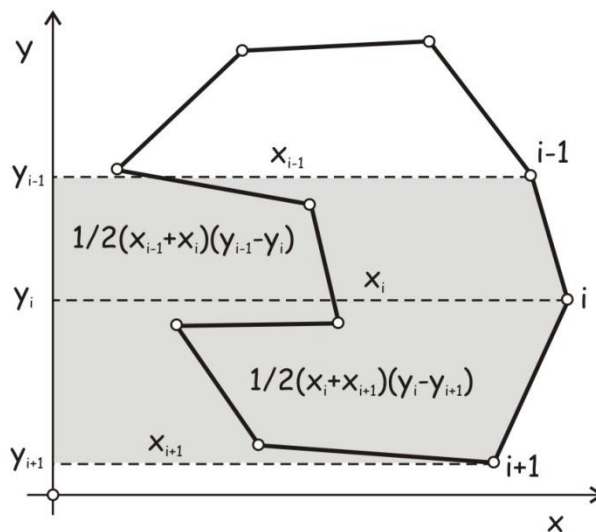
Η μέθοδος βασίζεται σε μετρήσεις πλευρών επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, που προσομοιώνουν τη μορφή της χαρτογραφικής επιφάνειας που μετριέται. Αυτό μπορεί να γίνει με μετρήσεις των πλευρών από το χάρτη και μετατροπή τους σύμφωνα με την

κλίμακα, ή με μετρήσεις των πλευρών στο έδαφος. Οι τύποι υπολογισμού των γεωμετρικών σχημάτων που δημιουργούνται από το χωρισμό της υπό μέτρηση επιφάνειας, είναι γνωστοί από την επίπεδη γεωμετρία. Στην Εικόνα 5.9 το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας υπολογίζεται αθροίζοντας τα εμβαδά ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και έξι τριγώνων.

### 5.6.2 Υπολογισμός εμβαδού με συντεταγμένες

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας χαρτογραφικής επιφάνειας από τις διαφορές των συντεταγμένων μιας ακολουθίας σημείων της περιμέτρου της (Εικόνα 5.10), είναι μια εξέλιξη της μεθόδου των απλών γεωμετρικών μεθόδων. Η μέθοδος αποκτά ιδιαίτερη σημασία λόγω της επικράτησης σήμερα των ψηφιακών τεχνικών, γιατί είναι δυνατό να μετρηθεί το εμβαδό επιφανειών με ακανόνιστης μορφής περίγραμμα από χάρτες, με τη βοήθεια ψηφιοποιητή. Η μέθοδος είναι πολύ γρήγορη και αξιόπιστη. Η εφαρμογή της στηρίζεται στη σχέση υπολογισμού του εμβαδού ενός τραπεζίου με τη βοήθεια της επίπεδης γεωμετρίας. Έτσι, για το εμβαδόν μιας χαρτογραφικής επιφάνειας θα ισχύει:

**Εικόνα 5.10:** Αναλυτικός υπολογισμός εμβαδού.



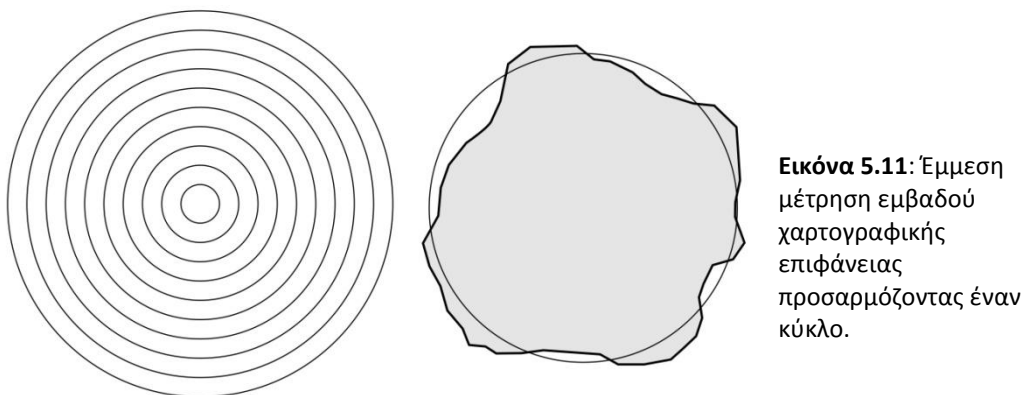
$$A = \frac{1}{2} \sum_1^k x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_1^k y_i (x_{i-1} - x_{i+1}),$$

όπου:  $(x_i, y_i)$  είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του περιγράμματος της χαρτογραφικής επιφάνειας.

Ας σημειωθεί ότι είναι επίσης δυνατόν, με αντίστοιχο τρόπο, να υπολογιστεί το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας όταν οι κορυφές της περιμέτρου της είναι εκφρασμένες σε πολικές συντεταγμένες.

### 5.6.3 Μέτρηση επιφανειών συγκρίνοντας με σταθερά σχήματα

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην έμμεση χρήση ενός ή περισσότερων κανονικών γεωμετρικών σχημάτων ως μέσου μέτρησης του εμβαδού μιας χαρτογραφικής επιφάνειας. Η επιλογή του σχήματος και του μεγέθους του γίνεται με κριτήριο την όσο το δυνατόν καλύτερη προσαρμογή του στο περίγραμμα της μετρούμενης επιφάνειας. Συνήθως ως κανονικό γεωμετρικό σχήμα επιλέγεται ένα τετράγωνο, ή ορθογώνιο ή ο κύκλος, που εκτυπώνονται σε μια διαφάνεια, η οποία τοποθετείται πάνω στο χάρτη, με τρόπο που να καλύπτει την έκταση της μετρούμενης χαρτογραφικής επιφάνειας (Εικόνα 5.11).



**Εικόνα 5.11:** Έμμεση μέτρηση εμβαδού χαρτογραφικής επιφάνειας προσαρμόζοντας έναν κύκλο.

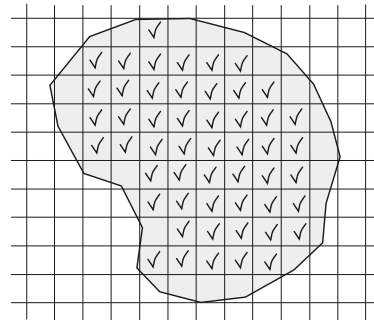
Το ανθρώπινο μάτι έχει την ικανότητα να προσαρμόζει τις δύο εκτάσεις με ισοδύναμα εμβαδά, δηλαδή, τον κύκλο και το ακανόνιστο σχήμα της χαρτογραφικής επιφάνειας. Στο παρελθόν, ήταν συχνή η χρήση προ-εκτυπωμένων διαφανειών που απεικόνιζαν κύκλους με διαβαθμισμένες ακτίνες. Οι διαφάνειες αυτές ήταν ιδιαίτερα χρήσιμες σε εφαρμογές της στερεολογίας, όπως για παράδειγμα, σε ιστολογικές εξετάσεις, γιατί πολλά από τα αντικείμενα μελέτης έχουν περιγράμματα που ομοιάζουν με κύκλους. Το κύριο μειονέκτημα στην εφαρμογή της συγκεκριμένης μεθόδου μέτρησης του εμβαδού είναι η προϋπόθεση να ομοιάζει η μορφή της μετρούμενης επιφάνειας με κάποιο γεωμετρικό σχήμα (Εικόνα 5.11). Οι επιφάνειες που το σχήμα τους αποκλίνει έντονα από το σχήμα του γεωμετρικού πρότυπου δεν μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια, αλλά μόνο να εκτιμηθούν κατά προσέγγιση.

### 5.6.4 Μέθοδος τετραγωνικού κάρναβου

Σύμφωνα τη μέθοδο αυτή, ένας τετραγωνικός κάρναβος σχεδιασμένος σε διαφάνεια τοποθετείται πάνω στη χαρτογραφική επιφάνεια που πρόκειται να μετρηθεί (Εικόνα 5.12). Η επιλογή του κάρναβου γίνεται με την προϋπόθεση η ισαποχή του να είναι κατά πολύ μικρότερη από την έκταση της χαρτογραφικής επιφάνειας. Αν η ισαποχή του

κανάβου είναι:  $d$ , τότε, το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου του κανάβου θα είναι:  $d^2$ . Εάν η επιφάνεια καλύπτεται από:  $n$  τέτοια τετράγωνα, τότε, το εμβαδόν της θα είναι:

$$a = n d^2 .$$



**Εικόνα 5.12:** Μέτρηση εμβαδού με τη μέθοδο του τετραγωνικού κανάβου.

Η μέθοδος του τετραγωνικού κανάβου είναι μια προσεγγιστική τεχνική γιατί δεν έχει λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι το περίγραμμα της μετρούμενης χαρτογραφικής επιφάνειας διέρχεται δια μέσου ορισμένων τετραγώνων αποκόπτοντας και διαφορετικό τμήμα από κάθε ένα από αυτά. Μετρώντας μόνον τα πλήρη τετράγωνα είναι προφανές ότι κατά τη μέτρηση γίνεται υποεκτίμηση του εμβαδού της χαρτογραφικής επιφάνειας. Για να εξαλειφθούν τα σφάλματα στην εκτίμηση του εμβαδού της χαρτογραφικής επιφάνειας, υπάρχουν τρεις τεχνικές, με τις οποίες λαμβάνονται υπόψη στη μέτρηση και τα μη πλήρη τετράγωνα του κανάβου:

- Στην τελική μέτρηση συνυπολογίζονται όλα τα μη πλήρη τετράγωνα του κανάβου ως πλήρη. Η τεχνική αυτή προφανώς οδηγεί σε υπερεκτίμηση του εμβαδού της χαρτογραφικής επιφάνειας.
- Γίνεται εκτίμηση του τμήματος του εμβαδού που αντιστοιχεί σε κάθε μη πλήρες τετράγωνο του κανάβου. Το άθροισμα του εμβαδού τους προστίθεται στην προσεγγιστική τιμή που έχει προκύψει από τα πλήρη τετράγωνα. Έτσι αν το άθροισμα των μη πλήρων τετραγώνων είναι:  $\alpha'$ , το συνολικό εμβαδόν ( $A$ ) θα είναι:  $A = \alpha + \alpha'$ .
- Μετράται ο αριθμός των μη πλήρων τετραγώνων. Όμως, αντί να εκτιμηθεί το τμήμα του εμβαδού που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από αυτά, γίνεται η υπόθεση ότι κατά μέσο όρο κάθε ένα από τα μη πλήρη τετράγωνα αντιστοιχεί στο ήμισυ του εμβαδού του τετραγωνικού κανάβου. Έτσι αν  $n'$  είναι ο αριθμός των μη πλήρων τετραγώνων, τότε το πρόσθετο εμβαδόν θα είναι:

$$\alpha' = \frac{n' d^2}{2} .$$

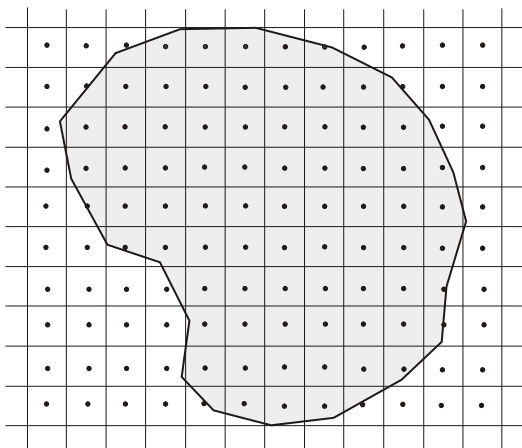
Είναι προφανές ότι η δεύτερη τεχνική είναι πιο ακριβής στον προσδιορισμό του εμβαδού της χαρτογραφικής επιφάνειας. Επειδή όμως, χρειάζεται να εκτιμηθεί το

ποσοστό του κάθε μη πλήρους τετραγώνου, ξεχωριστά, χρειάζεται πολύς χρόνος για να ολοκληρωθεί η μέτρηση. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά προτιμάται η τρίτη τεχνική. Αν μάλιστα, η διαδικασία μέτρησης ακολουθώντας την τρίτη τεχνική, επαναληφθεί με στροφή και μετάθεση της διαφάνειας του τετραγωνικού κανάβου, τότε, το αποτέλεσμα της μέτρησης, ως μέσος όρος των επιμέρους μετρήσεων, θα είναι περισσότερο ακριβές.

Η μέθοδος μέτρησης του εμβαδού με τη βοήθεια του τετραγωνικού κανάβου αποκτά ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον με την εισαγωγή στη χαρτογραφία των ψηφιακών τεχνικών. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελεί το αναλογικό ισοδύναμο της ψηφιακής καταγραφής χωρικών δεδομένων με τη μορφή εικόνων (raster data) που συντίθενται από ένα πίνακα εικονοστοιχείων (pixels). Κάθε τετράγωνο του κανάβου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αντιπροσωπεύει και ένα εικονοστοιχείο.

#### 5.6.5 Μέθοδοι τετραγωνικού κανάβου με κουκίδες

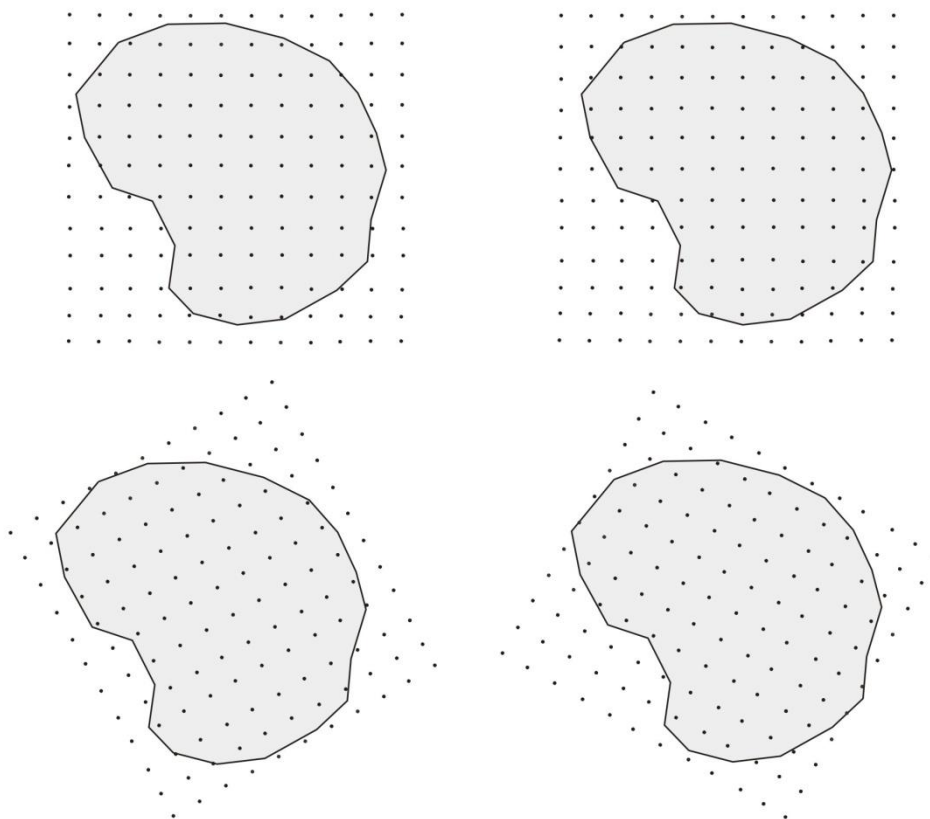
Υπάρχουν δύο διαφορετικές τεχνικές μετρήσεων που βασίζονται στην καταμέτρηση σημείων. Στην ενότητα αυτή διακρίνονται ως άμεσες και έμμεσες. Η καταμέτρηση των σημείων, με την άμεση τεχνική, βασίζεται σε έναν τετραγωνικό κανάβο, στον οποίο σε κάθε κέντρο των σχηματιζόμενων τετραγώνων απεικονίζεται μία κουκίδα (Εικόνα 5.13). Ο κανάβος με τις κουκίδες απεικονίζεται σε μια διαφάνεια η οποία τοποθετείται επάνω στο χάρτη και γίνεται η καταμέτρηση του αριθμού των κουκίδων που βρίσκονται μέσα στο περίγραμμα της χαρτογραφικής επιφάνειας. Το αποτέλεσμα της καταμέτρησης πολλαπλασιάζεται με το εμβαδόν του τετραγώνου, και στη συνέχεια, προσδιορίζεται το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας.



**Εικόνα 5.13:** Μέτρηση εμβαδού με κανάβο και κουκίδες.

Με την έμμεση τεχνική προσδιορίζεται το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας που απεικονίζεται σε ένα χάρτη, από το λόγο των κουκίδων που περιέχονται μέσα στην έκταση της, προς τις κουκίδες που κείνται έξω από αυτήν. Το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας υπολογίζεται από το λόγο και το εμβαδόν ολόκληρης της έκτασης του χάρτη. Επειδή η έμμεση τεχνική δεν εξαρτάται από τη

διάταξη των κουκίδων, είναι πιο αποτελεσματική. Έτσι, με την έμμεση τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα δίκτυο τυχαίας διάταξης των κουκίδων. Η έμμεση τεχνική είναι πιο εύχρηστη όταν ζητείται να προσδιοριστεί το συνολικό εμβαδόν μικρών διάσπαρτων επιφανειακών εκτάσεων, για παράδειγμα, δασικών εκτάσεων, που εκτείνονται σε ολόκληρη την περιοχή που απεικονίζει ο χάρτης. Συγκρινόμενη με την έμμεση, η χρήση της άμεσης τεχνικής θα επέβαλε τον ανεξάρτητο προσδιορισμό κάθε διακριτής χαρτογραφικής επιφάνειας ξεχωριστά.



**Εικόνα 5.14:** Μέτρηση εμβαδού με κουκίδες.

#### 5.6.6 Άμεση τεχνική μέτρησης με κουκίδες

Όπως και η άμεση τεχνική του τετραγωνικού κανάβου με κουκίδες, έτσι και αυτή βασίζεται σε κανονικά διαταγμένες κουκίδες στις κορυφές ενός τετραγωνικού κανάβου (Εικόνα 5.14), με τη διαφορά ότι δεν είναι απαραίτητη στην τεχνική αυτή η σχεδίαση του κανάβου. Κάθε κουκίδα αντιπροσωπεύει το κέντρο ενός ιδεατού τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν θεωρείται ως μοναδιαίο. Οι διαταγμένες κουκίδες απεικονίζονται σε μια διαφάνεια, που τοποθετείται επάνω στο χάρτη και μετράται ο αριθμός των κουκίδων που βρίσκονται μέσα στην έκταση της χαρτογραφικής επιφάνειας.

Το εμβαδόν της επιφάνειας (A) προσδιορίζεται από τον πολλαπλασιασμό του αριθμού των κουκίδων (n) επί το εμβαδόν της μοναδιαίας επιφάνειας ( $d^2$ ), δηλαδή, ισχύει ότι:

$$A = nd^2.$$

Με την τεχνική αυτή δεν είναι δυνατή η εκτίμηση των μη πλήρων τετραγώνων, γιατί δεν σχεδιάζονται οι γραμμές του κανάβου. Για να ξεπεραστεί αυτό το μειονέκτημα, γίνονται πολλές ανεξάρτητες καταμετρήσεις, είτε μεταθέτοντας το δίκτυο των κουκίδων είτε στρέφοντάς το κατά αυθαίρετες γωνίες (Εικόνα 5.14). Ως αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας έχουμε ανεξάρτητες εκτιμήσεις για τις καταμετρήσεις, και στον υπολογισμό του εμβαδού της χαρτογραφικής επιφάνειας χρησιμοποιείται η μέση τιμή των καταμετρήσεων.

#### 5.6.7 Έμμεση τεχνική μέτρησης με κουκίδες

Με την έμμεση τεχνική μέτρησης με κουκίδες η διάταξη των κουκίδων τοποθετείται πάνω σε ένα τμήμα του χάρτη, του οποίου το εμβαδόν ( $A_1$ ) είναι ήδη γνωστό από άλλη πηγή. Στη συνέχεια, μετρώνται όλες οι κουκίδες που κείνται μέσα σε αυτήν την περιοχή με το γνωστό εμβαδόν ( $n_1$ ). Επίσης, μετρώνται όλες οι κουκίδες που βρίσκονται εντός του περιγράμματος της άγνωστης επιφάνειας (n). Το εμβαδόν της άγνωστης επιφάνειας (A) υπολογίζεται από το λόγο των δύο καταμετρήσεων επί το εμβαδόν της γνωστής, δηλαδή ισχύει ότι:

$$A = \frac{n}{n_1} A_1.$$

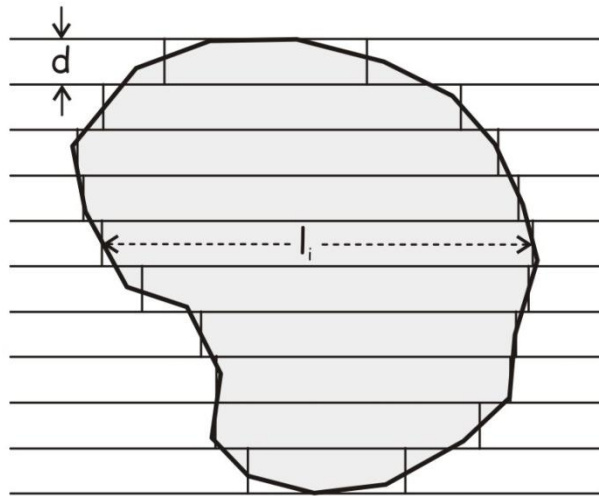
#### 5.6.8 Μέθοδος των λωρίδων

Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιείται μία δέσμη ισαπεχουσών παράλληλων γραμμών, που απεικονίζονται σε μια διαφάνεια η οποία τοποθετείται πάνω στο χάρτη. Στα σημεία που η περίμετρος της μετρούμενης έκτασης τέμνει τις παράλληλες γραμμές φέρονται κάθετες «ισεμβαδικές ευθείες» γραμμές (δες την ενότητα 5.6), έτσι ώστε να σχηματίζονται ορθογώνια παραλληλόγραμμα (Σχήμα 5.15). Μετρώνται οι αποστάσεις στις διευθύνσεις των παράλληλων γραμμών:  $l_i$ , μεταξύ των καθέτων γραμμών και το εμβαδόν της χαρτογραφικής επιφάνειας προκύπτει από τη σχέση:

$$A = d \sum_{i=1}^k l_i,$$

όπου: d η ισαποχή της παράλληλης δέσμης ευθειών.





**Εικόνα 5.15:** Μέτρηση εμβαδού με λωρίδες.



**Εικόνα 5.16:** Το εμβαδόμετρο, ένα αναλογικό όργανο μέτρησης του εμβαδού πολυγώνων στους χάρτες.

#### 5.6.9 Μέτρηση επιφανειών με εμβαδόμετρο

Η μέθοδος αυτή ανήκει στην κατηγορία των μηχανικών μεθόδων μέτρησης επιφανειών με χρήση ειδικού οργάνου, του εμβαδομέτρου (Εικόνα 5.16). Το μεγάλο προσόν της μεθόδου αυτής είναι η ταχύτητα με την οποία βρίσκεται το εμβαδόν ανεξάρτητα από τη μορφή των ορίων της επιφάνειας. Το εμβαδόμετρο που χρησιμοποιείται σε

χαρτομετρικές εργασίες είναι συνήθως ένα πολικό εμβαδόμετρο. Περιγραφή του οργάνου και πρακτικές οδηγίες χρήσης του μπορεί να βρεθούν σε βιβλιογραφία σχετική με γεωδαιτικά όργανα.

### 5.7 Υπολογισμοί όγκων

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, η διαδικασία υπολογισμού όγκων, αποτελεί μια παράγωγη διαδικασία των χαρτομετρικών εργασιών. Στηρίζεται αφενός, στη άμεση μέτρηση του εμβαδού χαρτογραφικών επιφανειών, αφετέρου, στην ερμηνεία και αξιοποίηση των πληροφοριών που απεικονίζει ένας χάρτης για την υψομετρία της περιοχής. Έτσι, με δεδομένο ότι στους περισσότερους, αν όχι σε όλους τους μετρητικούς χάρτες, το ανάγλυφο αποδίδεται με υψομετρικές καμπύλες, η τρίτη διάσταση προκύπτει από την αξιοποίησή τους.

Για τον υπολογισμό των όγκων ενός τρισδιάστατου σχηματισμού, ο σχηματισμός χωρίζεται σε γεωμετρικά στερεά των οποίων ο όγκος υπολογίζεται με τις γνωστές σχέσεις της γεωμετρίας. Τα γεωμετρικά σώματα που χρησιμοποιούνται συνήθως είναι πρίσματα, πυραμίδες ή σφήνες (Εικόνα 5.17). Οι αντίστοιχες σχέσεις υπολογισμού του όγκου τους ( $V$ ), είναι:

Για το πρίσμα:

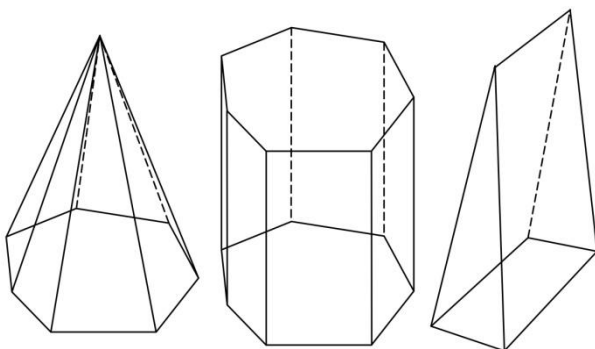
$V = Ah$ , όπου:  $A$  το εμβαδόν της βάσης και  $h$  το ύψος.

Για την πυραμίδα:

$V = \frac{1}{3} Ah$ , όπου:  $A$  το εμβαδόν της βάσης και  $h$  το ύψος.

Για τη σφήνα:

$V = \frac{1}{2} Ah$ , όπου:  $A$  το εμβαδόν της βάσης και  $h$  το ύψος.



**Εικόνα 5.17:** Τα γεωμετρικά στερεά σώματα (πυραμίδα, πρίσμα και σφήνα) που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του όγκου τρισδιάστατων σχηματισμών.

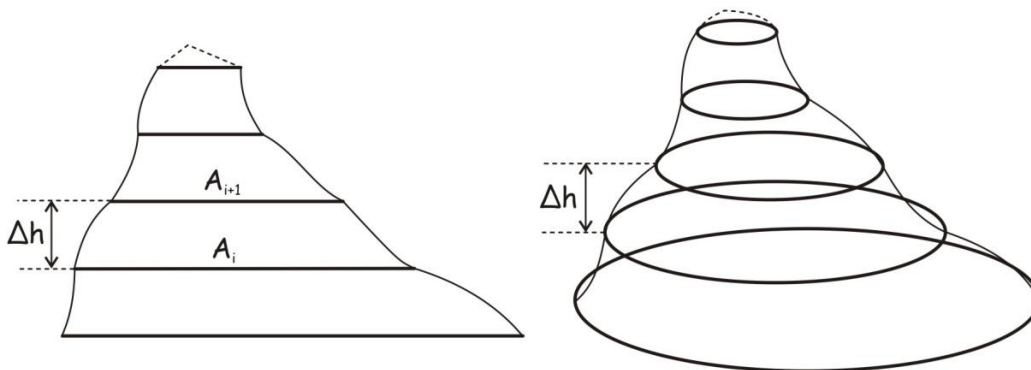
Στην περίπτωση που ο τρισδιάστατος σχηματισμός δεν μπορεί να προσομοιωθεί αποτελεσματικά με γεωμετρικά σώματα, τότε, ο όγκος του ( $V$ ) υπολογίζεται προσεγγιστικά από τα εμβαδά δύο παράλληλων βάσεων του σχηματισμού ( $A_1$  και  $A_2$ ) και την υψομετρική τους διαφορά ( $\Delta h$ ), από τη σχέση:

$$V = \frac{\Delta h}{2} (A_1 + A_2) .$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή στον υπολογισμό του όγκου μιας σειράς:  $n$  διαδοχικών υψομετρικών καμπύλων (Εικόνα 5.18), που προσομοιώνουν ικανοποιητικά στο χάρτη τη μορφή του τρισδιάστατου σχηματισμού, με εμβαδά, αντίστοιχα:  $A_1, A_2, \dots, A_n$  και ισοδιάστασης:  $\Delta h$ , προκύπτει η σχέση:

$$V = \frac{\Delta h}{2} (A_1 + A_n) + \Delta h \sum_2^{n-1} A_i .$$

Στην ακραία περίπτωση υπολογισμού του όγκου ενός στερεού που έχει ως βάση κλειστή υψομετρική καμπύλη και ύψος συγκεκριμένο σημείο γνωστού υψομέτρου, για παράδειγμα ενός τριγωνομετρικού σημείου, χρησιμοποιείται η σχέση υπολογισμού του όγκου της πυραμίδας.



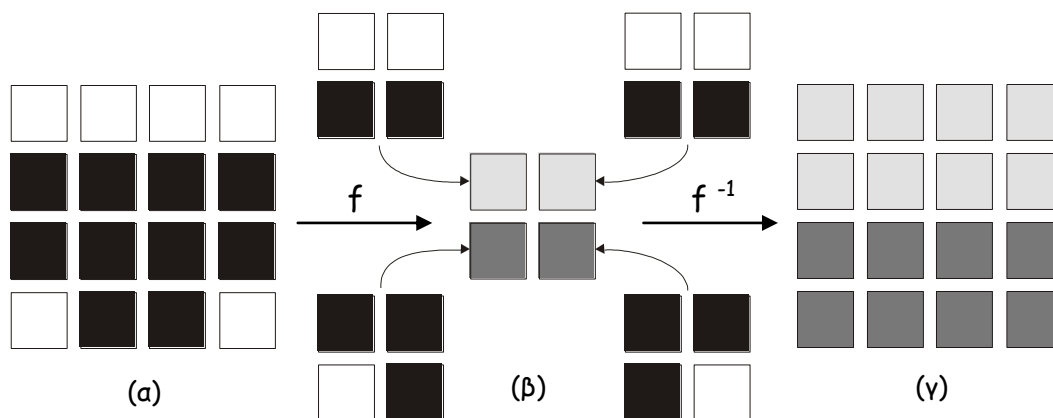
**Εικόνα 5.18:** Αρχή υπολογισμού του όγκου ενός τρισδιάστατου σχηματισμού.

Η διαδικασία υπολογισμού όγκων από τους χάρτες είναι αναγκαία σε σημαντικές εφαρμογές πολλών δραστηριοτήτων του μηχανικού. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι περιπτώσεις των εκσκαφών στα έργα οδοποιΐας, οι υπολογισμοί όγκων σε εργασίες λατομείων, οι υπολογισμοί υδάτινων όγκων λιμνών κα.

### 5.8 Σχέση μεταξύ μετρήσεων και κλίμακας

Τα χωρικά δεδομένα συλλέγονται κάθε φορά σε μια συγκεκριμένη κλίμακα. Η συλλογή δεδομένων σε απόλυτη αντιστοιχία ένα-προς-ένα με την πραγματικότητα είναι στην

πράξη αδύνατη. Στην πραγματικότητα, κάθε χάρτης ως αποτέλεσμα οπτικοποίησης των χωρικών δεδομένων ουσιαστικά αποτελεί ένα αντίγραφο του πραγματικού κόσμου και όχι μια απόλυτα αυθεντική «εικόνα» του. Με αυτήν την έννοια η συλλογή των χωρικών δεδομένων συνιστά μια λειτουργική συσχέτιση μεταξύ της αναλογικής πραγματικότητας και της διακριτής ψηφιακής της αναπαράστασης παρά ένα μετασχηματισμό του ίδιου του πραγματικού κόσμου. Η συγκεκριμένη κλίμακα που έχει επιλεγεί για τη συλλογή των χωρικών δεδομένων θα πρέπει να αντανακλά τους αντικειμενικούς σκοπούς που έχουν προσδιοριστεί για το χάρτη. Η κλίμακα, επιπλέον, θα πρέπει να ταιριάζει με την ακρίβεια των οργάνων που χρησιμοποιούνται για τη συλλογή των δεδομένων. Άλλωστε, επειδή όλα τα όργανα χαρακτηρίζονται από μια πεπερασμένη ανοχή χωρικής καταγραφής, δηλαδή, τη διακριτική ανάλυση, είναι αδύνατη η συλλογή χωρικών δεδομένων σε λεπτομέρεια μεγαλύτερη από αυτήν που αντιστοιχεί στη διακριτική τους ανάλυση.

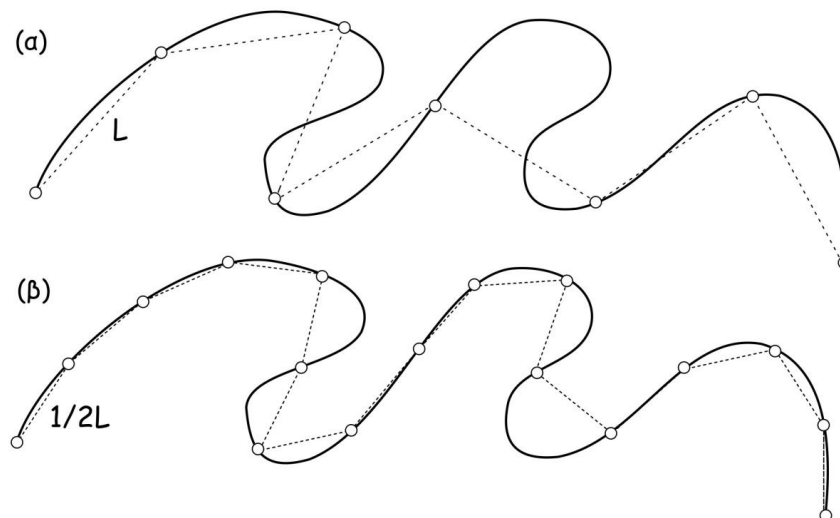


**Εικόνα 5.19:** Επίδραση της μεταβολής της κλίμακας στα εικονοστοιχεία μιας εικόνας.

Όσο η κλίμακα μειώνεται, ανάλογα μειώνεται και το επίπεδο των λεπτομερειών των χωρικών οντοτήτων που καταγράφεται με τα δεδομένα. Εάν συρρικνώσουμε αρχικά την εικόνα ενός χάρτη, και στη συνέχεια, τη μεγεθύνουμε, δεν είναι δυνατόν πάντα να πετύχουμε η αντίστροφη εικόνα να ταυτίζεται με την αρχική όταν η αναγωγή γίνεται πέρα από τη διακριτική ανάλυση του μέσου αποθήκευσης. Στην Εικόνα 5.19α παρουσιάζεται μια εικόνα που απαρτίζεται από δεκαέξι εικονοστοιχεία λευκά ή μαύρα. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι για την αναγωγή της εικόνας κατά τη σμίκρυνση κάθε τέσσερα εικονοστοιχεία μετατρέπονται σε ένα που εκφράζει και τη διακριτική ανάλυση του οργάνου καταγραφής. Τα δεκαέξι εικονοστοιχεία της αρχικής εικόνας με την αναγωγή μετατρέπονται σε τέσσερα εικονοστοιχεία (Εικόνα 5.19β). Ακολουθώντας τη φιλοσοφία της σμίκρυνσης θα πρέπει τα εικονοστοιχεία της παράγωγης εικόνας να μην είναι ούτε λευκά ή μαύρα αλλά έχουν τόνους του γκρι. Κάθε εικονοστοιχείο του Εικόνας 5.19β απεικονίζεται με τέτοιο τόνο του γκρι, που εξαρτάται από τον αριθμό των λευκών και μαύρων εικονοστοιχείων της αρχικής εικόνας που αντιπροσωπεύει. Αν

αντιστρέψουμε το μετασχηματισμό με σκοπό να ανασυνθέσουμε την αρχική εικόνα μεγεθύνοντας τη συρρικνωμένη, μπορούμε να επαναφέρουμε την εικόνα στο αρχικό της μέγεθος όμως δεν είναι δυνατό να ανακτηθεί το αρχικό επίπεδο των λεπτομερειών. Δεν είναι εφικτό κατά τη μεγέθυνση να γνωρίζουμε πόσα και ποια από τα εικονοστοιχεία της αρχικής εικόνας ήταν λευκά ή μαύρα και έτσι θα συνεχίζουν να απεικονίζονται με τους ίδιους τόνους του γκρι (Εικόνα 5.19γ).

Έτσι, εάν τα περιγραφικά δεδομένα, που αναφέρονται σε ορισμένες χωρικές οντότητες έχουν συγχωνευθεί, δεν είναι δυνατό να επανέλθουν στην αρχική τους κατάσταση, εκτός αν διατηρηθούν τα αρχικά δεδομένα. Εάν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε μόνον τη μέση ηλικία των κατοίκων μιας περιοχής, ποτέ δεν θα μπορούμε να εκτιμήσουμε την ηλικία κάθε ενός από τους κατοίκους της. Κατά τη διάρκεια της χαρτογραφικής γενίκευσης και ανάλυσης, σε ψηφιακό περιβάλλον, οι μεταβολές της κλίμακας που αναφέρονται σε αφαίρεση λεπτομερειών (ή συγχώνευση) μπορούν εύκολα να αντιμετωπιστούν με τρόπο που να εξασφαλίζεται η ακεραιότητα των αρχικών δεδομένων. Από τη στιγμή που τα περιγραφικά και τα χωρικά δεδομένα της συγκεκριμένης κλίμακας καταχωρούνται στη βάση δεδομένων, τότε, θεσπίζεται και η χωρική ανάλυση της βάσης δεδομένων με συνέπεια οποιαδήποτε λεπτομέρεια μεγέθους μικρότερου από το επίπεδο αυτό να χάνεται. Ένα από τα πλεονέκτημα της διανυσματικής δομής δεδομένων (vector data structure) σε σχέση με την κανονικοποιημένη (raster data structure), αντιστοιχεί στην εφαρμογή συνεχόμενων τιμών μεταβολής της κλίμακας αντί διακριτών πολλαπλασίων της. Πάντως, ανεξάρτητα από το πόσο μεγεθύνεται ένας χάρτης, δεν είναι δυνατό να αποδοθεί μεγαλύτερη λεπτομέρεια από το μέγεθος της διακριτικής ανάλυσης που χαρακτηρίζει τη συλλογή των χωρικών δεδομένων.

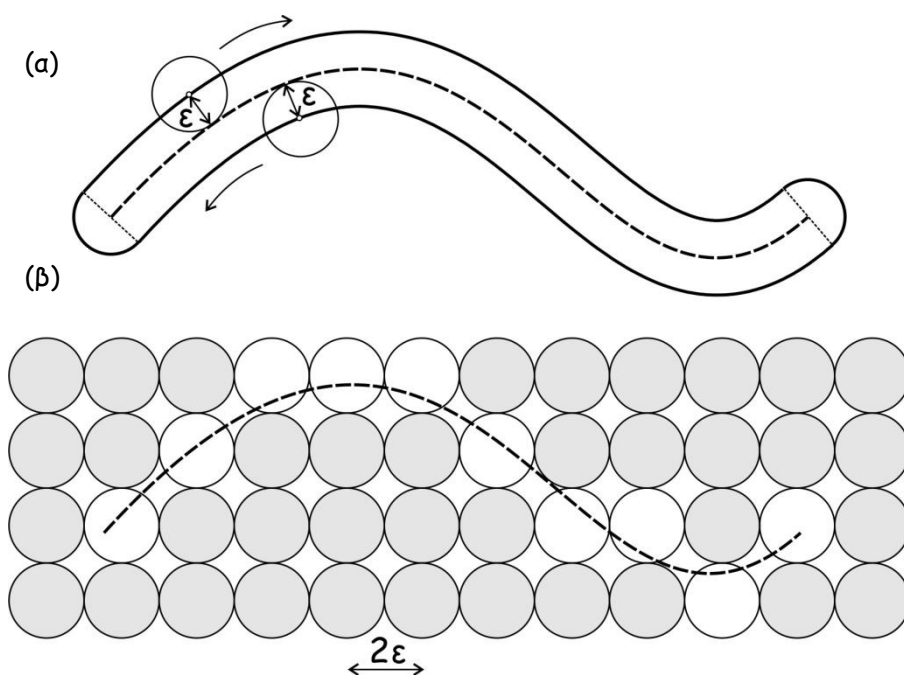


**Εικόνα 5.20:** Μεταβολή αναπτύγματος γραμμής ως προς τη μεταβολή του διαστήματος δειγματοληψίας.

### 5.8.1 Σχέση μεταξύ κλίμακας αναπτύγματος ακανόνιστων γραμμών

Οι μετρήσεις ιδιοτήτων χωρικών οντοτήτων από χάρτες, όπως είναι τα αναπτύγματα γραμμών, τα εμβαδά χωρίων κλπ., εξαρτώνται από την κλίμακα. Ας υποθέσουμε ότι η χαρτογραφική γραμμή που απεικονίζεται στην Εικόνα 5.20α αναπαρίσταται ψηφιακά από μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων ίσου μήκους  $L$ , τότε το ανάπτυγμα της γραμμής είναι ίσο με  $7L$ . Εάν η γραμμή αναπαρασταθεί από ευθύγραμμο τμήματα μειωμένα κατά το ήμισυ του αρχικού μήκους, δηλαδή  $L/2$ , τότε το ανάπτυγμα της γραμμής προκύπτει ίσο με  $16(L/2)$  ή  $8L$  (Εικόνα 5.20β). Δηλαδή, το μετρούμενο ανάπτυγμα μιας χαρτογραφικής γραμμής είναι συνάρτηση του διαστήματος δειγματοληψίας της συσκευής καταγραφής, δηλαδή του βήματος μέτρησης και της πολυπλοκότητας του σχήματος της γραμμής.

Καθώς το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος διαδοχικά υποδιαιρείται το ανάπτυγμα της γραμμής συνεχώς αυξάνεται χωρίς να συγκλίνει σε μια συγκεκριμένη τιμή. Όσο η διακριτική ανάλυση γίνεται μικρότερη, τόσο στη μέτρηση του αναπτύγματος της χαρτογραφικής γραμμής προστίθενται και περισσότερες λεπτομέρειες. Δηλαδή, σε κάθε μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα, με το οποίο προσεγγίζεται η γραμμή, καθώς μικραίνει το μέγεθος της διακριτικής ανάλυσης, στη μέτρηση του αναπτύγματος συμμετέχουν όλο και νέες μικρότερες λεπτομέρειες, με αποτέλεσμα το ανάπτυγμα να αυξάνει εξαρτώμενο από τα φυσικά όρια που χαρακτηρίζουν το όργανο μέτρησης.



Εικόνα 5.21: Η  $\epsilon$ -κυκλική περιοχή μιας χαρτογραφικής γραμμής.

### 5.8.2 Η ε-κυκλική περιοχή και αναπτύγματα γραμμών

Ο Julian Perkal<sup>1</sup> ανέπτυξε μια αποτελεσματική μέθοδο μέτρησης του αναπτύγματος αναλογικών ακανόνιστων χαρτογραφικών γραμμών εισάγοντας την έννοια της ε-κυκλικής περιοχής. Η ε-κυκλική περιοχή της γραμμής δημιουργείται όταν ένας δίσκος ακτίνας  $\epsilon$  κυλήσει κατά μήκος της γραμμής και προς τις δύο πλευρές της στο επίπεδο. Ως ε-κυκλική περιοχή ορίζεται το χωρίο γύρω από τη γραμμή που διαγράφεται από τα κέντρα των διαδοχικών θέσεων από τις οποίες διέρχεται ο δίσκος (Εικόνα 5.21α). Το ανάπτυγμα της γραμμής μπορεί να προκύψει από το εμβαδόν της ε-κυκλικής περιοχής αν αφαιρεθεί το εμβαδόν του δίσκου και το αποτέλεσμα διαιρεθεί με  $2\epsilon$  (Εικόνα 5.21α). Το εμβαδόν της ε-κυκλικής περιοχής μπορεί να εκτιμηθεί εμπειρικά με τη βοήθεια ενός συστήματος κανονικά διατεταγμένων εφαπτόμενων κύκλων ακτίνας  $\epsilon$ , δηλαδή, κύκλων των οποίων τα κέντρα είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός τετραγωνικού κάναβου, ισαποχής  $2\epsilon$  (Εικόνα 5.21β). Το εμβαδόν της ε-κυκλικής περιοχής προσδιορίζεται μετρώντας, πρώτα, το πλήθος των κύκλων μέσα από του οποίους διέρχεται η χαρτογραφική γραμμή, και στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντάς το πλήθος των κύκλων με το εμβαδόν τους.

### 5.8.3 Αναπτύγματα ακανόνιστων γραμμών και κλασματική γεωμετρία

Ο βρετανός μαθηματικός Lewis Fry Richardson<sup>2</sup> μελέτησε τη σχέση μεταξύ αναπτύγματος χαρτογραφικών γραμμών και κλίμακας μετρώντας τα αναπτύγματα ακτογραμμών ή συνόρων διαφόρων κρατών από χάρτες. Βασισμένος σε εμπειρική έρευνα που δημοσίευσε τα αποτελέσματά της το 1961, ο Richardson παρατήρησε, ότι η μορφή του διαγράμματος, με λογαριθμικούς άξονες, του αναπτύγματος των γραμμών ως προς το μήκος του βήματος μέτρησης πλησιάζει την ευθεία γραμμή (Εικόνα 5.22). Στη συνέχεια, στηριγμένος σε αυτήν την παρατήρηση απόδωσε τη σχέση μεταξύ του αναπτύγματος των γραμμών και του βήματος ως εξής:

$$L(x) = Ax^{1-D},$$

όπου:  $L(x)$  είναι το ανάπτυγμα της γραμμής,  $A$  είναι η σταθερά αναλογίας,  $x$  είναι το μήκος του βήματος μέτρησης και  $D$  είναι μια μεταβλητή που συμμετέχει στον εκθέτη.

<sup>1</sup> Ο Julian Perkal (1913-1965) ήταν πολωνός μαθηματικός καθηγητής στο πανεπιστήμιο Wroclaw. Ασχολήθηκε κυρίως με προβλήματα των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Το 1962 επισκέφτηκε για διάστημα έξι μηνών το πανεπιστήμιο Berkeley των Η.Π.Α.

<sup>2</sup> Ο μαθηματικός Lewis Fry Richardson (1881-1953) γεννήθηκε στο Newcastle upon Tyne της Αγγλίας. Ασχολήθηκε με την ανάπτυξη σύγχρονων μαθηματικών τεχνικών για την πρόγνωση του καιρού. Οι φιλειρηνιστικές του απόψεις επηρέασαν σημαντικά το ερευνητικό του έργο. Από το 1997 η Ευρωπαϊκή Ένωση Γεωφυσικής θέσπισε προς τιμήν του το μετάλλιο: "Lewis Fry Richardson" για τη βράβευση εξαιρετων επιστημονικών ερευνών που συνεισφέρουν στην επίλυση μη γραμμικών προβλημάτων της γεωφυσικής.

