



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ

ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

ΜΑΘΗΜΑ: ΘΑΛΑΣΣΙΟΣ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΠΛΟΗΓΗΣΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑ

ΒΥΡΩΝΑΣ ΝΑΚΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2009

Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	i
Κεφάλαιο 1-ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ	1
1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές	1
1.2 Χαρτογραφικό σύστημα αναφοράς	3
1.3 Παραμορφώσεις	4
1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής	5
1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης	8
1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις	11
1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης	11
1.6.2 Κύριες διευθύνσεις - κύριες κλίμακες	12
1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση	12
1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών	13
1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης	15
1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot	16
1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης - Δείκτρια Tissot	18
1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών	19
1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής	20
1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας	21
1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνίας διεύθυνσης - σύγκλιση των μεσημβρινών	22
1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου	23
1.8 Βιβλιογραφία	24
Κεφάλαιο 2-ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ	27
2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων	27
2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών	27
2.3 Βιβλιογραφία	31
Κεφάλαιο 3-ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ	33
3.1 Εισαγωγή στα συστήματα απεικονίσεων	33

3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις	33
3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή	33
3.2.2 Μερκατορική προβολή	36
3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή	40
3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις	41
3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή	43
3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert	45
3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers	48
3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις	50
3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel	50
3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή	52
3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert	55
3.4.4 Πολική γνωμονική προβολή	57
3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή	59
3.5 Βιβλιογραφία	61
Κεφάλαιο 4-ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ	63
4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα	63
4.2 Σύστημα Hatt	63
4.3 Σύστημα UTM-6°	65
4.4 Σύστημα ΕΜΠ-3°	65
4.5 Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς - ΕΓΣΑ '87	66
4.6 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών προβολικών συστημάτων	66
4.7 Βιβλιογραφία	70
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ)	73
Π.1 Εισαγωγή	73
Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού	73
Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας	74
Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας	74
Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας	74
Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού	75
Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας	75
Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας	75
Π.5 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων	76
Π.7 Βιβλιογραφία	76

Κεφάλαιο 1

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

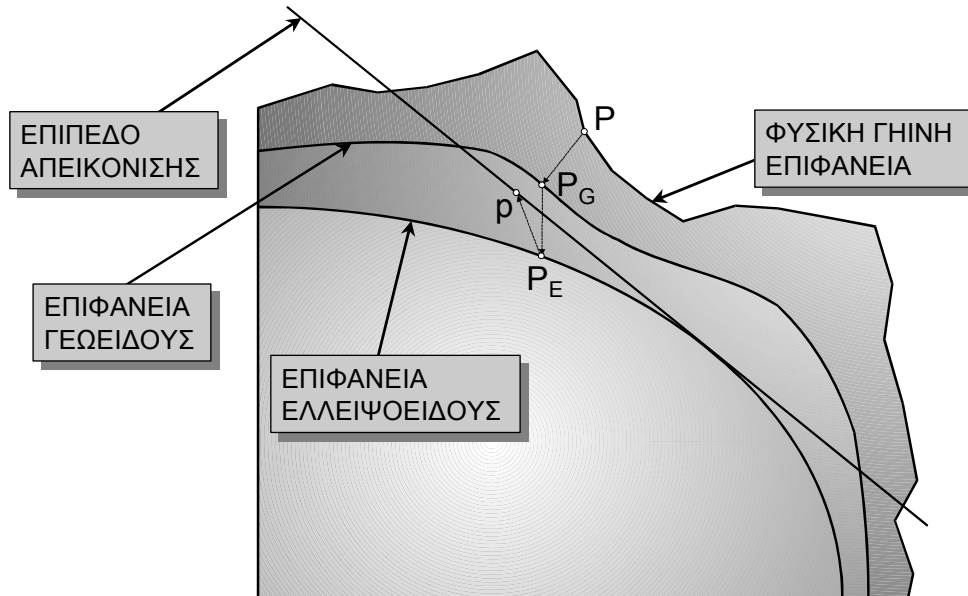
1.1 Εισαγωγή στις χαρτογραφικές προβολές

Το αντικείμενο της μελέτης των χαρτογραφικών προβολών ονομάζεται παραδοσιακά μαθηματική χαρτογραφία και ασχολείται με τη μελέτη της απεικόνισης της επιφάνειας της γης πάνω σε ένα επίπεδο, το επίπεδο του χάρτη. Η μελέτη αυτή, της απεικόνισης της γήινης επιφάνειας, έχει θεωρητικό αλλά και πρακτικό χαρακτήρα. Θεωρητικό χαρακτήρα, γιατί ερευνώνται και τεκμηριώνονται όλοι οι δυνατοί τρόποι της απεικόνισης, δηλαδή οι προβολές και οι ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Πρακτικό χαρακτήρα γιατί, με τη βοήθεια του περιεχομένου των χαρτογραφικών προβολών κατασκευάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο του χάρτη, που είναι απαραίτητο για τη σύνθεση οποιουδήποτε χάρτη.