Λίγες δεκαετίες αργότερα ο γάλλος μαθηματικός, πολωνικής καταγωγής, Benoît Mandelbrot<sup>3</sup> ασχολήθηκε με το να ερμηνεύσει τη σημασία του εκθέτη D στην εμπειρική σχέση του Richardson και παρατήρησε ότι λαμβάνει δεκαδικές τιμές. Σύμφωνα με τη θεωρία που ανέπτυξε, την κλασματική γεωμετρία, ο εκθέτης D αναπαριστά την κλασματική διάσταση των γεωμετρικών οντοτήτων.



**Εικόνα 5.22:** Γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων της εμπειρικής έρευνας του Richardson.

Από τη γεωμετρία είναι γνωστό ότι η τοπολογική διάσταση σημείων, γραμμών και επιφανειών είναι αντίστοιχα μηδέν, ένα και δύο. Η μέτρηση του μεγέθους των γραφικών αντικειμένων, στα πλαίσια της ευκλείδιας γεωμετρίας, υπολογίζεται πάντα συγκρίνοντας με μια μονάδα μέτρησης. Έτσι το μέγεθος κάθε γραφικού αντικειμένου, προκύπτει ύστερα από σύγκριση με τη μονάδα μέτρησης και είναι πολλαπλάσιό της υψωμένης σε δύναμη ίση με τη διάσταση του γραφικού αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο το ανάπτυγμα μιας ευθείας γραμμής προσδιορίζεται από τον αριθμό των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης υψωμένων στη μονάδα. Με ανάλογη θεώρηση, το εμβαδόν ενός χωρίου προσδιορίζεται από τον αριθμό των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης υψωμένης στο τετράγωνο.

<sup>3</sup> Ο Benoît Mandelbrot (1924-2010) γεννήθηκε στη Βαρσοβία, η οικογένειά του εγκαταστάθηκε στη Γαλλία το 1936 και σπούδασε μαθηματικά στην École Polytechnique. Το 1958 εγκαταστάθηκε στις Η.Π.Α. και διετέλεσε ερευνητής στο IBM Thomas J. Watson Research Center. Το 1982 δημοσιεύτηκε στην αγγλική γλώσσα το βιβλίο του με τίτλο: *The Fractal Geometry of Nature* (μτφ. *Η κλασματική γεωμετρία της φύσης*), με το οποίο εισήγαγε μια καινοτόμα οπτική για τη γεωμετρία, την κλασματική γεωμετρία, κατάλληλη για τη μελέτη της τραχύτητας (roughness) διαφόρων φυσικών φαινομένων.



Με βάση την ευκλείδια γεωμετρία, κάθε φορά που η μονάδα μέτρησης υποδιπλασιάζεται, για να διατηρηθεί το ανάπτυγμα της γραμμής, διπλασιάζεται ο αριθμός των πολλαπλασίων της. Αντίστοιχα, για να διατηρηθεί το εμβαδόν ενός χωρίου τετραπλασιάζεται ο αριθμός των πολλαπλασίων της μονάδας μέτρησης.

Σύμφωνα με τον Mandelbrot η κλασματική διάσταση (D) μιας γραμμής μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$D = \frac{\log\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}{\log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)}$$

όπου:  $n_1$  είναι ο αριθμός των πολλαπλασίων του αναπτύγματος με ένα βήμα μέτρησης,  $n_2$  είναι ο αριθμός των πολλαπλασίων του αναπτύγματος με ένα άλλο βήμα μέτρησης,  $s_1$  είναι το μήκος (μοναδιαίο) του πρώτου βήματος μέτρησης και  $s_2$  είναι το μήκος (μοναδιαίο) του δεύτερου βήματος μέτρησης.

Η κλασματική διάσταση ευθειών γραμμών, ως ευκλείδια γραφική οντότητα, είναι ίση με τη μονάδα, δηλαδή, είναι ίση με την τοπολογική διάσταση της γραμμής. Εν γένει όμως, η κλασματική διάσταση ακανόνιστων γραμμών είναι μεγαλύτερη της μονάδας και κυμαίνεται μεταξύ των τιμών ένα και δύο. Όμοια, μία ακανόνιστη επιφάνεια έχει κλασματική διάσταση ίση με δύο, ενώ η κλασματική διάσταση μιας πτυχωμένης επιφάνειας κυμαίνεται μεταξύ των τιμών δύο και τρία.

Η κλασματική διάσταση αποτελεί σημαντικό παράγοντα περιγραφής της πολυπλοκότητας ή της τραχύτητας (roughness) των γεωμετρικών αντικειμένων. Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που εφάρμοσε στις μελέτες του ο Richardson, η τιμή της κλασματικής διάστασης μιας γραμμής μπορεί να προσδιοριστεί από την κλίση του διπλού λογαριθμικού διαγράμματος του αναπτύγματος της γραμμής ως προς το βήμα μέτρησης.

Θεμελιακή έννοια της κλασματικής γεωμετρίας είναι η ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας. Σύμφωνα με αυτήν κάθε μέρος ενός γραφικού αντικειμένου είναι όμοιο προς το σύνολό του είτε απόλυτα είτε με στατιστική διαδικασία. Από μελέτες που έχουν γίνει, μετρώντας την κλασματική διάσταση γραμμών σε χάρτες μεγάλου εύρους κλιμάκων, προκύπτει ότι η τιμή της κλασματικής διάστασης των γραμμών δεν διατηρείται αμετάβλητη όταν η μεταβολή της κλίμακας είναι πολύ μεγάλη. Η διαφοροποίηση αυτή κυρίως οφείλεται στο γεγονός του υπερβολικού βαθμού γενίκευσης, λόγω της μεγάλης μεταβολής της κλίμακας, με αποτέλεσμα η μορφή των χαρτογραφικών γραμμών να αλλοιώνεται σε σημαντικό βαθμό. Επομένως, όταν διαχειριζόμαστε χαρτογραφικές γραμμές, σε χάρτες που διαφοροποιούνται σημαντικά ως προς την κλίμακα, τα διαστήματα δειγματοληψίας θα εξαρτώνται από την κλίμακα και θα πρέπει να συσχετίζονται με την κλασματική διάσταση των γραμμών στην

αντίστοιχη κλίμακα. Επιπλέον, το διάστημα δειγματοληψίας θα πρέπει να είναι μικρότερο όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της κλασματικής διάστασης της γραμμής.

### 5.9 Στατιστικά δείγματα και χαρτομετρία

Στη στατιστική επεξεργασία ο όρος πληθυσμός χρησιμοποιείται για κάθε συλλογή μεμονωμένων αντικειμένων ή τιμών μιας μεταβλητής. Ο πληθυσμός έχει δύο ουσιώδη χαρακτηριστικά. Το πρώτο, αφορά μεμονωμένα αντικείμενα που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη κατηγορία ή ομάδα, για παράδειγμα, μπορεί να αναφέρεται σε ανθρώπους ή αγελάδες, αλλά δεν μπορεί να είναι και οι άνθρωποι και οι αγελάδες, εκτός και αν ανήκουν σε ένα ευρύτερο πληθυσμό, δηλαδή, των θηλαστικών. Το δεύτερο χαρακτηριστικό του πληθυσμού, αφορά μεμονωμένα αντικείμενα μίας κατηγορίας ή ομάδας που διαφέρουν ως προς μια τυπική ιδιότητα, η οποία ονομάζεται: μεταβλητή. Μπορούν να διακριθούν δυο είδη πληθυσμού:

#### 1. Ο πεπερασμένος πληθυσμός:

Αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό αντικειμένων ή μονάδων, όπως είναι τα κτήρια, οι άνθρωποι ή οι αγελάδες κ.ο.κ. Η πλήρης απογραφή του πλήθους είναι εφικτή, παρόλο που μπορεί να απαιτεί πάρα πολύ χρόνο ή κόστος.

#### 2. Ο μη πεπερασμένος πληθυσμός:

Ο πληθυσμός στην περίπτωση αυτή είναι προφανώς ακαθόριστα μεγάλος. Οι πιο πολλές φυσικές μετρήσεις ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Για παράδειγμα, ο πληθυσμός των μετρήσεων του μήκους μιας ακανόνιστης χαρτογραφικής γραμμής είναι οι μη πεπερασμένες ξεχωριστές μετρήσεις που θα προκύψουν εάν η διαδικασία μέτρησης επαναλαμβανόταν συνεχώς, κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Για να περιγραφούν τα χαρακτηριστικά μιας ομάδας αντικειμένων, ανεξάρτητα του αν αυτά ανήκουν σε πεπερασμένους, ή μη πεπερασμένους πληθυσμούς, γενικά είναι αδύνατο, ή πρακτικά μη εφικτό να μετρηθεί κάθε στοιχείο του πληθυσμού. Αντί λοιπόν να επιχειρηθεί η εξέταση του συνόλου του πληθυσμού, μελετάται ένα δείγμα από αυτόν. Επομένως, ένα δείγμα μπορεί να οριστεί ως:

«Ένα μέρος του πληθυσμού, ή ένα υποσύνολο ενός συνόλου μονάδων, που συνήθως επιλέγεται τυχαία, το οποίο προτίθεται να αντιπροσωπεύει ολόκληρο τον πληθυσμό.»

Όλα τα μοντέλα δειγματοληψίας υποθέτουν ότι υπάρχουν αντικείμενα των οποίων τα ποσοστά ή τα μεγέθη μπορούν να αντιπροσωπευθούν σε διαφορετικό βαθμό ή επίπεδο εμπιστοσύνης μέσα στο υποσύνολο που επιλέγεται από ολόκληρο τον πληθυσμό. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση που υπολογίζονται, για παράδειγμα, από ένα δείγμα μετρήσεων του μήκους μιας ακανόνιστης γραμμής, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι εκτιμήσεις της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης ολόκληρου του πληθυσμού. Η απόλυτη συμφωνία μεταξύ των εκτιμήσεων του δείγματος και των

αληθινών τιμών του πληθυσμού δεν μπορεί να υπάρξει, επειδή οι εκτιμήσεις περιέχουν σφάλματα. Τα απόλυτα μεγέθη αυτών των σφαλμάτων δεν μπορούν να οριστούν εφόσον η αληθινή μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του πληθυσμού δεν είναι γνωστά, όπως ακριβώς συμβαίνει και στη μελέτη των σφαλμάτων των μετρήσεων. Επομένως είναι δυνατόν να εκτιμηθεί μόνο το μέγεθός τους με την έννοια της πιθανότητας, σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά της κατανομής του δείγματος. Αυτή είναι η κατανομή που μπορεί να δημιουργηθεί αν επιλεγεί ένας μεγάλος αριθμός ξεχωριστών δειγμάτων από τον ίδιο τον πληθυσμό και θεωρηθεί η μέση τιμή του κάθε δείγματος ως μια μεμονωμένη παρατήρηση της μέτρησης. Το αν από το δείγμα προκύπτουν αποτελέσματα που είναι αντιπροσωπευτικά του πληθυσμού ή όχι, εξαρτάται από το αν το δείγμα είναι ανεπηρέαστο και αν τα σφάλματά του είναι μικρά. Για να μην χαρακτηριστεί το δείγμα ως επηρεασμένο, η επιλογή θα πρέπει να ορίζεται από μια διαδικασία που δεν επηρεάζεται από την ποιότητα των αντικειμένων που μελετώνται και να είναι απαλλαγμένη από οποιοδήποτε στοιχείο προερχόμενο από τον παρατηρητή. Ένα επαρκές δείγμα έχει σχετικά μικρό εύρος σφαλμάτων εκτίμησης και επομένως αντιστοιχεί στην προηγούμενη περιγραφή ενός ακριβούς συνόλου μετρήσεων. Η κύρια απαίτηση οποιουδήποτε μοντέλου δείγματος είναι η ακρίβεια, η οποία αντιπροσωπεύει τη μη ύπαρξη επηρεασμού. Οι δυο αυτοί στόχοι πρέπει να επιτευχθούν κατά την εφαρμογή της δειγματοληπτικής στρατηγικής, η οποία περιλαμβάνει την επιλογή των κατάλληλων μεθόδων δειγματοληψίας και μεγέθους δειγμάτων.

#### 5.9.1 Ιδιότητες του στατιστικού δείγματος

Για τη δημιουργία ενός στατιστικά έγκυρου δείγματος πρέπει να εξασφαλίζονται δύο σημαντικές συνθήκες, ανεξάρτητες της φύσης του πληθυσμού ή του σχεδιασμού του μοντέλου δειγματοληψίας.

1. Κάθε μεμονωμένος πληθυσμός πρέπει να συνδέεται με μια γνωστή διαδικασία επιλογής. Αυτή η συνθήκη μπορεί να ικανοποιείται εάν ο πληθυσμός έχει διαιρεθεί σε ίσες μονάδες, όπως είναι οι επιφάνειες σταθερού μεγέθους, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως χωρικές μονάδες δειγματοληψίας. Οι χωρικές μονάδες πρέπει να καλύπτουν ολόκληρο τον πληθυσμό, αλλά δεν πρέπει να επικαλύπτονται, δηλαδή κάθε στοιχείο του πληθυσμού να ανήκει σε μια και μόνο μια χωρική μονάδα.
2. Η μέθοδος επιλογής πρέπει να είναι συνεπής με την πρώτη συνθήκη - ότι δηλαδή, οι πιθανότητες να επιλεγεί κάθε χωρική μονάδα να είναι ίσες. Αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο με μια μέθοδο τυχαίας επιλογής των μονάδων δειγματοληψίας.

Οι σχέσεις που δίνουν τις εκτιμήσεις των παραμέτρων του πληθυσμού και εκφράζουν την ακρίβεια του δείγματος βασίζονται στις δύο αυτές προϋποθέσεις. Εάν δεν εξασφαλίζεται το τυχαίο της επιλογής, οι εκτιμήσεις δεν μπορούν να θεωρούνται αξιόπιστες, γιατί δεν είναι δυνατό να καθορισθούν συγκεκριμένες τιμές ή όρια στην πιθανότητα να έχει συμβεί τυχαία ένα γεγονός. Τα προβλήματα αυτά εμφανίζονται

στην εφαρμογή της συστηματικής δειγματοληψίας, στην οποία τα αποτελέσματα θεωρούνται ότι προέρχονται από χωρικές μονάδες που έχουν επιλεγεί τυχαία.

Εκτός από τους δυο στόχους, πρώτα, να είναι το δείγμα ανεπηρέαστο, και δεύτερο, να προκύπτει από αυτό μια εκτίμηση με το δικό της σφάλμα, υπάρχει μια επιπρόσθετη απαίτηση. Για να είναι ένα δείγμα αντιπροσωπευτικό, θα πρέπει να έχει σχεδόν τα ίδια χαρακτηριστικά με ολόκληρο τον πληθυσμό. Αυτό δεν είναι αντιφατικό με την ανάγκη της τυχαίας επιλογής, αλλά συχνά σημαίνει, ειδικά, στη χωρική δειγματοληψία, ότι η γνήσια τυχαία δειγματοληψία είναι λιγότερο επιτυχής από κάποια άλλη μορφή δειγματοληψίας, όπως για παράδειγμα, είναι η τυχαία δειγματοληψία με διαστρωμάτωση.

**Πίνακας 5.2:** Αποτελέσματα 100 ανεξαρτήτων μετρήσεων ευθυγράμμου τμήματος.

	165,9	165,7	165,7	165,7	165,7	165,8	165,7
	165,7	165,8	165,5	165,7	165,6	165,5	165,7
	165,6	165,6	165,7	165,6	165,7	165,6	165,6
	165,9	165,7	165,7	165,7	165,7	165,7	165,8
	165,7	165,7	165,5	165,7	165,7	165,6	165,8
$\bar{x}$	165,76	165,70	165,62	165,68	165,68	165,64	165,72
$\sigma$	$\pm 0,13$	0,07	$\pm 0,11$	$\pm 0,05$	$\pm 0,05$	$\pm 0,11$	$\pm 0,08$
	165,7	165,7	165,7	165,6	165,6	165,7	165,8
	165,5	165,6	165,7	165,7	165,6	165,6	165,7
	165,6	165,8	165,6	165,7	165,7	165,7	165,7
	165,8	165,8	165,8	165,6	165,7	165,7	165,7
	165,7	165,6	165,9	165,9	165,7	165,7	165,7
$\bar{x}$	165,66	165,70	165,74	165,66	165,68	165,68	165,72
$\sigma$	$\pm 0,11$	$\pm 0,10$	$\pm 0,11$	$\pm 0,06$	$\pm 0,08$	$\pm 0,05$	$\pm 0,05$
	165,7	165,6	165,5	165,7	165,7	165,7	
	165,8	165,5	165,7	165,6	165,7	165,8	
	165,7	165,8	165,6	165,6	165,6	165,7	
	165,7	165,8	165,7	165,8	165,7	165,7	
	165,6	165,6	165,7	165,6	165,6	165,8	
$\bar{x}$	165,70	165,66	165,66	165,66	165,66	165,74	
$\sigma$	$\pm 0,07$	$\pm 0,13$	$\pm 0,11$	$\pm 0,09$	$\pm 0,06$	$\pm 0,06$	

### 5.9.2 Ένα πείραμα δειγματοληψίας μετρήσεων

Οι θεωρητικές αρχές που αναφέρθηκαν παραπάνω εφαρμόζονται στη δειγματοληψία οποιασδήποτε μεταβλητής. Όσες θεωρητικές αρχές εφαρμόζονται σε δείγματα μετρήσεων και επεξεργασίας των σφαλμάτων τους, αντιπροσωπεύουν ένα υποσύνολο της θεωρίας της στατιστικής δειγματοληψίας, που όμως αποτελούν βασικό στοιχείο

αναφοράς της χαρτομετρίας. Για αυτό το λόγο στην ενότητα αυτή περιγράφεται ένα πείραμα με τη βοήθεια του οποίου ερμηνεύεται και η θεωρία της διαχείρισης των σφαλμάτων.

Αντικείμενο τη μέτρησης είναι η απόσταση ενός ευθύγραμμου τμήματος AB, το οποίο έχει μήκος περίπου ίσο με το ήμισυ του υποδεκάμετρου που χρησιμοποιείται. Τα άκρα A και B σημειώνονται με δυο τρύπες με λεπτή βελόνα. Ο παρατηρητής τοποθετεί το υποδεκάμετρο κατά μήκος της γραμμής προσέχοντας να μην τοποθετήσει το μηδέν της κλίμακας σε κανένα από τα δύο άκρα της γραμμής. Ο παρατηρητής διαβάσει τις ενδείξεις του υποδεκάμετρου στα δυο άκρα του ευθυγράμμου τμήματος με τρόπο που η απόσταση να εκφράζεται πάντα από τη διαφορά μεταξύ των δυο ενδείξεων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές, χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό τμήμα του υποδεκάμετρου κάθε φορά για να γίνει η κάθε μέτρηση. Η σειρά της μέτρησης πρέπει να αλλάζει. Για παράδειγμα, οι πρώτες μετρήσεις μπορούν να γίνουν με ανάγνωση στο υποδεκάμετρο πρώτα στο σημείο A και μετά στο σημείο B. Οι επόμενες μετρήσεις μπορούν να γίνουν με ανάγνωση πρώτα στο B και μετά στο A κ.ο.κ. Ένα δείγμα μπορεί να μετρηθεί με τοποθέτηση του υποδεκάμετρου στη μια πλευρά του, το επόμενο με τοποθέτηση του υποδεκάμετρου στην άλλη πλευρά, έτσι ώστε η διεύθυνσή του να αντιστρέφεται περιοδικά. Επίσης μπορούν να συνδυαστούν μετρήσεις από δύο ή και περισσότερους παρατηρητές.

Οι διαφοροποιήσεις στη διαδικασία έχουν σκοπό να εισάγουν ένα μέτρο ανεξαρτησίας στις αναγνώσεις έτσι ώστε να μην έχει κάποια μέτρηση επιρροή σε οποιαδήποτε άλλη. Οι μετρήσεις επαναλαμβάνονται N φορές, όπου: N είναι ένας μεγάλος αριθμός. Στο παράδειγμα που περιγράφεται εδώ, το μήκος της γραμμής είναι 165,7 mm και έγιναν 100 μετρήσεις.

Μήκος (mm)	Συχνότητα
165,4	0
165,5	6
165,6	25
165,7	49
165,8	17
165,9	3
166,0	0

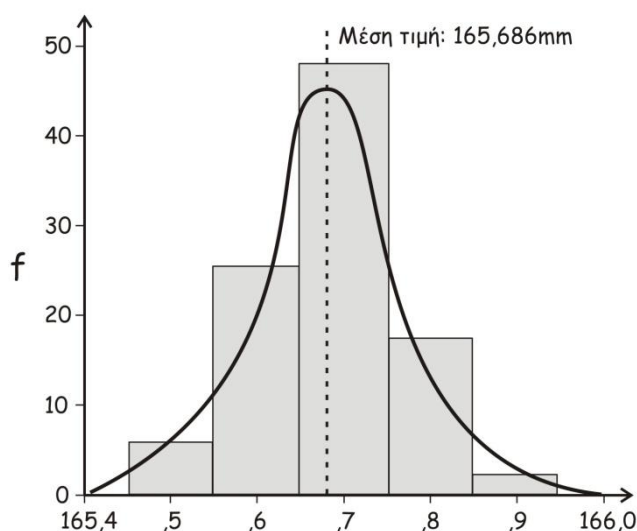
**Πίνακας 5.3:** Συχνότητες μετρήσεων.

Τα αποτελέσματα των μετρήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2, όπου είναι ομαδοποιημένες σε 20 χωριστά δείγματα των  $n=5$  μετρήσεων το καθένα. Η συχνότητα των μετρήσεων, σε τάξη 0,1 mm δίνεται στο Πίνακα 5.3 και απεικονίζεται στην Εικόνα 5.23. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των 100 μετρήσεων είναι:

$$\bar{x} = 165,69\text{mm} \text{ και}$$

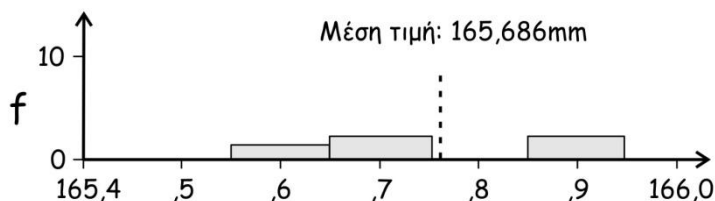
$$\sigma = \pm 0,09\text{mm}.$$

Η Εικόνα 5.23 παρουσιάζει μια επιτυχή προσέγγιση της κανονικής κατανομής που θεωρείται ως χαρακτηριστική των τυχαίων ή συμπτωματικών σφαλμάτων ανάλογων μετρήσεων. Η ομαλή καμπύλη που φαίνεται στην Εικόνα (5.23) είναι μια κανονική καμπύλη που υπολογίστηκε με τις συγκεκριμένες εκτιμήσεις της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης που υπολογίστηκαν για τις μετρήσεις. Η Εικόνα 5.24 απεικονίζει τη συχνότητα των πέντε μετρήσεων που αποτελούν το πρώτο δείγμα. Η μορφή του ιστογράμματος στην Εικόνα 5.24 δεν παρουσιάζει καμιά ομοιότητα με τη μορφή της κανονικής καμπύλης.



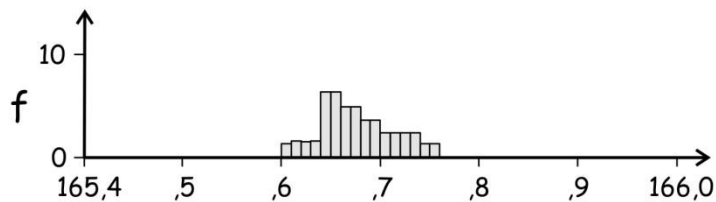
**Εικόνα 5.23:** Ιστόγραμμα κατανομής συχνότητων των 100 μετρήσεων.

Υπολογίζονται στη συνέχεια, οι μέσες τιμές καθενός από τα 20 υποσύνολα στα οποία έχουν διαιρεθεί οι μετρήσεις. Οι δειγματοληπτικές κατανομές που σχηματίζονται από τις 20 μέσες τιμές εμφανίζονται στην Εικόνα 5.25. Στην Εικόνα αυτή (5.24) παρουσιάζεται μια μορφή που προσεγγίζει μια συμμετρική κατανομή, παρόλο που το σύνολο των 20 μόνον αποτελεσμάτων δεν είναι αρκετά μεγάλο για να δώσει κάτι περισσότερο από μία κατ' αρχήν εικόνα αυτής της ιδιότητας.



**Εικόνα 5.24:** Ιστόγραμμα κατανομής συχνότητων των πέντε πρώτων μετρήσεων.

**Εικόνα 5.25:** Ιστόγραμμα κατανομής συχνοτήτων των 20 μέσων τιμών.



Οι ίδιες αρχές μπορούν να εφαρμοστούν σε μετρήσεις διαφορετικού είδους γραμμών (για παράδειγμα ακανόνιστων), που έχουν γίνει με διαφορετικούς τρόπους.

Οι Πίνακες (5.2 και 5.3) και οι Εικόνες (5.23, 5.24 & 5.25) παρουσιάζουν ορισμένες σημαντικές διαπιστώσεις για τη διαδικασία δειγματοληψίας.

1. Εάν μια σειρά δειγμάτων επιλεγεί τυχαία από έναν πληθυσμό, οι μέσες τιμές αυτών των δειγμάτων είναι κανονικά κατανομημένες. Αυτό είναι σύμφωνο με το θεώρημα του κεντρικού ορίου, σύμφωνα με το οποίο, όταν ένα δείγμα αυξάνει, η μέση τιμή του δείγματος τείνει να έχει κανονική κατανομή, ακόμα και αν ο συνολικός πληθυσμός δεν είναι κανονικός. Αυτό δεν συμβαίνει, όμως, στα μικρά δείγματα, των οποίων οι κατανομές ακολουθούν την κατανομή Student's "t".
2. Εάν προσδιοριστεί ο αριθμητικός μέσος ενός δείγματος και από αυτόν προκύψουν τα υπόλοιπα, μπορεί να προσδιοριστεί η διασπορά των μετρήσεων μέσα στο δείγμα. Η διασπορά είναι ισοδύναμη με την τυπική απόκλιση η οποία έχει την τάση να υπερεκτιμά την ακρίβεια ενός δείγματος μετρήσεων. Μια άλλη παράμετρος που χαρακτηρίζει τη δειγματοληψία είναι το τυπικό σφάλμα μιας παρατήρησης (s):

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n-1} - \frac{(\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

όπου: x η μεταβλητή και n ο αριθμός των μετρήσεων.

3. Για έναν πεπερασμένο πληθυσμό, στον οποίο ο αριθμός των στοιχείων είναι γνωστός, λαμβάνεται υπόψη ο λόγος n/N. Ο λόγος αυτός δεν επηρεάζει τη μέση τιμή, αλλά έχει επίδραση στο τυπικό σφάλμα (s). Εάν ο συνολικός πληθυσμός είναι απεριόριστα μεγάλος, όπως είναι στις φυσικές μετρήσεις, η διόρθωση είναι πολύ μικρή και θεωρείται αμελητέα.
4. Εάν ο πληθυσμός έχει μέσον όρο:  $\mu$  και μεταβλητότητα:  $\sigma^2$  και ληφθεί ένας μεγάλος αριθμός τυχαίων δειγμάτων από αυτόν, η μέση τιμή αυτών των δειγμάτων θα έχει κατανομή με μεταβλητότητα:  $\sigma^2/n$ . Η μέση τιμή της κατανομής θα είναι επίσης:  $\mu$ . Μπορεί να γίνει εκτίμηση της μέσης τιμής του πληθυσμού από το ένα δείγμα n μετρήσεων και αυτή η εκτίμηση να είναι κοντά στη μέση τιμή του πληθυσμού, όπως φαίνεται από το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής. Το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής ( $s_M$ ) είναι η τετραγωνική ρίζα της μεταβλητότητας του δείγματος και δίνεται από τη σχέση:

$$s_M = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

Τέλος, επειδή το  $s_M$  είναι μια εκτίμηση της τυπικής απόκλισης του πληθυσμού, έχει το δικό της τυπικό σφάλμα ( $s_S$ ) που μπορεί να προκύψει από τη σχέση:

$$s_S = \frac{s_M}{\sqrt{2n}}.$$

Η σχέση που δίνει το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι πολύ σημαντική γιατί δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η ακρίβεια ενός δείγματος ως προς το μέγεθός του, ή διαφορετικά, τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μεγαλώσει η ακρίβεια με την αύξηση του αριθμού των μετρήσεων. Αυτό το συμπέρασμα είναι σημαντικό στις περιπτώσεις που δεν είναι δυνατόν να αυξηθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων μέσα από τις πειραματικές τεχνικές. Στο παράδειγμα μέτρησης της γραμμής, αν το σύνολο των 100 μετρήσεων θεωρηθεί ως ένα δείγμα, το τυπικό σφάλμα μιας παρατήρησης θα είναι:  $s = \pm 0,09\text{mm}$ , και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι:  $s_M = \pm (0,09/\sqrt{100}) = \pm 0,01$ , επομένως, θα έχουμε ως αποτέλεσμα:

$$\bar{x} = 165,70 \pm 0,01\text{mm}.$$

Ενώ αν ληφθεί υπόψη ένα δείγμα πέντε μετρήσεων, για το οποίο  $\bar{x} = 165,70$  και  $s = \pm 0,07$ , το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι  $s_M = \pm (0,07/\sqrt{5}) = \pm 0,03\text{mm}$ . Κανονικά αυτό είναι το μόνο διαθέσιμο αποτέλεσμα για τον παρατηρητή, το οποίο εκφράζεται ως:

$$\bar{x} = 165,70 \pm 0,03\text{mm}.$$

Είναι προφανές ότι υπάρχει συμφωνία μεταξύ των δύο εκτιμήσεων της μέσης τιμής. Παρ' όλο που το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής τριπλασιάζεται, όταν το  $n$  μειώνεται από το 100 στο πέντε, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η μεταβλητή  $x$  αντιπροσωπεύει τα mm που διαβάσθηκαν με γυμνό μάτι με τη βοήθεια ενός υποδεκάμετρου υποδιαίρεσης 1mm. Επομένως, τα τυπικά σφάλματα αντιπροσωπεύουν πολύ μικρότερες αποστάσεις από αυτές που μπορεί να αναγνωρισθούν, όταν τοποθετείται ένα υποδεκάμετρο κατά μήκος μιας γραμμής. Άρα στην πράξη, οι διαφορές που αναλύονται θα πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερες από τη διακριτική ανάλυση του υποδεκάμετρου, άλλωστε, για ποιό λόγο πρέπει να κάνει ο παρατηρητής 100 μετρήσεις αν δεν πρόκειται να κερδίσει τίποτα. Τα πειραματικά δεδομένα του Πίνακα 5.2 δείχνουν ότι το εύρος των διαφορών προσδιορίζεται από τη διακριτική ανάλυση του υποδεκάμετρου και όχι από τυχαίους παράγοντες. Η μέτρηση του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος με υποδεκάμετρο αποτελεί την πιο ακριβή μέθοδο μέτρησης του μήκους γραμμών, επειδή τα σφάλματα περιορίζονται στα σφάλματα ανάγνωσης που προέρχονται από τη διακριτική ανάλυση του υποδεκάμετρου.

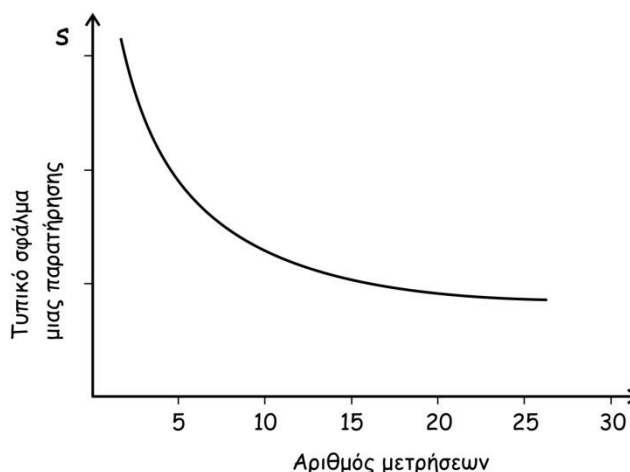


### 5.9.3 Το μέγεθος ενός στατιστικού δείγματος

Οι στατιστικές αρχές που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες αναφέρονται σε δείγματα μεγάλου αριθμού μετρήσεων, παρόλο που πολύ συχνά ορισμένα χαρτομετρικά αποτελέσματα προκύπτουν και από μικρά δείγματα. Ποιό, όμως, μπορεί να είναι το όριο του μεγέθους ενός δείγματος; Συχνά υπάρχει ένας εμπειρικός κανόνας, το μέγεθος ενός δείγματος να αποτελείται τουλάχιστον από τριάντα μετρήσεις. Από πρακτική σκοπιά αυτό το όριο είναι αρκετά μεγάλο. Στην Εικόνα 5.26 παρουσιάζεται ο συσχετισμός του τυπικού σφάλματος μιας παρατήρησης ως προς το μέγεθος του δείγματος. Ερμηνεύοντας την Εικόνα 5.26 παρατηρείται ότι η αύξηση του μεγέθους του δείγματος συνοδεύεται πάντα από μείωση του τυπικού σφάλματος μιας παρατήρησης για δείγματα μεγαλύτερα από δεκαπέντε μετρήσεις. Επίσης, από την ίδια εικόνα προκύπτει ότι όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρότερο από δέκα μετρήσεις, το τυπικό σφάλμα αυξάνεται ραγδαία. Επομένως, ως συμπέρασμα προκύπτει, ότι ένα δείγμα πρέπει να αποτελείται από περισσότερες από δεκαπέντε μετρήσεις.

Κάθε δειγματοληψία εμπεριέχει και κάποιο συμβιβασμό μεταξύ της ακρίβειας και της οικονομίας εκτέλεσης της διαδικασίας μέτρησης. Όσο μικρότερο είναι το δείγμα, τόσο μεγαλύτερο είναι και το περιθώριο σφάλματος στην εκτίμηση που έχει γίνει. Για να αποφεύγονται οι ακραίες καταστάσεις στη διαδικασία μέτρησης, δηλαδή, πολύ μικρά ή πολύ μεγάλα δείγματα, μπορεί να προσδιοριστεί το κατάλληλο μέγεθος του δείγματος, από τη σχέση του τυπικού σφάλματος της μέσης τιμής, ορίζοντας εκ των προτέρων μια επιθυμητή τιμή για αυτό.

**Εικόνα 5.26:** Σχέση μεταξύ τυπικού σφάλματος και μεγέθους δείγματος.



Προσδίδοντας ένα τυπικό σφάλμα για μια μέση τιμή, ουσιαστικά προσδιορίζεται το διάστημα στο οποίο μπορεί να διακυμαίνεται η μέση τιμή. Για να ελαττωθεί αυτό το διάστημα είναι αναγκαίο να γίνουν περισσότερες μετρήσεις ή παρατηρήσεις. Εμπειρικά ισχύει ότι, για να ελαττωθεί το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής κατά ήμισυ, πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις κατά τέσσερις φορές. Επειδή, συνήθως, είναι αναγκαίο να

προσδιοριστεί μια μέση τιμή σε συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας, ή να εντοπιστούν διαφορές συγκεκριμένου μεγέθους, πρέπει να είναι γνωστός ο αριθμός των μετρήσεων ή παρατηρήσεων που είναι αναγκαίος για επιτευχθεί αυτός ο στόχος. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε το στατιστικό δείκτη της τυπικής απόκλισης. Η τυπική απόκλιση χρησιμεύει για να υπολογισθούν τα όρια ενός αυθαίρετου αριθμού μετρήσεων ή παρατηρήσεων ως προς την απαιτούμενη ακρίβεια. Εδώ εισάγεται η έννοια του επιτρεπόμενου σφάλματος για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής. Για το επιτρεπόμενο σφάλμα (E), ισχύει η σχέση:

$$n = \frac{a^2 s^2}{E^2},$$

όπου: a είναι το ολοκλήρωμα της πιθανότητας και περιέχεται σε ειδικούς πίνακες και: n το μέγεθος του δείγματος.

Συνήθως στην πράξη επιλέγεται η πιθανότητα σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, οπότε το a=1,96, ενώ για επίπεδο εμπιστοσύνης 99% το a =2,58.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι ζητείται το μέγεθος του δείγματος που χρειάζεται να μετρηθεί ένα μήκος περίπου 200mm, με ροδάκι ακρίβειας:  $\pm 2,2$ mm. Ας θεωρήσουμε επιπλέον ότι απαιτείται ακρίβεια μέτρησης  $\pm 1$  mm. Επειδή:

$$s_M = \pm \frac{2,2}{\sqrt{n}},$$

είμαστε 95% σίγουροι για ένα δείγμα n παρατηρήσεων η αληθινή μέση τιμή κείται μεταξύ  $1,96 \times 2,2 / \sqrt{n}$  της εκτιμώμενης μέσης τιμής. Επομένως, αν θέσουμε:  $1,96 \times 2,2 / \sqrt{n} = 1$ , μπορούμε να υπολογίσουμε το n:

$$n = \left( \frac{1,96 \times 2,2}{1,0} \right)^2 = 19 \text{ μετρήσεις.}$$

### 5.10 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων

Τα αποτελέσματα συγκεκριμένων διαδικασιών μετρήσεων ή υπολογισμών εμπεριέχουν σφάλματα τα οποία προέρχονται από διάφορες αιτίες που σχετίζονται με τα στάδια εκπόνησης των σχετικών εργασιών. Εάν η εκτίμηση του μεγέθους των αβεβαιοτήτων κάθε ανεξάρτητης διαδικασίας μπορεί γίνει ξεχωριστά είναι αναγκαίο να εκτιμάται η συνολική αβεβαιότητα συναρτήσει αυτών.

Μια γενική έκφραση με τη βοήθεια της οποίας είναι δυνατό να εκτιμηθεί η συνολική αβεβαιότητα είναι ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων. Ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων προσδιορίζει την αβεβαιότητα ( $\sigma_y$ ) μιας εξαρτημένης μεταβλητής (y) που είναι συνάρτηση διαφόρων ανεξαρτητών μεταβλητών ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) και των εκτιμήσεων της αβεβαιότητάς τους. Ο νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων έχει τη μορφή:

$$\sigma_y = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \sigma_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \sigma_{x_n}\right)^2}.$$

Η γενική αυτή σχέση μπορεί να εφαρμοστεί στις περιπτώσεις εκτίμησης των μεγεθών μήκων, εμβαδού και όγκου που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες και αποτελεί τη βάση της μελέτης των σφαλμάτων του υπολογισμού τους.

### 5.11 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α.Μ., 1999, *Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις Ι*. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Cromley R.G., 1992, *Digital Cartography*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- International Cartographic Association, *Multilingual Dictionary of Technical Terms in Cartography*, International Cartographic Association, Commission II, Wiesbaden: Franz Steiner Verlag,.
- Maling D.H., 1989, *Measurements from Maps. Principles and Methods of Cartometry*. New York: Pergamon Press.
- Mandelbrot B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman & Co.
- Νάκος Β., 1990, "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών δεδομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας". Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Σχολή Αγρονόμων & Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Perkal J., 1966, "On the Length of Empirical Lines". Michigan Inter-University Community of Mathematical Geographers, Discussion Paper No. 10.
- Richardson L.F., 1961, "The Problem of Contiguity: An Appendix of Statistics of Deadly Quarrels". *General Systems Yearbook*, 6: 139-87.



## Κεφάλαιο 6

### 6. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

#### 6.1 Εισαγωγή

Συχνά χρησιμοποιούμε μαθηματικά εργαλεία προσπαθώντας να αναπαραστήσουμε το συνεχή χαρακτήρα των χωρικών φαινομένων, από τη διακριτή πληροφορία που συλλέγουμε κατά την καταγραφή τους. Η ανάγκη της προσαρμογής αυτής στην αναπαράσταση γραμμικών ή τρισδιάστατων χωρικών φαινομένων μέσω καμπύλων γραμμών και επιφανειών προκύπτει, κυρίως, από τη διαπίστωση ότι ενώ τα χωρικά φαινόμενα είναι συνεχή, οι μετρήσεις της καταγραφής τους είναι πάντα διακριτές. Η μαθηματική αυτή διαδικασία ονομάζεται παρεμβολή. Για να εφαρμόσουμε όμως τις μαθηματικές αυτές τεχνικές πρέπει, πρώτα, να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε τα φαινόμενα ποσοτικά.

#### 6.2 Συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να αναπαραστήσουμε χωρικά φαινόμενα όπως είναι: το βάθος ενός γεωλογικού στρώματος μιας περιοχής, η παραμόρφωση του περυγίου ενός αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της φόρτισής του, η πυκνότητα του πληθυσμού μιας αστικής περιοχής, το ποσοστό μιας μειονότητας στο συνολικό πληθυσμό κ.ο.κ. Θεωρούμε ότι το μέγεθος του φαινομένου, εκφρασμένο μέσα από έναν αριθμό, εξαρτάται πάντα από ορισμένες μεταβλητές, τις ανεξάρτητες μεταβλητές, στις οποίες μπορούν να αποδοθούν αριθμητικές τιμές.

Δεν μπορούν βέβαια, να λαμβάνονται υπόψη όλες οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Κάποιες από αυτές μπορεί να μην είναι γνωστές. Για παράδειγμα, τα υψόμετρα της γήινης επιφάνειας εξαρτώνται συνεχώς από το γεωγραφικό μήκος και πλάτος, από τη θέση του πλανήτη ως προς την τροχιά του, καθώς, και από το μέγεθος των παλιρροιών. Ορισμένες φορές, όμως, είναι επαρκές το υψόμετρο να θεωρηθεί ως “συνάρτηση” δυο ανεξάρτητων μεταβλητών, του γεωγραφικού μήκους και του γεωγραφικού πλάτους. Για να γίνουν πιο σαφείς οι έννοιες της “μεταβλητής” και της “συνάρτησης”, πρέπει να δοθούν συγκεκριμένοι ορισμοί.

Ας ξεκινήσουμε από ορισμούς που σχετίζονται με την έννοια των πραγματικών αριθμών. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  είναι η μετρική της απόστασης του  $a$  από την αφετηρία μετρημένη πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Επομένως, για δυο πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $b$  ισχύει ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς:  $|a-b|$  αναπαριστά την απόσταση μεταξύ των δυο σημείων που αντιστοιχούν στα  $a$  και  $b$  στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Είναι επίσης απαραίτητο να οριστεί ο ακριβής τρόπος συμβολισμού των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, δηλαδή, του συνόλου των πραγματικών αριθμών που περιλαμβάνονται σε ένα τμήμα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Το σύμβολο:  $[a, b]$  με τους πραγματικούς αριθμούς:  $a, b$  που ικανοποιούν τη σχέση  $a < b$ , δηλώνει το σύνολο όλων των αριθμών,  $x$  του ονομάσουμε  $x$ , για τους οποίους ισχύει:  $a \leq x$  και  $x \leq b$ . Ένα τέτοιο σύνολο είναι ένα κλειστό διάστημα. Αντίθετα, το σύνολο όλων των αριθμών  $x$ , για τους οποίους ισχύει:  $a < x$  και  $x < b$ , δεν περιέχει τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα άκρα του τμήματος, ονομάζεται ανοιχτό διάστημα και συμβολίζεται με  $(a, b)$ .

Τα σύμβολα  $[a, b)$  και  $(a, b]$  δηλώνουν διάστημα αριστερά-κλειστό και δεξιά-κλειστό, αντίστοιχα, και το καθένα περιέχει ακριβώς ένα άκρο του τμήματος όπως δηλώνει και ο συμβολισμός του.

Για την ένταξη ενός αριθμού σε ένα σύνολο εισάγεται ένα σύμβολο, το οποίο σημαίνει “ανήκει σε” ή “είναι μέλος του”. Έτσι, εάν  $S$  είναι ένα σύνολο αντικειμένων, τότε το  $x \in S$  διαβάζεται ως: “το  $x$  ανήκει στο σύνολο  $S$ ”. Για παράδειγμα,  $x \in [1, 2]$  σημαίνει ότι το  $x$  είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του 1 και 2 με το 1 ή το 2 να συμπεριλαμβάνονται. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι:  $S = [1, 2]$ . Ομοίως, εάν  $S$  είναι το σύνολο όλων των γυναικών της Ελλάδας, τότε  $x \in S$  σημαίνει ότι το  $x$  είναι μια γυναίκα που ζει στην Ελλάδα.

Αν  $S$  είναι ένα σύνολο και δίνεται ένας νόμος που ορίζει ένα μοναδικό πραγματικό αριθμό για κάθε  $x \in S$ , τότε αυτός ο νόμος ονομάζεται συνάρτηση εντός του  $S$ . Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση δεν είναι ένας αριθμός αλλά ένας μηχανισμός που προσδίδει αριθμητικές τιμές στα αντικείμενα του  $S$ . Οι συναρτήσεις, συνήθως, χαρακτηρίζονται από γράμματα ή ομάδες γραμμάτων, για παράδειγμα,  $f$ ,  $g$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ , ή  $\log$ . Εάν το  $x \in S$ , τότε, η τιμή που δίδεται στο  $x$  με μια συνάρτηση  $f$  γράφεται  $f(x)$  και ονομάζεται η τιμή της  $f$  στο  $x$ . Στο πλαίσιο αυτού του κεφαλαίου θα γίνεται αναφορά σε σύνολα  $S$  που είναι διαστήματα ή σύνολα πραγματικών αριθμών ή σύνολα ζευγών πραγματικών αριθμών. Οι ποσότητες στο  $S$  είναι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

Εξετάζουμε κατ’ αρχήν συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στις οποίες το διάστημα  $S$  μπορεί να είναι ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Κανονικά, οι συναρτήσεις ορίζονται ξεκινώντας από το πώς επηρεάζουν την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , για παράδειγμα,  $f(x) = x+1$ , ή  $g(x) = \sqrt{x}$ . Στην πρώτη συνάρτηση δεν χρειάζεται να οριστεί το πεδίο ορισμού  $S$ , εκτός εάν πρέπει να περιοριστεί το  $x$  για κάποιους

ανεξάρτητους λόγους. Στη δεύτερη, όμως, συνάρτηση το  $S$  δεν πρέπει να περιλαμβάνει αρνητικούς αριθμούς. Τα παραπάνω παραδείγματα είναι παραδείγματα αλγεβρικών συναρτήσεων, στις οποίες οι τιμές υπολογίζονται με αλγεβρικές πράξεις. Συνήθως γίνεται αναφορά στην τάξη των αλγεβρικών συναρτήσεων. Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις συναρτήσεις στη βάση ορισμένων ιδιοτήτων και μετά να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις μιας τάξης για να λύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιηθούν ορισμένες τάξεις συναρτήσεων, χρήσιμες για τις ανάγκες της διαδικασίας της παρεμβολής. Στην προσαρμογή των καμπύλων γραμμών και επιφανειών, οι επιθυμητές ιδιότητες είναι η συνέχεια και η ομαλότητα. Επομένως θα χρησιμοποιηθούν τάξεις συναρτήσεων που στηρίζονται σε αυτές τις ιδιότητες. Μια τάξη συναρτήσεων γενικά έχει ένα κοινό πεδίο ορισμού  $S$  και συνήθως χρειάζεται να λαμβάνονται υπόψη συγκεκριμένοι συνδυασμοί παρόμοιων συναρτήσεων.

Κατ' αρχήν εάν  $f$  και  $g$  είναι συναρτήσεις εντός του ίδιου πεδίου ορισμού  $S$ , τότε το άθροισμα δύο συναρτήσεων είναι επίσης μια συνάρτηση, που συμβολίζεται με  $f + g$  και η τιμή της για κάθε  $x \in S$  ορίζεται από τη σχέση:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Ορίζεται επίσης, το γινόμενο συναρτήσεων, που συμβολίζεται με  $fg$ , στο  $S$  και δίνεται από γινόμενο των τιμών των συναρτήσεων:

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ για κάθε } x \in S.$$

Τέλος, εάν  $a$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, ορίζεται μια συνάρτηση που συμβολίζεται με  $af$  στο  $S$  που ονομάζεται πολλαπλάσιο της  $f$ , και δίνεται από τη σχέση:

$$(af)(x) = a f(x), \text{ για κάθε } x \in S.$$

Όταν:  $a=2$ , το πολλαπλάσιο μιας συνάρτησης  $f$  ταυτίζεται με τη συνάρτηση άθροισμα:  $f + f$ , δηλαδή:

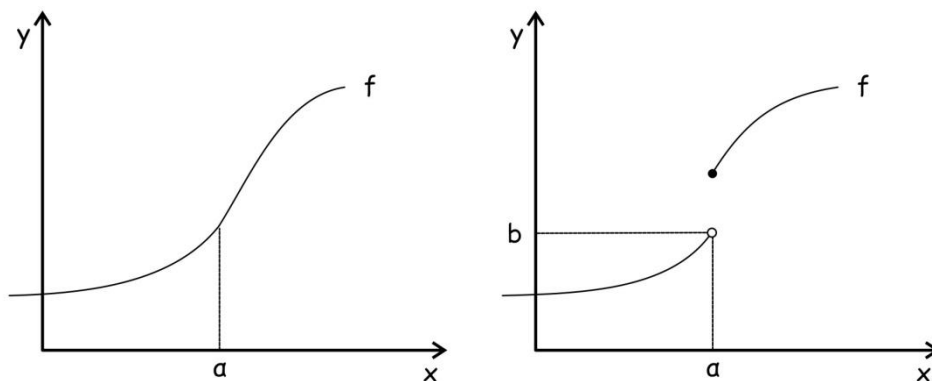
$$f + f = 2f.$$

### 6.3 Διαγράμματα και συνέχεια

Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αποδίδεται με ένα διάγραμμα, σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων,  $x$  και  $y$ . Το πεδίο ορισμού  $S$  της συνάρτησης αντιστοιχεί σε ένα σύνολο σημείων του άξονα των  $x$ . Το σύνολο όλων των σημείων  $(x, f(x))$  όταν το  $x$  μεταβάλλεται στο  $S$  αποτελεί τη γραφική παράσταση της  $f$ . Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, συνήθως, ομοιάζει με τη μορφή μιας καμπύλης. Για να είναι η γραφική παράσταση μια ομαλή καμπύλη, πρέπει το  $S$  να είναι ένα συνεχές διάστημα. Η ανάγκη προσδιορισμού της προσαρμογής μιας καμπύλης γραμμής προκύπτει όταν το  $S$  είναι ένα σύνολο διακριτών σημείων. Σχηματίζουμε ένα

διάστημα,  $T$ , το οποίο περιέχει το  $S$  και αναζητούμε μια αιτιοκρατική συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $T$ , η οποία να πλησιάζει με συγκεκριμένο τρόπο τα διακριτά δεδομένα, όταν  $x \in S$ . Μια κατάλληλη αιτιοκρατική συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής ή/και ομαλή και επίσης θα πρέπει να αποδίδει τα χαρακτηριστικά του χωρικού φαινομένου που αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα.

Όταν το πεδίο ορισμού είναι ένα συνεχές διάστημα, η έννοια της συνεχούς συνάρτησης έχει την αυστηρή μαθηματική σημασία. Η συνεχής συνάρτηση μπορεί να οριστεί ως εξής: Ας θεωρήσουμε ότι η  $f$  είναι μια συνάρτηση στο χώρο του  $S$  και  $a \in S$ . Τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $a$  εάν οι τιμές  $f(x)$  προσεγγίζουν την τιμή  $f(a)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  και από τις δυο πλευρές του  $a$ .



Εικόνα 6.1: Συνεχής και ασυνεχής συνάρτηση.

Στην Εικόνα 6.1 (αριστερά), η  $f$  είναι συνεχής στο  $a$ . Στην Εικόνα 6.1 (δεξιά) η  $f$  είναι ασυνεχής στο  $a$ , όπου, η τιμή  $f(a)$  αποδίδεται από τη συμπαγή κουκίδα και προσεγγίζεται από τις τιμές  $f(x)$  όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  από δεξιά. Έτσι, όταν το  $x$  προσεγγίζει το  $a$  από αριστερά, η  $f(x)$  προσεγγίζει την τιμή  $b \neq f(a)$ , καθώς, το  $b$  δεν είναι μια τιμή της  $f(x)$ .

Μια πιο ακριβής περιγραφή της συνέχειας δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός: Ας θεωρήσουμε ότι η  $f$  είναι μια συνάρτηση στο χώρο  $S$ , όπου  $S$  είναι ένα διάστημα. Η  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $a \in S$  εάν δοθεί οποιοσδήποτε αριθμός  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρός, τότε, υπάρχει ένας αριθμός  $\delta > 0$ , ο οποίος εξαρτάται από τον  $\varepsilon$ , τέτοιος ώστε όταν το  $x \in S$  και ικανοποιείται η σχέση:  $|x - a| < \delta$ , τότε η  $f(x)$  ικανοποιεί τη σχέση:  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Ας σημειωθεί ότι η απόλυτη τιμή  $|u - v|$  της διαφοράς των δυο αριθμών  $u$  και  $v$  είναι η απόστασή τους πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό, η απόσταση μεταξύ  $f(x)$  και  $f(a)$  είναι μικρότερη από το  $\varepsilon$ ,



όταν το  $x$  είναι πλησίον του  $a$ . Ο ορισμός αυτός, συχνά, γίνεται πιο συνοπτικός αν αξιοποιηθεί η έννοια του ορίου, δηλαδή:

Ορισμός: Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x$  εντός ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού  $S$  εάν το  $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$  υπάρχει και είναι ίσο με  $f(x)$ .

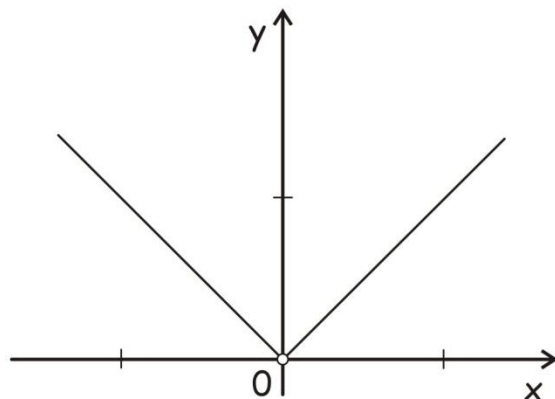
Εάν το  $x$  είναι ένα ακραίο σημείο του διαστήματος  $S$ , ο προηγούμενος ορισμός υπονοεί ότι το όριο λαμβάνεται υπόψη μόνον από τη μια πλευρά του διαστήματος. Έτσι, εάν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[a, b]$ , τότε τα όρια σε κάθε πλευρά, δηλαδή:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ , υπάρχουν και είναι ίσα με  $f(a)$  και  $f(b)$ , αντίστοιχα.

Για πρακτικούς λόγους, πρέπει να σημειωθεί ότι εμφανίζονται ασυνέχειες όταν συντρέχει ένας από τους δυο παρακάτω λόγους:

1. Όταν ο παρονομαστής ενός κλάσματος μηδενίζεται. Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x) = 1/x$  δεν ορίζεται στο σημείο  $x = 0$ . Δηλαδή, είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό.
2. Όταν η  $f$  ορίζεται με διαφορετικό τρόπο σε τμήματα του  $S$ . Για παράδειγμα: η συνάρτηση  $f(x) = 0$  όταν  $0 \leq x < 1$  και  $f(x) = 1$  όταν  $x = 1$ , είναι ασυνεχής στο σημείο  $x = 1$ .

Η τεχνική του ορισμού μιας συνάρτησης με διαφορετικό τρόπο σε τμήματα του πεδίου ορισμού της εφαρμόζεται με ευρύτητα στις διαδικασίες της παρεμβολής. Έτσι, ένα διάστημα υποδιαιρείται σε διακριτά υποδιαστήματα και σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα δημιουργείται, τμηματικά, διαφορετική συνάρτηση παρεμβολής. Σε κάθε υποδιάστημα, η συνάρτηση ορίζεται από μια σχέση που χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένους βαθμούς ελευθερίας, οπότε, εφαρμόζεται μια διαδικασία συνόρθωσης, ώστε, η συνολική συνάρτηση να είναι συνεχής στα σημεία σύνδεσης. Εάν  $f_1$  είναι μια συνάρτηση για το διάστημα  $S_1$  και  $f_2$  μια συνάρτηση για το διάστημα  $S_2$ , και επιπλέον, εάν  $a$  είναι το σημείο στο οποίο τα διαστήματα  $S_1$  και  $S_2$  συναντώνται, τότε, πρέπει να ισχύει:  $f_1(a) = f_2(a)$ , για να αποφεύγεται η ασυνέχεια στο σημείο αυτό.

**Εικόνα 6.2:** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |x|$ .



#### 6.4 Παράγωγοι και ομαλότητα

Το γεγονός ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής, δεν σημαίνει ότι είναι και ομαλή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών από τη σχέση:  $f(x)=|x|$ , ενώ είναι συνεχής δεν είναι ομαλή. Η συνάρτηση αυτή έχει τη γραφική παράσταση που απεικονίζεται στην Εικόνα 6.2. Πράγματι, είναι συνεχής για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$ , αλλά, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ομαλή στο σημείο  $\alpha=0$ . Η μαθηματική έννοια της ομαλότητας συσχετίζεται την έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης, όπως και της παραγώγου δεύτερης τάξης ή και μεγαλύτερων τάξεων.

Ας θεωρήσουμε ότι το  $x$  είναι ένας αριθμός (σημείο) στο διάστημα  $S$ , το πεδίο ορισμού της  $f$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f$  δεν παρουσιάζει αιχμή στη συντεταγμένη (θέση)  $x$ , καθώς επίσης, είναι συνεχής στο  $x$ , τότε, μπορεί να σχεδιασθεί η ενιαία (και από τις δύο πλευρές) εφαπτομένη στη θέση αυτή και να υπολογισθεί η κλίση της. Η κλίση εξαρτάται από τη θέση  $x$ , επομένως είναι συνάρτηση του  $x$ , ονομάζεται παράγωγος της συνάρτησης  $f$  και συμβολίζεται  $f'$ . Αφού η παράγωγος  $f'$  είναι συνάρτηση, μπορεί και αυτή με τη σειρά της να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια. Η παράγωγος  $f'$  θα είναι συνεχής, μόνον αν έχει παράγωγο (τη δεύτερη παράγωγο της  $f$ ) σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, η οποία βέβαια θα είναι η κλίση της εφαπτομένης της  $f'$ .

Στα μαθηματικά, οι ομαλές καμπύλες ορίζονται από συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το διάστημα του πεδίου ορισμού τους. Εξετάζοντας μια συνάρτηση ως προς το ρυθμό μεταβολής της, η παράγωγος συνάρτηση  $f'$  εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της  $f$  και η  $f''$  το ρυθμό μεταβολής της  $f'$ . Ισχύει επίσης, ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα εκεί που η κλίση της εφαπτομένης είναι θετική, φθίνουσα εκεί όπου η κλίση της εφαπτομένης είναι αρνητική και παραμένει αμετάβλητη όταν η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με το μηδέν.

Η καμπυλότητα μιας γραμμής είναι μεγάλη σε σημεία, που η διεύθυνση της εφαπτομένης της γραμμής πλησιάζοντας στα σημεία αυτά μεταβάλλεται με έντονο ρυθμό, ενώ, η καμπυλότητα είναι μικρή σε σημεία, που η διεύθυνση της εφαπτομένης της γραμμής πλησιάζοντας στα σημεία αυτά μεταβάλλεται με χαμηλό ρυθμό. Τέλος, η καμπυλότητα είναι μηδέν εάν η γραφική παράσταση της γραμμής είναι ευθεία γραμμή.

#### 6.5 Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Στη μελέτη της προσαρμογής καμπύλων και επιφανειών, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις κατέχουν μια ιδιαίτερα σημαντική θέση, γιατί η εφαρμογή τους μειώνει σημαντικά τους υπολογισμούς. Θεωρώντας γνωστή από τα μαθηματικά τη θεωρία που υποστηρίζει τους υπολογισμούς των πολυωνυμικών συναρτήσεων, στη συνέχεια της ενότητας αναλύονται ορισμένες ιδιότητες που διευκολύνουν το σχεδιασμό αλλά και την ερμηνεία των γραφικών τους παραστάσεων.

1. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου πρώτου βαθμού είναι ευθεία γραμμή. Οι

γραφικές παραστάσεις πολυωνύμων μηδενικού βαθμού είναι ευθείες γραμμές, παράλληλες προς τον άξονα  $x$ .

2. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου δευτέρου βαθμού είναι μια παραβολή η οποία έχει ως άξονα συμμετρίας ευθεία παράλληλη με τον άξονα  $y$ . Αν το πολυώνυμο είναι θετικό, η παραβολή είναι ανοικτή προς τα  $+y$ , ενώ, αν το πολυώνυμο είναι αρνητικό, τότε, η παραβολή είναι ανοικτή προς τα  $-y$ .
3. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνύμου βαθμού  $N$  τέμνει τον άξονα  $x$  το πολύ  $N$  φορές.
4. Ένα πολυώνυμο βαθμού  $N$  συμπεριφέρεται σε μεγάλο βαθμό ανάλογα με τον όρο  $a_n x^N$  όταν το  $x$  λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές (θετικές ή αρνητικές). Επομένως, η τιμή των πολυωνύμων γίνεται πολύ μεγάλη, όταν το  $x$  έχει πολύ μεγάλη τιμή (θετική ή αρνητική).
5. Ένα πολυώνυμο  $p(x)$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο  $x=c$  μόνον εάν το  $p(x)$  έχει μηδενικό συντελεστή περιττής τάξης στο  $c$ . Αν το πολυώνυμο  $p(x)$  διαθέτει συντελεστή της μορφής  $(x-c)$ , τότε, η γραφική παράσταση του  $p(x)$  έχει οριζόντια εφαπτομένη στη θέση  $x=c$ , μόνον εάν το  $c$  είναι μηδενικό πολλαπλάσιο του  $p(x)$ .

## 6.6 Προσαρμογή καμπύλων με πολυώνυμα

### 6.6.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Η πιο πρωτογενής και σημαντική κατηγορία συναρτήσεων για τις ανάγκες της προσαρμογής καμπύλων γραμμών είναι αναμφισβήτητα η κατηγορία των πολυωνυμιακών συναρτήσεων. Επιπλέον, η πιο στοιχειώδης προσπάθεια προσαρμογής καμπυλών γίνεται με τη βοήθεια της διαδικασίας της παρεμβολής.

Στις διάφορες εφαρμογές, πολύ συχνά αντιμετωπίζουμε σύνολα δεδομένων, στα οποία προσαρμόζουμε μια συνάρτηση, η οποία συμπληρώνει τα κενά μεταξύ των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να διαθέτουμε ένα σύνολο τιμών, για παράδειγμα, τιμές υψομέτρων σε ορισμένα σημεία μιας περιοχής, ή κλίσεις στα ίδια ή σε άλλα σημεία και να ζητείται να βρεθεί η «συνάρτηση» που «προσαρμόζεται» σε αυτά τα δεδομένα. Το πρόβλημα, όμως, δεν έχει διατυπωθεί με πληρότητα, καθώς δεν έχει ορισθεί, αφενός, η σημασία του όρου «προσαρμόζεται», αφετέρου, γιατί ακόμα και αν γίνει αυτό, τότε η «συνάρτηση» πιθανόν να μην είναι μοναδική. Για να γίνει συγκεκριμένο το πρόβλημα θα πρέπει:

1. να ορισθεί η έννοια της προσαρμογής και
2. να ορισθεί το είδος της συνάρτησης που θα χρησιμοποιηθεί για την προσαρμογή.

Στην περίπτωση της πολυωνυμικής παρεμβολής, τα δεδομένα αποτελούνται από τις διακριτές τιμές του  $x$  και τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης  $f$ , που μπορούν να

συμβολιστούν ως:

$$\{x_0, x_1, \dots, x_N\}, \{f_0, f_1, \dots, f_N\}.$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η προσαρμογή τελεί υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση  $f(x)$ , που εφαρμόζεται, παρεμβάλλεται. Δηλαδή, πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  πρέπει να διέρχεται από τα σημεία  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  στο επίπεδο  $xy$ . Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την προϋπόθεση είναι πολυώνυμα βαθμού  $N$  ή μικρότερου. Ας επικαλεστούμε εδώ ένα θεώρημα που αφορά τα πολυώνυμα, σύμφωνα με το οποίο:

Θεώρημα: Εάν  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  είναι ένα σύνολο  $N+1$  διακριτών τιμών, τότε, για οποιοδήποτε σύνολο τιμών  $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$  υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο βαθμού  $N$ , για παράδειγμα, το  $p(x)$  τέτοιο ώστε: το  $p(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , του οποίου η γραφική παράσταση περνά από τα  $N+1$  διακριτά σημεία  $(x_i, f_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Ας σημειωθεί ότι το πολυώνυμο θα είναι βαθμού  $N$  ή μικρότερου, επομένως, εάν τα  $N+1$  σημεία των δεδομένων κείνται επάνω σε μία ευθεία γραμμή, το πολυώνυμο θα έχει τη μορφή:

$$p(x) = 0x^N + 0x^{N-1} + \dots + 0x^2 + a_1x + a_0, \quad \text{όπου: οι συντελεστές } a_1 \text{ και } a_0 \text{ θα έχουν κατάλληλες τιμές.}$$

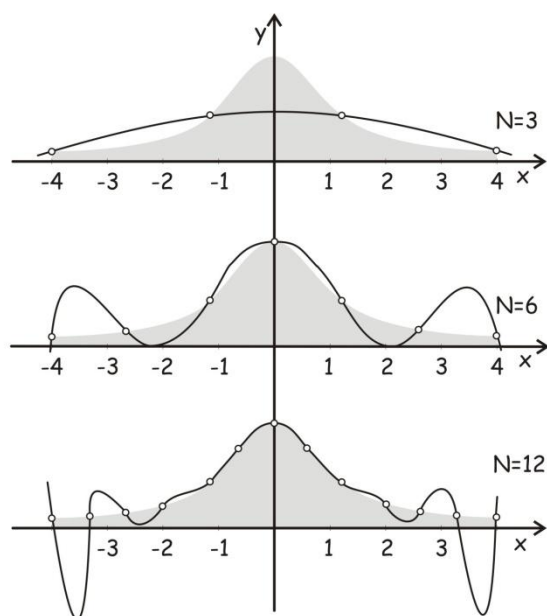
Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το γενικό πολυώνυμο  $N$ -οστού βαθμού περιέχει  $N+1$  σταθερές που πρέπει να βρεθούν, και σύμφωνα με το θεώρημα, που διατυπώθηκε παραπάνω, οι  $N+1$  συνθήκες παρεμβολής τις προσδιορίζουν μοναδικά.

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη γεωμετρικά απλή περίπτωση που διαθέτουμε ως δεδομένα δυο σημεία στα οποία μετρήσαμε τις τιμές ενός χωρικού φαινομένου. Αν ισχύει:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $f_0 = 1$  και  $f_1 = 3$ , επειδή διαθέτουμε δυο διακριτά σημεία (δηλαδή:  $N+1=2$ ), τότε για το  $N$  θα ισχύει:  $N=1$ , επομένως, θα υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού το οποίο θα παρεμβάλλεται στα δεδομένα. Αν το πολυώνυμο αυτό είναι το  $p(x) = a_1x + a_0$ , τότε, σύμφωνα με τις συνθήκες παρεμβολής θα ισχύουν οι δυο εξισώσεις:  $a_0 = 1$  και  $a_1 + a_0 = 3$ , οπότε προκύπτει:

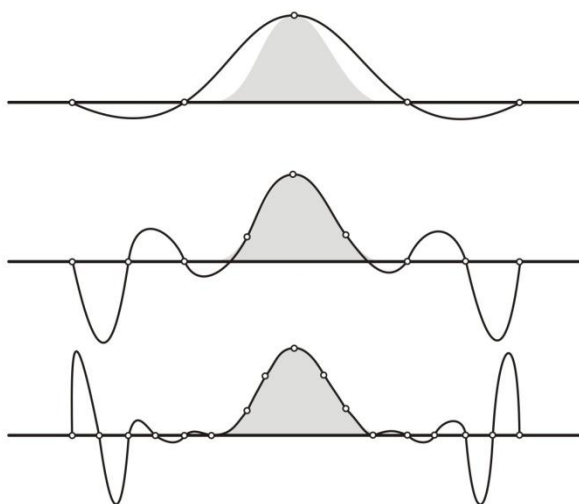
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \quad \text{και} \quad p(x) = 2x + 1.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τους πολυωνυμικούς τελεστές παρεμβολής ως προσεγγίσεις της συνάρτησης που ορίζεται από τη σχέση  $f(x) = 1/(1+x^2)$  στο διάστημα  $[-4, 4]$ . Για  $N=3, 6, 12, \dots$  επιλέγουμε τις  $N+1$  τετμημένες  $x_i$  να είναι ισαπέχοντα σημεία επάνω στο διάστημα  $[-4, 4]$ , με  $x_0 = -4$  και  $x_N = 4$ . Τότε για κάθε  $x_i$  προκύπτουν οι τιμές της συνάρτησης  $f_i = 1/(1+x_i^2)$ . Οι τελεστές παρεμβολής των πολυωνύμων που προκύπτουν, βαθμού 3, 6, και 12 απεικονίζονται στην Εικόνα 6.3. Παρατηρώντας τις γραφικές

παραστάσεις των πολυωνυμικών τελεστών παρεμβολής στην Εικόνα 6.3, όταν ο βαθμός ( $N$ ) του πολυωνύμου αυξάνει, η προσέγγιση πλησιάζει στα δεδομένα στο κέντρο του διαστήματος, ενώ, αποκλίνει στα άκρα του.



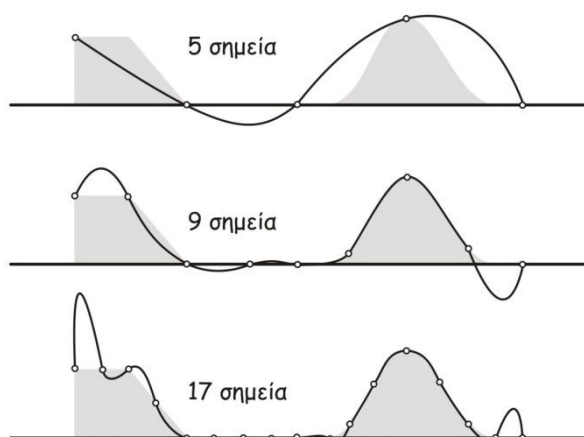
**Εικόνα 6.3:** Πολυωνυμική παρεμβολή.



**Εικόνα 6.4:** Πολυωνυμική παρεμβολή «μιμούμενη» υψώματα.

Ας δούμε τώρα, μέσα από παραδείγματα, τη σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων προσαρμογής καμπύλων. Τα δεδομένα των παραδειγμάτων προσαρμογής καμπύλων γραμμών αποτελούν δείγματα που προέρχονται από συναρτήσεις, οι οποίες

μπορούν να θεωρηθούν ότι «μιμούνται» υψώματα και κοιλάδες ή συνεχή υψώματα. Στην Εικόνα 6.4, απεικονίζονται οι τελεστές παρεμβολής πολυωνύμων που «μιμούνται» υψώματα, βαθμών: 4, 8 και 16 όταν οι τετμημένες είναι ισαπέχουσες. Η ίδια ακριβώς διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και όταν οι τετμημένες δεν ισαπέχουν, αλλά, βρίσκονται σε τυχαίες θέσεις. Η άνιση κατανομή των τετμημένων (σε τυχαίες θέσεις) αποτελεί αντιπροσωπευτική περίπτωση πολλών πρακτικών εφαρμογών.



**Εικόνα 6.5:** Πολυωνυμική παρεμβολή «μιμούμενη» συνεχή υψώματα και κοιλάματα.

Στην Εικόνα 6.5 για τις ίδιες τετμημένες (ισαπέχουσες) απεικονίζονται οι τελεστές «μιμούμενοι» υψώματα και κοιλάδες.

### 6.6.2 Υπολογισμός πολυωνυμικών τελεστών παρεμβολής

Ο πιο κλασικός τρόπος προσδιορισμού της τιμής των τελεστών παρεμβολής ενός πολυωνύμου  $p(x)$  για μια αυθαίρετη τιμή του  $x$ , είναι να βρεθούν οι συντελεστές του:  $a_0, a_1, \dots, a_N$ . Για να προσδιοριστούν οι συντελεστές του  $p(x)$  έχουμε  $N+1$  συνθήκες:  $p(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, N$ , οι οποίες εκφράζονται ως ακολούθως:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_N x_0^N = f_0,$$

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_N x_1^N = f_1,$$

...

$$a_0 + a_1 x_N + a_2 x_N^2 + \dots + a_N x_N^N = f_N.$$

Το σύνολο των παραπάνω εξισώσεων αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους συντελεστές:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$  του πολυωνύμου  $p(x)$ . Ένας κλασικός τρόπος συμβολισμού του παραπάνω συστήματος μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας το φορμαλισμό των πινάκων. Ορίζουμε, λοιπόν, τον πίνακα  $V$  καθώς και τα διανύσματα  $a$  και  $f$  ως ακολούθως:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^N \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^N \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Τότε, το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων μπορεί να γραφεί με συντομία ως:  $\mathbf{V} \mathbf{a} = \mathbf{f}$ , όπου ο πίνακας  $\mathbf{V}$  και το διάνυσμα  $\mathbf{f}$ , είναι γνωστά και το διάνυσμα  $\mathbf{a}$  οι άγνωστοι.

Η διαδικασία υπολογισμού είναι γνωστή. Το γεγονός ότι οι τετμημένες είναι διακριτές σημαίνει ότι ο αντίστροφος πίνακας:  $\mathbf{V}^{-1}$  υπάρχει και υπάρχει μια μοναδική λύση των εξισώσεων, που μπορεί να γραφεί ως:  $\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{f}$ . Ας σημειωθεί ότι όταν οι τετμημένες είναι πολύ κοντά, τότε, οι τελεστές παρεμβολής, ακόμα και αν υπολογιστούν με ακρίβεια, θα είναι πολύ ευαίσθητοι σε σφάλματα ως προς αντίστοιχες τιμές των  $f_i$ .

Επομένως, αν και θεωρητικά είναι σημαντική, η τυπική διαδικασία εκτίμησης του πολυωνύμου  $p$  δεν είναι κατάλληλη για μεγάλης κλίμακας υπολογισμούς. Η μέθοδος παρεμβολής του Langrange εκτός από το ότι έχει και θεωρητικό ενδιαφέρον, είναι και υπολογιστικά πιο αποτελεσματική. Βέβαια, με αυστηρά κριτήρια ακόμα και αυτή η μέθοδος δεν είναι η καλύτερη και η λύση δίνεται, συνήθως, με την εφαρμογή κατάλληλων αλγορίθμων.

### 6.6.3 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η έννοια της προσαρμογής μιας καμπύλης, στην οποία στηρίζονται τα όσα αναφέρονται σε αυτό το κεφάλαιο, βασίζονται στη διαδικασία της παρεμβολής. Ακολούθως, θα εξεταστεί μια διαφορετική αντιμετώπιση του ίδιου προβλήματος, που είναι αποτελεσματική για την προσαρμογή καμπύλων γραμμών. Τα δεδομένα αποτελούνται από  $N+1$  διακριτές τετμημένες:  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , στις οποίες αντιστοιχούν οι τεταγμένες:  $f_0, f_1, \dots, f_N$ . Οι συναρτήσεις που δεχόμαστε για να εφαρμόσουμε την προσαρμογή είναι οι:  $P_m$ , όπου:  $m \leq N$ . Θεωρούμε μια τυπική συνάρτηση  $p \in P_m$  και την ονομάζουμε απόκλιση της  $p$  από τα δεδομένα στα  $x_i$ , η οποία ορίζεται ως η διαφορά:  $p(x_i) - f_i$ . Εάν μια συνάρτηση παρεμβαλλόταν στα δεδομένα, τότε η απόκλιση σε κάθε θέση των δεδομένων θα ήταν μηδέν. Για να χρησιμοποιήσουμε μια απλή συνάρτηση  $p$ , ας γίνει, για παράδειγμα, η παραδοχή ότι οι αποκλίσεις είναι μη μηδενικές και ότι το  $m$  είναι πολύ μικρότερο του  $N$ .

Για κάθε  $p \in P_m$  θεωρούμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων:

$$E(p) = \sum_{i=0}^N (p(x_i) - f_i)^2 .$$

Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων  $E(p)$  ομοιάζει ως συμβολισμός με την αναπαράσταση των τιμών μιας συνάρτησης, αλλά όπως χρησιμοποιείται εδώ συμβολίζει την ίδια τη συνάρτηση, και όχι ένα σημείο κάποιου πεδίου ορισμού του διαστήματος  $S$ .

Η ιδέα της προσαρμογής τώρα μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Ζητείται να βρεθεί ένα πολυώνυμο  $p \in P_m$ , για το οποίο η συνάρτηση  $E$  ελαχιστοποιείται. Το πολυώνυμο  $p$  θα ορίζεται από  $m+1$  συντελεστές:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ . Η συνάρτηση  $E$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση των  $m+1$  συντελεστών του πολυωνύμου  $p$ . Για να διαμορφωθούν οι συνθήκες ελαχιστοποίησης της συνάρτησης  $E$ , χρειάζεται να εφαρμοστεί λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Η μέθοδος προσαρμογής ονομάζεται μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι απαραίτητες συνθήκες αναφέρονται στις μερικές παραγώγους  $\partial E / \partial a_i$  για  $i=0, 1, 2, \dots, m$ . Επειδή η συνάρτηση  $E$  θεωρείται συνάρτηση των  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ , από τις παράγωγες συνθήκες θα προκύψουν  $m+1$  εξισώσεις για τους  $m+1$  συντελεστές. Ας επιχειρήσουμε να διαμορφώσουμε τις εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψη ότι  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$ , για  $j=0, 1, 2, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^N 2(p(x_i) - f_i) \frac{\partial p(x_i)}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=0}^N x_i^j (p(x_i) - f_i) \\ &= 2 \left( \sum_{i=0}^N x_i^j (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m) - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right) \\ &= 2 \left( \left( \sum_{i=0}^N x_i^j \right) a_0 + \left( \sum_{i=0}^N x_i^{j+1} \right) a_1 + \left( \sum_{i=0}^N x_i^{j+2} \right) a_2 + \dots + \left( \sum_{i=0}^N x_i^{j+m} \right) a_m - \sum_{i=0}^N x_i^j f_i \right). \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές ως προς τα:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  και οι συντελεστές προσδιορίζονται με τη βοήθεια των δεδομένων. Θεωρώντας ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $a$ , ισχύει:  $a^0=1$ , οι εξισώσεις λαμβάνουν την ακόλουθη τη μορφή:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^N x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^m &= \sum_{i=0}^N f_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^N x_i + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^N x_i f_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^N x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} &= \sum_{i=0}^N x_i^2 f_i, \\ \dots & \end{aligned}$$



$$a_0 \sum_{i=0}^N x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^N x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^N x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^N x_i^{2m} = \sum_{i=0}^N x_i^m f_i.$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως κανονικές εξισώσεις. Το αλγεβρικό αυτό σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχει πάντα μοναδική λύση, η οποία και ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση  $E(p)$ .

Θεώρημα: Εάν  $x_0, x_1, \dots, x_N$  είναι ένα σύνολο  $N+1$  διακριτών σημείων και  $m \leq N$ , τότε υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο  $p(x) \in P_m$  για το οποίο η συνάρτηση  $E(p)$  ελαχιστοποιείται και οι συντελεστές αυτού του πολυωνύμου δίδονται από τη λύση των κανονικών εξισώσεων.

Όταν  $m=N$ , ο αριθμός των συντελεστών είναι ίσος με τον αριθμό των δεδομένων σημείων και η ελάχιστη τιμή του  $E(p)$  είναι ίση με το μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το πολυώνυμο της ελαχιστοποίησης ταυτίζεται με τον πολυωνυμικό τελεστή παρεμβολής που προέρχεται από το  $P_N$  για το οποίο κάθε απόκλιση  $E(p)$  είναι ίση με μηδέν.

#### 6.6.4 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων

Ας θεωρήσουμε την προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής ( $m=1$ ) στα δεδομένα του Πίνακα 6.1, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε  $N=6$ ,  $\sum x_i=42$ ,  $\sum f_i=59,66$ ,  $\sum x_i^2=364$  και  $\sum x_i f_i=448,42$ . Οι κανονικές εξισώσεις θα είναι:

$$6a_0 + 42a_1 = 59,66 \text{ και}$$

$$42a_0 + 364a_1 = 448,42,$$

που δίνουν:

$$a_0 = 6,683 \text{ και } a_1 = 0,4400.$$

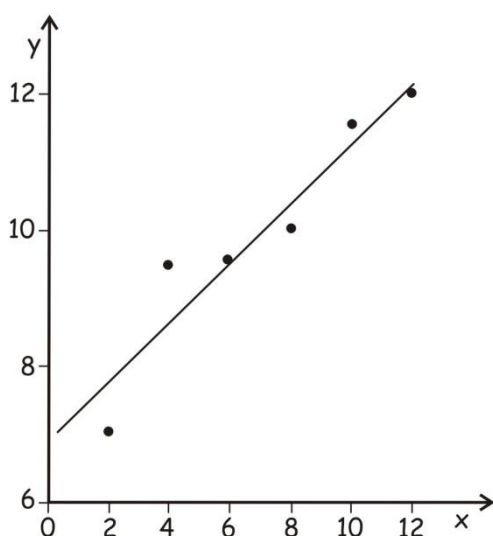
Η ευθεία γραμμή που ικανοποιεί τη συνθήκη των ελαχίστων τετραγώνων εκφράζεται από τη σχέση:

$$p(x) = 0,4400x + 6,683.$$

**Πίνακας 6.1** Δεδομένα παραδείγματος.

$i$	$x_i$	$f_i$
0	2	6,91
1	4	9,62
2	6	9,74
3	8	10,01
4	10	11,48
5	12	11,90

Στην Εικόνα 6.6 απεικονίζεται η ευθεία που προσδιορίστηκε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.



**Εικόνα 6.6:** Προσαρμογή ευθείας με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

### 6.7 Εξομάλυνση ή προσδιορισμός επιφάνειας τάσης

Η έννοια της εξομάλυνσης στηρίζεται σε υφιστάμενες σχέσεις μεταξύ τετμημένων και τεταγμένων, που οφείλονται σε συγκεκριμένες ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι εμφανείς από τα δεδομένα, λόγω της ύπαρξης σφαλμάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν στοιχεία για ένα χωρικό φαινόμενο που να αποδεικνύουν την ύπαρξη μιας πολύ μικρής κλίσης κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$ , ενώ η παρεμβολή στα υφιστάμενα δεδομένα να αποδίδει μια ακανόνιστη κλίση και επομένως να μην είναι αποδεκτή για την απόδοση του συγκεκριμένου χωρικού φαινομένου. Για να απεικονισθεί ορθά η κλίση, πιθανά να απαιτείται να γίνει εξομάλυνση των δεδομένων. Η διαδικασία της εξομάλυνσης μπορεί να βασίζεται σε μια εμπειρική διαδικασία ή να προτιμηθεί η εφαρμογή συγκεκριμένου θεωρητικού μαθηματικού μοντέλου, όπως είναι η μαθηματική διαδικασία της ολοκλήρωσης. Το θεωρητικό μαθηματικό υπόβαθρο συνήθως βασίζεται σε συγκεκριμένη υπόθεση που ικανοποιείται από τη προσομοίωση του φαινομένου και συγχρόνως παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της. Σε πολλές από τις εφαρμογές για λόγους απλοποίησης γίνεται η υπόθεση ότι οι τετμημένες:  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , ισαπέχουν.

Η έννοια του προσδιορισμού της επιφάνειας τάσης ενός χωρικού φαινομένου διαφοροποιείται από την εξομάλυνση, παρόλο που η ακολουθούμενη διαδικασία της αριθμητικής εφαρμογής της συνήθως καταλήγει στην επίλυση ενός συστήματος κανονικών εξισώσεων. Στην περίπτωση του προσδιορισμού της επιφάνειας τάσης, τα δεδομένα δεν αντιμετωπίζονται με τρόπο που να υποθέτει ότι εμπεριέχουν σφάλματα, αλλά οι συντεταγμένες εκφράζονται από το άθροισμα δυο συνιστωσών. Η πρώτη συνιστώσα, η οποία μεταβάλλεται λιγότερο με την ανεξάρτητη μεταβλητή, περιγράφεται ως τάση του χωρικού φαινομένου και η δεύτερη ως το υπόλοιπο ή η απόκλιση από την τάση.

Η θεώρηση των συντεταγμένων ως άθροισμα δυο συνιστωσών διευκολύνει τη διαδικασία προσομοίωσης του χωρικού φαινομένου, γιατί κάθε συνιστώσα μπορεί να είναι το αποτέλεσμα ανεξάρτητης φυσικής διαδικασίας ή κλίμακας. Επιπλέον, η θεώρηση αυτή διευκολύνει τη διαδικασία αριθμητικής εφαρμογής της μεθόδου. Για παράδειγμα, ο εντοπισμός και η απαλοιφή μιας τάσης μπορεί να υλοποιηθούν ταυτόχρονα στην υπολογιστική διαδικασία, χρησιμοποιώντας ως υπόλοιπο μια συγκεκριμένη ιδιότητα του χωρικού φαινομένου. Τέλος, αναφερόμενοι στη διαδικασία ανάλυσης των συχνοτήτων, η μέθοδος αυτή είναι κατάλληλη για την απαλοιφή ανεπιθύμητων συνιστωσών.

### 6.7 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου Α.Μ., 1999, *Θεωρία σφαλμάτων και συνορθώσεις Ι*. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Lancaster P. & K. Salkauskas, 1986, *Curve and Surface Fitting. An Introduction*. London: Academic Press.
- Mikhail F.M. & F. Ackermann, 1976, *Observations and Least Squares*. New York: T.Y. Crowell.

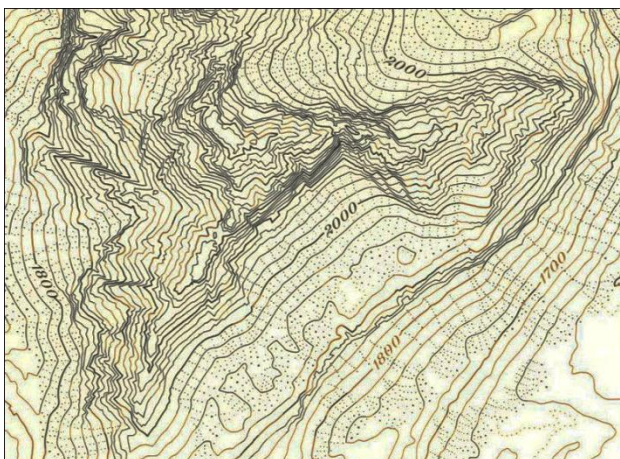


## Κεφάλαιο 7

### 7. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΦΩΤΟΣΚΙΑΣΗΣ ΑΝΑΓΛΥΦΟΥ

#### 7.1 Εισαγωγή

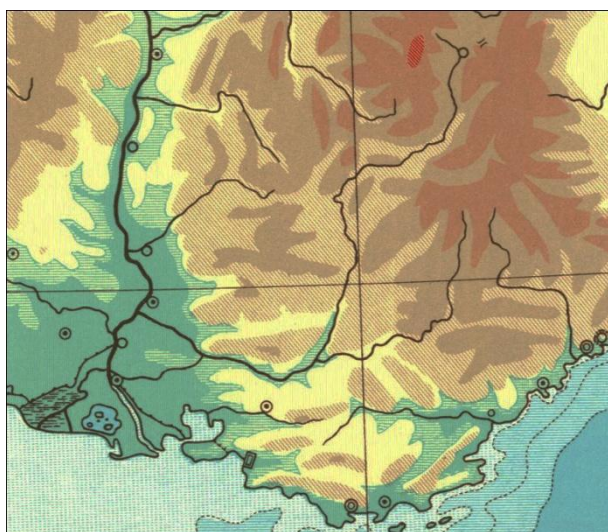
Η απεικόνιση του ανάγλυφου μιας γεωγραφικής περιοχής αποτελεί μια από τις σημαντικές διαδικασίες της χαρτογραφικής σύνθεσης. Τα κύρια χαρακτηριστικά του ανάγλυφου, δηλαδή ο τρισδιάστατος χαρακτήρας των δεδομένων που το αποδίδουν και ο χαρακτήρας της συνέχειάς του στο γεωγραφικό χώρο, καθιστούν την απεικόνισή του μια από τις δυσκολότερες χαρτογραφικές διαδικασίες. Λόγω του ότι η απεικόνιση του ανάγλυφου καλύπτει κατ' ανάγκη ολόκληρη την έκταση της χαρτογραφούμενης περιοχής διαπιστώνεται ότι λειτουργεί ουσιαστικά ως υπόβαθρο του χάρτη. Δηλαδή, η απεικόνιση του ανάγλυφου αλληλεπιδρά με τα σύμβολα των υπολοίπων πληροφοριών του χάρτη και θα πρέπει πάντα να εξασφαλίζεται μια ποιοτική και ευανάγνωστη γραφική σύνθεση.



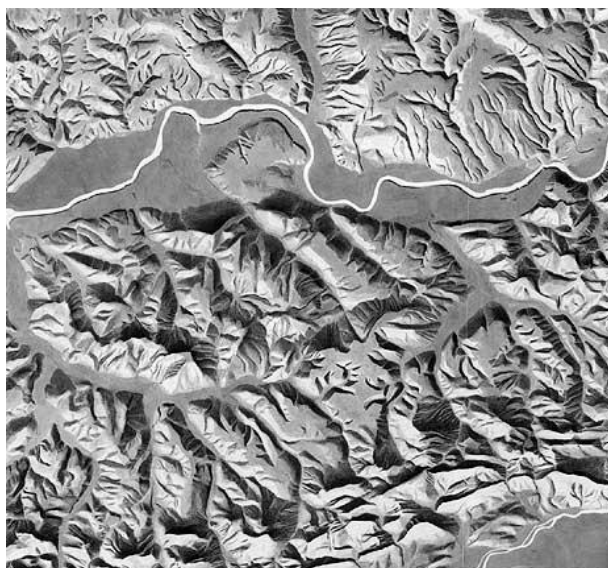
**Εικόνα 7.1:** Απεικόνιση του ανάγλυφου με ισοψείς καμπύλες.

Οι δύο συνηθέστερες μέθοδοι αναπαράστασης του ανάγλυφου στους χάρτες είναι οι ισοψείς καμπύλες και η χρωματική απόδοση διακριτών υψομετρικών ζωνών. Με την πρώτη μέθοδο αποδίδεται με ακρίβεια η μορφολογία του ανάγλυφου και

εξασφαλίζεται η συνέχεια του χαρακτήρα του (Εικόνα 7.1). Ενώ με τη δεύτερη μέθοδο επιδιώκεται μια αποτελεσματικότερη προσέγγιση του χρήστη με το χάρτη όσο αφορά την αναπαράσταση του ανάγλυφου, αφού στη χρωματική κλίμακα χρησιμοποιούνται αποχρώσεις του εδάφους ή του πυθμένα των θαλασσών, ανάλογα, με την τιμή του υψομέτρου ή του βάθους, αντίστοιχα (Εικόνα 7.2). Βέβαια, η χρήση και καθιέρωση και των δύο αυτών μεθόδων έγινε δυνατή με τη βελτίωση των τεχνικών αποτύπωσης του χώρου και την εξέλιξη των δυνατοτήτων των μέσων απόδοσης.



**Εικόνα 7.2:** Απεικόνιση του ανάγλυφου με υψομετρικές ζώνες.

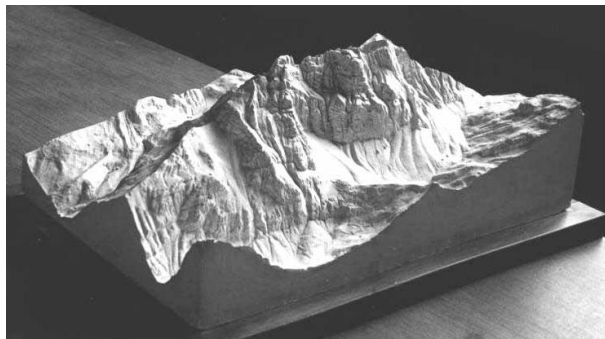


**Εικόνα 7.3:** Απεικόνιση του ανάγλυφου με φωτοσκίαση.



**Εικόνα 7.4:** Απεικόνιση του ανάγλυφου με γραμμοσκίαση.

Η απεικόνιση της φωτοσκίασης του ανάγλυφου (hill shading) (Εικόνα 7.3) είναι μια πολύ παλιά μέθοδος απόδοσης του ανάγλυφου που στην πρωταρχική της μορφή εφαρμόστηκε δια μέσου της γραφικής τεχνικής της γραμμοσκίασης (Εικόνα 7.4). Βασίζεται στην προσπάθεια προσομοίωσης του φυσικού οπτικού αποτελέσματος, της επίδρασης ενός ιδεατού φωτισμού στην επιφάνεια ενός τρισδιάστατου αναλογικού μοντέλου του εδάφους της απεικονιζόμενης περιοχής (Εικόνα 7.5).