Η έκφραση, όμως, επιφάνεια της γης από μόνη της δεν έχει καμιά μαθηματική σημασία. Οι επιστήμονες από πολύ παλιά ασχολήθηκαν με το να προσεγγίσουν τη μορφή και το μέγεθός της, αξιοποιώντας τις γνώσεις που αναπτύχθηκαν κυρίως από τη γεωμετρία. Η προσέγγιση αυτή πολλές φορές σχηματοποιήθηκε με βάση μια φιλοσοφική θεώρηση όσο αφορά τη μορφή και το μέγεθος της γης. Αφήνοντας την ανάπτυξη της διαχρονικής εξέλιξης των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για να προσεγγίσει την επιφάνεια της γης στην ενότητα της ιστορίας της χαρτογραφίας, ας δούμε πως το ζήτημα αυτό αντιμετωπίζεται σήμερα.

Στις γεωεπιστήμες η μορφή της γήινης επιφάνειας προσομοιώνεται από μια επιφάνεια, που ονομάζεται **γεωειδές**. Το γεωειδές (Σχήμα 1.1) με έναν απλό τρόπο μπορεί να οριστεί ως η επιφάνεια που διαμορφώνεται από τη μέση στάθμη της θάλασσας και την προέκτασή της στο χώρο που καταλαμβάνουν οι ήπειροι. Μια εικόνα του γεωειδούς μπορεί να έχει κάποιος, αν θεωρήσει ότι «κόβει» όλα τα βουνά των ηπείρων που εξέχουν από τη γήινη επιφάνεια και τα «ρίξει» στις θάλασσες με τρόπο ώστε να σχηματιστεί μια σχετικά ομαλή μορφή. Το γεωειδές στην πραγματικότητα είναι μια πολύπλοκη επιφάνεια και δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί με ένα απλό μαθηματικό (γεωμετρικό) μοντέλο. Ο προσδιορισμός

του γεωειδούς αποτελεί ένα από τα βασικότερα αντικείμενα για την επιστήμη της γεωδαισίας.



Σχήμα 1.1 Φυσική γήινη επιφάνεια, γεωειδές και επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα)

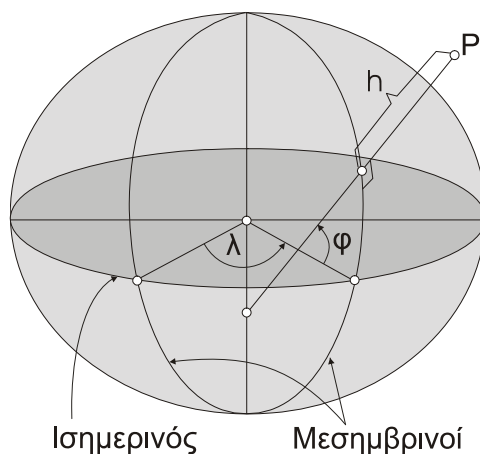
Αντί για το γεωειδές, μπορεί να θεωρήσουμε ότι η μορφή της επιφάνειας της γης είναι μια ομαλότερη επιφάνεια, μια μαθηματική επιφάνεια που το προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Μια κατάλληλη επιφάνεια για το σκοπό αυτό είναι η επιφάνεια ενός **ελλειψοειδούς εκ περιστροφής**. Για να φανταστούμε, με ένα σχηματοποιημένο τρόπο, τη μορφή που έχει η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Σχήμα 1.1), μπορούμε να θεωρήσουμε μια σφαίρα από ένα ελαστικό μέσο (π.χ. μία μπάλα) την οποίαν πιέζουμε κατά τη διεύθυνση ενός άξονα (τον άξονα περιστροφής της γης). Οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής της γης (κατακόρυφα επίπεδα) είναι ελλείψεις, ενώ οι τομές με επίπεδα κάθετα στον άξονα περιστροφής της είναι κύκλοι. Η μελέτη της γεωμετρίας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη γιατί πρόκειται για επιφάνεια με μεταβαλλόμενη διπλή καμπυλότητα και αντιμετωπίζεται από τον τομέα των μαθηματικών της διαφορικής γεωμετρίας και της θεωρίας επιφανειών.

Στις περιπτώσεις εκείνες, για τις οποίες ένας χάρτης δεν προϋποθέτει υψηλά επίπεδα ακριβειών, είναι δυνατόν η επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής να αντικατασταθεί από την επιφάνεια μιας **σφαίρας**. Η μελέτη της

γεωμετρίας της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι λιγότερο πολύπλοκη, γιατί πρόκειται για επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα.

1.2 Χαρτογραφικό σύστημα αναφοράς

Το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται στη χαρτογραφία είναι το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (Σχήμα 1.2), που αναφέρεται σε κάποιο από τα ελλειψοειδή που χρησιμοποιούνται στην πράξη ή σε μία σφαίρα. Οι **μεσημβρινοί** κάθε σημείου είναι οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με επίπεδα που περιλαμβάνουν την κάθετο στο σημείο προς την επιφάνεια αναφοράς και τον άξονα περιστροφής, ενώ αντίστοιχα, οι **παράλληλοι** είναι οι τομές της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με επίπεδα που περιλαμβάνουν το σημείο και είναι κάθετα στον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής οι μεσημβρινοί αποτελούν ελλείψεις ίσες μεταξύ τους ενώ για τη σφαίρα κύκλους. Οι παράλληλοι και στο ελλειψοειδές και στη σφαίρα αποτελούν κύκλους των οποίων η ακτίνα μειώνεται όσο πλησιάζουμε στους πόλους. Ο παράλληλος που διέρχεται από το κέντρο της γης και είναι σε μέγεθος μεγαλύτερος από όλους τους άλλους, ονομάζεται **ισημερινός**.



Σχήμα 1.2 Σύστημα γεωγραφικών και επιφανειακών συντεταγμένων

Κάθε σημείο του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε τη θέση προβάλλεται από τη φυσική γήινη επιφάνεια πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας κατά τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια αυτή. Το μήκος της καθέτου, δηλαδή η απόσταση του σημείου από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα, ονομάζεται **γεωμετρικό υψόμετρο** ή απλά **υψόμετρο** (h).

Η θέση της προβολής του σημείου πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προσδιορίζεται με τη βοήθεια δύο γωνιών. Η γωνία που σχηματίζει η κάθετος από το σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας με το επίπεδο του ισημερινού ονομάζεται **γεωγραφικό πλάτος** (φ). Η διέδρη γωνία που σχηματίζεται από το επίπεδο του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο και από έναν αυθαίρετα επιλεγμένο μεσημβρινό ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος** (λ). Ο αυθαίρετα επιλεγμένος μεσημβρινός συνήθως είναι ο μεσημβρινός που διέρχεται από το Greenwich. Οι γεωγραφικές συντεταγμένες μετρώνται σε μοίρες. Το γεωγραφικό πλάτος κυμαίνεται από 0° ως 90° στο βόρειο ημισφαίριο και από 0° ως -90° στο νότιο ημισφαίριο της γης ενώ το γεωγραφικό μήκος κυμαίνεται από 0° ως 360° .

Το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων είναι ουσιαστικά ένα σύστημα επιφανειακών συντεταγμένων για την επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα). Το δίκτυο των συντεταγμένων αυτών (σχήμα 1.2) πάνω στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα είναι ένα δίκτυο μεσημβρινών και παραλλήλων. Οι μεσημβρινοί είναι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό μήκος ($\lambda=c$) και οι παράλληλοι γραμμές με σταθερό γεωγραφικό πλάτος ($\varphi=c$). Η θέση ενός σημείου πάνω στην επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα) ή ακόμα και ενός σημείου που βρίσκεται μεν πάνω στη φυσική γήινη επιφάνεια αλλά έχει προβληθεί πάνω στην επιφάνεια αναφοράς, μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια του δικτύου των μεσημβρινών και παραλλήλων, δηλαδή με γραμμικά μεγέθη και όχι γωνιακά. Το αντίστοιχο του γεωγραφικού μήκους θα μετρηθεί ως απόσταση πάνω στον ισημερινό και το αντίστοιχο του γεωγραφικού πλάτους ως απόσταση πάνω στο μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο. Όλες αυτές οι αποστάσεις μετρώνται πάνω στην επιφάνεια αναφοράς (ελλειψοειδές ή σφαίρα).

1.3 Παραμορφώσεις

Επειδή η επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν είναι αναπτυσσόμενη επιφάνεια, η απεικόνιση πάντα συνοδεύεται από **παραμορφώσεις**. Πράγματι, αν προσπαθήσουμε να φέρουμε σε επαφή μια ελαστική σφαίρα (μπάλα) με ένα επίπεδο, δεν θα κατορθώσουμε να εφάπτονται όλα τα σημεία της σφαίρας στο επίπεδο παρά μόνον αν την τεντώσουμε ή σχίσουμε, δηλαδή αν την παραμορφώσουμε.

Η μελέτη των παραμορφώσεων γίνεται με τη βοήθεια του τομέα των μαθηματικών της θεωρίας επιφανειών. Η επιφάνεια της γης στη μαθηματική χαρτογραφία προσομοιώνεται από την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής που την προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα. Η γεωμετρία του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι αρκετά πολύπλοκη και κατά συνέπεια το ίδιο πολύπλοκη γίνεται και η μελέτη των παραμορφώσεων στην επιφάνεια αυτή. Αν

προσομοιώσουμε κατά τη μελέτη των παραμορφώσεων την επιφάνεια της γης με την επιφάνεια μιας σφαίρας, τότε μπορούμε να έχουμε μια συστηματική εικόνα των παραμορφώσεων αξιοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές.