**Εικόνα 7.5:** Τρισδιάστατο αναλογικό μοντέλο της επιφάνειας του ανάγλυφου.

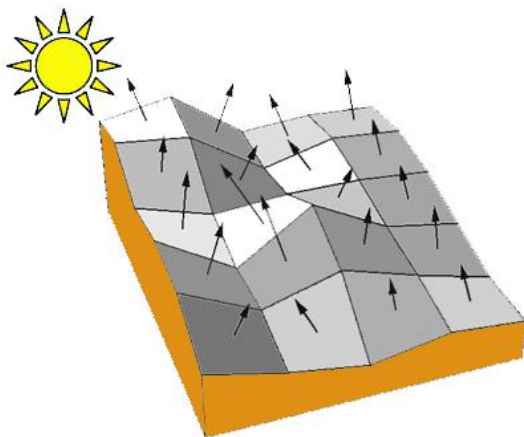
Με τη χρήση της μεθόδου αυτής επιδιώκεται η άμεση και εύληπτη αντίληψη των μορφολογικών σχηματισμών του ανάγλυφου, ακόμα και από μη ειδικευμένους με το αντικείμενο χρήστες χαρτών. Είναι ιδιαίτερα πλεονεκτική και αποτελεσματική όταν απαιτείται μια γρήγορη και εποπτική κατανόηση της τοπογραφίας της περιοχής, ενώ παρέχει μεγαλύτερες δυνατότητες στην επάλληλη απεικόνιση και άλλων πληροφοριών, ακόμα και σε θεματικούς χάρτες που καλύπτονται καθολικά με επιφανειακούς συμβολισμούς. Ένας λόγος που φέρνει τη μέθοδο αυτή ξανά στο προσκήνιο είναι οι ευκολίες που παρέχουν οι σύγχρονες ψηφιακές τεχνολογίες, με κυριότερη τη δυνατότητα του αντικειμενικού αναλυτικού υπολογισμού της εικόνας της σκίασης του ανάγλυφου μιας περιοχής.



Στην ενότητα αυτή περιγράφονται αρχικά οι θεωρητικές αρχές του προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου, ξεκινώντας από τις σχέσεις της τρισδιάστατης γεωμετρίας και της οπτικής που περιγράφουν το πραγματικό-φυσικό φαινόμενο και περιγράφουν τις απαραίτητες απλουστεύσεις για την αναπαράσταση της σκιάς σε ψηφιακούς χάρτες. Στη συνέχεια, περιγράφονται ορισμένοι από τους αντιπροσωπευτικότερους αλγόριθμους αναλυτικού προσδιορισμού της σκιάς του ανάγλυφου καθώς επίσης και αυτοί που περιλαμβάνονται σε ολοκληρωμένα χαρτογραφικά πακέτα λογισμικού. Εξετάζονται οι παράμετροι των αλγορίθμων (κλίση και γωνία διεύθυνσης φωτεινής πηγής) και η επίδρασή τους στο αποτέλεσμα της εικόνας της φωτοσκίασης. Για διευκόλυνση της κατανόησης των αλγορίθμων παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής τους στην ίδια περιοχή. Επιπλέον, παρουσιάζονται παραδείγματα εφαρμογής των αλγορίθμων εξετάζοντας τη συνδυασμένη απεικόνιση της σκιάς του ανάγλυφου μαζί με την απόδοση άλλων πληροφοριών σε αντιπροσωπευτικές χαρτοσυνθέσεις.

## 7.2 Βασικές αρχές απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου

Οι σκίες που απεικονίζονται στο χάρτη λόγω του ανάγλυφου μιας περιοχής αποτελούν τονικές παραλλαγές που οφείλονται στην επίδραση ενός ιδεατού φωτός (Εικόνα 7.6). Το φως που υποθετικά αντανακλάται στην επιφάνεια του ανάγλυφου μεταβάλλεται κατά ένα ποσοστό που ποικίλει, από μηδενική αντανάκλαση ως 100% (καθολική), ανάλογα με τον προσανατολισμό της επιφάνειας του εδάφους, τη διεύθυνση του ιδεατού φωτός, αλλά, και το μοντέλο φωτισμού που έχει υιοθετηθεί. Το τελικά καταγραφόμενο ποσοστό φωτεινότητας περιγράφεται από το μέγεθος της φαινόμενης λαμπρότητας ή ανακλαστικότητας που συμβολίζεται με  $R$ .



**Εικόνα 7.6:** Αρχή δημιουργίας των σκιών λόγω ανάγλυφου.

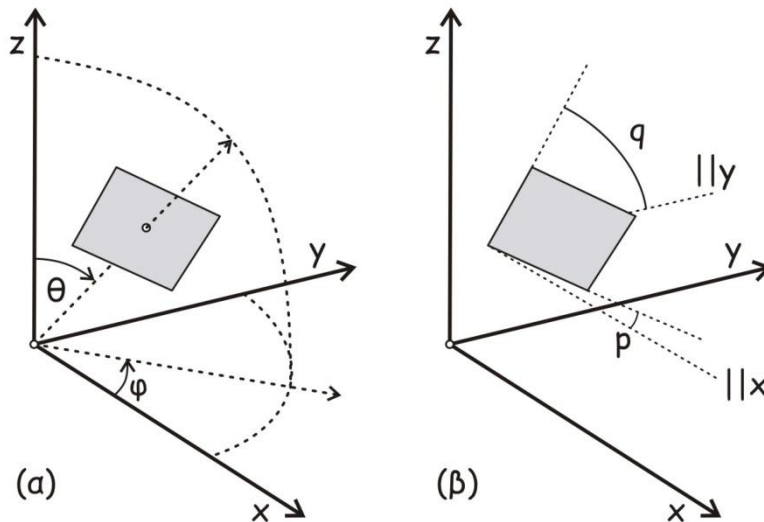
Πιο αναλυτικά λοιπόν, οι τρεις βασικές παράμετροι που καθορίζουν τη συμπεριφορά ενός αλγορίθμου-μοντέλου φωτοσκίασης είναι οι παρακάτω:

- Ο τοπικός προσανατολισμός της επιφάνειας.



- Ο προσανατολισμός της φωτεινής πηγής.
- Το μοντέλο φωτισμού.

Ο τοπικός προσανατολισμός υλοποιείται με το διάνυσμα της τοπικής καθέτου και μπορεί να εκφραστεί με δύο τρόπους. Με τον πρώτο τρόπο ο τοπικός προσανατολισμός εκφράζεται δια μέσου των γωνιών του διανύσματος προσανατολισμού της καθέτου, που είναι η γωνία αζιμουθίου:  $\phi$  με αφετηρία το θετικό άξονα  $x$  και αριστερόστροφη φορά, και τη ζενίθια γωνία:  $\theta$  (Εικόνα 7.7α). Με το δεύτερο τρόπο εκφράζεται δια μέσου των μερικών κλίσεων της επιφάνειας:  $p$  κατά το άξονα  $x$  με φορά από δύση προς ανατολή και:  $q$  κατά τον άξονα  $y$  με φορά από νότο προς βορρά (Εικόνα 7.7β). Είναι, επίσης, εύκολο να βρεθούν οι τιμές των μεγεθών του ενός ζεύγους συναρτήσει των τιμών του άλλου. Στην πράξη προτιμάται, πάντως, η χρήση των μερικών κλίσεων για διευκόλυνση των υπολογισμών καθώς αποφεύγονται οι υπολογισμοί με τριγωνομετρικές συναρτήσεις που, συνήθως, είναι χρονοβόροι.



**Εικόνα 7.7:** Τρόποι προσδιορισμού τοπικού προσανατολισμού μιας επιφάνειας.

Ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής πηγής εκφράζεται, ανάλογα, από τα ζεύγη των παραμέτρων ως προς τους δύο τρόπους προσανατολισμού που προαναφέρθηκαν  $(\phi_0, \theta_0)$  ή  $(p_0, q_0)$ , αντίστοιχα. Με μόνη τη διαφορά, ότι στην περίπτωση αυτή πρόκειται για το διάνυσμα θέσης της φωτεινής πηγής με τη βοήθεια του οποίου εκφράζεται ο προσανατολισμός της δέσμης των φωτεινών ακτινών.

Το μοντέλο φωτισμού είναι ένα σύνολο φυσικών ιδιοτήτων που αναφέρονται στο ίδιο το φως και στις φωτιζόμενες επιφάνειες, αλλά και των οπτικών φαινομένων που μεσολαβούν μεταξύ της αρχικά εκπεμπόμενης και της τελικά καταγραφόμενης ποσότητας φωτός κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του εδάφους. Σε κάθε αλγόριθμο-μέθοδο φωτοσκίασης η υλοποίηση των παραπάνω παραγόντων γίνεται με τη βοήθεια αναλυτικών σχέσεων, οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα απλοποίησης του φυσικού

προβλήματος.

Από την πραγματική εικόνα της σκιάς του ανάγλυφου μιας γεωγραφικής περιοχής μέχρι τη χαρτογραφική της αναπαράσταση, μεσολαβούν διάφορες απλουστευτικές συμβάσεις. Μια πρώτη βασική τέτοια σύμβαση αφορά την ίδια τη γεωμετρία του προβλήματος. Η πρακτικά άπειρη απόσταση στην οποία βρίσκεται η φυσική φωτεινή πηγή (ο ήλιος), επιτρέπει την παραδοχή ενός σταθερού προσανατολισμού των φωτεινών ακτίνων, ή αλλιώς, μια σταθερή γωνία πρόσπτωσης του φωτισμού πάνω στην επιφάνεια του ανάγλυφου. Η παραδοχή αυτή δεν ισχύει για την αναλυτικά υπολογιζόμενη φωτοσκίαση του ανάγλυφου. Για λόγους, όμως, εύληπτης ερμηνείας της αναλυτικά παραγόμενης εικόνας, δεν λαμβάνεται υπόψη και ένα άλλο κλασικό γνώρισμα του φαινομένου της φυσικής σκιάς: οι σκιές-είδωλα που παράγονται από τα υψηλότερα τμήματα της περιοχής στα χαμηλότερα, τα οποία δεν έχουν ορατότητα προς το φως. Οι σκιές<sup>1</sup> αυτές παραλείπονται με σκοπό να μην καλύψουν την απεικόνιση της μορφολογίας του ανάγλυφου σε αυτές τις περιοχές με σκούρους τόνους του γκρι. Σκοπός, άλλωστε, της χαρτογραφικής αναπαράστασης του τοπογραφικού ανάγλυφου δεν είναι μόνο η ακριβής προσομοίωση της πραγματικότητας με τη μορφή μιας εικόνας, αλλά κυρίως, η απεικόνισή του με τρόπο που να εξασφαλίζεται η ευανάγνωστη αντίληψή του.

Η διαδικασία παραγωγής της εικόνας της σκίασης του ανάγλυφου μιας περιοχής, στο πλαίσιο ενός σύγχρονου ψηφιακού περιβάλλοντος, εστιάζεται σε δύο βασικά στοιχεία:

- στην ύπαρξη σε ψηφιακή μορφή του υψομετρικού υποβάθρου της περιοχής και
- σε ένα εργαλείο αναλυτικού υπολογισμού των τιμών των τόνων της φωτοσκίασης (αλγόριθμος-μοντέλο).

Ο πιο εύχρηστος και πλέον συνηθισμένος τρόπος αναπαράστασης του υψομετρικού υποβάθρου μιας περιοχής, σε ψηφιακό περιβάλλον, υλοποιείται με τη δημιουργία ενός ψηφιακού μοντέλου υψομέτρων (ΨΜΥ). Ένα ψηφιακό μοντέλο υψομέτρων αποτελεί έναν πίνακα τιμών υψομέτρων που αναφέρεται σε σημεία κανονικά διατεταγμένα στο χώρο, συνήθως, στις κορυφές ενός τετραγωνικού κανάβου. Οι τιμές των υψομέτρων στις κορυφές του κανάβου προσδιορίζονται με τη διαδικασία της δισδιάστατης παρεμβολής από δεδομένα που, συνήθως, έχουν τυχαία χωρική διάταξη.

Σε κάθε αλγόριθμο προσδιορισμού της φωτοσκίασης είναι ενσωματωμένοι οι παράμετροι που καθορίζουν την ιδεατή φωτεινή πηγή καθώς και το μοντέλο φωτισμού. Οι τόνοι της σκίασης υπολογίζονται για κάθε στοιχειώδη επιφάνεια με τη

---

<sup>1</sup> Είναι διαφορετική η φυσική έννοια της σκιάς ως φαινομένου της οπτικής και της σκιάς λόγω ανάγλυφου που απεικονίζεται στους χάρτες με σκοπό να γίνει περισσότερο ευανάγνωστη και αποτελεσματική η απόδοσή του. Γι' αυτόν το λόγο στο κεφάλαιο αυτό η διάκριση μεταξύ των δύο εννοιών γίνεται χρησιμοποιώντας τον όρο «σκιά» για τη φυσική σκιά και «φωτοσκίαση» για την προσομοίωση του φυσικού αυτού φαινομένου στους χάρτες.

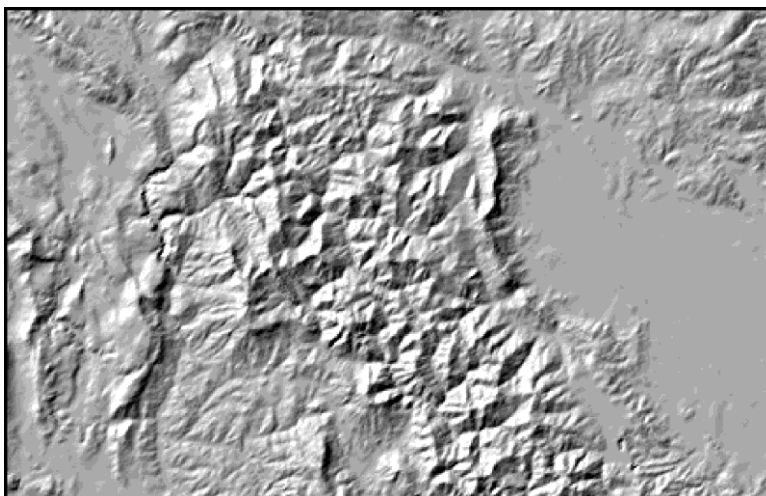
βοήθεια του ψηφιακού μοντέλου υψομέτρων, των παραμέτρων της ιδεατής φωτεινής πηγής και του μοντέλου φωτισμού. Το ψηφιακό μοντέλο υψομέτρων χρησιμεύει για τον απαραίτητο προσδιορισμό των παραμέτρων του τοπικού προσανατολισμού  $(p,q)$  ή  $(\phi,\theta)$ , αντίστοιχα, κάθε στοιχειώδους επιφάνειας συσχετίζοντας κάθε σημείο με τα γειτονικά του. Ο πίνακας τιμών της φωτοσκίασης του ανάγλυφου, δηλαδή, των ποσοστών αντανάκλασης του φωτός, συνήθως αποθηκεύεται σε κάποιο συμβατό τύπο αρχείου ψηφιακής εικόνας κλίμακας τόνων έντασης του γκρί.

### 7.3 Αλγόριθμοι αναλυτικού προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου

Οι διάφοροι αλγόριθμοι-μοντέλα προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου βασίζονται κυρίως σε θεωρητικές αρχές της οπτικής, οι οποίες περιγράφονται με τη βοήθεια σχέσεων τρισδιάστατης γεωμετρίας. Οι πιο σύνθετοι αλγόριθμοι εμπλουτίζονται σταδιακά με πρόσθετες θεωρήσεις που οδηγούν σε παραλλαγές με περισσότερες παραμέτρους. Ακόμα υπάρχουν αλγόριθμοι που βασίζονται σε εμπειρικές πρακτικές, σχεδιαστικού χαρακτήρα, που εκφράζονται με τη μορφή μοντέλου αξιοποιώντας αναλυτικές σχέσεις.

#### Εικόνα 7.8:

Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του Peucker.



#### 7.3.1 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με τμηματική γραμμική προσέγγιση του Peucker

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι προσδιορισμού της φωτοσκίασης του ανάγλυφου, που χρησιμοποιούνται σε χαρτογραφικές εφαρμογές, υιοθετούν ένα μοντέλο φωτισμού που ανταποκρίνεται σε ιδεατές, ιδανικές επιφάνειες με ιδιότητες που έχουν ως αποτέλεσμα την τέλεια διάχυση του φωτός. Αυτό σημαίνει ότι οι θεωρούμενες επιφάνειες αντανακλούν όλο το φως που δέχονται και δείχνουν επομένως το ίδιο λαμπερές από όλες τις πιθανές διευθύνσεις παρατήρησης (Εικόνα 7.8).

Η ποσότητα του φωτός που συλλέγεται από κάθε στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας του ανάγλυφου εξαρτάται από την κλίση του σε σχέση με την προσπίπτουσα φωτεινή δέσμη. Συγκεκριμένα, το ποσοστό του εμβαδού του στοιχείου που φαίνεται από τη φωτεινή πηγή -και άρα δέχεται και αντανακλά το φως- ισούται με το γινόμενο του πραγματικού εμβαδού επί το συνημίτονο της προσπίπτουσας γωνίας  $i$ . Επομένως, η ανακλαστικότητα  $R$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \cos i = \frac{1 + p_0 p + q_0 q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{1 + p_0^2 + q_0^2}}$$

Η προσπίπτουσα γωνία  $i$  ορίζεται επάνω στο στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας μεταξύ του διανύσματος της τοπικής καθέτου και του διανύσματος προσανατολισμού των φωτεινών ακτινών και το μέγεθος της ανακλαστικότητας είναι ανάλογο του συνημιτόνου της. Μια τμηματικά γραμμική προσέγγιση της αρχικής σχέσης για την ανακλαστικότητα, με δεδομένη την τοποθέτηση της φωτεινής πηγής σε βορειοδυτική (ΒΔ) διεύθυνση, είναι η ακόλουθη:

$$R = 0,4285(p - q) - 0,0844|p + q| + 0,6599$$

### 7.3.2 Αλγόριθμος ιδανικής αντανάκλασης με προσαρμογή της φωτεινής πηγής του Brassel

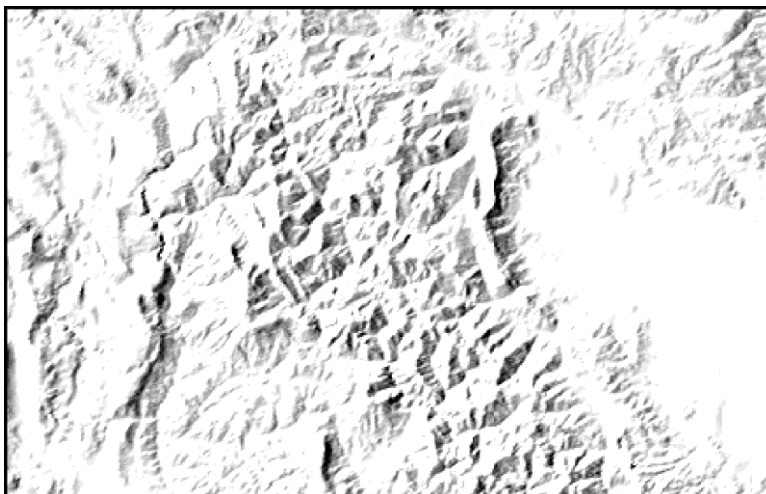
Με τον αλγόριθμο του Brassel επιχειρείται να επιλυθούν ορισμένα από τα προβλήματα που εμφανίζονται όταν χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Peucker. Δηλαδή, όταν η ανακλαστικότητα προσδιορίζεται αποκλειστικά από τη γωνία πρόσπτωσης του φωτός.

Με τον αλγόριθμο του Peucker είναι δυνατό να απεικονίζονται με την ίδια ένταση τόνου (ίδια προσπίπτουσα γωνία) οι εκατέρωθεν πλευρές μιας μισγάγγειας, ή οι εκατέρωθεν πλευρές μιας κορυφογραμμής, όταν ο προσανατολισμός τους είναι παράλληλος με τη διεύθυνση των φωτεινών ακτινών. Δηλαδή, ορισμένες εντελώς διαφορετικές ως προς τη μορφολογία τους περιοχές αποδίδονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και είναι αδύνατη η οπτική τους διαφοροποίηση. Με τον αλγόριθμο του Brassel εφαρμόζονται διορθώσεις, τόσο στη διεύθυνση όσο και στην κλίση της φωτεινής δέσμης. Τα μεγέθη των προσθετικών αυτών διορθώσεων ( $\delta\theta$ ,  $\delta\phi$ ) ρυθμίζονται από δύο συντελεστές:  $\alpha$  και  $\beta$ , που αντιστοιχούν στις γωνίες προσανατολισμού:  $\theta$  και  $\phi$ :

$$\delta\theta = \alpha(\theta - \theta_0) \text{ και}$$

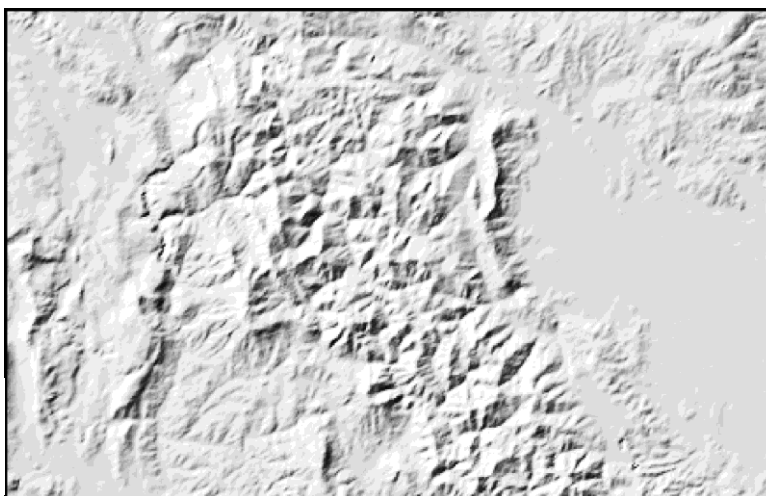
$$\delta\phi = \arcsin\left(\frac{\beta}{2} \sin 2(\phi - \phi_0)\right).$$

**Εικόνα 7.9:**  
Αλγόριθμος ιδανικής  
αντανάκλασης με  
προσαρμογή της  
φωτεινής πηγής του  
Brassel.



Τα διορθωμένα στοιχεία του προσανατολισμού εφαρμόζονται στην αρχική, γενική σχέση της ιδανικής αντανάκλασης. Στην Εικόνα 7.9 απεικονίζεται η εικόνα εφαρμογής του αλγορίθμου του Brassel.

**Εικόνα 7.10:**  
Μαθηματικό μοντέλο  
φωτοσκίασης.



### 7.3.3 Μαθηματικό μοντέλο φωτοσκίασης

Το μαθηματικό μοντέλο δεν βασίζεται σε συγκεκριμένο είδος φωτισμού, αλλά, στοχεύοντας στο τελικό αποτέλεσμα χρησιμοποιεί ένα λογικό συνδυασμό παραμέτρων για τον υπολογισμό της ανακλαστικότητας:

$$R = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s' + \alpha}{\beta} \right),$$

όπου:  $s'$  είναι η κλίση της επιφάνειας επάνω στη διεύθυνση των φωτεινών ακτινών,  $\alpha$  και  $\beta$  παράμετροι που εκφράζουν το γκρίζο τόνο για τις οριζόντιες περιοχές και το ρυθμό μεταβολής των τόνων ως προς την κλίση, αντίστοιχα.

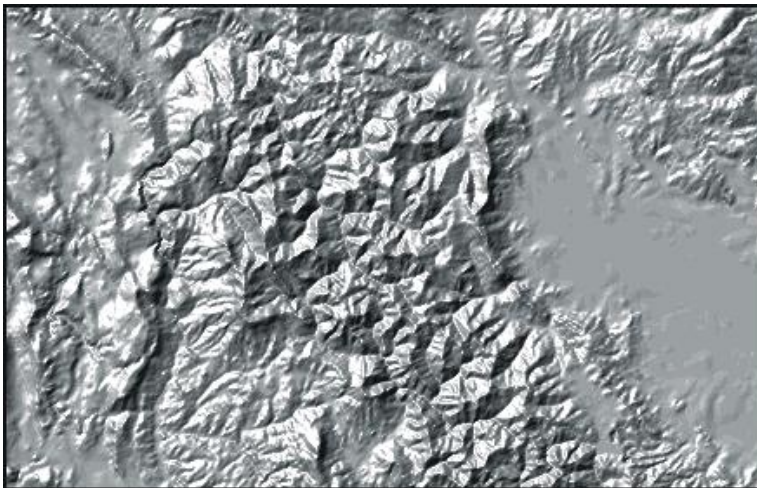
Το αποτέλεσμα της φωτοσκίασης με την εφαρμογή του αλγόριθμου του μαθηματικού μοντέλου φωτοσκίασης απεικονίζεται στην Εικόνα 7.10.

#### 7.3.4 Αλγόριθμος κατοπτρικής αντανάκλασης

Μια μεγάλη σειρά μοντέλων κατοπτρικής αντανάκλασης εφαρμόζεται σε ρεαλιστικές αποδόσεις και σε εφαρμογές σχεδίασης γραφικών εικόνων σε περιβάλλον ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η μέθοδος βασίζεται σε ένα υποθετικό-ιδανικό οπτικό φαινόμενο, όπου οι φωτεινές ακτίνες ανακλώνται στη φωτιζόμενη επιφάνεια και αντικατοπτρίζονται στον παρατηρητή (Εικόνα 7.11). Έτσι, η θέση παρατήρησης αποκτά ενεργό ρόλο. Η σχέση της ανακλαστικότητας του αλγόριθμου της κατοπτρικής αντανάκλασης παρέχει περιθώρια επιλογής στο χρήστη για το ποσοστό συμμετοχής της κατοπτρικής:  $\alpha$  ή της ιδανικής αντανάκλασης:  $1-\alpha$ , στο αποτέλεσμα:

$$R = ((1-\alpha) + \alpha P) \frac{\cos i}{\cos \frac{\theta_0}{2}},$$

όπου:  $P$  είναι η κατανομή λαμπρότητας της επιφάνειας εξαρτώμενη από την υφή της,  $i$  η γωνία πρόσπτωσης και  $\theta_0$  η γωνία κλίσης του φωτός.



**Εικόνα 7.11:**  
Αλγόριθμος  
κατοπτρικής  
αντανάκλασης.

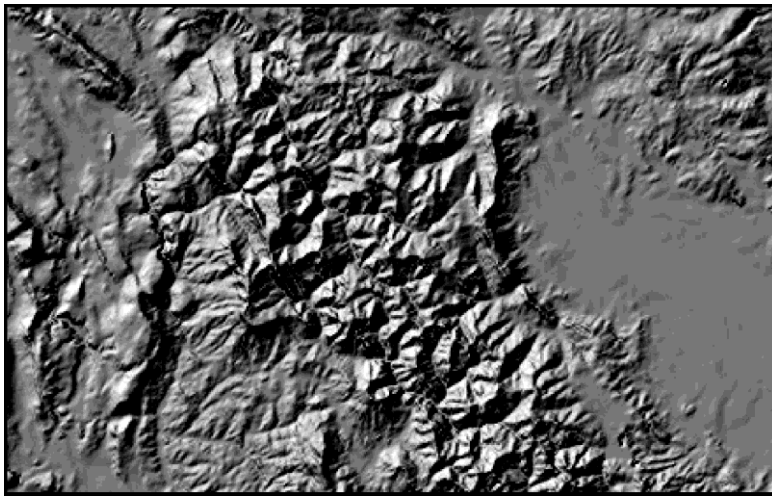
#### 7.3.5 Αλγόριθμος κεκλιμένων καμπυλών του Tanaka

Μια επιφάνεια που καλύπτεται από παράλληλες διαδοχικές γραμμές πάχους:  $b$  και με ενδιάμεση απόσταση:  $w$ , έχει τιμή ανακλαστικότητας που εξαρτάται από τα μεγέθη

αυτά καθώς και από τις αποχρώσεις των γραμμών και του μεταξύ τους χώρου στο χάρτη. Αν οι γραμμές είναι σχεδιασμένες με μαύρο χρώμα σε λευκό χαρτί, τότε η ανακλαστικότητα των γραμμών είναι μηδέν και του υπόλοιπου χώρου του χάρτη είναι 100 μονάδες. Η σχέση που προσδιορίζει την ανακλαστικότητα κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του χάρτη είναι:

$$R = r_w - \frac{b}{w + b}(r_w - r_b),$$

όπου:  $r_b$  η ανακλαστικότητα των γραμμών και  $r_w$  η ανακλαστικότητα του υπόλοιπου χώρου του χάρτη.



**Εικόνα 7.12:**  
Αλγόριθμος  
κεκλιμένων καμπυλών  
του Tanaka.

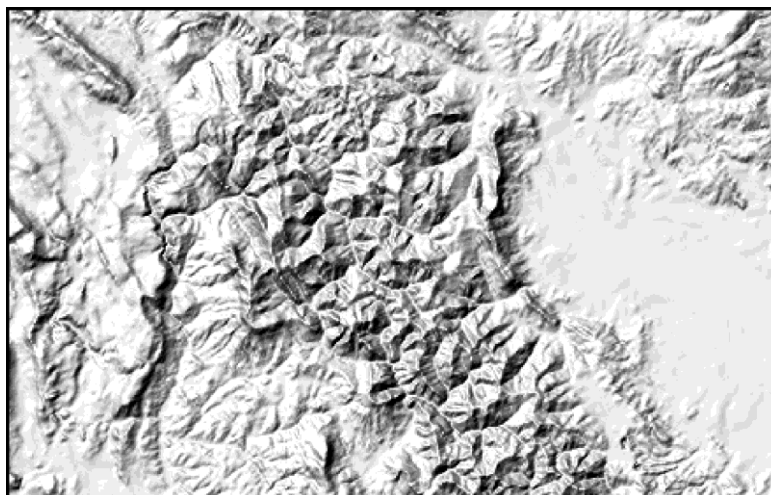
Η αρχή αυτή εφαρμόζεται στις περιπτώσεις που η επιφάνεια του χάρτη καλύπτεται από ισοϋψείς καμπύλες και έχει ως αποτέλεσμα μια εικόνα σκιάς που δίνει ισοδύναμη τονική εντύπωση (Εικόνα 7.12). Οι ισοϋψείς καμπύλες, όμως, είναι τομές οριζόντιων επιπέδων με την επιφάνεια του ανάγλυφου και έτσι η πυκνότητα των γραμμών εξαρτάται μόνο από τη κλίση του εδάφους. Για να έχουμε μια διαβάθμιση ανακλαστικότητας που να εξαρτάται και από τη διεύθυνση της κλίσης του εδάφους, υποθέτουμε μια σειρά από διαδοχικές τομές της επιφάνειας με ισαπέχοντα κεκλιμένα επίπεδα, προσανατολισμένα κάθετα ως προς τις φωτεινές ακτίνες. Το μέγεθος της ισοδιάστασης:  $\delta$ , το πάχος της γραμμής σχεδίασης της καμπύλης:  $b$  και η κλίμακα του χάρτη:  $k$  είναι μεταβλητά μεγέθη και καθορίζουν το τελικό αποτέλεσμα της ανακλαστικότητας κάθε στοιχειώδους επιφάνειας του ανάγλυφου, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$R = r_w - \frac{b}{kd}(r_w - r_b) \sqrt{\frac{(p - p_0)^2 + (q - q_0)^2}{p_0^2 + q_0^2 + 1}}.$$

### 7.3.6 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με μεταβαλλόμενη λαμπρότητα του Wiechel

Η συμπεριφορά μιας επιφάνειας στο φωτισμό με τα πρότυπα της ιδανικής αντανάκλασης είναι βέβαια εντελώς μη ρεαλιστική. Στην πραγματικότητα, η αντανάκλαση μεταβάλλεται και η επιφάνεια δεν θα έπρεπε να φαίνεται το ίδιο λαμπερή από όλες τις διευθύνσεις. Πάνω σε αυτή τη λογική έχουν αναπτυχθεί ορισμένοι αλγόριθμοι φωτοσκίασης που εκτός της γωνίας πρόσπτωσης:  $i$  του φωτός έχουν συμπεριλάβει και άλλες παραμέτρους. Μια σχετική παράμετρος είναι η γωνία μεταξύ τοπικής καθέτου και διανύσματος θέσης του παρατηρητή:  $e$ . Βέβαια, για χαρτογραφικούς λόγους, η θέση του παρατηρητή οφείλει να είναι πάντα στο ναδίρ ώστε να έχουμε εποπτική, κατακόρυφη παρατήρηση του χάρτη, οπότε, η γωνία αυτή ταυτίζεται τελικά με τη γωνία κλίσης της στοιχειώδους επιφάνειας. Η ανακλαστικότητα για τον αλγόριθμο αυτό θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{\cos i \cos e}{\frac{1}{2}(1 + \cos e)}$$



**Εικόνα 7.13:**  
Αλγόριθμος μη  
ιδανικής  
αντανάκλασης με  
μεταβαλλόμενη  
λαμπρότητα του  
Wiechel.

Στην Εικόνα 7.13 απεικονίζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγόριθμου του Wiechel στο ίδιο πάντα αρχείο των δεδομένων.

### 7.3.7 Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης με αυτόματη απόδοση της σκίασης του Marsik

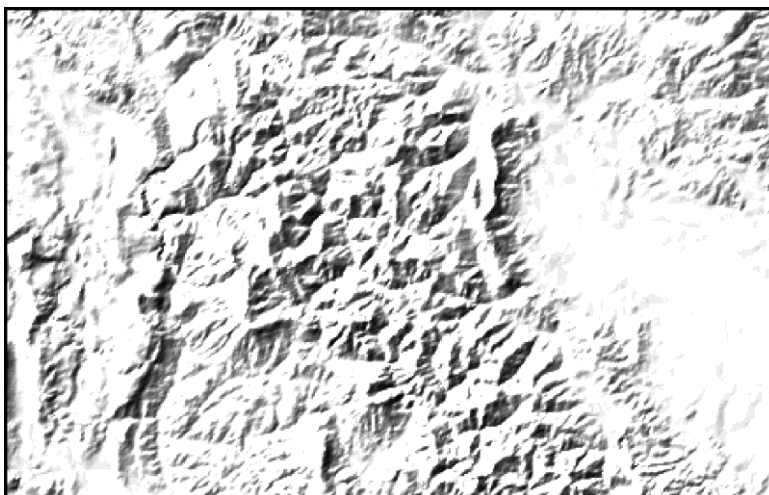
Άλλες προσεγγίσεις στη συμπεριφορά μιας επιφάνειας που δεν αντανακλά ιδανικά το φως, μπορεί και να ξεφεύγουν εντελώς από τη βασική αρχή της ιδανικής αντανάκλασης και να στηριχθούν σε διαφορετικές θεωρήσεις. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αξιοποιεί



τη σχέση ανακλαστικότητα και πυκνότητας εκτύπωσης, με την πυκνότητα να ισούται με το δεκαδικό λογάριθμο του αντιστρόφου της ανακλαστικότητας. Βασίζεται στον υπολογισμό της ανακλαστικότητας δια μέσου της κλίσης της επιφάνειας επάνω στη διεύθυνση φωτισμού. Η ανακλαστικότητα στον αλγόριθμο αυτό προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$R = 10^{\frac{\rho_0 \rho + \alpha_0 \alpha}{\sqrt{\rho_0^2 + \alpha_0^2}}}$$

Στην Εικόνα 7.14 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγόριθμου φωτοσκίασης του Marsik.

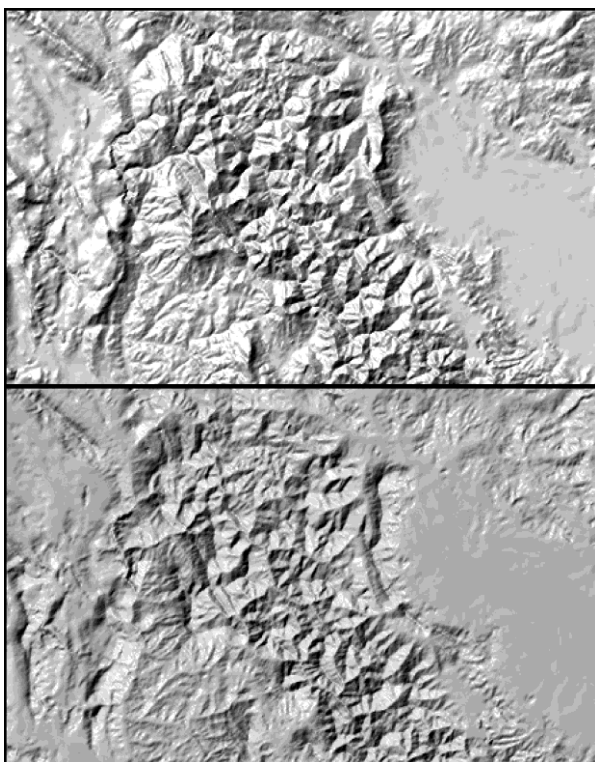


**Εικόνα 7.14:** Αλγόριθμος μη ιδανικής αντανάκλασης του Marsik.

#### 7.4 Διερεύνηση και σύγκριση αλγορίθμων

Η επίδραση του προσανατολισμού του υποθετικού φωτισμού και των άλλων ειδικότερων παραμέτρων που τυχόν διαθέτει κάθε μοντέλο-αλγόριθμος ποικίλουν ως προς το παραγόμενο τελικό αποτέλεσμα.

Η γωνία διεύθυνσης της ιδεατής φωτεινής δέσμης υπό την οποία αυτή προσπίπτει σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια του ανάγλυφου επηρεάζει την ερμηνεία του από το χρήστη. Για παράδειγμα, ο τυπικός προσανατολισμός που χρησιμοποιείται σε χαρτογραφικές εφαρμογές έχει, πάντα, βορειο-δυτική κατεύθυνση (Εικόνα 7.15 – επάνω). Με αυτόν τον προσανατολισμό της φωτεινής πηγής ο χρήστης του χάρτη ερμηνεύει τη φωτοσκίαση με τρόπο που οι κοιλότητες και οι κορυφογραμμές του ανάγλυφου να ερμηνεύονται ορθά. Αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό του φωτισμού, δηλαδή, αν γίνει νοτιο-ανατολικός, τότε η ερμηνεία αντιστρέφει την πραγματικότητα (Εικόνα 7.15 – κάτω).



**Εικόνα 7.15:** Η επίδραση της μεταβολής του φωτισμού στην ερμηνεία του ανάγλυφου (βορειο-δυτικός φωτισμός – επάνω και νοτιο-ανατολικός – κάτω).

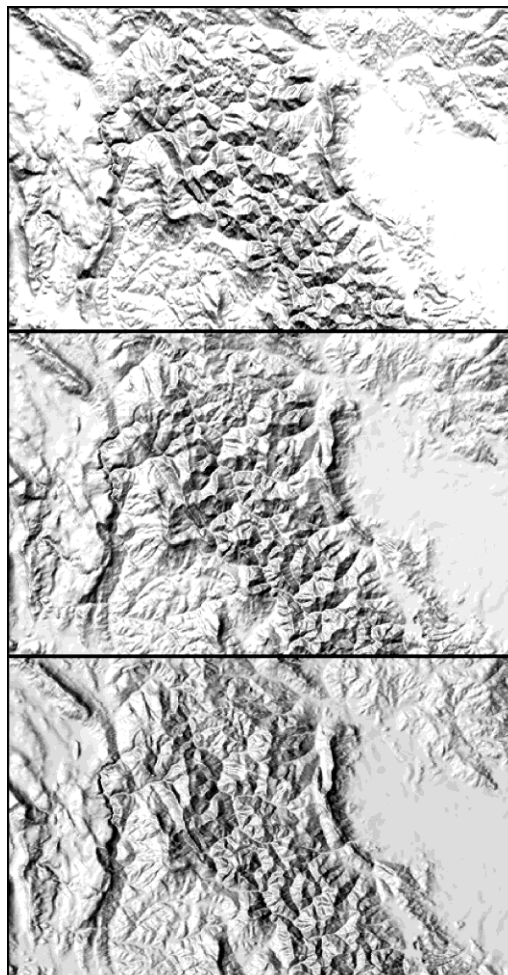
Αποσκοπώντας στην ορθή ερμηνεία των μορφολογικών χαρακτηριστικών του ανάγλυφου ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής δέσμης πρέπει να προσπίπτει από βόρειες έως δυτικές κατευθύνσεις.

Εξετάζοντας την επίδραση που έχει ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής πηγής στην Εικόνα 7.16, παρουσιάζονται οι φωτοσκιάσεις του ίδιου αλγόριθμου με σχεδόν βόρειο (επάνω), με βορειο-δυτικό (μέση) και σχεδόν δυτικό (κάτω) προσανατολισμό.

Η σύγκριση των τριών αυτών εικόνων επιβεβαιώνει την εμπειρική διαπίστωση ότι ο άνθρωπος ερμηνεύει ορθότερα τους μορφολογικούς σχηματισμούς του ανάγλυφου, όταν η σκιά δημιουργείται με βορειο-δυτικό φωτισμό. Βέβαια, ο προσανατολισμός της ιδεατής φωτεινής πηγής πρέπει να ρυθμίζεται γύρω από βορειο-δυτική κατεύθυνση ανάλογα με τις ευρύτερες τάσεις που επικρατούν στις διευθύνσεις των ορεινών όγκων της χαρτογραφούμενης περιοχής.

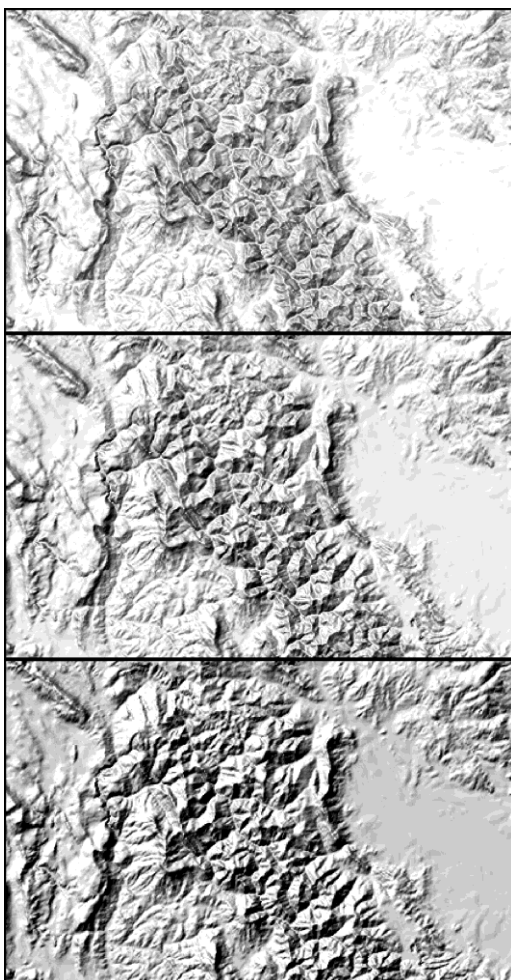
Η κλίση της υποθετικής φωτεινής πηγής επηρεάζει την ένταση της φωτοσκίασης του ανάγλυφου που απεικονίζεται επάνω στην επιφάνεια του χάρτη. Αυξάνοντας την κλίση μικραίνει το μέγεθος της παραγόμενης σκίασης. Στην Εικόνα 7.17 παρουσιάζεται η επίδραση της κλίσης της υποθετικής φωτεινής πηγής στον ίδιο αλγόριθμο-μοντέλο για τρεις χαρακτηριστικές τιμές: 30°, 45° και 60° (αντίστοιχα: επάνω, μέση και κάτω). Παρατηρώντας τις τρεις εικόνες της Εικόνας 7.17 επιβεβαιώνεται η μεταβολή της έντασης της σκιάς του ανάγλυφου από ανοικτές σε σκούρες τιμές με άμεσο

αποτέλεσμα να επηρεάζεται και η τονική εντύπωση της συνολικής εικόνας της φωτοσκίασης του ανάγλυφου του χάρτη.



**Εικόνα 7.16:** Η επίδραση της μεταβολής της διεύθυνσης φωτισμού.

Η τονική εντύπωση που δημιουργείται στο χάρτη ενέχει μια βασική αντινομία. Όσο περισσότερο έντονη είναι η τονική εντύπωση που δημιουργείται με την παρουσίαση της φωτοσκίασης τόσο πιο σωστά και ευανάγνωστα ο χρήστης ερμηνεύει τα μορφολογικά χαρακτηριστικά (για παράδειγμα, συγκρίνατε τις τρεις εικόνες του Εικόνας 7.17). Η έντονη όμως τονική διαβάθμιση «φορτώνει» το χώρο που καταλαμβάνει ο χάρτης με μεγάλη ποσότητα πληροφορίας, επομένως, αυξάνει δραστικά την πυκνότητα πληροφορίας, με αποτέλεσμα να μην αφήνει περιθώρια για την ευανάγνωστη απεικόνιση των υπόλοιπων πληροφοριών που πρέπει να απεικονίζει ο χάρτης.

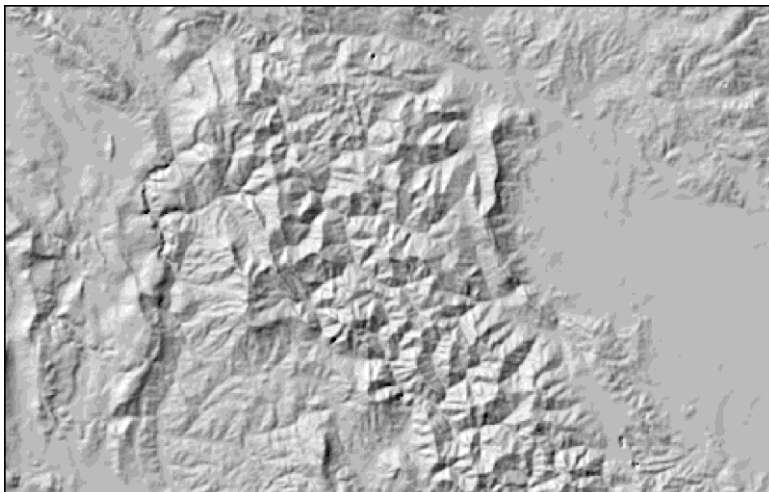


**Εικόνα 7.17:** Η επίδραση της κλίσης του φωτισμού.

Οι αλγόριθμοι που βασίζονται σε συνθήκες φωτισμού ιδανικής αντανάκλασης βρίσκουν εφαρμογή σε χαρτογραφικές εφαρμογές και στα περισσότερα γνωστά πακέτα ψηφιακής χαρτογραφικής σχεδίασης (για παράδειγμα, το πακέτο λογισμικού ArcGIS, Εικόνα 7.18). Το αποτέλεσμα είναι ομοιόμορφο, συμπαγές και γενικά πολύ φιλικό στο χρήστη. Αντιπαραθέτοντας αντίστοιχα παραδείγματα μοντέλων, μη ιδανικής αντανάκλασης, που είναι περισσότερο κοντά στη φυσική πραγματικότητα, οι τόνοι γίνονται πιο σκληροί και η αντίθεση άσπρου-μαύρου μεγαλώνει. Με τα μοντέλα της κατοπτρικής αντανάκλασης είναι χαρακτηριστική η προσπάθεια εντυπωσιασμού του χρήστη, όπως άλλωστε συμβαίνει και στις ρεαλιστικές αναπαραστάσεις που αποδίδονται δια μέσου λογισμικών πακέτων γραφικών (computer graphics). Ιδιαίτερες χαρτογραφικές δυνατότητες, όμως, προσφέρουν ορισμένες άλλες παράμετροι, πέραν της διεύθυνσης ή της κλίσης του φωτισμού, που υπάρχουν στα διάφορα μοντέλα. Όταν μάλιστα είναι περισσότερες από μία, τότε οι συνδυασμοί τους παρέχουν ευρύτερες συσχετίσεις και οι αλληλεπιδράσεις των αποτελεσμάτων είναι διαφορετικές, οπότε, ο χαρτογράφος έχει μεγάλο περιθώριο να πειραματιστεί για να πετύχει την καλύτερη

αναπαράσταση της φωτοσκίασης στην εφαρμογή του.