Η βασική μελέτη αναφέρεται σε παραμορφώσεις στοιχειωδών μεγεθών αλλά στη χαρτογραφία μας ενδιαφέρουν κυρίως οι παραμορφώσεις που αναφέρονται σε πεπερασμένα μεγέθη. Οι παραμορφώσεις των πεπερασμένων μεγεθών μας χρειάζονται για τη μελέτη της απεικόνισης μεγεθών που βρίσκονται (έχουν μετρηθεί) στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή στην απλούστερη μορφή μιας σφαίρας στο επίπεδο του χάρτη. Μεταφέροντας τα μεγέθη στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) μπορούμε να κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς εύκολα και απλά, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την Ευκλείδεια και την επίπεδη αναλυτική γεωμετρία. Επίσης, αν αντιστρέψουμε το συλλογισμό, μπορούμε από αποτελέσματα που έχουν προκύψει με υπολογισμούς στο επίπεδο της προβολής (απεικόνισης) να αναχθούμε στα πραγματικά μεγέθη επάνω στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής ή στη σφαίρα. Οι απαραίτητες αναγωγές για τη μετάβαση μεγεθών από τη φυσική επιφάνεια της γης στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής ή της σφαίρας και αντίστροφα, είναι αντικείμενο της γεωδαισίας.

1.4 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Θεωρούμε ένα σημείο P πάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (Σχήμα 1.3), που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές του συντεταγμένες (φ, λ) . Κοντά στο σημείο P θεωρούμε και ένα δεύτερο σημείο P' με γεωγραφικές συντεταγμένες $(\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda)$.

Ας θεωρήσουμε επίσης, ότι η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων πάνω στην επιφάνεια αναφοράς είναι dS και ότι το αζιμούθιο της στοιχειώδους γραμμής PP' είναι A . Από τη γεωδαισία γνωρίζουμε ότι το αζιμούθιο μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς είναι η γωνία που σχηματίζεται από το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο και τη γραμμή και μετράται πάντα από το μεσημβρινό και δεξιόστροφα. Θα προσπαθήσουμε, χρησιμοποιώντας απλές γεωμετρικές αρχές, να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν το μέγεθος της στοιχειώδους αυτής γραμμής, δηλαδή, την απόσταση dS καθώς και το αζιμούθιο της A .

Πρώτα, φέρνουμε τους μεσημβρινούς και τους παράλληλους που διέρχονται από τα δύο αυτά σημεία P και P' . Γνωρίζουμε επίσης, ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός μεσημβρινού είναι: ρ και η ακτίνα καμπυλότητας ενός παράλληλου είναι: r , όπου: $r = N \cos \varphi$, με N : την ακτίνα της κυρίας καθέτου τομής σε ένα σημείο και φ : το γεωγραφικό του πλάτος. Η ακτίνα καμπυλότητας του

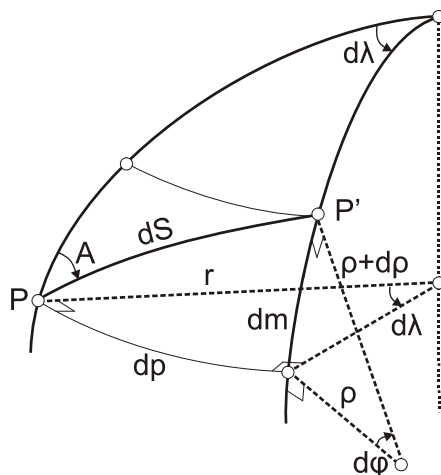
μεσημβρινού (ρ) και η ακτίνα της κυρίας καθέτου (N) είναι γνωστό από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς ότι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \text{ και}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και e η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς που συνδέεται με την επιπλάτωση του ελλειψοειδούς (f) με τη σχέση:

$$e = \sqrt{2f - f^2}.$$



Σχήμα 1.3 Στοιχειώδης γραμμή στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Η ακτίνα του παράλληλου (r) ενός ελλειψοειδούς μεταβάλλεται ανάλογα με το γεωγραφικό πλάτος του σημείου (φ), δηλαδή στον ισημερινό ($\varphi=0^\circ$) είναι ίση με το μεγάλο ημιάξονα του ελλειψοειδούς και όσο αυξάνει το γεωγραφικό πλάτος μειώνεται και στους πόλους τείνει στο μηδέν.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες της γραμμής κατά μήκος των μεσημβρινών (dm) και των παράλληλων (dp) μεταξύ των δύο σημείων P και P' (Σχήμα 1.3) εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = \rho d\varphi \text{ και}$$

$$dp = r d\lambda \Rightarrow dp = N \cos \varphi d\lambda.$$

Επομένως, από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 1.3) το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής PP' , δηλαδή, η απόσταση dS θα δίνεται από τη σχέση:

$$dS = \sqrt{dm^2 + dp^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2},$$

$$\text{ή } dS = \sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}.$$

Από το ίδιο τρίγωνο προκύπτει και η σχέση που εκφράζει το αζιμούθιο A της στοιχειώδους γραμμής PP' , δηλαδή:

$$\tan A = \frac{dp}{dm} \Rightarrow A = \arcsin \frac{dp}{dS} = \arccos \frac{dm}{dS},$$

$$\text{ή } A = \arcsin \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi} = \arcsin \frac{r d\lambda}{dS} = \arccos \frac{\rho d\varphi}{dS}.$$