**Εικόνα 7.18:** Η απόδοση της φωτοσκίασης του ανάγλυφου με τον αλγόριθμο του ArcGIS.



**Πίνακας 7.1:** Συγκεντρωτική παρουσίαση χαρακτηριστικών αλγορίθμων σκίασης.

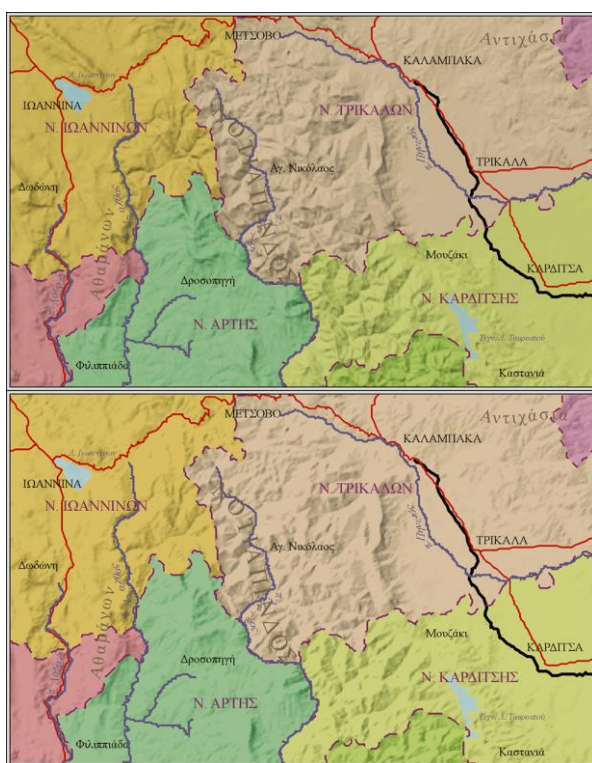
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ	ΜΟΝΤΕΛΟ	ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΦΩΤΙΣΜΟΥ	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΦΩΤΟΣ	ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ
Τμηματικής γραμ. προσέγγισης Peucker	Θεωρία φωτισμού	Ιδανική αντανάκλαση		
Προσαρμογής φωτεινής δέσμης Brassel	Θεωρία φωτισμού	Ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	Συντελεστές προσαρμογών α, β
Μαθηματικό μοντέλο σκίασης	Μαθηματική σχέση		Διεύθυνση	Τόνος οριζόντιας κλίσης α Ρυθμός αλλαγής τόνων-κλίσεων β
Κατοπτρικής Αντανάκλασης	Θεωρία φωτισμού	Κατοπτρική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	Κατανομή λαμπρότητας P Συμπαγές φωτός n
Μεθόδου κεκλιμένων καμπυλών Tanaka	Ανακλαστικό-τητα διαγράμμισης		Διεύθυνση Κλίση	Πάχος γραμμής b Κλίμακα k Ισοδιάσταση δ
Μεταβαλλόμενης Λαμπρότητας Wiechel	Θεωρία φωτισμού	Μη ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	
Αυτόματης απόδοσης σκίασης του Marsik	Θεωρία φωτισμού	Μη ιδανική αντανάκλαση	Διεύθυνση Κλίση	

Στον Πίνακα 7.1 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά των αλγορίθμων-μεθόδων που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες σε σχέση με το μοντέλο, τις συνθήκες

φωτισμού, τις παραμέτρους του φωτός και τις τυχόν ειδικές παραμέτρους που διαθέτει κάθε ένας από αυτούς.

### 7.5 Η φωτοσκίαση του ανάγλυφου σε χαρακτηριστικές χαρτογραφικές εφαρμογές

Για τη διερεύνηση των μεθόδων απόδοσης της σκίασης του ανάγλυφου, στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ορισμένες ενδεικτικές χαρτογραφικές εφαρμογές. Στις εφαρμογές αυτές χρησιμοποιείται ένα ψηφιακό μοντέλο υψομέτρων, ισαποχής 250m. μιας περιοχής στα νότια της οροσειράς της Πίνδου. Η έκταση και η θέση της περιοχής επιλέχθηκε ώστε να απεικονίζει πλούσιο ανάγλυφο και μορφολογικούς σχηματισμούς με ποικίλο προσανατολισμό.

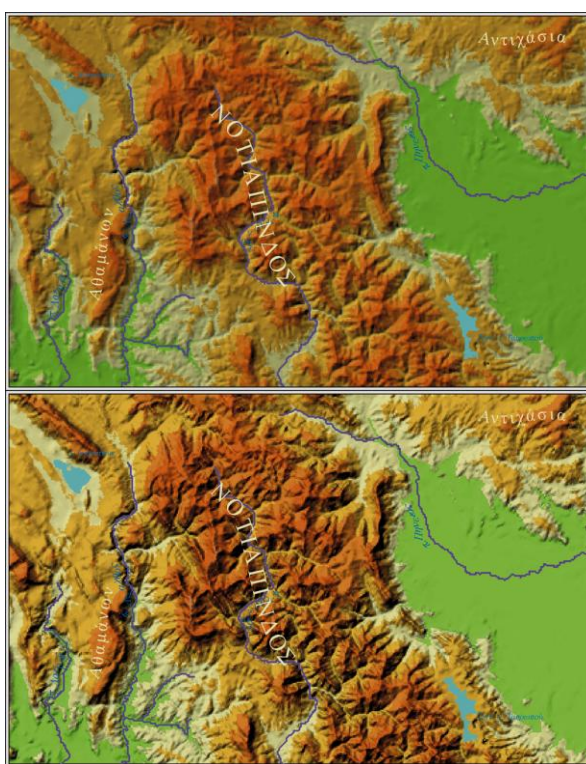


**Εικόνα 7.19:** Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε «πολιτικό» χάρτη.

Ο χαρακτήρας των διαφόρων χαρτογραφικών εφαρμογών δεν καθορίζεται αποκλειστικά από το είδος των στοιχείων που απεικονίζονται αλλά και από τον τρόπο με τον οποίο απεικονίζονται, δηλαδή το συγκεκριμένο συμβολισμό που ακολουθείται. Σημαντικό ρόλο σε έγχρωμους χάρτες παίζει η χρήση των αποχρώσεων τόσο ως προς την επιλογή όσο και ως προς τη λαμπρότητα του κάθε συμβόλου. Κατά την αναπαράσταση της σκίασης του ανάγλυφου σε έγχρωμους χάρτες, ο αλγόριθμος που πρέπει να εφαρμοστεί έρχεται σε «αντιπαράθεση» με τις παραπάνω συνιστώσες του χάρτη.



Τα υπόλοιπα απεικονιζόμενα στοιχεία του χάρτη (ονοματολογία, δίκτυα συγκοινωνιών, διοικητική διαίρεση, κλπ.) περιορίζουν την τονικότητα της εικόνας της φωτοσκίασης. Μια πρώτη προσέγγιση γίνεται με την αύξηση της κλίσης της φωτεινής δέσμης με αποτέλεσμα και την αύξηση όλων των τόνων (Εικόνα 7.19 - επάνω). Πέρα από αυτό, μπορεί να γίνει η απεικόνιση μόνον των τόνων της σκίασης των κλίσεων που δεν είναι ορατές από τη φωτεινή πηγή (Εικόνα 7.19 - κάτω). Σε έναν πολιτικό χάρτη, για παράδειγμα, όπου συνήθως εφαρμόζεται ο επιφανειακός συμβολισμός για την απεικόνιση των επιφανειών με αρκετά απαλές αποχρώσεις, η παραπάνω απλούστευση επιτρέπει τις αποχρώσεις των επιφανειακών συμβόλων του χάρτη να φαίνονται καλύτερα και πιο ευανάγνωστα.

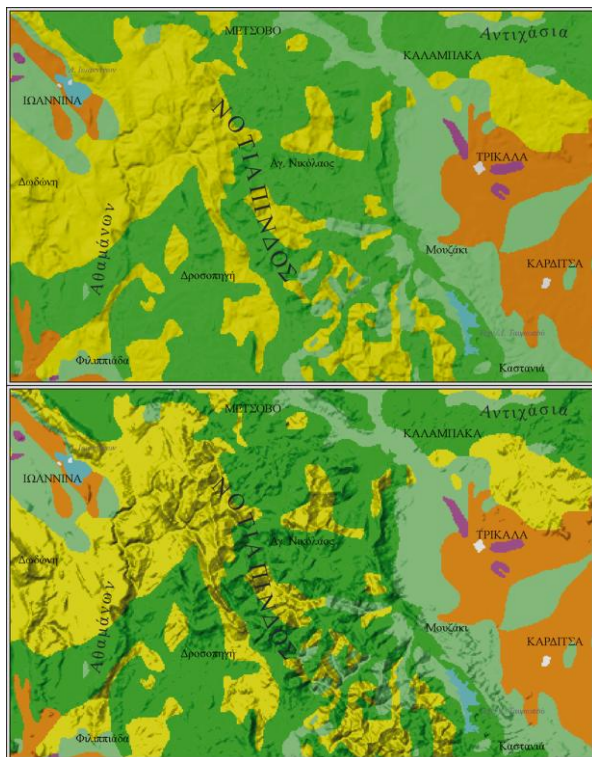


**Εικόνα 7.20:** Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε «γεωφυσικό» χάρτη.

Σε ένα χάρτη με αποκλειστικό σκοπό την αναπαράσταση του ανάγλυφου, η απεικόνισή του μπορεί να γίνει με προσθετική συνεχή αλλαγή της απόχρωσης συναρτήσει του υψομέτρου και με ταυτόχρονη χρήση μιας μεθόδου μη ιδανικής αντανάκλασης (Εικόνα 7.20 - επάνω). Η αντιπαράθεσή της με την υποθετική ιδανική αντανάκλαση στη σκίαση του ανάγλυφου (Σχήμα 7.20 - κάτω), κάνει άμεσα αντιληπτή τη διάθεση συμβιβασμού του χαρτογράφου, προκειμένου να πετύχει μια περισσότερο συμβατή με το μέσο χρήστη απεικόνιση. Βέβαια, είναι εμφανής η πληρέστερη απεικόνιση των μορφολογικών σχηματισμών του ανάγλυφου της πρώτης σε σχέση με τη δεύτερη μέθοδο.

Σε ένα θεματικό χάρτη όπως αυτός της απεικόνισης των χρήσεων γης μιας

περιοχής, η πρώτη λύση είναι η αύξηση των τόνων με επέμβαση στη θέση της φωτεινής πηγής (Εικόνα 7.21 - επάνω). Επιπρόσθετα, η χρήση έντονων αποχρώσεων με μεγάλο κορεσμό δίνει το ερέθισμα για την εφαρμογή ενός αλγορίθμου κατοπτρικής αντανάκλασης. Το αποτέλεσμα αποδίδει τα έντονα χαρακτηριστικά της επιφάνειας του ανάγλυφου (γυαλάδα) σε πλήρη οπτική αρμονία με τη χρωματική σύνθεση του χάρτη (Εικόνα 7.21 - κάτω).



**Εικόνα 7.21:** Εφαρμογή απεικόνισης της σκιάς του ανάγλυφου σε χάρτη χρήσεων γης.

## 7.6 Συμπεράσματα

Η αναπαράσταση της σκιάς του τοπογραφικού ανάγλυφου, με τα μέσα που παρέχονται σήμερα στο χαρτογράφο, είναι μια χαρτογραφική διεργασία που μπορεί εύκολα να αντιμετωπισθεί και να εμπλουτίσει τους παραγόμενους χάρτες. Επιπλέον, με την εφαρμογή «αιτιοκρατικών» αλγορίθμων έχουν ξεπεραστεί ορισμένα από τα μειονεκτήματα της «υποκειμενικής» απόδοσης της σκιάς που προέρχονταν από την εφαρμογή των αναλογικών μεθόδων στο παρελθόν.

Κάτω από αυτές συνθήκες, δίνεται στο χαρτογράφο η δυνατότητα να διερευνήσει σε βάθος τις διαθέσιμες αναλυτικές μεθόδους (αλγορίθμους) προσδιορισμού της φωτοσκίασης και να πειραματιστεί με τις παραμέτρους τους, ώστε να επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Οι ανάγκες κάθε ξεχωριστής χαρτογραφικής εφαρμογής είναι, βέβαια, διαφορετικές και γι' αυτό το λόγο ο ένας και μοναδικός αλγόριθμος που τυχόν διατίθεται από ένα χαρτογραφικό πακέτο λογισμικού, όσο καλός και αποδοτικός και αν



είναι, είναι σίγουρα φτωχός σε σχέση με τις δυνατότητες που μπορεί να προσφέρει κάποιος άλλος που πιθανά είναι καταλληλότερος για τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Με την εφαρμογή ενός κατάλληλου αλγόριθμου επιτυγχάνεται οπτική αρμονία μεταξύ επιφανειακών συμβόλων και φωτοσκίασης, καθώς επίσης, και των υπολοίπων συμβόλων του χάρτη. Επιπλέον, παρέχεται η δυνατότητα στο χαρτογράφο να διερευνήσει πιθανούς εναλλακτικούς τρόπους απόδοσης της φωτοσκίασης του ανάγλυφου και να εφαρμόσει εκείνη τη μέθοδο που βελτιώνει δραστικά τη συνολική εικόνα του χάρτη.

### 7.7 Βιβλιογραφία

- Horn B.K.P. , 1982, "Hill shading and the reflectance map", *Geo-Processing*, 2: 65-133.
- Imhof E., 1982, *Cartographic Relief Presentation*, (ed. H.J. Steward), Berlin: Walter de Gruyter.
- Jenny B., 2001. "An interactive approach to analytical relief shading", *Cartographica*, 38(1 & 2): 67-75.
- Νάκος Β., 1990, "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών δεδομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας". Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Νάκος Β. & Ν. Τζελέπης, 1994, "Η σκιά του ανάγλυφου στους χάρτες", *Πυρφόρος*, 16: 44-7.
- Νάκος Β. & Β. Φιλιππακοπούλου, 1993, *Γενική Χαρτογραφία*. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Snyder M.W., 1980, "A comparison of four techniques for the calculation of slope and aspect from digital terrain matrices". M.Sc.Thesis, University of Illinois.
- Tanaka K., 1930, "The orthographical relief method of representing hill features on a topographical map". *The Geographical Journal*, 79: 232-3.
- Τζελέπης Ν., 1994, "Διερεύνηση μεθοδολογιών αναπαράστασης της σκιάς του τοπογραφικού ανάγλυφου με ψηφιακές τεχνικές". Διπλωματική Εργασία, Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Τζελέπης Ν. & Β. Νάκος, 1996, "Διερεύνηση μεθόδων αναπαράστασης της σκιάς του ανάγλυφου στους χάρτες". Πρακτικά 2ου Εθνικού Συνεδρίου Χαρτογραφίας, Θεσσαλονίκη: Χαρτογραφική Επιστημονική Εταιρία Ελλάδος, σ. 275-83.



## Κεφάλαιο 8

### 8. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

#### 8.1 Βασικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Ο γερμανός μαθηματικός Christian Felix Klein<sup>1</sup> (Εικόνα 8.1) όρισε ως γεωμετρία τη μελέτη των ιδιοτήτων ενός συνόλου σημείων που διατηρούνται αναλλοίωτες, όταν τα στοιχεία του συνόλου υφίστανται την επίδραση συγκεκριμένων ομάδων μετασχηματισμού.



Εικόνα 8.1: Ο γερμανός μαθηματικός Christian Felix Klein.

Οι χωρικές ιδιότητες των δεδομένων ενός χάρτη που διατηρούνται αναλλοίωτες διαφέρουν ανάλογα με το είδος των μετασχηματισμών που επιδρούν σε αυτά. Εάν σε ένα σύνολο σημείων εφαρμόσουμε διαδοχικά ένα μετασχηματισμό μετάθεσης και στη συνέχεια ένα μετασχηματισμό στροφής, τότε στην παράγωγη γεωμετρία οι γωνίες, οι αποστάσεις και η ιδιότητα της συνδεσιμότητας θα παραμείνουν αναλλοίωτες. Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού ομοιότητας σε γραφικά αντικείμενα, που περιλαμβάνει και μεταβολή της κλίμακας, δεν διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις,

---

<sup>1</sup> Ο Christian Felix Klein γεννήθηκε στο Düsseldorf το 1849. Σπούδασε μαθηματικά και φυσική στο πανεπιστήμιο του Bonn. Το επιστημονικό του έργο εστιάστηκε στη θεωρία ομάδων, στη συναρτησιακή θεωρία και τη γεωμετρία. Διετέλεσε καθηγητής στα πανεπιστήμια Erlangen, Leipzig και Göttingen. Απεβίωσε στο Göttingen το 1925.

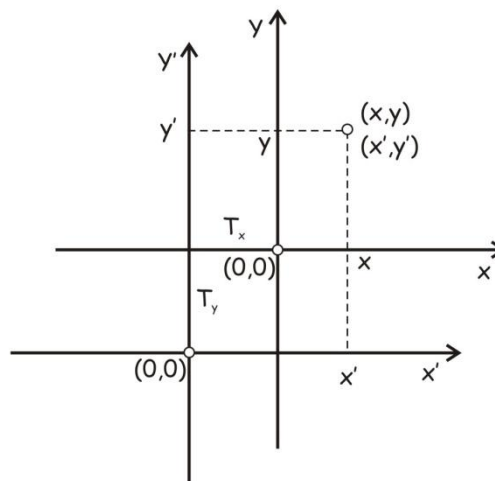
όμως, διατηρούνται αναλλοίωτες οι γωνίες και η ιδιότητα της συνδεσιμότητας. Για αυτό, το λόγο, η εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση της μορφής των γραφικών αντικειμένων και αν αυτά αντιπροσωπεύουν χαρτογραφικά αντικείμενα η αναγνώρισή τους, είναι εύκολη μετά το μετασχηματισμό. Ένας περισσότερο σύνθετος μετασχηματισμός είναι ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός. Η εφαρμογή του σε γραφικά αντικείμενα, ενώ, δεν διατηρεί τις αποστάσεις και τις γωνίες, διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες της παραλληλίας και της συνευθειακότητας. Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός έχει μεγάλη εφαρμογή στη χαρτογραφία στη διαδικασία της ψηφιοποίησης αναλογικών χαρτών, στη γεωμετρική αναγωγή δορυφορικών δεδομένων και σε άλλες εφαρμογές. Τέλος, ο προβολικός μετασχηματισμός δεν διατηρεί τις αποστάσεις, τις γωνίες, ούτε, την ιδιότητα της παραλληλίας. Η εφαρμογή του προβολικού μετασχηματισμού παραμορφώνει το εμβαδόν και τη μορφή των γραφικών αντικειμένων. Η γεωμετρία του προβολικού μετασχηματισμού χρησιμοποιείται στις χαρτογραφικές προβολές για την απεικόνιση της επιφάνειας της σφαίρας ή του ελλειψοειδούς στο επίπεδο. Έτσι, λοιπόν εφαρμόζονται ισοδύναμες προβολές που διατηρούν αναλλοίωτο το εμβαδόν αλλά παραμορφώνουν σημαντικά τη μορφή των γραφικών αντικειμένων ή σύμμορφες, που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή των γραφικών αντικειμένων αλλά παραμορφώνουν το εμβαδόν. Τέλος, ο προβολικός μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτη την ιδιότητα της συνδεσιμότητας των γραφικών αντικειμένων.

Ως χαρτογραφική αντιστοιχία ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ενός χάρτη A απεικονίζεται σε ένα ή περισσότερα στοιχεία του πεδίου τιμών ενός χάρτη B και αντίστροφα. Ανάλογα, ως χαρτογραφική συνάρτηση ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού ενός χάρτη A απεικονίζεται σε ένα στοιχείο του πεδίου τιμών ενός χάρτη B. Τέλος, ως χαρτογραφικός μετασχηματισμός ορίζεται η δυαδική αντιστοιχία, στην οποία υπάρχει ένα-προς-ένα απεικόνιση των στοιχείων ενός χάρτη A (πεδίο ορισμού) στα στοιχεία ενός χάρτη B (πεδίο τιμών). Οι χαρτογραφικές συναρτήσεις δεν είναι τόσο ισχυροί μετασχηματισμοί όσο οι χαρτογραφικοί μετασχηματισμοί, καθώς, δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει η αντίστροφη μιας χαρτογραφικής συνάρτησης. Με αυτήν την έννοια, για παράδειγμα, η γενίκευση ως χαρτογραφική διαδικασία, είναι μια χαρτογραφική συνάρτηση και όχι ένας χαρτογραφικός μετασχηματισμός γιατί πολλά στοιχεία του αρχικού χάρτη μπορεί να αντιστοιχούν, πιθανά, σε ένα μόνο στοιχείο του τελικού χάρτη.

### 8.1.1 Μετασχηματισμός μετάθεσης

Ο μετασχηματισμός μετάθεσης εφαρμόζεται σε γραφικά αντικείμενα με σκοπό τη μετακίνησή τους σε νέα θέση. Με το μετασχηματισμό μετάθεσης δημιουργείται ένα νέο σημείο το  $(x',y')$  για κάθε αρχικό σημείο του γραφικού αντικειμένου  $(x,y)$ . Ο μετασχηματισμός μετάθεσης χρησιμοποιείται στην πράξη για να μετατεθεί η αφητηρία του συστήματος συντεταγμένων και ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



**Εικόνα 8.2:** Ο μετασχηματισμός μετάθεσης.

Όταν η παράμετρος  $T_x$  του μετασχηματισμού είναι θετική, τότε η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων μετατίθεται προς τα αριστερά, ενώ όταν είναι αρνητική προς τα δεξιά (Εικόνα 8.2). Ανάλογα, όταν η παράμετρος  $T_y$  είναι θετική, τότε η αφετηρία του συστήματος συντεταγμένων μετατίθεται προς τα κάτω, ενώ όταν είναι αρνητική προς τα πάνω (Εικόνα 8.2). Ο μετασχηματισμός μετάθεσης διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις, τις διευθύνσεις και την ιδιότητα της συνδεσιμότητας μεταξύ των γραφικών αντικειμένων.

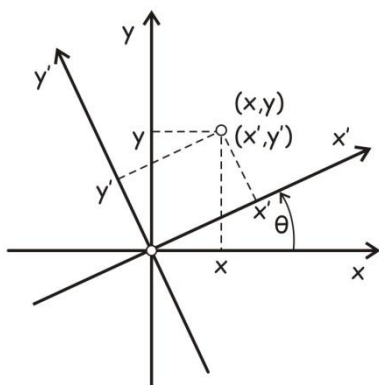
### 8.1.2 Μετασχηματισμός στροφής

Ο μετασχηματισμός στροφής χρησιμοποιείται για να περιστραφούν οι άξονες του συστήματος συντεταγμένων γύρω από την αφετηρία κατά μια ορισμένη γωνία  $\theta$ . Η γωνία στροφής μετράται με αρχή τον άξονα  $x$  και με αριστερόστροφη φορά (Εικόνα 8.3). Ο μετασχηματισμός στροφής δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ο μετασχηματισμός στροφής, συνήθως, χρησιμοποιείται σε εφαρμογές οπτικοποίησης τρισδιάστατων επιφανειών. Σε χαρτογραφικές εφαρμογές, κυρίως, χρησιμοποιείται για να στραφεί, αναλυτικά, ο χάρτης ώστε να αποκτήσει συγκεκριμένο προσανατολισμό. Για παράδειγμα, όταν επιθυμούμε ο κεντρικός μεσημβρινός της περιοχής, που απεικονίζει ο χάρτης, να είναι παράλληλος με τον άξονα  $y$ . Ο

μετασχηματισμός αυτός διατηρεί αναλλοίωτες τις αποστάσεις, τις γωνίες και την ιδιότητα της συνδεσιμότητας μεταξύ των γραφικών αντικειμένων.

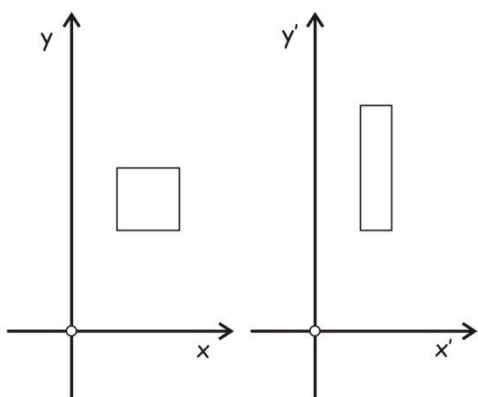


Σχήμα 8.3: Ο μετασχηματισμός στροφής.

8.1.3 Μετασχηματισμός κλίμακας

Όπως αναφέρθηκε και οι δύο προηγούμενοι μετασχηματισμοί διατηρούν αναλλοίωτες τις αποστάσεις μεταξύ γραφικών αντικειμένων. Ο μετασχηματισμός κλίμακας εφαρμόζεται για να μεταβληθεί η μονάδα μέτρησης των αποστάσεων του συστήματος συντεταγμένων και ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Εικόνα 8.4: Ο μετασχηματισμός κλίμακας.

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού κλίμακας έχει ως αποτέλεσμα τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση των γραφικών αντικειμένων. Όταν οι παράμετροι  $S_x$  και  $S_y$  του μετασχηματισμού, δηλαδή, οι κλίμακες κατά τους άξονες  $x$  και  $y$ , είναι μικρότεροι από τη μονάδα, τότε, το γραφικό αντικείμενο σμικρύνεται, ενώ αντίθετα, όταν είναι μεγαλύτεροι από τη μονάδα, τότε, μεγεθύνεται. Όταν οι παράμετροι του

μετασχηματισμού είναι μεταξύ τους ίσοι ( $S_x=S_y$ ), τότε, ο μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτες τις διευθύνσεις ως προς το σύστημα συντεταγμένων. Όταν οι παράμετροι έχουν άνισες τιμές ( $S_x \neq S_y$ ), τότε, το γραφικό αντικείμενο παραμορφώνεται στρεβλά ως προς τη μία διεύθυνση. Στην Εικόνα 8.4 έχει εφαρμοστεί σε ένα τετράγωνο μετασχηματισμός κλίμακας, όπου:  $S_x=0,5$  και  $S_y=2$ .

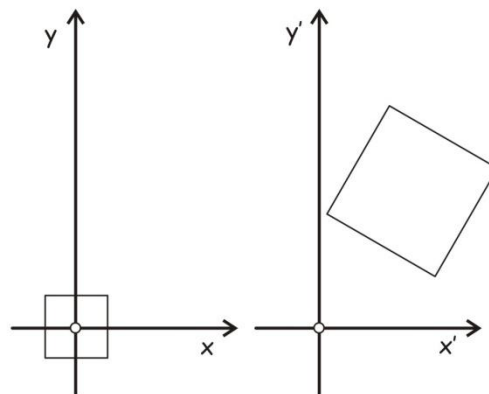
#### 8.1.4 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Η σύνθεση των μετασχηματισμών μετάθεσης, στροφής και κλίμακας - ενιαίας κατά:  $x$  και  $y$  - αποτελεί το μετασχηματισμό ομοιότητας. Χαρακτηριστική ιδιότητα του μετασχηματισμού είναι η διατήρηση των σχημάτων των γραφικών αντικειμένων (Εικόνα 8.5). Ο μετασχηματισμός ομοιότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

όπου:  $T_x$  και  $T_y$  η μετάθεση,  $\theta$  η στροφή - που μετράται από τον άξονα:  $x$ , αριστερόστροφα - και  $S$  η κλίμακα.

Εικόνα 8.5: Ο μετασχηματισμός ομοιότητας.



Οι παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας είναι τέσσερις: δύο μεταθέσεις (μία κατά τον άξονα:  $x$  και μία κατά τον άξονα:  $y$ ), ενιαία στροφή και ενιαία κλίμακα. Ο μετασχηματισμός, συχνά, χρησιμοποιείται με τις ακόλουθες γραμμικές σχέσεις:

$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = -bx + ay + d.$$

Οι γεωμετρικές του παράμετροι (δηλαδή, οι μεταθέσεις, η στροφή και η κλίμακα) συσχετίζονται με τους συντελεστές των γραμμικών σχέσεων ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $d$ ) από τις σχέσεις:

$$\text{Μετάθεση: } T_x=c \text{ και } T_y=d$$

$$\text{Στροφή: } \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{Κλίμακα: } s = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### 8.1.5 Ομοπαράλληλος μετασχηματισμός

Ο ομοπαράλληλος (affine) μετασχηματισμός είναι ένας πλήρης γραμμικός μετασχηματισμός. Η ονομασία του έχει προέλθει από τους γνωστούς γεωμέτρους August Ferdinand Möbius<sup>2</sup> και Leonhard Euler<sup>3</sup> και ουσιαστικά υποδηλώνει ότι, σημεία που απέχουν άπειρη μεταξύ τους απόσταση εξακολουθούν και μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού να απέχουν πάλι άπειρη απόσταση. Με αυτήν την έννοια ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός διατηρεί τα πέρατα του χώρου στον οποίο εφαρμόζεται. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει ευρεία εφαρμογή και επιφέρει ομογενείς παραμορφώσεις στα γραφικά αντικείμενα που εφαρμόζεται (Εικόνα 8.6). Ο όρος ομογενείς παραμορφώσεις υποδηλώνει ότι οι συντελεστές του μετασχηματισμού είναι ανεξάρτητοι της θέσης στο χώρο που εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός. Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_x & \sin\theta_y \\ -\sin\theta_x & \cos\theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

όπου:  $T_x$  και  $T_y$  η μετάθεση,  $\theta_x$  και  $\theta_y$  στροφές των αξόνων:  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα, και  $S_x$  και  $S_y$  κλίμακες κατά τους άξονες:  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

Οι παράμετροι του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού είναι έξι: δύο μεταθέσεις, δύο στροφές και δύο κλίμακες κατά τους άξονες:  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα. Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός συχνά εφαρμόζεται με τις ακόλουθες γραμμικές σχέσεις:

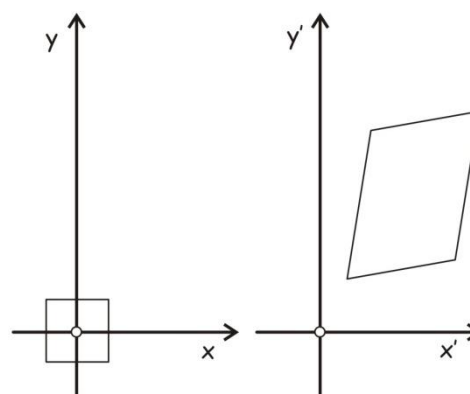
$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = dx + ey + f.$$

<sup>2</sup> Ο γερμανός μαθηματικός και αστρονόμος August Ferdinand Möbius γεννήθηκε το 1790 στο Schulpforta. Υπήρξε μαθητής του Carl Friedrich Gauss. Επινόησε την περίφημη ταινία Möbius μια επιφάνεια που δεν έχει την ιδιότητα του επάνω ή κάτω του χώρου από αυτήν. Απεβίωσε το 1868 στο Leipzig.

<sup>3</sup> Ο ελβετός μαθηματικός και φυσικός Leonhard Euler γεννήθηκε στο Basel το 1707. Είναι γνωστό ότι έλυσε το τοπολογικό πρόβλημα του χάρτη του Königsberg, που αναφέρεται στο αν είναι δυνατό να οριστεί μια διαδρομή που να διέρχεται από τις επτά γέφυρες του ποταμού Pregel που συνέδεαν την ενδοχώρα με δύο νησιά, περνώντας από κάθε μια μόνο μια φορά και να επιστρέψει στο σημείο εκκίνησης. Απεβίωσε το 1783 στη Ρωσία.





Εικόνα 8.6: Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός.

Οι γεωμετρικές του παράμετροι (μετάθεση, στροφές και κλίμακες) συσχετίζονται με τους συντελεστές των γραμμικών σχέσεων ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  και  $f$ ) από τις ακόλουθες σχέσεις:

Μετάθεση:  $T_x=c$  και  $T_y=f$

Στροφές:  $\theta_x = \arctan\left(-\frac{d}{a}\right)$  και  $\theta_y = \arctan\left(\frac{b}{e}\right)$

Κλίμακες:  $S_x = \sqrt{a^2 + d^2}$  και  $S_y = \sqrt{b^2 + e^2}$

Ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός χρησιμοποιείται σε πολλές χαρτογραφικές εφαρμογές. Κυρίως, όμως, εφαρμόζεται στη διαδικασία της γεωγραφικής προσαρμογής των χωρικών δεδομένων που έχουν ψηφιοποιηθεί από υπάρχοντες αναλογικούς χάρτες. Κατά τη γεωγραφική προσαρμογή τα χωρικά δεδομένα μετατρέπονται από το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων της συσκευής ψηφιοποίησης, είτε σε γεωγραφικές συντεταγμένες, ή ορθογώνιες συντεταγμένες ενός προβολικού συστήματος.

### 8.1.6 Οδηγίες εφαρμογής γεωμετρικών μετασχηματισμών

Συνήθως, η εφαρμογή των γεωμετρικών μετασχηματισμών γίνεται με σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι γνωστές και στα δύο συστήματα συντεταγμένων (πριν και μετά το μετασχηματισμό). Τότε, η εφαρμογή του μετασχηματισμού επιβάλλει πρώτα μια φάση προεπεξεργασίας για τον προσδιορισμό των συντελεστών του. Κατά τη φάση της προεπεξεργασίας για κάθε γνωστό σημείο διαμορφώνονται δύο εξισώσεις και στις περισσότερες εφαρμογές έχουμε διαθέσιμες περισσότερες εξισώσεις από τον αριθμό των αγνώστων, δηλαδή, τους συντελεστές του μετασχηματισμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι συντελεστές προσδιορίζονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Για λόγους βελτιστοποίησης της ακρίβειας των υπολογισμών, σε σχέση με το σφάλμα στρογγύλευσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή, συνήθως, οι συντεταγμένες των γνωστών σημείων ανάγονται ως προς το κέντρο βάρους τους.

Σε ορισμένες χαρτογραφικές εφαρμογές τα γραμμικά γεωμετρικά μοντέλα των μετασχηματισμών που αναλύθηκαν δεν επαρκούν για την επίλυση των προβλημάτων, τότε εφαρμόζονται πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί δευτέρου ή, σπάνια, τρίτου βαθμού και για την υλοποίησή τους ακολουθείται η ίδια ακριβώς διαδικασία.

## 8.2 Τομή ευθυγράμμων τμημάτων

Τα βασικότερα αναλυτικά προβλήματα που σχετίζονται με τη διαχείριση των γραφικών αντικειμένων ανάγονται, στις περισσότερες περιπτώσεις, στον προσδιορισμό της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Υπάρχουν πολλές μαθηματικές εκφράσεις για την αναλυτική αναπαράσταση της ευθείας γραμμής. Σε υπολογιστικά προβλήματα περισσότερο χρήσιμη είναι η γενικευμένη μαθηματική έκφραση της ευθείας με ομογενείς συντεταγμένες. Σύμφωνα με τη γενικευμένη μαθηματική της έκφραση με ομογενείς συντεταγμένες, η ευθεία γραμμή ορίζεται από το σύνολο όλων των σημείων ενός επιπέδου που ικανοποιούν την σχέση:

$$ax + by + c = 0.$$

Οι συντελεστές  $a$ ,  $b$  και  $c$  ορίζουν τις χωρικές ιδιότητες της ευθείας γραμμής. Έτσι, η κλίση της ευθείας,  $\alpha$ , ορίζεται ως:

$$\alpha = -\frac{a}{b}.$$

Εάν δύο ευθείες γραμμές είναι παράλληλες, τότε, έχουν την ίδια κλίση. Επιπλέον, κάθε ευθεία γραμμή τέμνει τον άξονα:  $y$  στη θέση:  $\beta$ , η οποία δίνεται συναρτήσει των συντελεστών της από τη σχέση:

$$\beta = -\frac{c}{b}.$$

Η εξίσωση της ευθείας γραμμής συναρτήσει της κλίσης της δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$y = \alpha x + \beta.$$

Για τις ανάγκες της αναλυτικής χαρτογραφίας προτιμάται η αξιοποίηση της γενικευμένης μαθηματικής έκφρασης με ομογενείς συντεταγμένες για την αναπαράσταση της ευθείας γραμμής, γιατί, όταν ο συντελεστής  $b$  είναι ίσος με το μηδέν, τότε, η κλίση της ευθείας δεν ορίζεται στη συμβατική της εξίσωση. Επιπλέον, η γενικευμένη σχέση της ευθείας επιτρέπει την έκφραση της φοράς κατά μήκος της γραμμής. Εάν μια ευθεία γραμμή διέρχεται από δύο σημεία  $p(x_1, y_1)$  και  $q(x_2, y_2)$ , τότε οι συντελεστές ( $a$ ,  $b$  και  $c$ ) της γενικευμένης σχέσης της ευθείας ως προς τις συντεταγμένες των σημείων  $p$  και  $q$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$a = y_1 - y_2,$$

$$b = x_2 - x_1 \text{ και}$$

$$c = y_2 x_1 - y_1 x_2.$$

Τα σημαντικότερα προβλήματα της αναλυτικής χαρτογραφίας σχετίζονται με προβλήματα που έχουν σχέση με ευθύγραμμα τμήματα και όχι ευθείες γραμμές. Από αυτά τα περισσότερα σχετίζονται με τον προσδιορισμό της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων τους. Εάν πράγματι, δύο ευθύγραμμα τμήματα, που ανήκουν σε ευθείες γραμμές με συντελεστές αντίστοιχα:  $a_1, b_1, c_1$  και  $a_2, b_2, c_2$ , τέμνονται τότε η τομή τους  $\tau(\mu, \lambda)$  μπορεί να προκύψει από την επίλυση του γραμμικού συστήματος:

$$a_1 \mu + b_1 \lambda + c_1 = 0 \text{ και}$$

$$a_2 \mu + b_2 \lambda + c_2 = 0,$$

η λύση του οποίου είναι:

$$\mu = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ και}$$

$$\lambda = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \text{ όπου: } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

Όμως, της επίλυσης χρειάζεται να προηγηθεί διερεύνηση με σκοπό να ελεγχθούν όλες οι ειδικές εκείνες περιπτώσεις που η τομή των ευθυγράμμων τμημάτων, είτε δεν υφίσταται, ή είναι οριακή για να προσδιοριστεί σε υπολογιστικό περιβάλλον. Σε κάθε υπολογιστικό περιβάλλον όλοι οι υπολογισμοί γίνονται με βάση το σφάλμα στρογγύλευσης. Το μέγεθος του σφάλματος στρογγύλευσης μπορεί να αποκτήσει γεωμετρική υπόσταση και να θεωρηθεί ως ανοχή σε γεωμετρικά προβλήματα που επιλύονται υπολογιστικά. Έτσι, ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία όταν η απόστασή του από αυτήν είναι μικρότερη από την τιμή της ανοχής, ή δύο σημεία ταυτίζονται όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι μικρότερη της τιμής της ανοχής κ.ο.κ.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την τομή δύο ευθυγράμμων τμημάτων A και B με άκρα τα σημεία 1, 2 και 3, 4 αντίστοιχα. Εξετάζοντας τις θέσεις των δύο άκρων (1 και 2) του πρώτου ευθυγράμμου τμήματος (A) ως προς τα άκρα (3 και 4) του δεύτερου ευθύγραμμου τμήματος (B) προκύπτουν οι ακόλουθες έξι περιπτώσεις διάταξής τους:

1. Τα άκρα 1 και 2 του A βρίσκονται στην ίδια πλευρά του B.
2. Το άκρο 1 βρίσκεται πάνω στην ευθεία του B, ενώ, το 2 δεν βρίσκεται.
3. Τα άκρα 1 και 2 βρίσκονται πάνω στην ευθεία του B.
4. Το άκρο 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία του B, ενώ, το 1 δεν βρίσκεται.
5. Τα άκρα 1 και 2 βρίσκονται εκατέρωθεν του B.
6. Τα άκρα του B (3 και 4) βρίσκονται τόσο κοντά μεταξύ τους, ώστε δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί η αναλυτική εξίσωση της ευθείας (δηλαδή, απέχουν τουλάχιστον όσο είναι η τιμή της ανοχής).

	3&4 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Α	3 ΣΤΟ Α 4 ΟΧΙ	3&4 ΣΤΟ Α	4 ΣΤΟ Α 3 ΟΧΙ	3&4 ΕΚΑΤΕΡΩΘΕΝ ΤΟΥ Α	1&2 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ
1&2 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Β						
1 ΣΤΟ Β 2 ΟΧΙ						
1&2 ΣΤΟ Β						
2 ΣΤΟ Β 1 ΟΧΙ						
1&2 ΕΚΑΤΕΡΩΘΕΝ ΤΟΥ Β						
3&4 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ						

Εικόνα 8.7: Οι 36 ειδικές περιπτώσεις της θέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων Α και Β.

Εάν εξετάσουμε τις θέσεις των δύο άκρων (3 και 4) του δεύτερου ευθυγράμμου τμήματος (B) ως προς τα άκρα (1 και 2) του πρώτου (A) προκύπτουν έξι ανάλογες περιπτώσεις διάταξης. Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πιθανούς συνδυασμούς για τα δύο ευθύγραμμα τμήματα, έχουμε συνολικά 36 ειδικές περιπτώσεις για τη διερεύνηση, οι οποίες απεικονίζονται γραφικά στην Εικόνα 8.7.

Στον Πίνακα 8.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα κάθε μιας από τις 36 (6x6) περιπτώσεις της ύπαρξης ή μη της τομής της διαδικασίας της διερεύνησης. Όπως φαίνεται από τον πίνακα 8.1 ορισμένοι συνδυασμοί των θέσεων των δύο ευθυγράμμων τμημάτων είτε οδηγούν σε αβεβαιότητα ως προς την ύπαρξη της τομής, είτε φαίνονται αρχικά ως αδύνατοι και επισημαίνονται με ερωτηματικό (?).

**Πίνακας 8.1:** Η ύπαρξη ή μη της τομής για τις 36 ειδικές περιπτώσεις της θέσης δύο ευθυγράμμων τμημάτων A και B.

	3&4 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Α	3 ΣΤΟ Α 4 ΟΧΙ	3&4 ΣΤΟ Α	4 ΣΤΟ Α 3 ΟΧΙ	3&4 ΕΚΑΤ/ΘΕΝ ΤΟΥ Α	1&2 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ
1&2 ΣΤΗΝ ΙΔΙΑ ΠΛΕΥΡΑ ΤΟΥ Β	[1]	[1]	[1] (?)	[1]	[1]	[1]
1 ΣΤΟ Β 2 ΟΧΙ	[1]	[2] $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	[2] (?) $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	[2] $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	[2] $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$	[2] (?) $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$
1&2 ΣΤΟ Β	[1] (?)	[2] (?) $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	4 επικ/ψη	[2] (?) $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	[2] (?) Μεσαίο 1&[2]	4 $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$
2 ΣΤΟ Β 1 ΟΧΙ	[1] (?)	[2] $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	[2] (?) $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	[2] $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	[2] $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$	[2] (?) $\mu=x_2$ $\lambda=y_2$
1&2 ΕΚΑΤ/ΘΕΝ ΤΟΥ Β	[1] (?)	[2] $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	[2] (?) μεσαίο [3]&4	[2] $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	[3] τυπική τομή	[3] (?) μεσαίο 1&[2]
3&4 ΠΟΛΥ ΚΟΝΤΑ	[1] (?)	[2] (?) $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	[2] $\mu=x_3$ $\lambda=y_3$	[2] (?) $\mu=x_4$ $\lambda=y_4$	[3] (?) Μεσαίο [3]&4	[2] $\mu=x_1$ $\lambda=y_1$

[1]: Τα ευθύγραμμα τμήματα δεν τέμνονται μεταξύ των άκρων τους.

[2]: Το άκρο του ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στην ευθεία του άλλου.

[3]: Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται κανονικά.

[4]: Τα δύο ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν στην ίδια ευθεία και επικαλύπτονται.

Όμως, η επεξεργασία του προσδιορισμού της τομής γίνεται με πεπερασμένες αριθμητικές παραστάσεις και παρόλο που ορισμένες περιπτώσεις, πιθανά, να εμφανίζονται σπάνια θα πρέπει να αντιμετωπίζονται αλγοριθμικά. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρξει το ερώτημα, αν είναι δυνατόν το άκρο 1 του A να ανήκει την ευθεία που διέρχεται από το B και το άκρο 2 να μην ανήκει σε αυτήν, ενώ ταυτόχρονα, τα άκρα 3 και 4 του B να ανήκουν στην ευθεία που διέρχεται από το A; Κάτι τέτοιο φαίνεται κατ' αρχήν ως αδύνατο και η απάντηση θα έπρεπε να είναι αρνητική. Όμως η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι τελικά καταφατική, αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς που προέρχονται από το σφάλμα στρογγύλευσης των υπολογισμών. Επιπλέον, ακόμα και εάν τα ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται, ο προσδιορισμός της τομής δεν είναι πάντα εύκολος. Είναι πιθανόν οι κλίσεις των δύο ευθυγράμμων τμημάτων να είναι σχεδόν παρόμοιες οπότε ο αριθμητικός υπολογισμός των συντεταγμένων της τομής καθίσταται πρακτικά αδύνατος. Τέλος, η αλγοριθμική αντιμετώπιση του προβλήματος της τομής των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, εκτός των άλλων παραγόντων που αναλύθηκαν διεξοδικά, θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και την ταχύτητα της επεξεργασίας των υπολογισμών. Εν γένει, καταβάλλεται κάθε δυνατή προσπάθεια με σκοπό να ελαχιστοποιηθεί η χρονική διάρκεια εκτέλεσης των υπολογισμών.

Ο προσδιορισμός της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων, όπως αναλύθηκε, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του γεγονότος ότι η αλγοριθμική αντιμετώπιση εύκολων αναλυτικών προβλημάτων, στην πραγματικότητα είναι μια σύνθετη και πολύπλοκη διαδικασία. Αν αναλογιστούμε ότι, σε ένα λογισμικό διαχείρισης χωρικών δεδομένων (δηλαδή, σε ένα σύστημα γεωγραφικών πληροφοριών), ο αντίστοιχος αλγόριθμος καταλαμβάνει κυρίαρχη θέση, τότε, η αποτελεσματικότητα του λογισμικού ουσιαστικά κρίνεται από την πληρότητα της διερεύνησης, την ακρίβεια και σταθερότητα στους υπολογισμούς και την ταχύτητα επίλυσης του συγκεκριμένου αριθμητικού προβλήματος.

### 8.3 Χωρικές ιδιότητες διακριτών σημείων

Στην ενότητα αυτή, εξετάζονται χρήσιμες χωρικές ιδιότητες ενός συνόλου διακριτών σημείων. Οι χωρικές ιδιότητες αναφέρονται στον προσδιορισμό του βαρύκεντρου και στην εκτίμηση της τυπικής απόστασης ενός συνόλου σημείων, στην ανίχνευση της θέσης ενός σημείου ως προς το εάν βρίσκεται εντός ή εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου, και τέλος, σε μια διαδικασία διαμέρισης του χώρου ενός συνόλου σημείων με κριτήριο την εγγύτερη απόσταση, δηλαδή, στο διάγραμμα Voronoi (πολύγωνα Thiessen).

#### 8.3.1 Βαρύκεντρο

Σε πολλές χαρτογραφικές εφαρμογές χρειάζεται να αντικατασταθεί ένα σύνολο σημείων, που αντιπροσωπεύουν μια σημειακή κατανομή χωρικών οντοτήτων, από ένα μόνο σημείο. Για παράδειγμα, ζητείται να αντικατασταθεί ο πληθυσμός όλων των οικισμών της χώρας, που εκφράζεται από τον αριθμό των κατοίκων κάθε οικισμού και τη θέση του οικισμού, από ένα αντιπροσωπευτικό σημείο στο οποίο συγκεντρώνεται το σύνολο του πληθυσμού των οικισμών.

Το καταλληλότερο σημείο είναι το βαρύκεντρο (κέντρο βάρους) των θέσεων όλων των οικισμών. Το βαρύκεντρο, ως θέση, προσδιορίζεται από τη μέση τιμή των συντεταγμένων του συνόλου των σημείων. Στον προσδιορισμό του βαρυκέντρου η τιμή του φαινομένου για το παράδειγμα του πληθυσμού, συμμετέχει ως συνάρτηση βάρους. Έτσι, θεωρώντας ότι το χωρικό φαινόμενο εκφράζεται από  $n$  σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι  $(x_i, y_i)$ , για:  $i=1, 2, \dots, n$  και η τιμή του χωρικού φαινομένου σε αυτά είναι:  $w_i$ , τότε, το βαρύκεντρο προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Με το βαρύκεντρο, όπως προσδιορίζεται από την παραπάνω σχέση ως μέση τιμή των συντεταγμένων, ερμηνεύεται γεωμετρικά η συγχώνευση μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων σε ένα μόνο σημείο.

### 8.3.2 Τυπική απόσταση

Με το βαρύκεντρο γίνεται συγχώνευση μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων δια μέσου του προσδιορισμού της μέσης τιμής των συντεταγμένων των θέσεων. Με την ίδια λογική μπορεί να υπολογιστούν οι τυπικές αποκλίσεις των συντεταγμένων ως έκφραση της διασποράς των θέσεων. Οι τυπικές αποκλίσεις των συντεταγμένων ( $s_x$  και  $s_y$ ) ενός συνόλου σημείων δίνονται από τις σχέσεις:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{και} \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}.$$

Στη συνέχεια, από τις τυπικές αποκλίσεις των θέσεων των σημείων μπορεί να προσδιοριστεί η τυπική απόσταση ( $d_s$ ) μιας σημειακής κατανομής χωρικών οντοτήτων, με την ακόλουθη σχέση:

$$d_s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}.$$

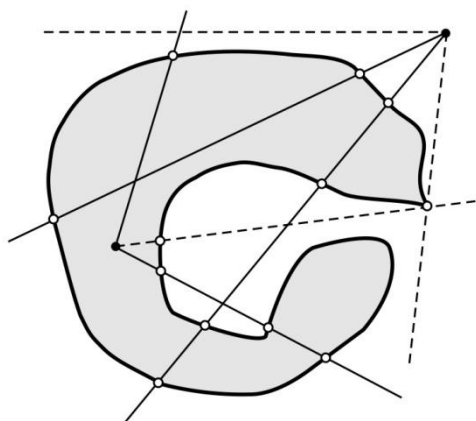
Η τυπική απόσταση εκφράζει τη γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της διασποράς ενός συνόλου σημείων που αντιπροσωπεύουν τις θέσεις μιας χωρικής κατανομής σημειακών οντοτήτων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ποσοτικό κριτήριο της χωρικής τους προσέγγισης.

### 8.3.3 Ανίχνευση σημείου ως εντός ή εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου

Μεγάλος αριθμός αναλυτικών προβλημάτων της χαρτογραφίας καταλήγει στην ανάγκη ανίχνευσης της σχετικής θέσης ενός σημείου ως προς ένα πολύγωνο (κυρτό ή μη-κυρτό). Το γεωμετρικό αυτό πρόβλημα αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια αλγορίθμων, οι οποίοι βασίζονται στον προσδιορισμό της ιδιότητας του πολυγώνου να είναι περιγεγραμμένο (σημείο εκτός πολυγώνου) ή εγγεγραμμένο (σημείο εντός πολυγώνου) σε κύκλο. Οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής σε αναλυτικά χαρτογραφικά προβλήματα λόγω της πολύπλοκης μορφής των χωρικών οντοτήτων. Η καλύτερη αντιμετώπιση στο γεωμετρικό αυτό πρόβλημα επιτυγχάνεται με τη βοήθεια ενός απλού αλγορίθμου, ο οποίος στηρίζεται στο θεώρημα των καμπυλών που διατυπώθηκε από τον Camille Jordan<sup>4</sup>. Σύμφωνα με το θεώρημα των

<sup>4</sup> Ο γάλλος μαθηματικός Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) διετέλεσε καθηγητής στην École Polytechnique. Διατύπωσε το θεώρημα των καμπυλών στο βιβλίο του με τίτλο: *Cours d'analyse* (μτφ. *Μαθηματική Ανάλυση*) που εκδόθηκε το 1887.

καμπυλών, κάθε ημιευθεία που διέρχεται από σημείο εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου τέμνει το πολύγωνο σε άρτιο αριθμό σημείων, ενώ, κάθε ημιευθεία που διέρχεται από σημείο εντός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου τέμνει το πολύγωνο σε περιττό αριθμό σημείων (Εικόνα 8.8).



**Εικόνα 8.8:** Αλγόριθμος ανίχνευσης της θέσης ενός σημείου εντός ή εκτός ενός κυρτού ή μη-κυρτού πολυγώνου.

Το θεώρημα αυτό παρέχει τη δυνατότητα σχεδιασμού ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου για την αντιμετώπιση του προβλήματος, με την εξαίρεση δύο μόνων περιπτώσεων. Η πρώτη, είναι η περίπτωση όπου η ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο και διέρχεται στη συνέχεια από κορυφή του περιγράμματος του πολυγώνου, και η δεύτερη, είναι η περίπτωση όπου η ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο έχει τέτοια διεύθυνση που δεν τέμνει το περίγραμμα του πολυγώνου. Οι δύο αυτές εξαιρέσεις μπορούν να εντοπισθούν με ειδική διερεύνηση και να αντιμετωπισθούν με ευκολία. Επιπλέον, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι από κάποιο σημείο και μετά, ο αλγόριθμος της ανίχνευσης ενός σημείου ως προς το εάν κείται εντός ή εκτός ενός πολυγώνου, καταλήγει στο πρόβλημα προσδιορισμού της τομής δύο ευθυγράμμων τμημάτων, το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 8.2 (*Τομή ευθυγράμμων τμημάτων*).

### 8.3.4 Διάγραμμα Voronoi

Το διάγραμμα Voronoi<sup>5</sup> ενός συνόλου γραφικών αντικειμένων  $S$ , δηλαδή  $S = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$  όπου  $n \geq 3$ , που απαρτίζονται από σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα, διαμερίζει το

<sup>5</sup> Η ονομασία του διαγράμματος προέρχεται από το ρώσο μαθηματικό Georgy Feodosevich Voronoy (1868-1908). Όμως, ο γάλλος μαθηματικός Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) χρησιμοποίησε διδιάστατα και τρισδιάστατα διαγράμματα Voronoi σε εργασία του σχετικά με τη μελέτη των τετραδικών (quadratic) μορφών το 1852. Λίγα χρόνια αργότερα ο βρετανός υγιεινολόγος John Snow χρησιμοποίησε το διάγραμμα Voronoi το 1854, για να απεικονίσει τη θνησιμότητα κατά την επιδημία της χολέρας στο Soho του Λονδίνου. Έτσι, εντόπισε την εστία της μόλυνσης σε αντλία νερού που βρισκόταν στην Board Street. Αρκετά χρόνια αργότερα, ο αμερικανός μετεωρολόγος Alfred H. Thiessen (1872-1956) χρησιμοποίησε



επίπεδο με βάση το νόμο της εγγύτερης απόστασης. Σύμφωνα με το νόμο της εγγύτερης απόστασης σε κάθε στοιχείο του συνόλου των γραφικών αντικειμένων  $I_i$ , που ονομάζεται γενέτειρα του διαγράμματος Voronoi, αντιστοιχεί η εγγύτερη σε αυτό περιοχή. Ως διάμεσος  $B_{ij}$ , ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

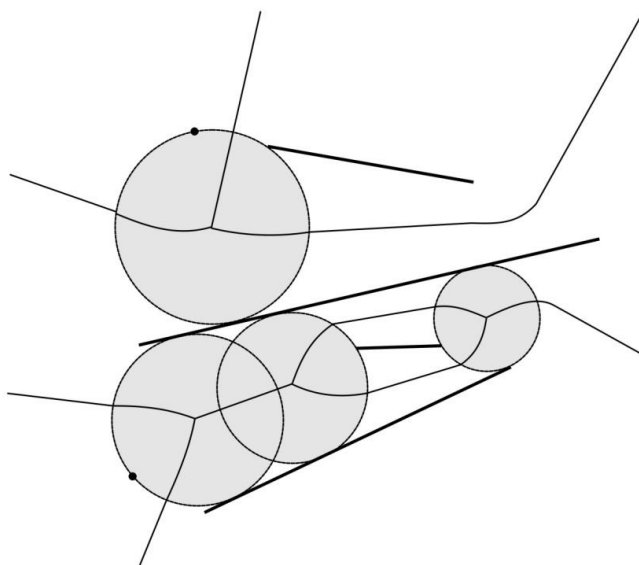
$$B_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, I_i) = d(x, I_j)\},$$

όπου:  $d$  η απόσταση μεταξύ ενός σημείου του επιπέδου και ενός γραφικού αντικειμένου.

Η διάμεσος δύο γραφικών αντικειμένων  $I_i$  και  $I_j$  είναι μια παραγωγίσιμη καμπύλη και αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και παραβολές. Η περιοχή Voronoi  $v_i$  μιας γενέτειρας  $I_i$ , ή αλλιώς το πολύγωνο Thiessen, ορίζεται ως:

$$v_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, I_i) \leq d(x, I_j) \forall j\}.$$

Οι κορυφές των περιοχών Voronoi, δηλαδή τα μη παραγωγίσιμα σημεία του περιγράμματος των περιοχών, ονομάζονται σημεία Voronoi και οι διάμεσοι ακμές Voronoi. Τέλος, το διάγραμμα Voronoi  $V(S)$ , αποτελείται από τα δημιουργούμενα πολύγωνα. Στην Εικόνα 8.9 απεικονίζεται το διάγραμμα Voronoi έξι γραφικών αντικειμένων, που απαρτίζονται από ευθύγραμμα τμήματα και σημεία.



Εικόνα 8.9: Το διάγραμμα Voronoi.

τον ίδιο ακριβώς τρόπο διαμέρισης του χώρου, στην επεξεργασία των μετεωρολογικών δεδομένων το 1911. Για αυτό το λόγο στις διάφορες βιβλιογραφικές πηγές το διάγραμμα αυτό συναντάται με τρεις εναλλακτικές ονομασίες, δηλαδή, διάγραμμα Voronoi, ή Dirichlet ή πολύγωνα Thiessen.

Στα περισσότερα λογισμικά πακέτα διαχείρισης χωρικών δεδομένων (συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών), περιέχονται αλγόριθμοι υπολογισμού των πολυγώνων Voronoi. Έχει αποδειχθεί, ότι το διάγραμμα Voronoi μπορεί να αξιοποιηθεί ως εργαλείο αναπαράστασης και διατήρησης των τοπολογικών σχέσεων μεταξύ των γραφικών αντικειμένων ενός ψηφιακού χάρτη. Επιπλέον, με τη βοήθεια του διαγράμματος Voronoi απλοποιούνται ως προς την αντιμετώπιση ορισμένα από τα παραδοσιακά ερωτήματα (queries), που υποβάλλονται σε ένα σύστημα διαχείρισης χωρικών δεδομένων. Τέλος, με τη βοήθεια του διαγράμματος Voronoi, αντιμετωπίζεται με αποτελεσματικό τρόπο το πρόβλημα της ποσοτικής έκφρασης του μέτρου της εγγύτητας (proximity) μεταξύ διακριτών γραφικών αντικειμένων.

#### 8.4 Τοπολογικές απεικονίσεις

Οι ανάγκες ανάπτυξης εύληπτων μεθόδων απόδοσης, ειδικότερα σε περιπτώσεις θεματικών χαρτών, οδήγησαν τους χαρτογράφους στην επινόηση εξειδικευμένων χαρτογραφικών απεικονίσεων, με τις οποίες ο χώρος μετασχηματίζεται τοπολογικά με αναφορά το αποδιδόμενο μέγεθος μιας χωρικής οντότητας ή παραμορφώνεται με βάση ένα φυσικό νόμο. Στις περιπτώσεις αυτές ο γεωγραφικός χώρος παύει να έχει τη συμβατική του σημασία και ουσιαστικά «αντιπροσωπεύει» το ίδιο το χωρικό φαινόμενο.

Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί το χαρτόγραμμα, ειδική μέθοδος θεματικής απεικόνισης, όπου, η έκταση των απεικονιζόμενων περιοχών δεν αντιστοιχεί με το πραγματικό τους εμβαδόν, αλλά, αντιπροσωπεύει την τιμή του απεικονιζόμενου μεγέθους.

Στην ίδια φιλοσοφία έχουν επινοηθεί απεικονίσεις με τις οποίες ο χώρος μετασχηματίζεται με βάση ένα φυσικό μέγεθος ή ιδιότητα, για παράδειγμα, το χρόνο μετακίνησης, ή οικονομικά μεγέθη, όπως είναι, το κόστος μετακίνησης ή άλλων υπηρεσιών.

Τέλος, με αφετηρία την ευκολία εφαρμογής αναλυτικών μετασχηματισμών δια μέσου της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών, έχουν αναπτυχθεί τρόποι παραμόρφωσης του γεωγραφικού χώρου με βάση φυσικούς νόμους. Για παράδειγμα, έχουν επινοηθεί απεικονίσεις με στις οποίες η κλίμακα μεταβάλλεται με λογαριθμικό νόμο γύρω από κάποιο σημείο (εστιακές απεικονίσεις) ή γύρω από περισσότερα του ενός σημεία (πολυ-εστιακές απεικονίσεις). Οι εστιακές και οι πολυ-εστιακές απεικονίσεις παραμορφώνουν το χάρτη με τρόπο που ομοιάζει με την τοποθέτηση επάνω σε αυτόν ενός ή περισσότερων μεγεθυντικών φακών σε προεπιλεγμένες θέσεις, δηλαδή, στα εστιακά σημεία. Μετά το μετασχηματισμό, ο χώρος γύρω από τα προεπιλεγμένα αυτά σημεία, τα εστιακά σημεία, παρέχει τη δυνατότητα τοποθέτησης μεγάλου αριθμού επιπλέον συμβόλων, καθώς, στις περιοχές αυτές η κλίμακα του χάρτη γίνεται μεγαλύτερη.

## 8.4.1 Αζιμουθιακή ισόχρονη απεικόνιση

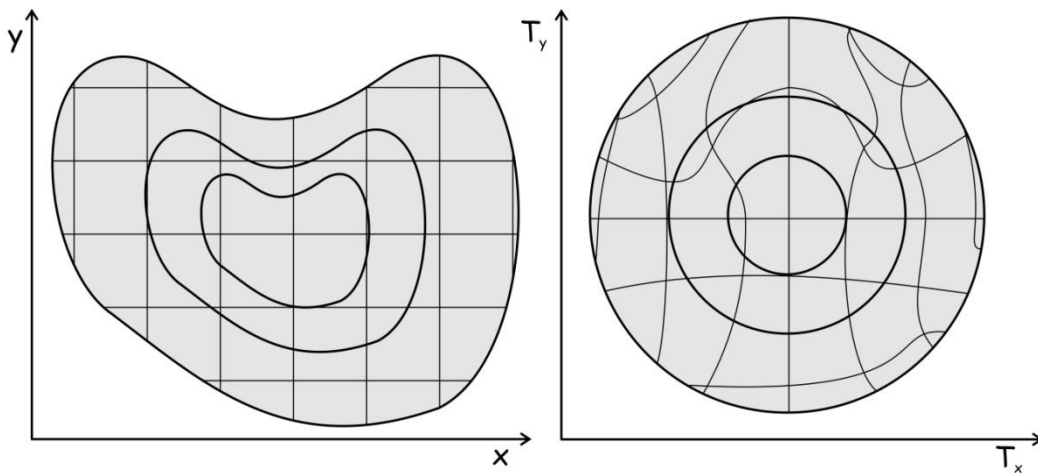
Στηριζόμενη στη συλλογιστική ενός τοπολογικά μετασχηματισμένου χώρου για τις ανάγκες της χαρτογραφικής απεικόνισης έχουν κατασκευαστεί χάρτες, βασισμένοι στην πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα απεικόνιση, μετασχηματίζοντας το γεωγραφικό χώρο σε χρόνο. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται ισόχρονη αζιμουθιακή απεικόνιση και ορίζεται από τις σχέσεις:

$$x' = t \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = t \cos \alpha,$$

όπου:  $(x', y')$  οι συντεταγμένες ενός σημείου  $(x, y)$  μετά το μετασχηματισμό,  $t$  η διάρκεια της μετακίνησης και  $\alpha$  η γωνία διεύθυνσης που δίνεται από την ακόλουθη σχέση, ως προς τον πόλο  $(x_0, y_0)$ , δηλαδή, την αφετηρία των μετακινήσεων που αποτελεί και το κέντρο της απεικόνισης:

$$\alpha = \arctan \frac{x - x_0}{y - y_0}.$$



**Εικόνα 8.10:** Παράδειγμα μετασχηματισμού ισαριθμικής απεικόνισης (αριστερά) σε ισόχρονη αζιμουθιακή απεικόνιση (δεξιά).

Με την ισόχρονη αζιμουθιακή απεικόνιση οι κλασικές ισόχρονες καμπύλες (Εικόνα 8.9 - αριστερά) μετασχηματίζονται σε ομόκεντρους κύκλους (Σχήμα 8.10 - δεξιά) με κέντρο τον πόλο της απεικόνισης. Στην τοπολογική αυτή απεικόνιση ο γεωγραφικός χώρος δεν έχει τη συμβατική του σημασία, με εξαίρεση τις γωνίες διεύθυνσης που διατηρούνται αναλλοίωτες. Για παράδειγμα, η διεύθυνση του «βορρά» δεν έχει τη φυσική σημασία του γεωγραφικού βορρά σε όλες τις θέσεις. Παρ' όλα αυτά ο γεωγραφικός χώρος εύληπτα και αποτελεσματικά «αντικαθιστάται» από το χρόνο μιας

μετακίνησης. Ως άμεση συνέπεια της αρχής στην οποία στηρίζεται η συγκεκριμένη απεικόνιση, είναι πιθανό δύο γεωγραφικά γειτονικές θέσεις να απεικονίζονται με μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, λόγω διαφορετικής διάρκειας της μετακίνησης με τα διαθέσιμα μέσα μεταφοράς, ή και το αντίστροφο. Έτσι, ο χρήστης ενός ανάλογου χάρτη μπορεί να αντλήσει εύκολα και γρήγορα πληροφορίες για τη διάρκεια των μετακινήσεων στο γεωγραφικό χώρο. Με ανάλογο τρόπο έχουν επινοηθεί μέθοδοι απόδοσης κατασκευάζοντας τοπολογικές απεικονίσεις ίσου-κόστους κοκ.

#### 8.4.2 Εστιακές απεικονίσεις

Η ανάγκη για την επινοήση χαρτογραφικών αναπαραστάσεων που μεγεθύνουν τοπικά μια ιδιότητα του χάρτη, για παράδειγμα, τη γραμμική κλίμακα γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο του γεωγραφικού χώρου, οδήγησε στη διαμόρφωση των εστιακών απεικονίσεων. Κλασικά παραδείγματα εστιακών απεικονίσεων αποτελούν εφαρμογές απεικονίσεων με λογαριθμική ή παραβολική μεταβολή της κλίμακας γύρω από ένα κεντρικό σημείο, το οποίο ονομάζεται εστιακό σημείο. Οι εστιακές απεικονίσεις χρησιμοποιούνται για την απόδοση μιας αστικής περιοχής αναπαριστώντας την περιοχή γύρω από το κέντρο της με μεγαλύτερη κλίμακα από αυτήν της περιφέρειας. Η εικόνα του γεωγραφικού χώρου με εφαρμογή αυτής της κατηγορίας των απεικονίσεων ομοιάζει με την παραμόρφωση που επιφέρουν υπερ-ευρυγώνιοι (fish-eye) φακοί (Εικόνα 8.11).



**Σχήμα 8.11:** Παράδειγμα θεματικού χάρτη σε εστιακή απεικόνιση.

Ας θεωρήσουμε ότι  $S_0$  είναι η γραμμική κλίμακα του χάρτη στο εστιακό σημείο,  $R$  η απόσταση ενός σημείου  $P$  του χάρτη από αυτό και  $f(R)$  η συνάρτηση της απόστασης

που περιγράφει την επίδραση της επιθυμητής παραμόρφωσης του χάρτη γύρω από το εστιακό σημείο, τότε η γραμμική κλίμακας σε ακτινική διεύθυνση  $S$ , ως προς την απόσταση  $R$ , στην εστιακή απεικόνιση θα δίνεται από τη σχέση:

$$S = S_0 + S_0 f(R).$$

Για τη γραμμική κλίμακα  $S$ , θα πρέπει:

- i. Να μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση  $R$ .
- ii. Να έχει πεπερασμένη τιμή και να διατηρεί τη συνέχεια της στο εστιακό σημείο, εκεί όπου  $R=0$ .

Έτσι, η συνάρτηση της απόστασης θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$f(R) = \frac{a}{b + cR^{(d_0 + d_1t + d_2t^2 + \dots + e_1u + e_2u^2 + \dots)}},$$

όπου: τα  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d_i$  και  $e_i$  (για  $i=0, 1, 2, \dots$ ) αποτελούν εμπειρικούς συντελεστές που αναπαριστούν τους παράγοντες επιρροής της ιδιότητας ή του φαινομένου με βάση το οποίο επιθυμούμε να μεταβάλλεται η γραμμική κλίμακα.

Επομένως, οι μεταβλητές  $t$  και  $u$  μπορούν να αναπαριστούν μεγέθη όπως είναι ο χρόνος ή το κόστος, αντίστοιχα. Ας περιοριστούμε, όμως στη συνέχεια, στην ανάπτυξη της εστιακής απεικόνισης με βάση μία μόνο μεταβλητή.

Διαιρώντας την παραπάνω σχέση με έναν από τους συντελεστές, για παράδειγμα τον εμπειρικό συντελεστή  $b$ , αυτή απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή:

$$f(R) = \frac{A}{1 + CR^{(d_0 + d_1t + d_2t^2 + \dots)}}, \text{ όπου: } A = \frac{a}{b} \text{ και } C = \frac{c}{b}.$$

Ας επιχειρήσουμε, λοιπόν, να διαμορφώσουμε τις σχέσεις μιας εστιακής απεικόνισης, για την οποία η γραμμική κλίμακα να μεταβάλλεται με το τετράγωνο της απόστασης από το εστιακό σημείο, δηλαδή  $d_0=2$  και  $d_i=0$  (με  $i=1, 2, \dots$ ). Ως αποτέλεσμα έχουμε μια συνάρτηση της απόστασης  $f(R)$  με την ακόλουθη απλή μορφή:

$$f(R) = \frac{A}{1 + CR^2}.$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση της απόστασης ορίζεται πλήρως στο εστιακό σημείο, όπου  $R=0$ , δηλαδή, με την εφαρμογή της δεν παρουσιάζονται προβλήματα ασυνέχειας στο σημείο αυτό. Θεωρώντας ότι, η τιμή της γραμμικής κλίμακας στο εστιακό σημείο είναι  $S_0=1$  για την απλούστευση των υπολογισμών, με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης σε αυτήν που ορίζει τη γραμμική κλίμακα σε ακτινική διεύθυνση  $S$ , θα έχουμε:

$$S = 1 + \frac{A}{1 + CR^2}.$$

Με δεδομένο ότι, η γραμμική κλίμακα μεταβάλλεται με συνέχεια και ακτινικά ως προς το εστιακό σημείο της απεικόνισης, η ακτινική απόσταση μετά το μετασχηματισμό  $r$  θα συσχετίζεται με την αρχική απόσταση  $R$  από την ακόλουθη σχέση:

$$r = SR.$$

Επομένως, η ακτινική απόσταση μετά το μετασχηματισμό είναι συνάρτηση της αρχικής απόστασης και των συντελεστών του μετασχηματισμού:

$$r = R + \frac{AR}{1 + CR^2}.$$

Εάν εξετάσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τους εμπειρικούς συντελεστές της εστιακής απεικόνισης, ο  $A$  ουσιαστικά εκφράζει την "ισχύ" της επιρροής του εστιακού σημείου σε αυτήν και ο  $C$  το ρυθμό της ακτινικής μεταβολής της γραμμικής κλίμακας.

Εάν  $(x_0, y_0)$  είναι οι συντεταγμένες του εστιακού σημείου στον αρχικό χάρτη η ακτινική απόσταση  $R$  ενός σημείου  $P(x, y)$  ως προς αυτήν, θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Οι συντεταγμένες ενός σημείου  $P(x, y)$ , ως προς τις συντεταγμένες του εστιακού σημείου  $(x_0, y_0)$ , θα δίνονται από τη σχέση:

$$x = x_0 + R \sin \alpha = x_0 + dx \text{ και}$$

$$y = y_0 + R \cos \alpha = y_0 + dy,$$

όπου  $\alpha$  η γωνία διεύθυνσης, δηλαδή:

$$\alpha = \arctan \frac{x - x_0}{y - y_0}.$$

Στη μετασχηματισμένη εστιακή απεικόνιση κάθε σημείο  $P$  απεικονίζεται σε νέα θέση  $P'$  ως προς τον αρχικό χάρτη, που οι συντεταγμένες  $(x', y')$ , λαμβάνοντας υπόψη τη μετασχηματισμένη ακτινική απόσταση  $r$ , θα είναι:

$$x' = x_0 + r \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + r \cos \alpha.$$

Είναι προφανές ότι, στην εστιακή απεικόνιση είναι επιθυμητό οι γωνίες διεύθυνσης να διατηρούνται αναλλοίωτες. Με αντικατάσταση της σχέσης μεταξύ της μετασχηματισμένης  $r$  και της αρχικής ακτινικής απόστασης  $R$ , έχουμε:

$$x' = x_0 + \left( R + \frac{AR}{1 + CR^2} \right) \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + \left( R + \frac{AR}{1 + CR^2} \right) \cos \alpha,$$

ή:

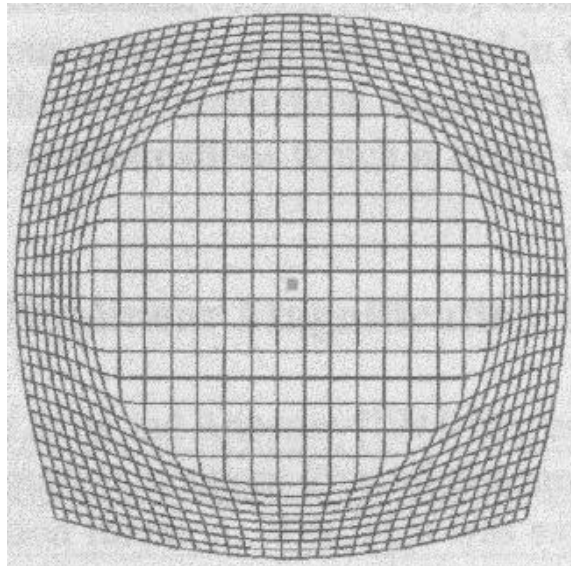
$$x' = x_0 + R \sin \alpha + \frac{AR}{1+CR^2} \sin \alpha \text{ και}$$

$$y' = y_0 + R \cos \alpha + \frac{AR}{1+CR^2} \cos \alpha,$$

Επειδή όμως ισχύει:

$$R \sin \alpha = x - x_0 = dx \text{ και}$$

$$R \cos \alpha = y - y_0 = dy.$$



**Εικόνα 8.12:** Παραμόρφωση κανάβου από εστιακή απεικόνιση.

Με αντικαταστάσεις τελικά έχουμε τις τελικές σχέσεις που ορίζουν τη συγκεκριμένη εστιακή απεικόνιση:

$$x' = x + \frac{A dx}{1+CR^2} = x + \Delta x \text{ και}$$

$$y' = y + \frac{A dy}{1+CR^2} = y + \Delta y.$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού που αναπτύχθηκε, ολόκληρος ο αρχικός χάρτης μπορεί να απεικονιστεί γύρω από ένα εστιακό σημείο, με τρόπο που η γραμμική κλίμακα να ακολουθεί έναν επιθυμητό νόμο. Στην εικόνα 8.12 παρουσιάζεται η παραμόρφωση που επιφέρει σε ένα τετραγωνικό κανάβο το παράδειγμα μιας εστιακής απεικόνισης γύρω από το εστιακό της σημείο.

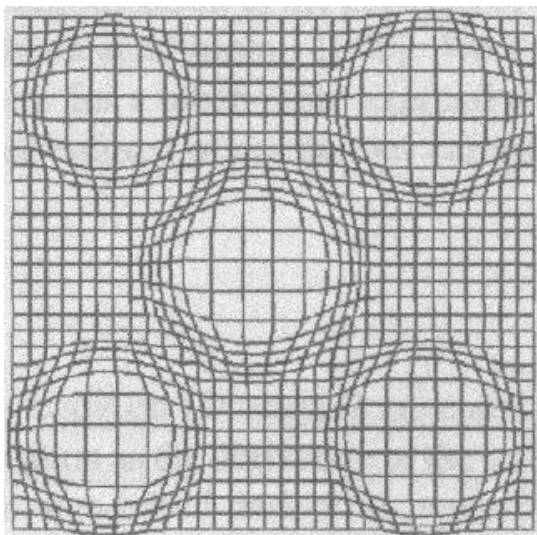
## 8.4.3 Πολυ-εστιακές απεικονίσεις

Οι πολυ-εστιακές απεικονίσεις προκύπτουν, ως γενίκευση της έννοιας των εστιακών απεικονίσεων, όταν ενδιαφερόμαστε να αποδώσουμε μια χωρική κατανομή που επηρεάζεται από έναν πεπερασμένο αριθμό εστιακών σημείων. Με τις πολυ-εστιακές απεικονίσεις γίνεται η παραδοχή ότι σε κάθε σημείο του χάρτη η τιμή της γραμμικής κλίμακας προέρχεται από το άθροισμα των επαγωγικών επιδράσεων κάθε εστίας ξεχωριστά.

Οι σχέσεις της εστιακής απεικόνισης που αναπτύχθηκαν στην προηγούμενη ενότητα παρατηρείται ότι διαμορφώνονται από τις συντεταγμένες  $(x, y)$  κάθε σημείου του αρχικού χάρτη στις οποίες προστίθεται μία επαύξηση  $(\Delta x$  και  $\Delta y)$ , η οποία εξαρτάται από την ακτινική απόσταση από το εστιακό σημείο  $R$  και τους εμπειρικούς συντελεστές  $A$  και  $C$  του μετασχηματισμού. Επομένως, για  $n$  πεπερασμένα εστιακά σημεία θα έχουμε:

$$x' = x + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = x + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \text{ και}$$

$$y' = y + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \dots + \Delta y_n = y + \sum_{i=1}^n \Delta y_i.$$



**Εικόνα 8.13:** Παράδειγμα παραμόρφωσης κανάβου από πολύ-εστιακή απεικόνιση.

Αν θεωρήσουμε, λοιπόν,  $n$  πεπερασμένα εστιακά σημεία με συντεταγμένες  $(x_i, y_i)$ , με  $i=1, 2, \dots, n$ , και τους εμπειρικούς συντελεστές  $A_i$  και  $C_i$ , οι σχέσεις της πολυεστιακής απεικόνισης και οι ακτινικές αποστάσεις  $R_i$  από τα εστιακά σημεία θα έχουν ως ακολούθως:



$$x' = x + \sum_{i=1}^n \frac{A_i(x - x_i)}{1 + C_i R_i^2} \text{ και}$$

$$y' = y + \sum_{i=1}^n \frac{A_i(y - y_i)}{1 + C_i R_i^2},$$

όπου:

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Στην Εικόνα 8.13 απεικονίζεται η παραμόρφωση που επιφέρει σε ένα τετραγωνικό κάναβο μια πολυ-εστιακή απεικόνιση με πέντε εστιακά σημεία.

### 8.5 Βιβλιογραφία

- Boutoura Ch., 1994, "Logarithmic Urban Thematic Mapping in MIS Environment", *Cartographica*, 31(1): 41-53.
- Boutoura Ch., E. Livieratos & P. Patias, 1999, "Focal Photomaps for Urban Use", *Proceedings of 19th International Cartographic Conference*, Ottawa: International Cartographic Association, pp. 1489-96.
- Clarke K. C., 1990, *Analytical and Computer Cartography*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Cromley R.G., 1992, *Digital Cartography*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Douglas, D., 1990, "It makes me so CROSS", In: *Introductory Readings in geographic Information Systems*, (Eds. D. J. Peuquet and D. F. Marble), London: Taylor & Francis, pp. 303-7.
- Gold Ch., P.R. Remmele & Th. Roos, 1997, "Voronoi Methods in GIS", In *Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems* (Eds. M. van Freveld, J. Nievergelt, Th. Roos and P. Widmayer), Berlin: Springer-Verlag, pp. 21-35.
- Kadmon N. & E. Shlomi, 1978, "A Polyfocal Projection for Statistical Surfaces", *The Cartographic Journal*, 15(1): 36-41.
- Καρράς Γ., 1995, "Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων στην Φωτογραμμετρία", Εκπαιδευτικές Σημειώσεις. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Keahey T.A., 1999, "Area-Normalized Thematic Views", *Proceedings of 19th International Cartographic Conference*, Ottawa: International Cartographic Association, pp. 859-68.
- Klein F., 1939, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Geometry*, (Translated by E. R. Hedrick & C.A. Noble), New York: Dover Pub.

- Νάκος Β. & Β. Φιλίππακοπούλου, 1982, "Θεματική απεικόνιση τοπολογικά μετασχηματισμένου οδικού δικτύου με αυτόματη διαδικασία", Διήμερη Επιστημονική Συνάντηση: *Θεματικοί Χάρτες και Καταγραφές στην Οικιστική Ανάπτυξη*, Αθήνα: Φωτογραμμετρική Εταιρία Ελλάδος.
- Νάκος Β., 1990, "Ψηφιακή απεικόνιση χαρτογραφικών φαινομένων βασισμένη στη θεωρία της Κλασματικής Γεωμετρίας", Διδακτορική Διατριβή. Αθήνα: Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- Sheelagh M. & T Carpendale, 2000, "Examining comprehension issues in elastic presentation space", *Information Design Journal*, 10(1): 58-68.
- Snyder J.P., 1987, "'Magnifying-Glass' Azimuthal Map Projections", *The American Cartographer*, 14(1): 61-8.

## Κεφάλαιο 9

### 9. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

#### 9.1 Εισαγωγή

Είναι γενικά αποδεκτή η διαπίστωση ότι η γενίκευση αποτελεί μια πολύπλοκη χαρτογραφική διεργασία με στόχους που ακόμα και σήμερα δεν έχουν οριστεί με ολοκληρωμένο και κατηγορηματικό τρόπο, λόγω των υποκειμενικών παραγόντων που την καθορίζουν. Οι χαρτογράφοι, στην προσπάθεια διεξοδικής αντιμετώπισης των ανοικτών προβλημάτων της γενίκευσης εκτός από τις αλγοριθμικές τεχνικές έχουν επιστρατεύσει μεθόδους που βασίζονται στην αναπαράσταση της γνώσης, και στα συστήματα που υποστηρίζουν τη λήψη αποφάσεων.

Στην ενότητα αυτή γίνεται ανάλυση των αρχών που διέπουν τη γενίκευση χωρικών δεδομένων και των αλγορίθμων με τη βοήθεια των οποίων υλοποιείται σε ψηφιακό περιβάλλον. Πρώτα, εισάγονται οι αρχές και οι έννοιες που πλαισιώνουν τη γενίκευση. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι σημαντικότεροι αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών και καταγράφονται τα κυριότερα προβλήματα των μεθόδων της γενίκευσης χαρτογραφικών γραμμών. Τέλος, εξετάζονται δυνατοί τρόποι αντιμετώπισης των λειτουργικών μειονεκτημάτων που παρουσιάζουν ορισμένοι από τους χρησιμοποιούμενους αλγόριθμους γενίκευσης.

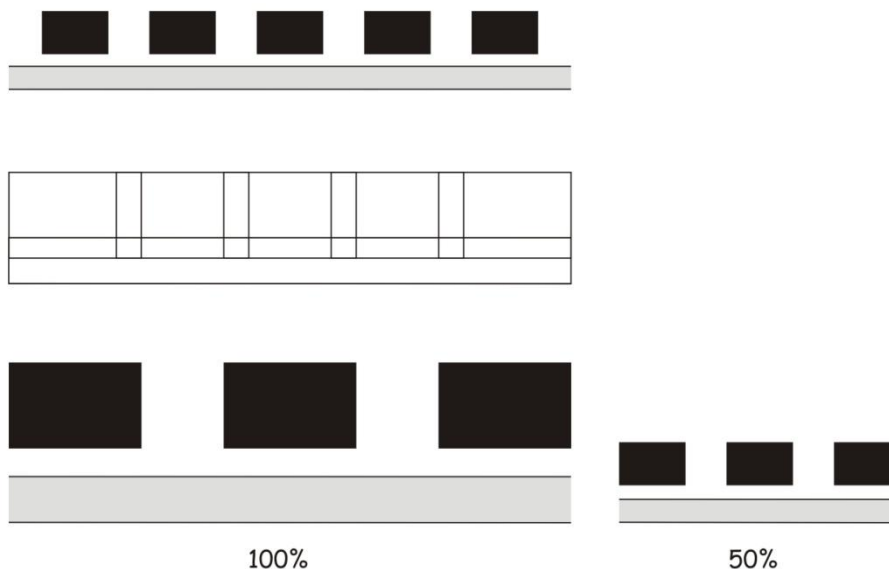
#### 9.2 Βασικά στοιχεία της γενίκευσης

##### 9.2.1 Το πρόβλημα αλλαγής της κλίμακας

Παραδοσιακά, τα χωρικά φαινόμενα απεικονίζονται σε χάρτες που διαφέρουν ως προς την κλίμακα και το σκοπό, για παράδειγμα, υπάρχουν τοπογραφικοί, γεωλογικοί, τουριστικοί, οδικοί κα. χάρτες. Οι εθνικές σειρές των τοπογραφικών χαρτών της χώρας παράγονται σε ένα εκτεταμένο εύρος κλιμάκων, το οποίο περιλαμβάνει τις κλίμακες: 1:5.000, 1:25.000, 1:50.000, 1:100.000, 1:250.000, 1:500.000 και 1:1.000.000.

Παρατηρώντας τις διάφορες κλίμακες, βλέπουμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι αλλαγές είναι τέτοιες ώστε σε κάθε σειρά χαρτών η κλίμακα να είναι ίση με το ήμισυ της εκάστοτε προηγούμενης. Όταν ισχύει η παραπάνω σχέση για τη μεταβολή της κλίμακας μεταξύ διαδοχικών σειρών χαρτών, σε κάθε φύλλο χάρτη κάθε σειράς απεικονίζεται έκταση ίση με το τετραπλάσιο της έκτασης του φύλλου της προηγούμενης σειράς. Η διαπίστωση αυτή οδηγεί στο γεγονός ότι με τη γενίκευση καλείται να αντιμετωπιστεί, σε κάθε παράγωγη κλίμακα, η απεικόνιση ενός μέρους της πληροφορίας του αρχικού χάρτη στο ένα τέταρτο του χώρου.

Επιπρόσθετα, καθώς η κλίμακα του χάρτη μειώνεται, ορισμένα από τα χαρτογραφικά σύμβολα με μικρό, σχετικά, μέγεθος πλησιάζουν τα όρια της οπτικής αντίληψης. Τα όρια της οπτικής αντίληψης, με τη σειρά τους, καθορίζουν τις ελάχιστες διαστάσεις των συμβόλων. Για παράδειγμα, ένα συμπαγές μαύρο τετράγωνο, που συμβολίζει τη χωρική οντότητα ενός κτηρίου, θα πρέπει να έχει διαστάσεις τουλάχιστον ίσες με 0,35mm στο χάρτη ή δύο παράλληλες γραμμές, που συμβολίζουν ένα δρόμο, θα πρέπει να απέχουν μεταξύ τους το πολύ 0,25mm στο χάρτη. Έτσι κάθε σύμβολο του παράγωγου χάρτη, του οποίου οι διαστάσεις προκύπτουν μικρότερες από αυτές που ορίζουν τα όρια της οπτικής αντίληψης και είναι απαραίτητο να αποδοθεί, θα πρέπει να μεγεθύνεται ώστε να είναι οπτικά ευανάγνωστο. Για παράδειγμα, σε ένα χάρτη κλίμακας 1:100.000, όλα τα κτήρια που έχουν πλευρές μικρότερες από 35m, σχεδόν το σύνολο των τυπικών κτηρίων, θα πρέπει να μεγεθυνθούν μέχρι αυτό το ελάχιστο οπτικά αντιληπτό μέγεθος. Ανάλογο πρόβλημα εμφανίζεται και με την απόδοση της χωρικής οντότητας των δρόμων, θεωρώντας ότι οι περισσότεροι δρόμοι έχουν πλάτος μικρότερο από 25m.



**Εικόνα 9.1:** Η ανάγκη της μετάθεσης και μεγέθυνσης των συμβόλων κατά τη γενίκευση.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω επισημάνσεις, προκύπτει ως συμπέρασμα ότι ο χαρτογράφος καλείται να αντιμετωπίσει δύο αλληλοεξαρτώμενα σημαντικά προβλήματα όταν μειώνεται η κλίμακα του χάρτη, αφενός, τη μείωση του διαθέσιμου φυσικού χώρου του χάρτη, αφετέρου, την ανάγκη της μεγέθυνσης των φυσικών διαστάσεων των χωρικών οντοτήτων, ώστε να είναι ευανάγνωστα.

Στη Εικόνα 9.1 παρουσιάζονται, με συμβολικό τρόπο, τα δύο αυτά σημαντικά προβλήματα της γενίκευσης και υποδεικνύονται ορισμένοι τρόποι αντιμετώπισής τους. Πιο συγκεκριμένα, στον παράγωγο χάρτη απεικονίζεται ένα υποσύνολο των χωρικών οντοτήτων που εμφανίζονται στον αρχικό χάρτη και μάλιστα ορισμένες από αυτές μετατίθενται ώστε να μη συμπίπτουν.

### 9.2.2 Ορισμοί της γενίκευσης

Στη χαρτογραφία, η διεργασία με την οποία ένας χάρτης μετατρέπεται σε έναν παράγωγο με μικρότερη κλίμακα από αυτήν του αρχικού, ονομάζεται γενίκευση. Η γενίκευση περιγράφει τη μείωση της πολυπλοκότητας σε ένα χάρτη, αποδίδει με έμφαση τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά του χώρου, ενώ αντίθετα, εξαφανίζει όσα από αυτά δεν είναι σημαντικά, διατηρεί τις λογικές και κατηγορηματικές σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων του χάρτη, και τέλος, διατηρεί την αισθητική του ποιότητα. Η γενίκευση στοχεύει στη δημιουργία χαρτών με γραφική ενάργεια, με τρόπο που η εικόνα του χάρτη να είναι εύκολα αντιληπτή από το χρήστη και το μήνυμα που μεταφέρει ο χάρτης να καθίσταται ευανάγνωστο. Η σύνθεση των χαρακτηριστικών της γενίκευσης εκφράζεται από τον ορισμό που της έχει αποδώσει η Διεθνής Χαρτογραφική Ένωση (International Cartographic Association - I.C.A.):

«Γενίκευση είναι η επιλεγμένη και απλοποιημένη αναπαράσταση των λεπτομερειών που είναι κατάλληλες ως προς την κλίμακα ή και το σκοπό του χάρτη.»

Ας σημειωθεί ότι η κλίμακα, σύμφωνα με τα παραπάνω, δεν αποτελεί το μοναδικό παράγοντα που επηρεάζει τη γενίκευση. Ο σκοπός του χάρτη καθορίζει εξ ίσου με την κλίμακα, ως παράγοντας, τη διεργασία της γενίκευσης. Ένας αποτελεσματικός χάρτης θα πρέπει να αποδίδει εκείνες τις χωρικές οντότητες που είναι απαραίτητες για τις ανάγκες των χρηστών του. Με το σκεπτικό αυτό ένας χάρτης που απευθύνεται σε ποδηλάτες δίνει έμφαση στην απεικόνιση διαφορετικών δρόμων από ένα χάρτη που απευθύνεται σε οδηγούς αυτοκινήτων. Άλλοι παράγοντες, που επηρεάζουν τη γενίκευση ενός χάρτη, είναι η ποιότητα των δεδομένων, οι προδιαγραφές με τις οποίες σχεδιάζονται τα σύμβολα του χάρτη, για παράδειγμα, το πάχος και το χρώμα των γραμμικών συμβόλων που αναπαριστούν τους δρόμους, τα διοικητικά όρια κλπ., καθώς και οι τεχνικές δυνατότητες αναπαραγωγής του. Οι παράγοντες που επηρεάζουν της διεργασία της γενίκευσης ονομάζονται βαθμοί της γενίκευσης.