Τέλος, μεταξύ των μεσημβρινών και των παραλλήλων που διέρχονται από τα σημεία P και P' σχηματίζεται ένα στοιχειώδες χωρίο, το εμβαδόν ($d\Psi$) του οποίου θα εκφράζεται από τη σχέση:

$$d\Psi = dm dp \Rightarrow d\Psi = \rho r d\varphi d\lambda.$$

Στις περιπτώσεις εκείνες που οι απαιτήσεις σε ακρίβειες είναι περιορισμένες, τότε οι σχέσεις απλουστεύονται αν θεωρήσουμε ως επιφάνεια αναφοράς την επιφάνεια της σφαίρας (ακτίνας R). Εύκολα προκύπτει ότι τα αντίστοιχα μεγέθη της στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια της σφαίρας εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$dm = R d\varphi \text{ και}$$

$$dp = R \cos \varphi d\lambda.$$

Οπότε θα έχουμε για το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής (dS) και το αζιμούθιο (A) της:

$$dS = R \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2},$$

$$A = \arcsin \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi}.$$

Επιπλέον για το εμβαδόν του στοιχειώδους χωρίου ($d\Psi$):

$$d\Psi = R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\lambda .$$

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς απεικονίζεται η στοιχειώδης γραμμή και επιφάνεια στο επίπεδο απεικόνισης, δηλαδή στο επίπεδο του χάρτη.

1.5 Στοιχειώδεις γραμμές και επιφάνειες στο επίπεδο απεικόνισης

Ο νόμος της απεικόνισης της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο, στη γενική του μορφή θα εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda), \\ y &= y(\varphi, \lambda). \end{aligned}$$

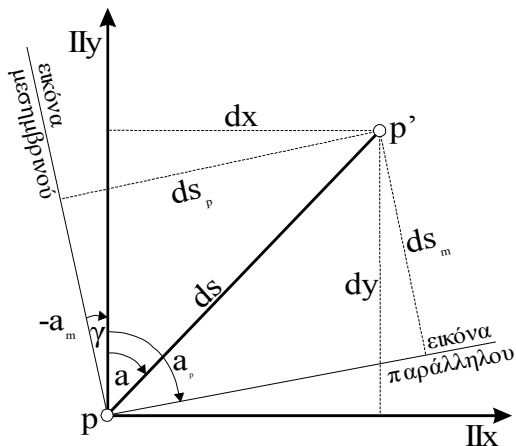
Έτσι λοιπόν, κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που η θέση του ορίζεται από τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) θα απεικονίζεται στο επίπεδο του χάρτη σε θέση που θα ορίζεται από τις ορθογώνιες συντεταγμένες (x, y) με τον τρόπο που θα καθορίζει ο νόμος της απεικόνισης.

Οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τη διεύθυνση του άξονα x (dx) και του άξονα y (dy) στο επίπεδο της απεικόνισης στην πραγματικότητα αποτελούν τα διαφορικά των συναρτήσεων: $x(\varphi, \lambda)$ και $y(\varphi, \lambda)$ που προσδιορίζουν το νόμο της απεικόνισης. Οι στοιχειώδεις αυτές συνιστώσες χρειάζεται να εκφραστούν για να διευκολύνουν τον προσδιορισμό των σχέσεων που θα συνοδεύουν την απεικόνιση μιας στοιχειώδους γραμμής από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο. Επομένως ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Σύμφωνα λοιπόν, με τον νόμο της απεικόνισης το σημείο P που θεωρήσαμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς θα απεικονιστεί στο επίπεδο στο σημείο p και αντίστοιχα το P' στο p' (Σχήμα 1.4). Η στοιχειώδης γραμμή PP' θα απεικονιστεί στο επίπεδο στη γραμμή pp' . Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής pp' στο επίπεδο (ds), δηλαδή, την απόσταση μεταξύ των p και p' καθώς και τη γωνία διεύθυνσης α της γραμμής pp' . Η γωνία διεύθυνσης μιας γραμμής στο επίπεδο είναι η γωνία που σχηματίζεται από τον

παράλληλο προς τον άξονα y και τη γραμμή και μετράται πάντα δεξιόστροφα με αφετηρία την παράλληλο προς τον άξονα y .



Σχήμα 1.4 Στοιχειώδης γραμμή στο επίπεδο της απεικόνισης

Ακολουθώντας την ίδια πορεία με τα προηγούμενα το μέγεθος της στοιχειώδους γραμμής στο επίπεδο (ds) θα δίνεται από τη σχέση:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Αν χρησιμοποιηθεί ως βάση η απλή αυτή σχέση και αντικατασταθούν οι στοιχειώδεις συνιστώσες κατά τους άξονες x και y που προηγουμένως προσδιορίστηκαν και εκτελεστούν ορισμένες πράξεις θα προκύψει για το στοιχειώδες μέγεθος της γραμμής pp' στο επίπεδο η παρακάτω έκφραση:

$$ds = \sqrt{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2},$$

όπου:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right),$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2.$$

Οι παραστάσεις E , G και F ονομάζονται **θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξεως** και εξαρτώνται από το νόμο της εκάστοτε προβολής (απεικόνισης) και τη θέση στην οποία βρίσκεται η στοιχειώδης γραμμή.