Η ανάπτυξη των ψηφιακών μεθόδων στη χαρτογραφία διεύρυνε το εννοιολογικό πλαίσιο και το περιεχόμενο της γενίκευσης. Η διαπίστωση αυτή με μια πρώτη ματιά φαίνεται παράδοξη. Θα μπορούσε κανείς να περιμένει ότι με τη μετάβαση από ένα στατικό αναλογικό χάρτη σε δυναμικούς ψηφιακούς χάρτες, που αποδίδονται, για παράδειγμα, στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, θα ξεπερνούταν η ανάγκη για γενίκευση. Και αυτό γιατί η αξιοποίηση της τεχνολογίας των ηλεκτρονικών υπολογιστών παρέχει δυνατότητες επιλογής και σύνθεσης υποσυνόλων των χωρικών πληροφοριών δια μέσου ερωτοαποκρίσεων με ευελιξία, δυνατότητες μεγέθυνσης και διερεύνησης των χωρικών δεδομένων, σε οποιαδήποτε επιθυμητή κλίμακα. Όμως, η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για δύο κυρίως λόγους. Πρώτα, γιατί τα χωρικά φαινόμενα και η χωρική επεξεργασία συνήθως εξαρτώνται από την κλίμακα. Τα χωρικά δεδομένα πρέπει να αναλύονται και να οπτικοποιούνται σε κλίμακες που έχει νόημα και είναι κατανοητή είτε η μοντελοποίηση των χωρικών φαινομένων, που αντιπροσωπεύουν, είτε η επεξεργασία τους. Ο δεύτερος λόγος αναφέρεται στον ίδιο το χαρακτήρα της γενίκευσης που συμπυκνώνει μια θεμελιακή διανοητική δραστηριότητα, η οποία συνδυάζει στοιχεία ευρύτερων επιστημονικών θεωρήσεων και στοιχεία καθημερινής πρακτικής, εξάσκησης και λήψης αποφάσεων. Χωρίς την εστίαση στις ουσιαστικές όψεις ενός προβλήματος μπορεί κανείς να χαθεί σε λεπτομέρειες που δεν έχουν σημασία και τελικά να μην είναι σε θέση να κατανοήσει τις γενικευμένες μορφές που από μόνες τους επιτρέπουν τη μετάδοση της χωρικής πληροφορίας αποτελεσματικά. Επομένως, με την έννοια αυτή η γενίκευση αποτελεί μια επεξεργασία θεμελιακής σημασίας στη μεγιστοποίηση του πληροφοριακού περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων, όταν το περιεχόμενο της δομείται, συντηρείται ή μεταδίδεται. Ένας ορισμός της γενίκευσης που να υλοποιείται με ψηφιακές μεθόδους, ο οποίος αντανακλά τις παραδοσιακές αναλογικές μεθόδους, είναι ο ακόλουθος:

«Ως ψηφιακή γενίκευση ορίζεται η διαδικασία δημιουργίας, από ένα σύνολο αρχικών δεδομένων, ενός παράγωγου συνόλου χαρτογραφικών δεδομένων κωδικοποιημένων με συμβολικό ή ψηφιακό τρόπο, με εφαρμογή χωρικών μετασχηματισμών ή μετασχηματισμών των ιδιοτήτων τους.»

Εξετάζοντας την ψηφιακή εκδοχή της γενίκευσης από μια διαφορετική οπτική μπορούμε να την κατανοήσουμε ως μια διεργασία αναγωγής της χωρικής ανάλυσης, η οποία επηρεάζει και το θεματικό αλλά και το γεωμετρικό περιεχόμενο της χωρικής βάσης δεδομένων. Η γενίκευση του θεματικού περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων σημαίνει αλλαγή του σχήματος της δομής της βάσης δεδομένων, μείωση του αριθμού των χωρικών οντοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτήν, απαλοιφή ορισμένων ιδιοτήτων, ή τέλος, αντικατάσταση ορισμένων τιμών των ιδιοτήτων, για παράδειγμα, αντικατάσταση πολλών διαφορετικών τιμών από τη μέση τιμή τους. Η γενίκευση του γεωμετρικού περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων, με αναγωγή της χωρικής ανάλυσης, υλοποιείται με τη σειρά της με απαλοιφή ορισμένων χαρτογραφικών αντικειμένων ή μέρους τους, με την απλοποίηση της μορφής τους, ή

τέλος με μετάθεση της θέσης τους ώστε να εξασφαλίζεται η οπτική τους διάκριση (Εικόνα 9.1).

### 9.2.3 Κίνητρα για γενίκευση

Στις προηγούμενες ενότητες έγινε έμμεση αναφορά στα κίνητρα που οδηγούν το χαρτογράφο να εφαρμόσει τη διεργασία της γενίκευσης. Είναι όμως χρήσιμο, η αναφορά αυτή στα κίνητρα για γενίκευση να γίνει με πλήρη και ολοκληρωμένο τρόπο. Μια ολοκληρωμένη καταγραφή των κινήτρων για γενίκευση περιλαμβάνει:

1. Ανάπτυξη χωρικής βάσης δεδομένων:

Δόμηση ενός ψηφιακού μοντέλου του πραγματικού κόσμου, με χωρική ανάλυση και περιεχόμενο, κατάλληλα του σκοπού των εφαρμογών που θα υποστηρίζονται από τη χωρική βάση δεδομένων και συμπλήρωσή της με δεδομένα.

- Επιλογή αντικειμένων.
- Αναπαράσταση αντικειμένων.

2. Οικονομική αξιοποίηση πηγών δεδομένων:

Ελαχιστοποίηση στην αξιοποίηση των υπολογιστικών διαθεσίμων με φιλτράρισμα και επιλογή σε ελεγχόμενα επίπεδα ακριβειών με τη βοήθεια ανοχών.

- Εξοικονόμηση χώρου αποθήκευσης δεδομένων.
- Εξοικονόμηση χρόνου επεξεργασίας δεδομένων.

3. Αύξηση/εξασφάλιση σταθερότητας δεδομένων:

Δόμηση της χωρικής βάσης των δεδομένων εξασφαλίζοντας την απαλοιφή των σφαλμάτων και την ασυμβατότητα μεταξύ των στοιχείων της με αναγωγή των ανεπιθύμητων λεπτομερειών.

- Εξάλειψη ανεπιθύμητης λεπτομέρειας υψηλής συχνότητας.
- Ανίχνευση και εξάλειψη σφαλμάτων συλλογής δεδομένων.
- Ομογενοποίηση (τυποποίηση) χωρικής ανάλυσης και ακρίβειας ετερογενών δεδομένων.

4. Παράγωγα δεδομένα και χάρτες για πολλαπλούς σκοπούς:

Παραγωγή δεδομένων και χαρτών σύμφωνα με συγκεκριμένες προαπαιτήσεις από μια λεπτομερή χωρική βάση δεδομένων πολλαπλού σκοπού.

- Παραγωγή υποσυνόλων των δεδομένων μικρότερης κλίμακας ή/και συγκεκριμένης θεματολογίας.
- Σύνθεση χαρτών ειδικού σκοπού.

- Αποφυγή συμπτώσεων.

#### 5. Βελτιστοποίηση οπτικής επικοινωνίας:

Ανάπτυξη ευκρινών και αποτελεσματικών οπτικοποιήσεων.

- Διατήρηση της ευκρίνειας των οπτικοποιήσεων της βάσης δεδομένων.
- Μετάδοση μηνύματος με εστίαση σε ένα κεντρικό θέμα.
- Υιοθέτηση ιδιοτήτων διαφορετικών μέσων απόδοσης.

Εξετάζοντας τα παραπάνω σημεία η γενίκευση με την κλασική της σημασία αναφέρεται κυρίως στο σημείο 5 (οπτική επικοινωνία) και λιγότερο στο σημείο 4, ενώ τα σημεία 1, 2 και 3 αναφέρονται, κυρίως, στην ψηφιακή εκδοχή της γενίκευσης. Ειδικότερα, οι εφαρμογές της γενίκευσης, που αναφέρονται στο σημείο 5, έχουν πολύ μεγάλη σημασία λόγω της αξιοποίησης της τεχνολογίας των συστημάτων γεωγραφικών πληροφοριών. Σε εφαρμογές αυτής της τεχνολογίας ο χρήστης, καλείται πολλές φορές να απεικονίσει τα χωρικά δεδομένα δια μέσου συσκευών που διαφέρουν σημαντικά ως προς τη διακριτική ανάλυση. Για παράδειγμα, τα ίδια δεδομένα πρέπει να αποδίδονται με μονάδες απόδοσης ειδικές για χάραξη φιλμ με υψηλή ανάλυση ώστε να δημιουργηθούν τα δοκίμια ενός έντυπου χάρτη, σε αντίθεση με τις οθόνες ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι οποίες διαθέτουν, συγκριτικά, χαμηλότερη διακριτική ανάλυση.

### 9.3 Οι διαφορετικές όψεις της γενίκευσης

Οι αιτίες και τα κίνητρα που μας οδηγούν στην εφαρμογή ψηφιακών μεθόδων γενίκευσης αναδεικνύουν με σαφήνεια πόσο αποκλίνουσες είναι οι προαπαιτήσεις για την υλοποίηση αυτών των διεργασιών. Επομένως, μπορούμε να δούμε τη γενίκευση μέσα από την οπτική διαφορετικών όψεων.

#### 9.3.1 Γενίκευση μοντέλου δεδομένων

Η γενίκευση του μοντέλου μιας χωρικής βάσης δεδομένων λαμβάνει χώρα από τη στιγμή που ορίζεται και δομείται η ίδια η βάση των δεδομένων. Θεωρώντας ότι μια χωρική βάση δεδομένων δεν είναι τίποτα άλλο από μια συνοπτική αναπαράσταση ενός μέρους του πραγματικού κόσμου, θα πρέπει να εφαρμόζεται ένα συγκεκριμένο επίπεδο γενίκευσης, με την έννοια της αφαίρεσης, της επιλογής και της απλοποίησης, ώστε να διαμορφώνονται υποσύνολα πληροφοριών κατάλληλα για τις ανάγκες της αναπαράστασης του περιεχομένου της. Παρ' όλο που το θέμα αυτό εξετάζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση από την οπτική της γενίκευσης, στην πράξη αντιμετωπίζεται με τις μεθόδους γεωμετρικού σχεδιασμού των βάσεων δεδομένων, ορίζοντας τις κατηγορίες των δεδομένων, τα χαρακτηριστικά τους, καθώς επίσης και τις μεθόδους



δειγματοληψίας, ορίζοντας τη χωρική ανάλυση, σε συνδυασμό με την ερμηνευτική ικανότητα του ανθρώπου.

Η διαδικασία όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα, ουσιαστικά αντιστοιχεί με τα στάδια προετοιμασίας των δεδομένων για την κατασκευή ενός παραδοσιακού χάρτη. Στο περιβάλλον των ψηφιακών συστημάτων η γενίκευση μπορεί να επηρεάζει άμεσα τα ίδια τα δεδομένα, με τα οποία δημιουργείται ο χάρτης και όχι μόνον τη γραφική εικόνα του χάρτη. Ως κυρίαρχος στόχος για τη διαμόρφωση ενός γενικευμένου μοντέλου δεδομένων είναι ο έλεγχος της διαδικασίας της μείωσης των δεδομένων για την ικανοποίηση διακριτών σκοπών. Η ανάγκη για μείωση των δεδομένων μπορεί να προέρχεται από διάφορους λόγους, όπως είναι η ελαχιστοποίηση του χρόνου επεξεργασίας των δεδομένων ή του χώρου αποθήκευσής τους ή ακόμα και η ευκολία μετάδοσης των δεδομένων δια μέσου δικτύων επικοινωνίας, για παράδειγμα, δια μέσου του διαδικτύου. Με τον τρόπο αυτό διαμορφώνονται σύνολα δεδομένων με διαδοχικά μειούμενη ακρίβεια ή/και χωρική ανάλυση. Η δυνατότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν αντιμετωπίζονται προβλήματα ολοκλήρωσης δεδομένων με ετερογενή χαρακτηριστικά χωρικής ανάλυσης ή ακρίβειας, ή προβλήματα που σχετίζονται με την ανάπτυξη βάσεων δεδομένων πολλαπλών χωρικών αναλύσεων. Παρόλο που η έννοια του γενικευμένου μοντέλου δεδομένων μπορεί να αξιοποιηθεί στα στάδια προεπεξεργασίας για τις ανάγκες της γενίκευσης είναι σημαντικό το ότι δεν συσχετίζεται με κατηγορηματικό τρόπο με οποιαδήποτε διαδικασία οπτικοποίησης των δεδομένων.

### 9.3.2 Χαρτογραφική γενίκευση

Με τον όρο χαρτογραφική γενίκευση περιγράφεται η διαδικασία της γενίκευσης των δεδομένων για τις ανάγκες της χαρτογραφικής οπτικοποίησής τους. Η ανάγκη για οπτικοποίηση διαφοροποιεί τη χαρτογραφική γενίκευση από τη γενίκευση του μοντέλου των δεδομένων, δεδομένου ότι καθορίζει το γραφικό συμβολισμό του περιεχομένου μιας χωρικής βάσης δεδομένων. Έτσι, η χαρτογραφική γενίκευση συνδέεται άμεσα με προβλήματα που σχετίζονται με τη διαδικασία δημιουργίας των χαρτογραφικών συμβόλων, όπως είναι η μετάθεση των συμβόλων, καθώς και της οπτικής αντίληψης. Οι στόχοι βέβαια της χαρτογραφικής γενίκευσης παραμένουν βασικά ίδιοι με τους στόχους της γενίκευσης στη συμβατική της εκδοχή. Η σύγχρονη τεχνολογία των υπολογιστικών συστημάτων διεύρυνε, όμως, το πεδίο των προβλημάτων που καλείται να αντιμετωπίσει η χαρτογραφική γενίκευση με ενδεικτικά παραδείγματα προερχόμενα από: τη μεγέθυνση/σμίκρυνση της εικόνας του χάρτη στην οθόνη του υπολογιστή, την οπτικοποίηση των δεδομένων για τις ανάγκες της επιστημονικής διερεύνησης, ή την προοδευτική πύκνωση/αραίωση της πληροφορίας με απεικόνιση διαφορετικών επιπέδων λεπτομερειών στις τρισδιάστατες προοπτικές απεικονίσεις για την απόδοση της αίσθησης του «βάθους» του πλάνου. Οι ανάγκες για την αντιμετώπιση ανάλογων εφαρμογών διαμόρφωσαν συνθήκες επέκτασης των διεργασιών της χαρτογραφικής γενίκευσης σε νέα πεδία.

#### 9.4 Γεωμετρικοί τελεστές χαρτογραφικής γενίκευσης

Η χαρτογραφική γενίκευση εφαρμόζεται στα χωρικά δεδομένα εκτελώντας συγκεκριμένους μετασχηματισμούς που έχουν ως στόχο την τροποποίηση της γεωμετρίας ή των ιδιοτήτων τους. Για τις ανάγκες της γενίκευσης, οι διάφορες τεχνικές με τις οποίες επιτελείται η τροποποίηση της γεωμετρίας των χωρικών δεδομένων ή των ιδιοτήτων τους ονομάζονται τελεστές της γενίκευσης. Οι γεωμετρικοί τελεστές της χαρτογραφικής γενίκευσης τροποποιούν τη θέση, τη μορφή, ή ακόμα και το είδος του συμβολισμού των χωρικών δεδομένων. Η τροποποίηση των ιδιοτήτων των χωρικών δεδομένων κυρίως εστιάζεται στη διαδικασία της ταξινόμησης, η οποία έχει ως σκοπό την κατάταξη των δεδομένων σε διακριτές ομάδες, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τη στατιστική επεξεργασία.

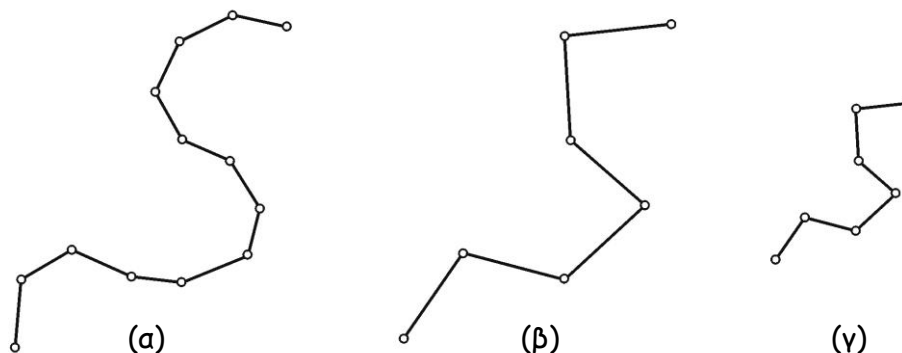
Οι τελεστές της γενίκευσης αρχικά επινοήθηκαν ως ψηφιακές τεχνικές προσομοίωσης της διαδικασίας της χειροκίνητης γενίκευσης, αλλά πλέον έχουν εξελιχθεί και εμπλουτιστεί από καθαρά αναλυτικές τεχνικές. Στα πλαίσια της αναλυτικής χαρτογραφίας, εξετάζονται οι τελεστές με τους οποίους γίνεται τροποποίηση της γεωμετρίας των χωρικών δεδομένων. Ειδικότερα, αναλύονται οι τελεστές της απλοποίησης, εξομάλυνσης, συγχώνευσης σημειακών/γραμμικών/επιφανειακών συμβόλων, μετάπτωσης, εκλέπτυνσης, μεγέθυνσης, ενίσχυσης και μετάθεσης.

##### 9.4.1 Απλοποίηση

Η ψηφιακή αναπαράσταση κάθε χωρικής οντότητας πρέπει να είναι ακριβής διατηρώντας τη μορφή, τη θέση και το χαρακτήρα της. Παράλληλα, πρέπει να καταβληθεί κάθε δυνατή προσπάθεια, κατά την αναπαράσταση, να διατηρηθούν τα τρία αυτά στοιχεία της ακρίβειας των χωρικών οντοτήτων με όσο το δυνατό μικρότερο αριθμό αναγκαίων σημείων. Κατά το στάδιο της ψηφιοποίησης των γραμμικών χωρικών οντοτήτων, ή του περιγράμματος επιφανειακών χωρικών οντοτήτων, συνήθως, συλλέγονται περισσότερα σημεία από όσα χρειάζονται για την ακριβή αναπαράστασή τους. Στη συνέχεια, απαιτείται να εφαρμοστεί μια διαδικασία απαλοιφής των ανεπιθύμητων λεπτομερειών και διατήρησης ενός υποσυνόλου των αρχικών συντεταγμένων, που να ορίζουν όσα σημεία είναι αντιπροσωπευτικά της μορφής της χωρικής οντότητας. Με τον τελεστή της απλοποίησης επιλέγονται να διατηρηθούν όσα σημεία περιγράφουν τη μορφή των χωρικών οντοτήτων και να απαλειφθούν όσα σημεία πλεονάζουν ή δεν είναι απαραίτητα για την απόδοση του χαρακτήρα της μορφής τους στην παράγωγη κλίμακα.

Με τη διαδικασία της απλοποίησης μειώνεται ο αριθμός των σημείων που αντιπροσωπεύει μια χωρική οντότητα αλλά οι συντεταγμένες των παράγωγων σημείων παραμένουν αναλλοίωτες. Η χρήση του τελεστή της απλοποίησης, πέραν της εφαρμογής του για τις ανάγκες της διαδικασίας της γενίκευσης, παρέχει και ορισμένα πρακτικά οφέλη στη διαχείριση των χωρικών οντοτήτων, μειώνοντας τους χρόνους

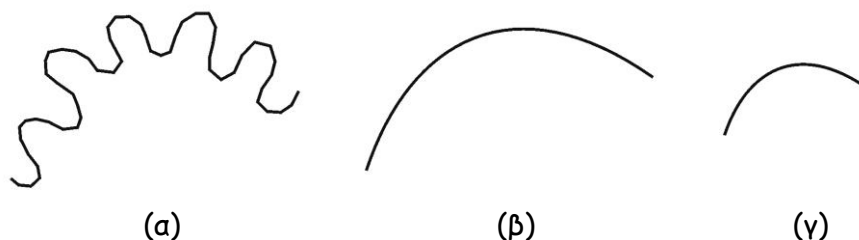
επεξεργασίας και απόδοσης των χωρικών δεδομένων. Σε επόμενες ενότητες γίνεται αναλυτικότερη περιγραφή του τελεστή απλοποίησης παρουσιάζοντας τους σημαντικότερους αλγορίθμους απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών. Στην Εικόνα 9.2 παρουσιάζεται, αφαιρετικά, η αρχή του τελεστή απλοποίησης.



**Εικόνα 9.2:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή της απλοποίησης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

#### 9.4.2 Εξομάλυνση

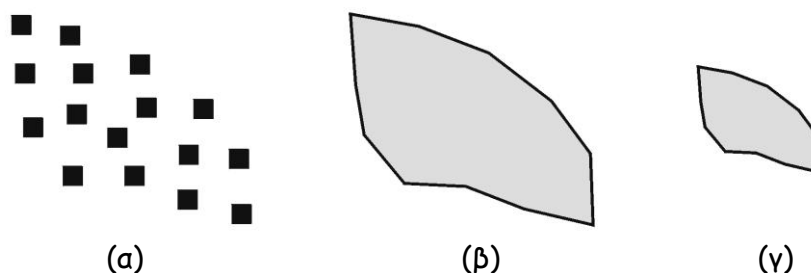
Ο τελεστής εξομάλυνσης επιδρά σε μια γραμμή μετακινώντας τις συντεταγμένες των κορυφών της, με σκοπό την απάλειψη μικρών διαταραχών, ώστε να διατηρείται η κυρίαρχη τάση της μορφής της. Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή της εξομάλυνσης έχει ως στόχο τη μείωση των γωνιακών παραμορφώσεων της μορφής μιας γραμμής που προέρχονται από τη διαδικασία της ψηφιοποίησης. Ο τελεστής εξομάλυνσης παράγει γραμμές στις οποίες έχει τροποποιηθεί η μορφή τους ώστε να βελτιωθεί η ποιότητα της αισθητικής απόδοσης των χωρικών οντοτήτων που αντιπροσωπεύουν. Στην Εικόνα 9.3 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή εξομάλυνσης.



**Εικόνα 9.3:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή εξομάλυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

#### 9.4.3 Συγχώνευση σημειακών συμβόλων

Πολλές φορές, κατά τη διαδικασία της χαρτογραφικής γενίκευσης, είναι απαγορευτικό ένα σύνολο από σημειακά σύμβολα να αποδοθεί στην παράγωγη κλίμακα, όταν βρίσκονται κοντά το ένα με το άλλο σε μια περιορισμένη έκταση. Είναι, όμως, πιθανόν ο σκοπός για τον οποίο κατασκευάζεται ο χάρτης να επιβάλλει την ανάγκη να απεικονιστεί το φαινόμενο που αντιπροσωπεύουν τα σημειακά αυτά σύμβολα. Για να επιτευχθεί ο συγκεκριμένος στόχος είναι δυνατό να γίνει συγχώνευση των σημειακών συμβόλων, σε ένα σύμβολο ανώτερης τάξης, ώστε, η χωρική οντότητα να απεικονιστεί με επιφανειακό σύμβολο. Για παράδειγμα, εάν το διάστημα του χώρου μεταξύ των κτηρίων στην κλίμακα του παράγωγου χάρτη είναι μικρότερο από το φυσικό τους μέγεθος, τότε, τα σημειακά σύμβολα των κτηρίων μπορούν να συγχωνευτούν και να συμβολιστούν, με τη βοήθεια ενός επιφανειακού συμβόλου, ως κατοικημένη περιοχή. Στην Εικόνα 9.4 παρουσιάζεται, σχηματικά, η αρχή του τελεστή συγχώνευσης σημειακών συμβόλων.



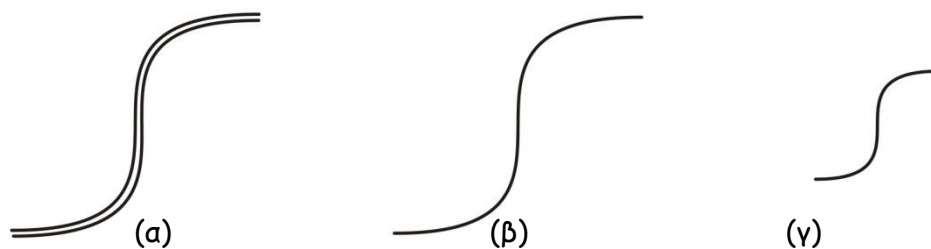
**Εικόνα 9.4:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης σημειακών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

#### 9.4.4 Συγχώνευση γραμμικών συμβόλων

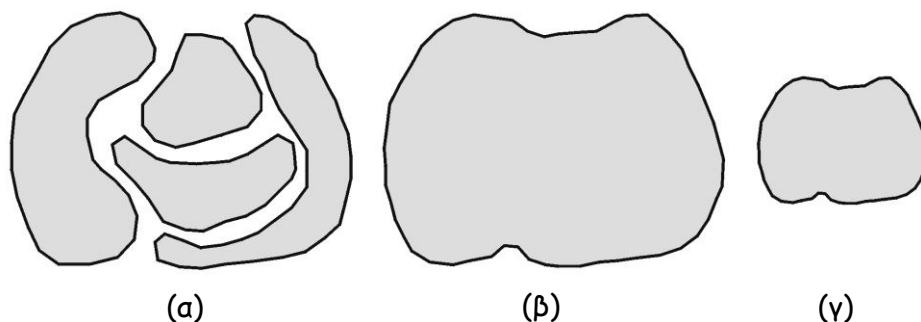
Όταν η μεταβολή της κλίμακας μεταξύ αρχικού και παράγωγου χάρτη είναι αδύνατο να αναπαραστήσει με διακριτό τρόπο δύο γραμμικά σύμβολα που βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, λόγω των γραφικών περιορισμών, τότε τα σύμβολα αυτά πρέπει να συγχωνευτούν σε ενιαίο γραμμικό σύμβολο. Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός συγχώνευσης ονομάζεται τελεστής συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση γενίκευσης μιας εθνικής οδού, που στο βασικό χάρτη απεικονίζεται από δύο παράλληλα γραμμικά σύμβολα με σταθερή διαχωριστική απόσταση μεταξύ τους ίση με το όριο διαχωρισμού της οπτικής αντίληψης. Στην περίπτωση αυτή, κάθε γραμμικό σύμβολο αντιπροσωπεύει και μια κατεύθυνση κυκλοφορίας. Στον παράγωγο χάρτη, λόγω των γραφικών περιορισμών, δεν παρέχεται ο απαραίτητος χώρος να απεικονιστούν και τα δύο γραμμικά σύμβολα.

Τότε, τα δύο γραμμικά σύμβολα πρέπει να συγχωνευτούν σε ένα, που μπορεί να τοποθετηθεί στη διάμεσο των δύο αρχικών και να αναπαριστά την εθνική οδό στην παράγωγη κλίμακα. Στην Εικόνα 9.5 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων.



**Εικόνα 9.5:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης γραμμικών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).



**Εικόνα 9.6:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

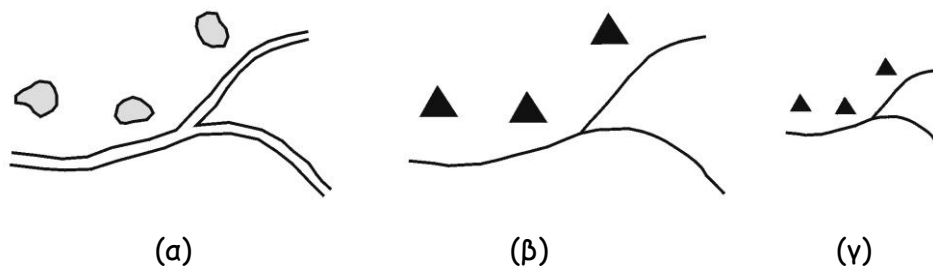
#### 9.4.5 Συγχώνευση επιφανειακών συμβόλων

Ο τελεστής συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων μετασχηματίζει πολλά μικρής έκτασης, διακριτά και γειτονικά επιφανειακά σύμβολα σε λιγότερα επιφανειακά σύμβολα, αλλά, με μεγαλύτερη έκταση. Τα επιφανειακά σύμβολα του παράγωγου χάρτη διατηρούν τα βασικά χαρακτηριστικά της μορφής της ευρύτερης περιοχής, ανεξάρτητα από τη μεταβολή της κλίμακας. Για παράδειγμα, η απόδοση μιας περιοχής με πολλές μικρές ως προς την έκταση λίμνες σε πολύ κοντινή απόσταση η μία από την άλλη, σε σχέση με τους γραφικούς περιορισμούς, μπορεί να γίνει στον παράγωγο χάρτη

με τρόπο που να συγχωνεύονται ορισμένες γειτονικές λίμνες σε μία, ώστε να διατηρούνται τα αρχικά χαρακτηριστικά του βασικού χάρτη. Περιοριστικός παράγοντας της διαδικασίας συγχώνευσης είναι η μη ύπαρξη συγκεκριμένων κανόνων για την απόδοση του βαθμού των λεπτομερειών στις διάφορες κλίμακες. Έτσι, ουσιαστικά οι ανάγκες του τελικού χρήστη του χάρτη είναι αυτές που καθορίζουν τις λεπτομέρειες που πρέπει να διατηρηθούν. Στην Εικόνα 9.6 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή συγχώνευσης επιφανειακών συμβόλων.

#### 9.4.6 Μετάπτωση

Καθώς η κλίμακα του χάρτη μειώνεται, πολλά επιφανειακά σύμβολα, λόγω των γραφικών περιορισμών, πρέπει να συμβολιστούν με σημειακά ή γραμμικά σύμβολα. Ο τελεστής, με τη βοήθεια του οποίου τα επιφανειακά σύμβολα μετασχηματίζονται σε σημειακά ή γραμμικά κατά τη μείωση της κλίμακας, ονομάζεται τελεστής μετάπτωσης. Χωρικές οντότητες, όπως είναι οι οικισμοί, τα αεροδρόμια, οι ποταμοί, κλπ., απεικονίζονται συχνά στους χάρτες μεγάλων κλιμάκων με χρήση επιφανειακών συμβόλων. Στους χάρτες μεσαίων και μικρών κλιμάκων, οι φυσικές διαστάσεις των χωρικών αυτών οντοτήτων σε συνδυασμό με την κλίμακα και τους γραφικούς περιορισμούς, οδηγούν στην ανάγκη της απεικόνισης, για παράδειγμα, των οικισμών και των αεροδρομίων με σημειακά σύμβολα και των ποταμών με γραμμικό σύμβολο. Ως βασικό κριτήριο, για την εφαρμογή του τελεστή μετάπτωσης, χρησιμοποιείται συχνά μια τιμή επιφανειακής ανοχής. Στην Εικόνα 9.7 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μετάπτωσης.

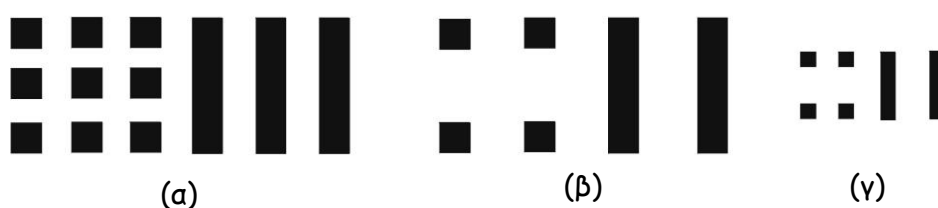


**Εικόνα 9.7:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μετάπτωσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

#### 9.4.7 Εκλέπτυνση

Σε πολλές περιπτώσεις πολλά όμοια στη μορφή σύμβολα συσσωρεύονται σε μια περιορισμένη έκταση του βασικού χάρτη. Λόγω των γραφικών περιορισμών, στις περιπτώσεις αυτές, είναι αδύνατο να αποδοθούν όλα τα σύμβολα του βασικού χάρτη στον παράγωγο. Τότε, επιλέγεται να συμβολιστεί ένα υποσύνολο των αρχικών

συμβόλων φροντίζοντας να διατηρηθεί αναλλοίωτο το σχήμα της αρχικής χωρικής τους κατανομής στον παράγωγο χάρτη. Ο γεωμετρικός τελεστής, με τη βοήθεια του οποίου γίνεται η απαραίτητη απαλοιφή των πλεοναζόντων συμβόλων, ονομάζεται τελεστής εκλέπτυνσης. Συνήθως με τον τελεστή εκλέπτυνσης απαλείφονται τα μικρότερα σε μέγεθος σύμβολα ή αυτά που δεν συνεισφέρουν σημαντικά στο αρχικό σχήμα της χωρικής τους κατανομής.

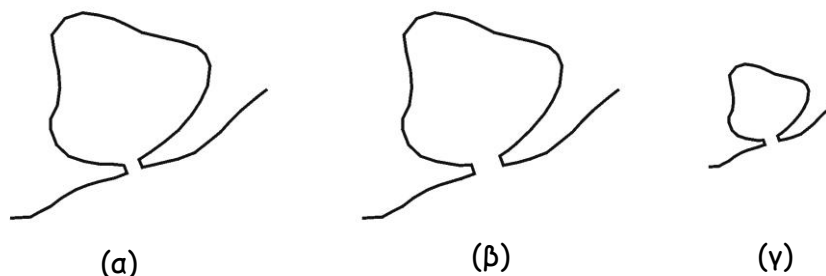


**Εικόνα 9.8:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή εκλέπτυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

Κατά την εφαρμογή του τελεστή αν οι θέσεις των συμβόλων που διατηρούνται στον παράγωγο χάρτη παραμένουν ίδιες με τις αρχικές η διαδικασία ονομάζεται εκλέπτυνση. Στις περιπτώσεις που είναι απαραίτητο να γίνουν μικρές τροποποιήσεις των αρχικών θέσεων των συμβόλων, τότε, η διαδικασία ονομάζεται τυποποίηση. Στην Εικόνα 9.8 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή εκλέπτυνσης.

#### 9.4.8 Μεγέθυνση

Σε ορισμένες περιπτώσεις το μέγεθος ορισμένων συμβόλων μπορεί να χρειαστεί να μεγεθυνθεί με σκοπό στον παράγωγο χάρτη να απεικονίζεται ευανάγνωστο. Ο κατάλληλος γεωμετρικός τελεστής με τη βοήθεια του οποίου μεγεθύνονται ορισμένα επιλεγμένα σύμβολα σε ένα χάρτη ονομάζεται τελεστής μεγέθυνσης.

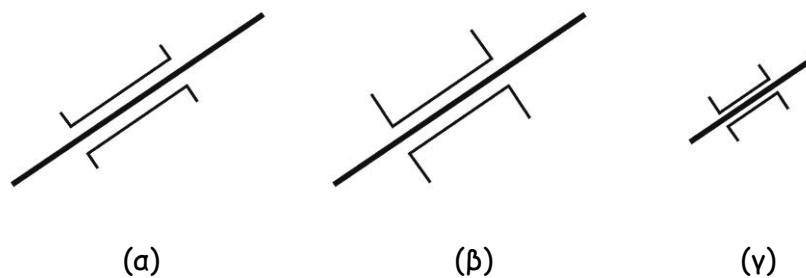


**Εικόνα 9.9:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μεγέθυνσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

Για παράδειγμα, σε κλειστούς κόλπους χρειάζεται να γίνει τροποποίηση του ανοίγματός τους, ώστε να γίνει εφικτή η απόδοση πληροφοριών απαραίτητων για ασφαλή πλοήγηση στη μικρότερη κλίμακα (Εικόνα 9.9). Ανάλογη διαδικασία εφαρμόζεται σε περιπτώσεις χαρτογραφικής γενίκευσης ποταμών ή ρεμάτων, που σχηματίζουν πολύ έντονους επάλληλους μαιάνδρους. Η ενίσχυση ορισμένων συμβόλων, με την εφαρμογή της μεγέθυνσης για τις ανάγκες της γενίκευσης, αποτελεί ένα σημαντικό τμήμα της αφαιρετικής διεργασίας που χαρακτηρίζει κάθε χαρτογραφική αναπαράσταση. Η εφαρμογή του τελεστή μεγέθυνσης πολλές φορές τροποποιεί τις θέσεις ορισμένων συμβόλων, που σε συνδυασμό με τα όρια της οπτικής αντίληψης αποτρέπει τη χωρική τους σύμπτωση στον παράγωγο χάρτη. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με επιτυχία μεταθέτοντας τοπικά τις θέσεις των συμβόλων εκεί όπου εντοπίζεται η σύμπτωση. Στην Εικόνα 9.9 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μεγέθυνσης.

#### 9.4.9 Ενίσχυση

Το σχήμα και το μέγεθος των συμβόλων κατά τη χαρτογραφική γενίκευση χρειάζεται, σε ορισμένες περιπτώσεις, να υποστούν μερική διόγκωση ή να υπερτονιστούν ορισμένα από τα χαρακτηριστικά τους με σκοπό να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις του παράγωγου χάρτη. Ο τελεστής με τον οποίο επιτυγχάνεται ο τονισμός ή η διόγκωση των συμβόλων ονομάζεται τελεστής ενίσχυσης. Σε αντίθεση με τον τελεστή μεγέθυνσης, ο τελεστής ενίσχυσης δεν τροποποιεί συνολικά τις διαστάσεις των συμβόλων αλλά μερικώς τη μορφή ή και το μέγεθός τους.



**Εικόνα 9.10:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή ενίσχυσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

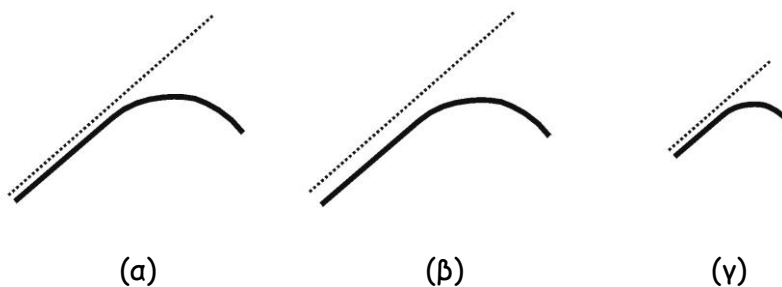
Ο τελεστής της ενίσχυσης εφαρμόζεται, για παράδειγμα, όταν στον παράγωγο χάρτη χρειάζεται να γίνει τροποποίηση του μεγέθους βαθμωτών συμβόλων, σε όσες περιπτώσεις οι διαφοροποιήσεις του μεγέθους δεν μπορούν να γίνουν οπτικά αντιληπτές στον παράγωγο χάρτη. Επιπλέον πολλές φορές, στις περιπτώσεις όπου εντοπίζεται το σύμβολο μιας γέφυρας στη θέση μιας ανισόπεδης διασταύρωσης του



οδικού δικτύου, τότε, εφαρμόζοντας τον τελεστή ενίσχυσης το περίγραμμα του συμβόλου της γέφυρας στον παράγωγο χάρτη υφίσταται τροποποίηση ορισμένων διαστάσεών του, σε μεγαλύτερες από τις φυσικές, για να επιτευχθεί σαφής οπτική διαφοροποίηση (Εικόνα 9.10). Με την εφαρμογή του τελεστή ενίσχυσης δεν υπερτονίζεται η σημασία του συμβολισμού στον παράγωγο χάρτη, απλά, γίνεται βελτιστοποίηση του εφαρμοζόμενου συμβολισμού για να είναι οπτικά αντιληπτός στην παράγωγη κλίμακα. Στην Εικόνα 9.10 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή ενίσχυσης.

#### 9.4.10 Μετάθεση

Οι τεχνικές με τις οποίες γίνεται μετάθεση της θέσης των συμβόλων έχουν ως στόχο να εξαλείψουν τα προβλήματα που δημιουργούνται, κατά τη χαρτογραφική γενίκευση, με τη χωρική σύμπτωση των συμβόλων στον παράγωγο χάρτη. Ο γεωμετρικός τελεστής, με την εφαρμογή του οποίου μετακινούνται οι θέσεις των συμβόλων με σκοπό να εξευρεθεί ο απαραίτητος χώρος για να συμβολιστούν όσες χωρικές οντότητες βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, ονομάζεται τελεστής μετάθεσης.



**Εικόνα 9.11:** Παράδειγμα εφαρμογής του τελεστή μετάθεσης: (α) βασική κλίμακα (100%), (β) εφαρμογή του τελεστή στη βασική κλίμακα και (γ) παράγωγη κλίμακα (50%).

Τα όρια της οπτικής αντίληψης καθιστούν αναγκαία τη μετάθεση των συμβόλων από την ακριβή οριζοντιογραφική θέση της χωρικής οντότητας που αναπαριστούν. Η μετάθεση των συμβόλων πηγάζει από το γεγονός, ότι κάθε σύμβολο έχει πεπερασμένες διαστάσεις που καταλαμβάνουν στην επιφάνεια του χάρτη μεγαλύτερο χώρο απ' ό τι οι φυσικές διαστάσεις της χωρικής οντότητας που αναπαριστάται από αυτό. Ορισμένες χωρικές οντότητες βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, με αποτέλεσμα τα σύμβολα που τις αναπαριστούν να εμφανίζουν χωρική σύμπτωση στο χάρτη. Η χωρική σύμπτωση των συμβόλων αντιμετωπίζεται με τρεις τρόπους: (1) μετακινώντας τα σύμβολα από την ακριβή τους θέση (μετάθεση), (2) τροποποιώντας τα σύμβολα (αλλαγή ή διακοπή συμβολισμού), ή τέλος, (3) διαγράφοντας το σύμβολο από το χάρτη. Στην ενότητα 9.6 αναλύονται ορισμένες τεχνικές αντιμετώπισης των χαρτογραφικών

προβλημάτων της χωρικής σύμπτωσης των συμβόλων κατά τη διεργασία της χαρτογραφικής γενίκευσης. Στην Εικόνα 9.11 παρουσιάζεται σχηματικά η αρχή του τελεστή μετάθεσης.

### 9.5 Βασικοί αλγόριθμοι γενίκευσης

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφούν ορισμένοι βασικοί αλγόριθμοι κατάλληλοι για την υλοποίηση δύο βασικών τελεστών της γενίκευσης: της επιλογής/απαλοιφής και της απλοποίησης. Οι δύο αυτοί τελεστές της γενίκευσης έχουν ως κοινό χαρακτηριστικό ότι εφαρμόζονται σε διακριτά γραφικά αντικείμενα ανεξάρτητα από το χωρικό τους πλαίσιο. Για παράδειγμα, μπορεί ορισμένα γραφικά αντικείμενα που βρίσκονται κοντά σε μια γραμμή, η οποία απλοποιείται, να επηρεάζονται από το αποτέλεσμα της απλοποίησής της, πιο συγκεκριμένα, στη νέα θέση της γραμμής να συμπίπτουν με αυτήν. Όμως, η διαδικασία της απλοποίησης να εφαρμόζεται εξετάζοντας αποκλειστικά και μόνον τη γραμμή. Δηλαδή, θα πρέπει να εξετάζονται στο πλαίσιο αυτό οι διάφοροι τρόποι εφαρμογής των τελεστών σε συγκεκριμένο κάθε φορά γραφικό αντικείμενο, χωρίς, να διερευνώνται τα προβλήματα που μπορούν να δημιουργηθούν στα γειτονικά ως προς αυτό αντικείμενα από τις πιθανές τροποποιήσεις της θέσης του.

#### 9.5.1 Επιλογή/απαλοιφή γραφικών αντικειμένων

Ο τελεστής της επιλογής/απαλοιφής των γραφικών αντικειμένων μπορεί να είναι απλός στη σύλληψή του, όμως, είναι πολύ σημαντικός για τη χαρτογραφική γενίκευση. Με την εφαρμογή του εξασφαλίζεται διαθέσιμος χώρος στο χάρτη, καθώς, απαλείφονται όσα γραφικά αντικείμενα δεν κρίνονται κατάλληλα να απεικονιστούν, λόγω της κλίμακας ή του σκοπού του παράγωγου χάρτη. Όμως, πρέπει να διατυπωθούν τρία θεμελιακά ερωτήματα:

1. Πόσα γραφικά αντικείμενα επιλέγονται;
2. Ποιά γραφικά αντικείμενα επιλέγονται;
3. Με ποιές δεσμεύσεις θα καθοδηγείται η διαδικασία της επιλογής;

Η διαδικασία αυτή δεν ολοκληρώνεται με την απαλοιφή και μόνον των γραφικών αντικειμένων, αλλά χρειάζεται τα γραφικά αντικείμενα που διατηρούνται στον παράγωγο χάρτη να αναδιαταχθούν στο χώρο, ώστε να παραμένει αμετάβλητη η αρχική οπτική εντύπωση των γραφικών αντικειμένων του βασικού χάρτη. Έτσι, η επιλογή δεν είναι παρά το πρώτο βήμα μιας διαδοχικής σειράς επεμβάσεων στα δεδομένα.

Η πρώτη από τις τρεις ερωτήσεις που παρατέθηκαν, αντιμετωπίζεται από τον εμπειρικό νόμο δύο γερμανών χαρτογράφων, των Törfer και Pillewizer, γνωστού ως "Αρχές της Επιλογής" που διατυπώθηκε το 1966. Ο εμπειρικός αυτός νόμος βασίζεται

σε συστηματική συγκριτική εμπειρική μελέτη μεγάλου αριθμού σειρών τοπογραφικών χαρτών. Στην απλή του μορφή ο νόμος εκφράζεται από τη σχέση:

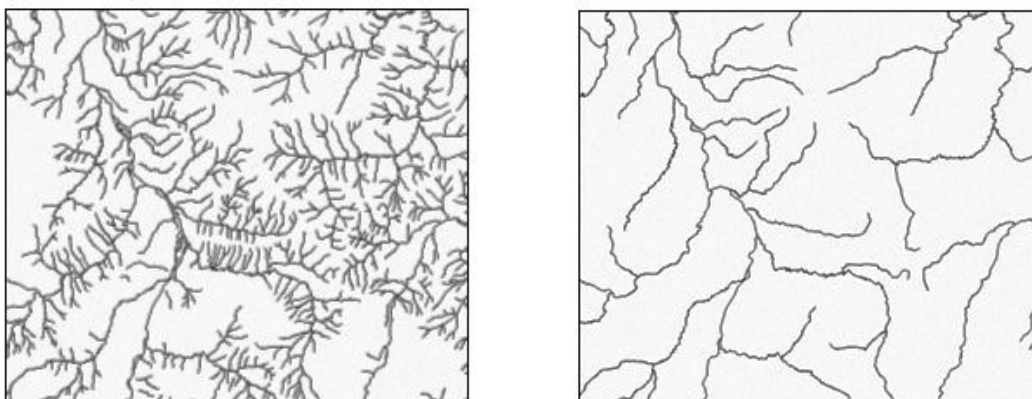
$$n = n_0 \sqrt{\frac{S}{S_0}},$$

όπου:  $n_0$  και  $n$  είναι ο αριθμός των γραφικών αντικειμένων του αρχικού και του παράγωγου χάρτη, ενώ  $S_0$  και  $S$  οι κλίμακές τους, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που τα γραφικά αντικείμενα, τα οποία υφίστανται την επιλογή/απαλοιφή, είναι ακανόνιστες γραμμές και απεικονίζονται και στους δύο χάρτες (αρχικό και παράγωγο) με γραμμικά σύμβολα ίδιου πάχους γραμμής, όπως στην περίπτωση των ακτογραμμών, τότε, ο εμπειρικός αυτός νόμος έχει τη μορφή:

$$n = n_0 \frac{S}{S_0},$$

Οι απλές αυτές σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν, με σκοπό να υπολογίζεται ο αριθμός των γραφικών αντικειμένων που θα διατηρείται σε κάθε παράγωγο χάρτη.



**Εικόνα 9.12:** Παράδειγμα ενός δικτύου ποταμών, όπως απεικονίζεται στο βασικό (αριστερά) και στον παράγωγο χάρτη (δεξιά), ύστερα από τη διαδικασία της χαρτογραφικής γενίκευσης.

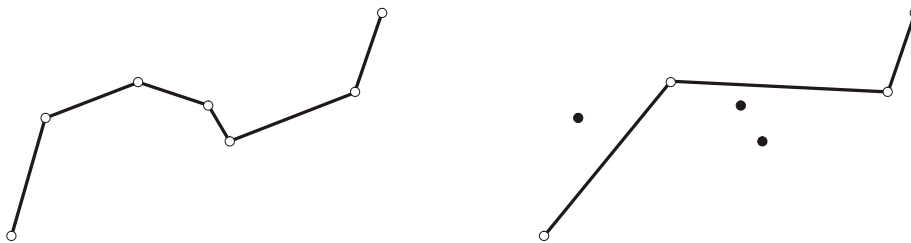
Ο νόμος των Törfer και Pillewizer μπορεί να εμπλουτιστεί με περισσότερους όρους. Οι όροι αυτοί λαμβάνουν υπόψη ειδικές περιπτώσεις συμβολισμού των χωρικών οντοτήτων, όμως, δεν είναι δυνατόν ο εμπειρικός αυτός νόμος να δώσει κατευθύνσεις, ώστε, να προσδιοριστούν ποιά γραφικά αντικείμενα πρέπει να επιλεγούν (δεύτερο ερώτημα). Η επιλογή ενός συνόλου γραφικών αντικειμένων μπορεί να γίνει μόνον αξιοποιώντας τη σημαντικότητα των αντικειμένων. Θεωρώντας ότι κάθε γραφικό αντικείμενο χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο ιδιοτήτων, τα γραφικά αντικείμενα μπορούν να επιλεγούν με ερωτήσεις που βασίζονται στις ιδιότητές τους. Εάν ο αριθμός των ιδιοτήτων είναι μεγάλος ή οι ιδιότητες ανήκουν στις τρεις κλίμακες

του συστήματος ιεράρχησης (ονομαστική κλίμακα, κλίμακα τάξης ή κλίμακα διαστήματος), μπορούν να ιεραρχηθούν με ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά και να επιλεγούν εκείνα τα γραφικά αντικείμενα που εμφανίζονται σε υψηλότερο επίπεδο της ταξινόμησης.

Η διαδικασία της επιλογής δεν μπορεί να περιοριστεί μόνο στη σημαντικότητα των γραφικών αντικειμένων. Η επιλογή θα πρέπει να καθοδηγείται από τοπολογικές δεσμεύσεις (τρίτο ερώτημα). Για παράδειγμα, επειδή θα πρέπει στον παράγωγο χάρτη να εξασφαλιστεί η λογική της κυκλοφορίας σε ένα οδικό δίκτυο, δεν είναι σωστό να απαλειφθεί το τμήμα ενός δρόμου μεταξύ δύο διασταυρώσεων. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να γίνει η διαδικασία της επιλογής/απαλοιφής ενός δικτύου ποταμών. Η επιλογή πρέπει να στηρίζεται σε ταξινόμηση κάθε τμήματος του δικτύου, η οποία να βασίζεται στη διατήρηση της τοπολογικής του συνέχειας, με κατεύθυνση από τις πηγές έως την εκβολή του κάθε ποταμού (Εικόνα 9.12).

#### 9.5.2 Απλοποίηση χαρτογραφικών γραμμών

Η απλοποίηση των γραμμών θεωρείται ο σημαντικότερος τελεστής της χαρτογραφικής γενίκευσης. Η συντριπτική πλειοψηφία των χωρικών οντοτήτων είτε αναπαρίσταται άμεσα στο χάρτη από γραμμές (δρόμοι, ποταμοί κλπ.), είτε από πολύγωνα (διοικητικά όρια, χρήσεις γης, δάση κλπ.) το περίγραμμα των οποίων περιγράφεται από γραμμές. Η απλοποίηση μειώνει το επίπεδο των λεπτομερειών των γραμμών και με αυτήν την έννοια συμμετέχει οπτικά σε σημαντικό βαθμό στο αποτέλεσμα της χαρτογραφικής γενίκευσης. Εάν η απλοποίηση εφαρμόζεται με αλγόριθμους που απαλείφουν κορυφές της γραμμής (γεγονός που συμβαίνει στις περισσότερες περιπτώσεις), αυτόματα μειώνεται και ο όγκος των δεδομένων. Οι αλγόριθμοι απλοποίησης είναι εξίσου χρήσιμοι για την απαλοιφή των ανεπιθύμητων λεπτομερειών υψηλής συχνότητας των γραμμών που ψηφιοποιούνται με συνεχή δειγματοληψία ή σάρωση.



**Εικόνα 9.13:** Παράδειγμα απλοποίησης γραμμών με απαλοιφή κορυφών.

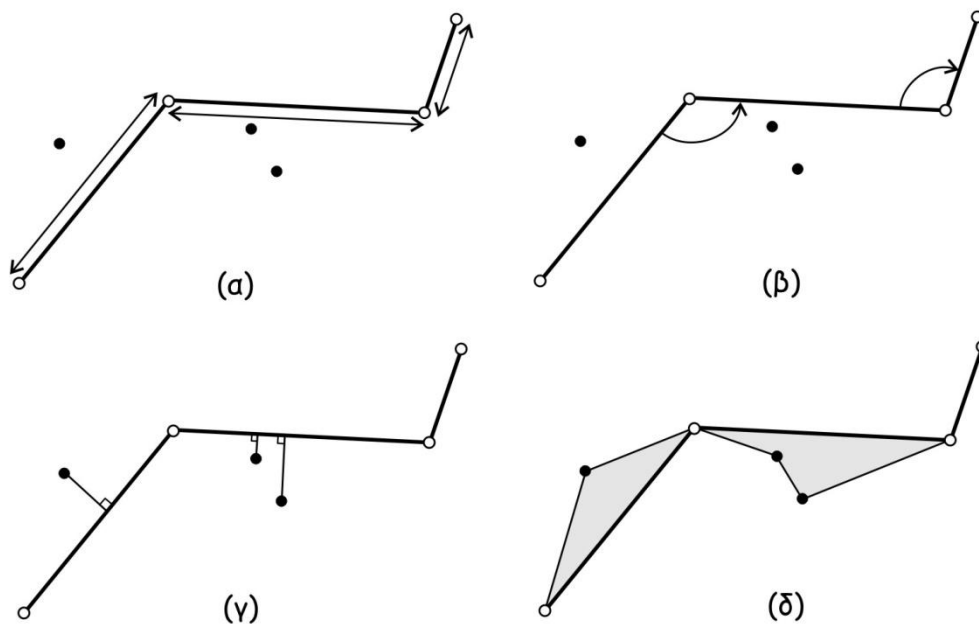
Οι πιο συνηθισμένοι αλγόριθμοι απλοποίησης μετατρέπουν μια χαρτογραφική γραμμή σε μια άλλη με λιγότερες κορυφές, την απλοποιημένη, με τα ίδια ακριβώς άκρα. Σημειώνεται ότι, με εφαρμογή των αλγορίθμων απλοποίησης γραμμών, δεν

παράγονται νέες κορυφές ούτε μεταθέτονται οι υπάρχουσες κορυφές των γραμμών (Εικόνα 9.13). Τα κλασικά κριτήρια με βάση τα οποία γίνεται η απαλοιφή των κορυφών είναι τα ακόλουθα:

1. Ελαχιστοποίηση της παραμόρφωσης της γραμμής.
2. Ελαχιστοποίηση του αριθμού των κορυφών της παράγωγης γραμμής.
3. Ελαχιστοποίηση της πολυπλοκότητας των υπολογισμών.

Με κριτήριο τις γεωμετρικές αρχές που τους διέπουν, οι αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών μπορούν να διακριθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

1. Αλγόριθμοι ανεξάρτητων σημείων.
2. Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
3. Δεσμευμένοι αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
4. Μη δεσμευμένοι αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας.
5. Καθολικοί αλγόριθμοι.

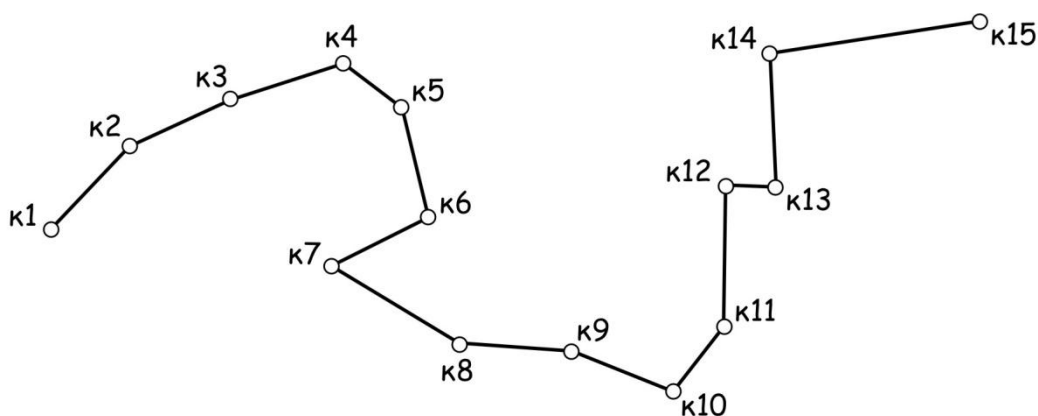


Εικόνα 9.14: Κριτήρια ανίχνευσης κρίσιμων κορυφών.

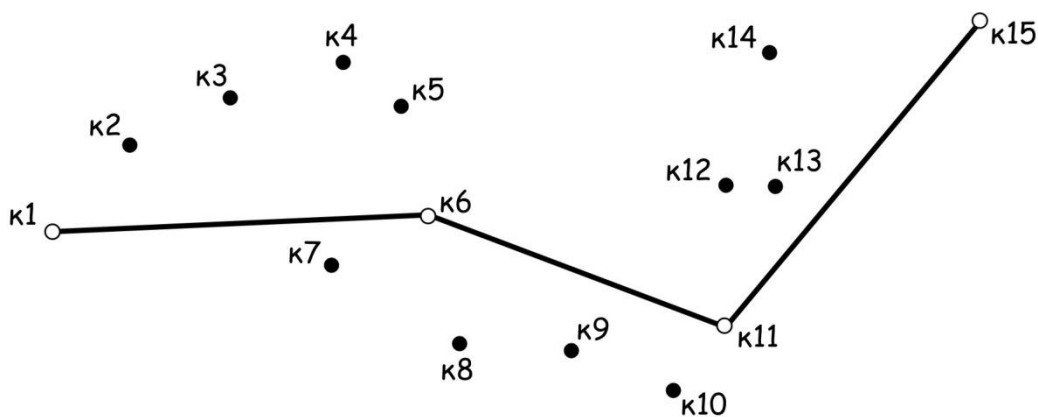
Οι αλγόριθμοι απλοποίησης μπορούν να διακριθούν, εναλλακτικά, εξετάζοντας το γεωμετρικό κριτήριο με το οποίο επιλέγονται οι κρίσιμες κορυφές των γραμμών. Στην Εικόνα 9.14 παρουσιάζονται τέσσερα χαρακτηριστικά γεωμετρικά κριτήρια, που αναφέρονται: στο μήκος (α), στη γωνιακή μεταβολή (β), στην κάθετο απόσταση (γ) και

στην επιφανειακή μετάθεση (δ), με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να επιλεγούν οι κρίσιμες κορυφές μιας γραμμής.

Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφονται ορισμένοι ευρέως εφαρμοζόμενοι αλγόριθμοι απλοποίησης γραμμών. Στην Εικόνα 9.15 παρουσιάζεται το παράδειγμα μιας αυθαίρετης γραμμής, ως γραμμή υπόδειγμα, στην οποία εφαρμόζονται οι περιγραφόμενοι αλγόριθμοι στις ενότητες που ακολουθούν, με σκοπό να είναι δυνατή η μεταξύ τους σύγκριση.



Εικόνα 9.15: Η γραμμή υπόδειγμα για την παρουσίαση των αλγόριθμων απλοποίησης.



Εικόνα 9.16: Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών του νιοστόου σημείου (με  $v=5$ ).

### 9.5.3 Αλγόριθμοι ανεξάρτητων σημείων

Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής δεν βασίζονται σε γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των γειτονικών κορυφών της γραμμής και επιδρούν με τρόπο που δεν εξετάζει τις

τοπολογικές ιδιότητες των γραμμών. Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος αυτής της κατηγορίας είναι ο αλγόριθμος του νιοστού σημείου. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του νιοστού σημείου κάθε νιοστή κορυφή της γραμμής επιλέγεται να διατηρηθεί και όλες οι υπόλοιπες απαλείφονται. Για παράδειγμα, διατηρείται κάθε πέμπτη (εάν  $n=5$ ) κορυφή της γραμμής.

Είναι προφανές, ότι ο αλγόριθμος αυτός μόνον τυχαία μπορεί να επιλέξει μια «χαρακτηριστική» κορυφή της γραμμής, δηλαδή, μια κορυφή κρίσιμη για την αντιπροσώπευση της μορφής της. Ένα επιπλέον μειονέκτημα του αλγόριθμου είναι οι σημαντικές παραμορφώσεις που επιφέρει στην τελική γραμμή. Για τους παραπάνω λόγους ο αλγόριθμος δεν έχει ευρεία χρήση. Στην Εικόνα 9.16 παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγορίθμου απλοποίησης του νιοστού σημείου με  $n=5$ .

#### 9.5.4 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας

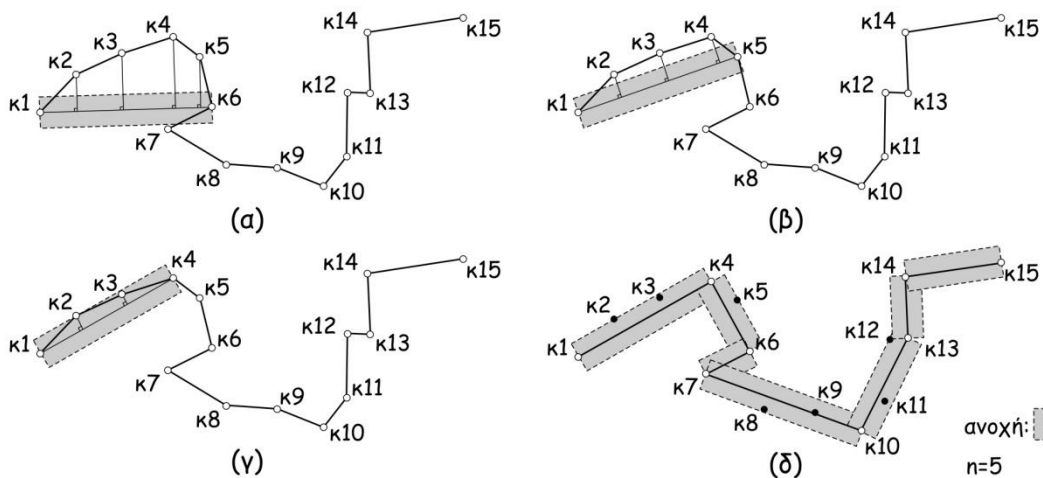
Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής, όπως δηλώνει και η ονομασία τους, χρησιμοποιούν τα χαρακτηριστικά των άμεσων γειτονικών κορυφών της χαρτογραφικής γραμμής για την επιλογή/απαλοιφή των κορυφών. Παραδείγματα τέτοιων τοπικών κριτηρίων αποτελούν η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ διαδοχικών κορυφών, η κάθετη απόσταση ως προς τη βασική γραμμή που συνδέει τις εκατέρωθεν γειτονικές κορυφές της υπό εξέταση κορυφής, όπως επίσης, η γωνιακή μεταβολή κάθε κορυφής. Εμπειρικές μελέτες έχουν αποδείξει ότι οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας παράγουν τελικές γραμμές με μικρότερες παραμορφώσεις από τους αλγόριθμους ανεξαρτήτων σημείων. Όμως, οι παραμορφώσεις που παράγουν εξακολουθούν να είναι σημαντικές. Πάντως, ένα σημαντικό πλεονέκτημα των αλγορίθμων τοπικής επεξεργασίας είναι η δυνατότητα εφαρμογής τους, παράλληλα με τη διαδικασία της ψηφιοποίησης των χαρτογραφικών γραμμών από αναλογικούς χάρτες.

#### 9.5.5 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις

Οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας εξετάζουν τις κορυφές πέραν των άμεσων γειτονικών κορυφών της γραμμής. Το εύρος του ελέγχου εξαρτάται από διάφορα κριτήρια που καθορίζονται είτε με την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών κορυφών, είτε με τη γωνιακή μεταβολή μεταξύ των εκατέρωθεν κορυφών, ή τέλος, από τον αριθμό των κορυφών της χαρτογραφικής γραμμής. Σε αυτήν την κατηγορία ξεχωρίζει ο αλγόριθμος που προτάθηκε από τον Lang.

Ο αλγόριθμος του Lang εξετάζει ένα προκαθορισμένο εύρος ελέγχου των κορυφών (για παράδειγμα, ελέγχει το τμήμα της χαρτογραφικής γραμμής που αποτελείται από πέντε διαδοχικές κορυφές) και επιλέγει/απαλείφει τις κορυφές με κριτήριο μια προκαθορισμένη ανοχή, που συγκρίνεται με τις κάθετες αποστάσεις κάθε κορυφής ως προς τη γραμμή βάσης, η οποία ορίζεται κάθε φορά από την πρώτη και την τελευταία κορυφή του εύρους ελέγχου (Εικόνα 9.17).

Όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.17α, όλες οι κάθετες αποστάσεις των ενδιαμέσων κορυφών του εύρους ελέγχου υπερέρχουν της ανοχής, οπότε η γραμμή βάσης μεταφέρεται στο προηγούμενο σημείο και επαναλαμβάνεται η διαδικασία από την αρχή (Εικόνα 9.17β) έως ότου όλες οι κάθετες αποστάσεις ως προς τη γραμμή βάσης να είναι μικρότερες από την ανοχή (Εικόνα 9.17γ). Τότε, διατηρούνται τα άκρα της γραμμής βάσης και απαλείφονται όλες οι ενδιάμεσες κορυφές. Στη συνέχεια, με τον αλγόριθμο εξετάζεται το επόμενο εύρος των κορυφών μέχρι να εξαντληθούν όλες οι κορυφές της γραμμής (Εικόνα 9.17δ).



Εικόνα 9.17: Ο αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών του Lang.

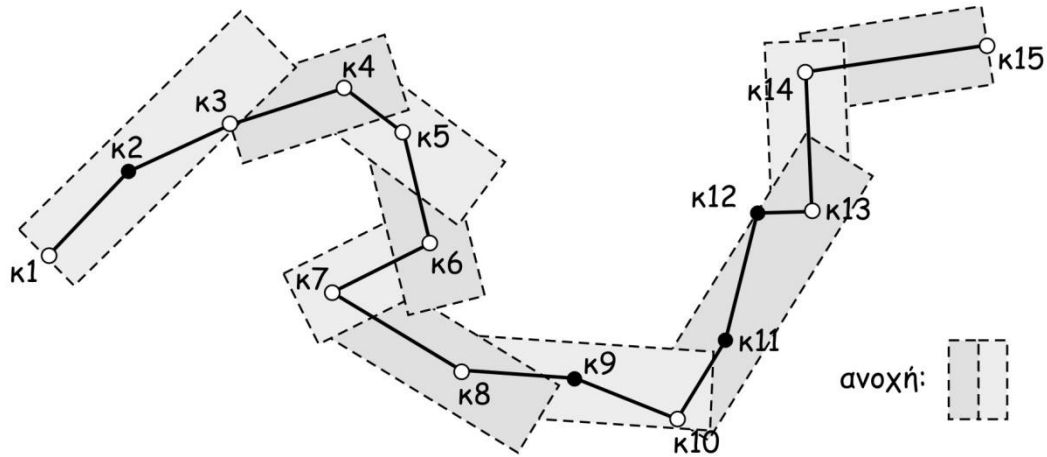
#### 9.5.6 Αλγόριθμοι τοπικής επεξεργασίας χωρίς δεσμεύσεις

Στους αλγόριθμους της κατηγορίας αυτής, όπως και στην περίπτωση των αλγορίθμων τοπικής επεξεργασίας με δεσμεύσεις, ο τοπικός έλεγχος επεκτείνεται πέραν των άμεσα γειτονικών κορυφών της υπό εξέταση κορυφής. Η επέκταση της περιοχής ελέγχου δεσμεύεται από τη μορφή και την πολυπλοκότητα της χαρτογραφικής γραμμής, αντί της εφαρμογής κάποιου αυθαίρετου κριτηρίου. Στο παράδειγμα που απεικονίζεται στην Εικόνα 9.18 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που εισήγαγαν οι Reumann και Witkam για την απλοποίηση των χαρτογραφικών γραμμών.

Με τον αλγόριθμο των Reumann και Witkam δημιουργείται ένας διάδρομος, ο οποίος σχεδιάζεται με δύο παράλληλες γραμμές στη διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν οι δύο πρώτες κορυφές της γραμμής. Το πλάτος του διαδρόμου είναι ίσο με το μέγεθος της προκαθορισμένης ανοχής. Ο διάδρομος επεκτείνεται μέχρι η μία από τις δύο πλευρές του να τμήσει τη χαρτογραφική γραμμή. Τότε, όλες οι κορυφές της γραμμής που βρίσκονται μέσα στο διάδρομο εκτός της πρώτης και της τελευταίας απαλείφονται. Στη συνέχεια, σχεδιάζεται νέος διάδρομος, ο οποίος ξεκινά από την τελευταία κορυφή που επιλέχθηκε να διατηρηθεί, με την ίδια αρχή κ.ο.κ. Η



διαδικασία ολοκληρώνεται μέχρι να ελεγχθούν, με τον τρόπο που περιγράφηκε, όλες οι κορυφές της χαρτογραφικής γραμμής.



**Εικόνα 9.18:** Ο αλγόριθμος απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών των Reumann και Witkam.

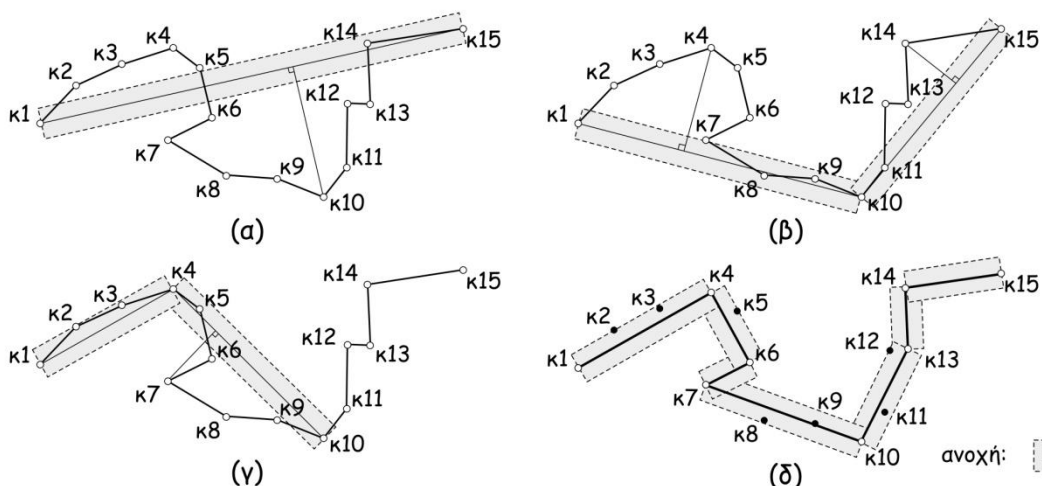
#### 9.5.7 Καθολικοί αλγόριθμοι

Οι καθολικοί αλγόριθμοι απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών εξετάζουν ολόκληρη τη γραμμή και διαδοχικά επιλέγουν τις κρίσιμες κορυφές της, ενώ, απαλείφουν τις υπόλοιπες με κριτήριο μια προκαθορισμένη ανοχή. Ο αλγόριθμος που επινόησαν οι Douglas και Peucker, ένας αλγόριθμος απλοποίησης γραμμών που χρησιμοποιείται ευρέως, ανήκει στην κατηγορία αυτή. Τέλος, στην κατηγορία των καθολικών αλγορίθμων θα περιγραφεί και ένας επιπλέον ο αλγόριθμος, ο αλγόριθμος των Visvalingam και Whyatt που βασίζεται σε επιφανειακή ανοχή, με την οποία ελέγχεται η επιφανειακή μετάθεση της γραμμής.

Ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker, αρχικά, επινοήθηκε για να αντιμετωπίσει το πρόβλημα απαλοιφής των πλεοναζόντων κορυφών μιας χαρτογραφικής γραμμής κατά τη διαδικασία της ψηφιοποίησης. Ο αλγόριθμος, παρουσιάζεται στην Εικόνα 9.19. Ξεκινά συνδέοντας τα άκρα της χαρτογραφικής γραμμής με μία ευθεία βάση. Στην συνέχεια, εξετάζονται οι αποστάσεις όλων των ενδιάμεσων κορυφών της γραμμής με τη γραμμή βάσης ως προς το εάν υπερβαίνουν ή όχι την προκαθορισμένη ανοχή. Εάν οι αποστάσεις είναι όλες μικρότερες από την ανοχή, τότε, οι ενδιάμεσες κορυφές απαλείφονται, αλλιώς η γραμμή διαχωρίζεται σε δύο τμήματα με βάση την κορυφή που εμφανίζει τη μέγιστη απόσταση και η διαδικασία του ελέγχου επαναλαμβάνεται ανεξάρτητα για τα δύο τμήματα της γραμμής.

Είναι πολλοί οι λόγοι για τους οποίους ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker επικράτησε έναντι των υπολοίπων. Ο κυριότερος λόγος οφείλεται στην καθολική εφαρμογή του διαδρόμου της ανοχής. Επιπλέον, με την παρουσίαση του αλγορίθμου αναπτύχθηκε και ο κώδικας υλοποίησής του, με αποτέλεσμα να ενσωματωθεί στα

περισσότερα πακέτα λογισμικού διαχείρισης χωρικών δεδομένων (συστήματα γεωγραφικών πληροφοριών). Το μεγαλύτερο πλεονέκτημά του οφείλεται στο γεγονός, ότι η εφαρμογή του επιφέρει τη μικρότερη μετάθεση ως προς την αρχική γραμμή συγκρινόμενος με τους υφιστάμενους αλγορίθμους απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών, όπως έχει αποδειχθεί από διάφορες εμπειρικές μελέτες.

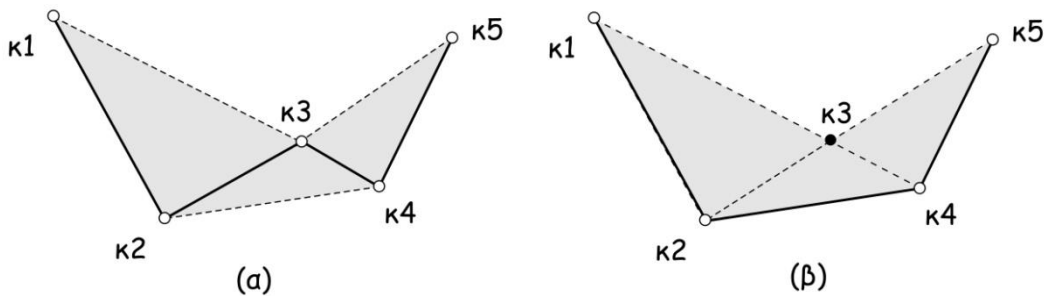


Εικόνα 9.19: Ο αλγόριθμος απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών των Douglas και Peucker.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του αλγορίθμου των Douglas και Peucker είναι η δυνατότητα της διαδοχικής ιεραρχικής υποδιαίρεσης της εξεταζόμενης γραμμής, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί όταν παρουσιάζεται ανάγκη μια γραμμή να διαχωριστεί σε ανεξάρτητα τμήματα. Παρ' όλα του τα πλεονεκτήματα ο αλγόριθμος των Douglas και Peucker παρουσιάζει ευαισθησία στη διατήρηση κορυφών, που έχουν τη μορφή της σφήνας, οι οποίες, πιθανά, να έχουν προκύψει από σφάλματα ψηφιοποίησης και επιθυμούμε να απαλειφθούν.

Ένας αλγόριθμος, ο οποίος ξεπερνά με επιτυχία το τελευταίο πρόβλημα που διατυπώθηκε, είναι ο αλγόριθμος που επινόησαν οι Visvalingam και Whyatt, γιατί, βασίζεται σε κριτήριο επιφανειακής ανοχής για την απαλοιφή των κορυφών της γραμμής. Ο αλγόριθμος στηρίζεται σε ένα μέτρο εκτίμησης της επιφανειακής παραμόρφωσης της γραμμής, το οποίο ονομάζεται επιφάνεια μετάθεσης, που ορίζεται από το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η κάθε κορυφή της χαρτογραφικής γραμμής, με εξαίρεση των άκρων της, με τις άμεσα γειτονικές της (Εικόνα 9.20α). Στη διαδικασία εφαρμογής του αλγορίθμου η γραμμή εξετάζεται με διαδοχικές επαναλήψεις. Σε κάθε επανάληψη η κορυφή με τη μικρότερη επιφάνεια μετάθεσης, ως λιγότερο σημαντική, απαλείφεται. Όμως, οι συντεταγμένες της μαζί με την τιμή του εμβαδού της επιφάνειας μετάθεσης καταγράφονται σε ξεχωριστό αρχείο. Στη συνέχεια, επειδή έχουν μεταβληθεί οι επιφάνειες μετάθεσης των άμεσα γειτονικών κορυφών, λόγω της απαλοιφής, υπολογίζονται εκ νέου (Εικόνα 9.20β). Ο αλγόριθμος

επαναλαμβάνεται μέχρι να καταγραφούν κατά αύξουσα σειρά ως προς την επιφάνεια μετάθεσης όλες οι κορυφές της γραμμής, εκτός από τα δύο άκρα και τελικά απαλείφονται όσες κορυφές συσχετίζονται με επιφάνειες μετάθεσης μικρότερης από αυτήν της προκαθορισμένης ανοχής.



**Εικόνα 9.20:** Ο αλγόριθμος απλοποίησης χαρτογραφικών γραμμών των Visvalingam και Whyatt.

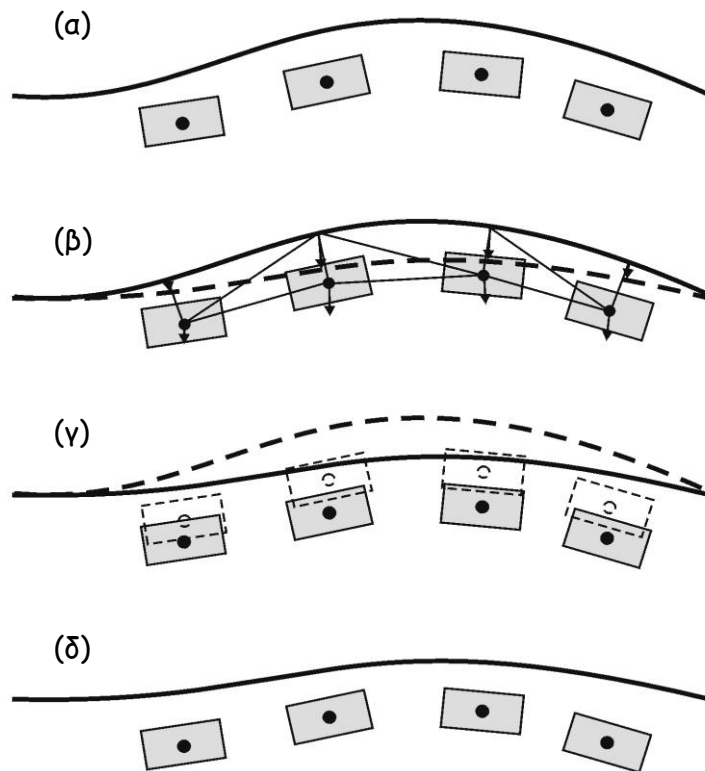
Ο αλγόριθμος των Visvalingam και Whyatt παρουσιάζει ένα πολύ σημαντικό πλεονέκτημα, γιατί, η απλοποίηση της γραμμής γίνεται με τρόπο που να διατηρείται η συνολική μορφή της.

### 9.6 Το πρόβλημα της σύμπτωσης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση

Ένα βασικό πρόβλημα που παρουσιάζεται κατά τη χαρτογραφική γενίκευση εστιάζεται στο γεγονός ότι οι τελεστές της επιλογής/απαλοιφής και απλοποίησης επιδρούν με ανεξάρτητο τρόπο στα γραφικά αντικείμενα. Η επιτυχημένη αντιμετώπιση του χαρτογραφικού προβλήματος της γενίκευσης, θα προϋπέθετε τη διαμόρφωση ενός ολιστικού χαρακτήρα τρόπου προσέγγισης με διαχείριση των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των χαρτογραφικών γραφικών αντικειμένων. Οι συνέπειες της εφαρμογής κάθε τελεστή χαρτογραφικής γενίκευσης χρειάζεται να μπορούν να προβλεφθούν με σκοπό να γίνει απαλοιφή όλων των πιθανών συμπτώσεων μεταξύ των γραφικών αντικειμένων, με γνώμονα τις βασικές αρχές της γενίκευσης και της οπτικής αντίληψης.

Το πρόβλημα της σύμπτωσης των γραφικών αντικειμένων κατά τη γενίκευση δεν έχει βρει ακόμα στη χαρτογραφία την οριστική επίλυσή του. Στην κατεύθυνση της αντιμετώπισής του, σημαντική είναι η συνεισφορά προσπαθειών που στηρίζονται σε μεθόδους καταγραφής της χαρτογραφικής γνώσης και ελέγχου της γενίκευσης με τη βοήθεια ενός συστήματος που καθοδηγείται από γνωστικούς κανόνες. Όμως, τα αποτελέσματα εφαρμογής ανάλογων συστημάτων μειονεκτούν ως προς το ότι η γνώση των χαρτογράφων για τον τρόπο με τον οποίο υλοποιείται η γενίκευση, επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από την αναγνώριση του είδους κάθε διακριτής χωρικής οντότητας και των μεταξύ τους χωρικών σχέσεων. Για αυτό το λόγο, χρειάζεται να προηγηθεί της

διαδικασίας εφαρμογής των τελεστών της γενίκευσης, μια διαδικασία αναγνώρισης της δομής των χωρικών οντοτήτων. Η διαδικασία της αναγνώρισης, μέχρι σήμερα, μπορεί να γίνει μόνον από τον άνθρωπο.



**Εικόνα 9.21:** Παράδειγμα αντιμετώπισης του προβλήματος της σύμπτωσης συμβόλων κατά τη γενίκευση.

Στην Εικόνα 9.21 παρουσιάζεται μια τεχνική αντιμετώπισης του προβλήματος σύμπτωσης των γραφικών αντικειμένων, που αναπτύχθηκε στο εθνικό χαρτογραφικό ινστιτούτο της Γαλλίας (Institut Géographique National - IGN). Η τεχνική που προτείνεται εξετάζει την περίπτωση που τα γραφικά αντικείμενα απεικονίζουν, για παράδειγμα, ένα δρόμο και τα γύρω από αυτό διάφορα κτήρια (Εικόνα 9.21α). Ας δεχθούμε ως υπόθεση εργασίας ότι η διαδικασία της απλοποίησης του δρόμου, μεταθέτει τη θέση του με τρόπο που εμφανίζεται σύμπτωση με τα κτήρια (Εικόνα 9.21β). Σε πρώτη φάση, τα κέντρα των κτηρίων και οι προβολές τους στο δρόμο δομούνται σε τριγωνικό δίκτυο. Με βάση τις σχέσεις εγγύτητας μεταξύ του δρόμου και των κτηρίων υπολογίζονται τα διανύσματα μετάθεσης του δρόμου, και στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα κατάλληλα διανύσματα μετάθεσης για τα κτήρια, ώστε, να εξαλείψουν τις ενδεχόμενες συμπτώσεις. Τέλος, τα διανύσματα της μετάθεσης εφαρμόζονται στους δρόμους και στα κτήρια (Εικόνα 9.21γ). Στο παράγωγο

αποτέλεσμα (Εικόνα 9.21δ), οι τελικές θέσεις των γραφικών αντικειμένων δεν παρουσιάζουν συμπτώσεις.

### 9.7 Βιβλιογραφία

- Buttenfield B.P. & R.B. McMaster (Eds.), 1991, *Map generalization: Making rules for knowledge representation*, Essex: Longman Scientific & Technical.
- Clarke K.C., 1990, *Analytical and Computer Cartography*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Cromley R.G., 1992, *Digital Cartography*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- João E.M., 1998, *Causes and Consequences of Map Generalisation*, London: Taylor & Francis.
- Jones Ch., 1997, *Geographical Information Systems and Computer Cartography*, Essex: Addison Wesley Longman Ltd.
- Mackaness W., 1991, "Integration and evaluation of map generalization" in *Map generalization: Making rules for knowledge representation*, (Eds. B. P. Buttenfield and R. B. McMaster), Essex: Longman Scientific & Technical, pp. 217-26.
- McMaster, R.B. & K.S. Shea, 1992, *Generalization in Digital Cartography*, Washington: Association of American Geographers.
- Nakos B., 1999, "Comparison of Manual Versus Digital Line Simplification", Proceedings of *3rd Workshop on Automated Map Generalization*, Ottawa: International Cartographic Association, Commission of Map Generalization.
- Shea K.S. & R.B. McMaster, 1991, "Cartographic Generalization in a Digital Environment: When and How to Generalize", Proceedings of *AutoCarto 10*, Maryland: American Congress on Surveying & Mapping, pp. 56-67.
- Töpfer F. & W. Pillewizer, 1966, "The Principles of Selection", *The Cartographic Journal*, 3(1): 10-6.
- Weibel R., 1997, "Generalization of Spatial Data: Principles and Selected Algorithms", in *Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems* (M. van Freveld, J. Nievergelt, Th. Roos and P. Widmayer Eds.), Berlin: Springer-Verlag, pp. 99-152.



## Παράρτημα

### ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

#### Π.1 Εισαγωγή

Σε κάθε χώρα οι χάρτες εκδίδονται από δημόσιους ή ιδιωτικούς φορείς. Οι δημόσιοι φορείς, και αυτό χωρίς να είναι απόλυτος κανόνας, συνήθως, εκδίδουν τοπογραφικούς ή θεματικούς χάρτες όλου του εύρους των κλιμάκων. Οι ιδιωτικοί φορείς, κυρίως, εκδίδουν τουριστικούς χάρτες, οδηγούς πόλεων ή χάρτες ειδικού σκοπού.

Τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στην Ελλάδα έχει η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ). Το παράδειγμα αυτό χαρακτήριζε και άλλες χώρες, ώστε, παραδοσιακά να έχει επικρατήσει στρατιωτικές υπηρεσίες να αποτελούν τους πιο βασικούς χαρτογραφικούς φορείς, για παράδειγμα, στο Ηνωμένο Βασίλειο η αντίστοιχη χαρτογραφική υπηρεσία είναι η Ordnance Survey. Πριν μια τριακονταετία ιδρύθηκε στη χώρα μας ένας δημόσιος χαρτογραφικός φορέας, ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφήσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ) του Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων. Σκοπός του ΟΚΧΕ είναι να αποτελέσει το βασικό κρατικό χαρτογραφικό φορέα της χώρας, ώστε, να μεταφερθεί το κέντρο βάρους των χαρτογραφικών δραστηριοτήτων από τις στρατιωτικές υπηρεσίες σε πολιτικές. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται μια συνοπτική αναφορά των πιο βασικών φορέων έκδοσης χαρτών στην Ελλάδα.

#### Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού

Η ΓΥΣ όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα έχει τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στη χώρα μας και εκδίδει ένα μεγάλο εύρος, κυρίως, τοπογραφικών, χαρτών. Σχεδόν το σύνολο των χαρτογραφικών σειρών που παράγονται και χορηγούνται στο κοινό από τη ΓΥΣ είναι στην εγκάρσια Μερκατορική προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM. Θα διακρίνουμε τους χάρτες που εκδίδονται από τη ΓΥΣ σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την κλίμακα.

### Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας

Στην κατηγορία των μικρών κλιμάκων εκδίδονται πέντε χάρτες:

1. Ο χάρτης της Ελλάδας που απεικονίζεται η ακτογραμμή και τα σύνορα της χώρας σε κλίμακες 1:2.000.000 και 1:2.500.000. Ο χάρτης αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόβαθρο για τη σύνθεση θεματικών χαρτών.
2. Ο χάρτης του οδικού δικτύου σε κλίμακα 1:1.000.000.
3. Ο γεωφυσικός χάρτης της Ελλάδας με σχολική κυρίως χρήση, σε κλίμακα 1:500.000.
4. Ο στρατηγικός χάρτης λατινικής ονοματολογίας σε κλίμακα 1:500.000.
5. Ο στρατηγικός χάρτης σε κλίμακα 1:400.000.

### Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται τέσσερις σειρές<sup>1</sup> χαρτών:

1. Η σειρά στρατηγικής χρήσης με λατινική ονοματολογία κλίμακας 1:250.000.
2. Η σειρά στρατηγικής χρήσης σε κλίμακα 1:200.000.
3. Η σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:100.000. Οι χάρτες της σειράς είναι 136.
4. Η σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:50.000. Η σειρά αυτή αποτελεί την πιο γνωστή έκδοση χάρτη που παρέχει η ΓΥΣ. Οι χάρτες της σειράς είναι 387.

### Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται οι παρακάτω σειρές χαρτών:

1. Οι σειρές κλίμακας 1:25.000 και 1:20.000 που έχουν περιορισμένη κάλυψη.
2. Η σειρά κλίμακας 1:10.000 με περιορισμένη κάλυψη.
3. Η σειρά κλίμακας 1:5.000, που αποτελεί και βασικό χάρτη της χώρας μεγάλης κλίμακας σε προβολή Hatt. Η σειρά αυτή καλύπτει σχεδόν ολόκληρη την χώρα. Παρουσιάζει, όμως, ορισμένα προβλήματα: σημαντικός αριθμός φύλλων δεν είναι ενημερωμένος και η ποιότητα των χαρτών δεν είναι η καλύτερη δυνατή.

---

<sup>1</sup> Ως χαρτογραφική σειρά θεωρείται μια διανομή διαδοχικών φύλλων χαρτών ίδιας κλίμακας που καλύπτουν μια ευρύτερη περιοχή ή και ολόκληρη την έκταση μιας χώρας.



### Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη ΓΥΣ η Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού (ΥΥΠΝ) αποτελεί τη στρατιωτική υπηρεσία με χαρτογραφικές δραστηριότητες στον χώρο που καταλαμβάνεται από θάλασσα. Οι χάρτες που εκδίδονται από την ΥΥΠΝ είναι οι υδρογραφικοί χάρτες, δηλαδή, ναυτικοί χάρτες και λιμενοδείκτες και μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες.

1. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει διεθνείς σειρές ναυτικών χαρτών της Μεσογείου σε κλίμακες 1:4.200.000 και 1:2.250.000.
2. Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται οι ναυτικοί χάρτες του ελληνικού θαλάσσιου χώρου σε κλίμακες 1:1.750.000, 1:1.000.000 και 1:500.000.
3. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τους ναυτικούς χάρτες μεσαίων κλιμάκων δηλαδή: 1:250.000, 1:150.000, 1:100.000, 1:75.000 και 1:50.000.
4. Στην τελευταία ομάδα ανήκουν οι λιμενοδείκτες, ναυτικοί χάρτες μεγάλης κλίμακας. Οι κλίμακες των λιμενοδεικτών παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία (1:40.000, 1:25.000, 1:20.000, 1:15.000, 1:12.500, 1:10.000, 1:7.500, 1:6.000, 1:5.000, 1:4.000, 1:3.000, 1:2.500 και 1:2.000).

Όλοι οι χάρτες της ΥΥΠΝ είναι στην ορθή Μερκατορική προβολή, η οποία χρησιμοποιείται στη ναυτιλία.

### Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας

Η Υπηρεσία Πολιτικής Αεροπορίας (ΥΠΑ) εκδίδει για τις ανάγκες της δύο σειρές αεροναυτικών χαρτών που καλύπτουν τον ελληνικό χώρο. Οι σειρές αυτές είναι στην εγκάρσια Μερκατορική προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM και έχουν κλίμακες αντίστοιχα 1:1.000.000 και 1:500.000.

### Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας

Η ΕΣΥΕ παρέχει μια σειρά τοπογραφικών χαρτών για ολόκληρη τη χώρα σε κλίμακα 1:200.000. Κάθε χάρτης της σειράς απεικονίζει και ένα νομό της χώρας καθώς και όλα τα διοικητικά όρια σε αυτόν. Οι χάρτες της σειράς είναι 52. Τέλος, η ΕΣΥΕ διαχειρίζεται χάρτες κλίμακας 1:5.000 για κάθε οικισμό της χώρας με πληθυσμό μεγαλύτερο από 1500 κατοίκους.

### Π.6 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων

Το Υπουργείο Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων (ΥΠΕΧΩΔΕ) παρέχει τους τοπογραφικούς χάρτες μεγάλης κλίμακας (ή τοπογραφικά διαγράμματα) που καλύπτουν τις αστικές περιοχές. Οι χάρτες αυτοί είναι στην εγκάρσια Μερκατορική

προβολή όπως αυτή εφαρμόζεται στο σύστημα ΕΜΠ-3° και έχουν κλίμακες 1:2.000 και 1:1.000. Το πρωτογενές χαρτογραφικό υλικό αυτών των χαρτών προήλθε από την Επιχείρηση Πολεοδομική Ανασυγκρότηση του 1983.

### **Π.7 Βιβλιογραφία**

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού, 1971, *Περί χαρτογραφίσεως-αεροφωτογραφήσεως και χορηγήσεως χαρτογραφικού-αεροφωτογραφικού υλικού εις μη στρατιωτικάς υπηρεσίας*, Αθήνα: Αρχηγείον Ενόπλων Δυνάμεων, 2α Μικτή Επιτελική Ομάς.

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού, 1990, *Βιβλίο διαιρέσεως διαγραμμάτων κλίμακας 1:1.000*, Αθήνα: Α' Διεύθυνση, Υποδιεύθυνση Τοπογραφίας.

Υδρογραφική Υπηρεσία Πολεμικού Ναυτικού, 1989, *Συνοπτικό Ευρετήριο Ναυτικών Χαρτών Ελληνικής Εκδόσεως*, Αθήνα: Τμήμα Χαρτογραφίας.