Αν κινηθούμε κατά μήκος ενός μεσημβρινού, δηλαδή το $\lambda=c$ και επομένως: $d\lambda=0$, τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά μεσημβρινό (ds_m) θα είναι:

$$ds_m = \sqrt{E} d\varphi.$$

Αντίστοιχα, αν κινηθούμε κατά μήκος ενός παράλληλου, δηλαδή το $\varphi=c$ και επομένως: $d\varphi=0$, τότε η στοιχειώδης μετακίνηση κατά παράλληλο (ds_p) θα είναι:

$$ds_p = \sqrt{G} d\lambda.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν και οι γωνίες διεύθυνσης στο επίπεδο της απεικόνισης των μεσημβρινών και των παραλλήλων καθώς επίσης και της στοιχειώδους γραμμής pp' . Η γωνία διεύθυνσης (α) της εικόνας μιας στοιχειώδους γραμμής είναι:

$$\alpha = \arctan \frac{dx}{dy} = \arcsin \frac{dx}{ds} = \arccos \frac{dy}{ds}.$$

Αν η γραμμή αυτή είναι μεσημβρινός, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του μεσημβρινού (α_m) θα είναι (με: $\lambda=c$, δηλαδή: $d\lambda=0$):

$$\alpha_m = \arctan \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} : \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \arccos \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Αν η γραμμή είναι παράλληλος, τότε η γωνία διεύθυνσης της εικόνας του παράλληλου (α_p) θα είναι (με: $\varphi=c$, δηλαδή: $d\varphi=0$):

$$\alpha_p = \arctan \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \arccos \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda}.$$

Η αντίθετη γωνία της διεύθυνσης του μεσημβρινού ($\gamma=-\alpha_m$), δηλαδή αυτή που μετράται από τον μεσημβρινό προς τον άξονα y , έχει μεγάλη χρησιμότητα στη χαρτογραφία και ονομάζεται **σύγκλιση των μεσημβρινών**. Η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι απαραίτητη για τον προσδιορισμό της αναγωγής των γωνιών σε αναλυτικά προβλήματα. Η γωνία αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\gamma = -\arctan \left(\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} \right).$$

Για την εικόνα ενός στοιχειώδους χωρίου ($d\psi$) στο επίπεδο της απεικόνισης λαμβάνοντας υπόψη τις πλευρές του που αποτελούν στοιχειώδεις μετακινήσεις κατά μεσημβρινό (ds_m) και παράλληλο (ds_p), έχουμε:

$$d\psi = ds_m ds_p \sin(\alpha_p - \alpha_m).$$

Αναλύοντας όμως, το ημίτονο της διαφοράς δύο γωνιών σε διαφορά γινομένων των ημιτόνων και συνημιτόνων των γωνιών και αντικαθιστώντας τις σχέσεις που προσδιορίστηκαν πιο πάνω για τις διευθύνσεις των εικόνων του μεσημβρινού και του παράλληλου, προκύπτει:

$$\sin(\alpha_p - \alpha_m) = \frac{J}{\sqrt{EG}}.$$

Η παράσταση J ονομάζεται **ιακωβιανή** και δίνεται από τη σχέση:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις γνωστές ποσότητες στη σχέση της εικόνας ενός χωρίου στο επίπεδο προκύπτει η παρακάτω:

$$d\psi = J d\varphi d\lambda.$$

1.6 Στοιχειώδεις παραμορφώσεις

1.6.1 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του μήκους στοιχειώδους γραμμής μελετάται με τη βοήθεια της **κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης** (m) ή απλώς κλίμακας. Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta S} = \frac{ds}{dS}.$$

όπου: dS είναι το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς (Σχήμα 1.3) και ds το μήκος της εικόνας της στο επίπεδο (Σχήμα 1.4). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης αναφέρεται αποκλειστικά και μόνο στην απεικόνιση και δεν έχει καμία σχέση με τη σμίκρυνση την κλίμακα δηλαδή με την οποία σχεδιάζονται οι χάρτες.

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης είναι αδιάστατο μέγεθος και όταν έχει ως τιμή τη μονάδα, τότε το μήκος της στοιχειώδους γραμμής απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμόρφωση. Όπως θα αποδειχθεί παρακάτω η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης εν γένει μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και σε κάθε σημείο έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση.

1.6.2 Κύριες διευθύνσεις- κύριες κλίμακες

Αν θεωρήσουμε μια ορθή γωνία επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και περιστρέψουμε τη γωνία αυτή γύρω από την κορυφή της, τότε εξετάζοντας την εικόνα της γωνίας στο επίπεδο της απεικόνισης θα δούμε ότι υπάρχει ένας συγκεκριμένος προσανατολισμός των πλευρών της που και η εικόνα της είναι ορθή γωνία. Οι κάθετες διευθύνσεις που διατηρούν κάθετες και τις εικόνες τους στο επίπεδο της απεικόνισης ονομάζονται κύριες διευθύνσεις. Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια θέση, όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα, έχει διαφορετική τιμή σε κάθε διεύθυνση. Οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στις κύριες διευθύνσεις ονομάζονται κύριες κλίμακες και συμβολίζονται με m_1 και m_2 . Οι τιμές των κυρίων κλιμάκων σε κάθε σημείο αποδεικνύεται ότι είναι η μέγιστη ($m_1 = \max$) και ελάχιστη ($m_2 = \min$) τιμή της κλίμακας παραμόρφωσης στη θέση αυτή.

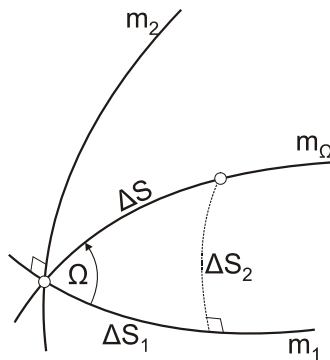
Στις ορθές απεικονίσεις οι κύριες διευθύνσεις είναι πάντα κατά μεσημβρινό και παράλληλο.

1.6.3 Κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση

Γνωρίζοντας τις τιμές των κυρίων κλιμάκων σε ένα σημείο μιας απεικόνισης μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση Ω (m_Ω). Η διεύθυνση Ω μετράται αριστερόστροφα στο ελλειψοειδές από την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας (m_1). Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε τυχαία διεύθυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$m_{\Omega} = \sqrt{m_1^2 \cos^2 \Omega + m_2^2 \sin^2 \Omega} .$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται εύκολα αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στις συνιστώσες της ως προς τις κύριες διευθύνσεις και εφαρμόζοντας τον ορισμό της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 1.5).



Σχήμα 1.5 Τυχαία διεύθυνση στο ελλειψοειδές

Αν οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης είναι ίσες στις δύο κύριες διευθύνσεις ($m_1=m_2$), τότε από τη σχέση αυτή αποδεικνύεται ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε διεύθυνση ($m_{\Omega}=m_1=m_2$).

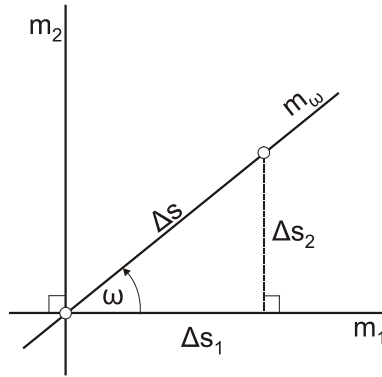
1.6.4 Παραμορφώσεις γωνιών

Αν Ω είναι η γωνία που σχηματίζεται από μία οποιαδήποτε διεύθυνση με την κύρια διεύθυνση της μέγιστης κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης (m_1) και ω η εικόνα της στο επίπεδο (Σχήμα 1.6) τότε, από τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται αναλύοντας μια στοιχειώδη μετακίνηση στην τυχαία αυτή διεύθυνση πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και στο επίπεδο απεικόνισης, οι γωνίες Ω και ω συνδέονται με τη σχέση:

$$\tan \omega = \frac{m_2}{m_1} \tan \Omega .$$

Αξιοποιώντας τη σχέση αυτή, τις ιδιότητες των αναλογιών και ταυτότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)}$$



Σχήμα 1.6 Τυχαία διεύθυνση στο επίπεδο απεικόνισης

Ορίζοντας λοιπόν ως γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση (ε), τη διαφορά:

$$\varepsilon = \Omega - \omega,$$

τότε αυτή θα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sin \varepsilon = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin(\Omega + \omega).$$

Αξιοποιώντας την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση (E) θα είναι:

$$\sin E = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Η τιμή αυτή της μέγιστης γωνιακής παραμόρφωσης παρουσιάζεται στη διεύθυνση:

$$\Omega = \frac{\pi}{4} + \frac{E}{2},$$

στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και:

$$\omega = \frac{\pi}{4} - \frac{E}{2},$$

στο επίπεδο της απεικόνισης. Μια γωνία επομένως, μπορεί να παραμορφωθεί μέχρι την τιμή $2E$. Όταν οι κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης είναι ίσες, δηλαδή $m_1 = m_2$, τότε η απεικόνιση αυτή δεν θα έχει καμία παραμόρφωση στις γωνίες επειδή:

$$\varepsilon = 0.$$

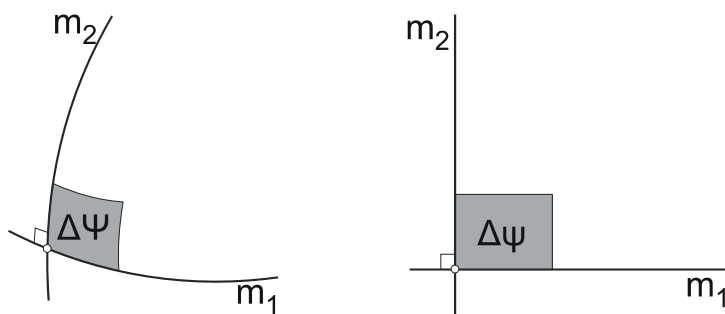
Οι απεικονίσεις που δεν έχουν παραμόρφωση στις γωνίες διατηρούν τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο αναλλοίωτη, οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται **σύμμορφες**.

1.6.5 Κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης

Η παραμόρφωση του εμβαδού στοιχειώδους επιφάνειας μελετάται με τη βοήθεια της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης (M) ή απλώς επιφανειακής κλίμακας. Η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης ορίζεται από τη σχέση:

$$M = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta\Psi} = \frac{d\psi}{d\Psi}.$$

όπου: $d\Psi$ είναι το εμβαδόν ενός στοιχειώδους χωρίου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και $d\psi$ το εμβαδόν της εικόνας του στο επίπεδο (Σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7 Στοιχειώδης επιφάνεια στο ελλειψοειδές και το επίπεδο απεικόνισης

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης συνδέεται με τις κύριες κλίμακες μιας απεικόνισης με τη σχέση:

$$M = m_1 m_2.$$

Σε απεικονίσεις που η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι ίση με τη μονάδα ($M=1$) δεν παρουσιάζεται παραμόρφωση στα εμβαδά, δηλαδή διατηρείται το εμβαδόν στοιχειωδών επιφανειών από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο αναλλοίωτο. Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται **ισοδύναμες**.

1.6.6 Νόμος των παραμορφώσεων - θεώρημα Tissot

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης για οποιαδήποτε απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο επίπεδο. Σε κάποιο σημείο η κλίμακα θα είναι:

$$m = \frac{ds}{dS}.$$

Αν υψώσουμε τη σχέση αυτή στο τετράγωνο και αντικαταστήσουμε σε αυτήν το μήκος μιας στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και το μήκος της απεικόνισής της στο επίπεδο, τότε προκύπτει η σχέση:

$$m^2 = \frac{E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\lambda + G d\lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}.$$

Διαιρώντας τη σχέση αυτή με $\rho^2 d\varphi^2$ και επειδή ισχύει:

$$\tan A = \frac{r d\lambda}{\rho d\varphi},$$

προκύπτει για το τετράγωνο της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης η σχέση:

$$m^2 = \frac{\frac{E}{\rho^2} + \frac{2F}{\rho r} \tan A + \frac{G}{r^2} \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

Εξετάζοντας τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης (m) είναι συνάρτηση της θέσης, δηλαδή ισχύει: $m=f(\varphi, \lambda)$, και της διεύθυνσης, άρα: $m=f(A)$. Επειδή λοιπόν, η τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης σε κάποια θέση μεταβάλλεται στις διευθύνσεις γύρω από αυτή τη

θέση, θα υπάρχουν δύο διευθύνσεις που οι τιμές της θα είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε εκείνα τα αζιμούθια A για τα οποία η συνάρτηση m^2 παίρνει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Ξεκινάμε μηδενίζοντας την παράγωγο της m^2 ως προς το αζιμούθιο A :

$$\frac{dm^2}{dA} = \tan^2 A - \frac{\frac{G}{r^2} - \frac{E}{\rho^2}}{\frac{F}{\rho r}} \tan A - 1 = 0.$$

Βλέπουμε ότι η παράγωγος είναι ένα τριώνυμο ως προς την εφαπτομένη του αζιμουθίου. Οι ρίζες του τριωνύμου εξετάζοντας τους συντελεστές του έχουν την ιδιότητα:

$$\tan A_1 \tan A_2 = -1,$$

τα αζιμούθια που μηδενίζουν το τριώνυμο βρίσκονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις, δηλαδή:

$$A_1 = A_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως, προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

οι διευθύνσεις στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στις οποίες η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης έχει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι κάθετες μεταξύ τους.

Οι διευθύνσεις αυτές ονομάζονται **κύριες διευθύνσεις**.

Ακολουθώντας ανάλογη πορεία και εξετάζοντας τις απεικονίσεις των κυρίων διευθύνσεων στο επίπεδο, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι και:

στο επίπεδο της απεικόνισης οι κύριες διευθύνσεις απεικονίζονται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις.

Τα συμπεράσματα αυτά διατυπώνονται στο θεώρημα του Tissot:

Σε κάθε σημείο της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος καθέτων διευθύνσεων οι οποίες και στην απεικόνισή τους παραμένουν κάθετες.

Τέλος, με απλή αντικατάσταση η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προκύπτει ότι είναι:

$$M = \frac{J}{\rho r}.$$

1.6.7 Έλλειψη παραμόρφωσης. Δείκτρια Tissot

Αν θεωρήσουμε πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ένα στοιχειώδη κύκλο με ακτίνα dS , η εξίσωση του κύκλου θα είναι:

$$dm^2 + dp^2 = dS^2.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τα μεγέθη των στοιχειωδών γραμμών κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε:

$$\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = dS^2.$$

Ο κύκλος αυτός θα απεικονίζεται στο επίπεδο ως μια κλειστή γραμμή, την οποία θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε.

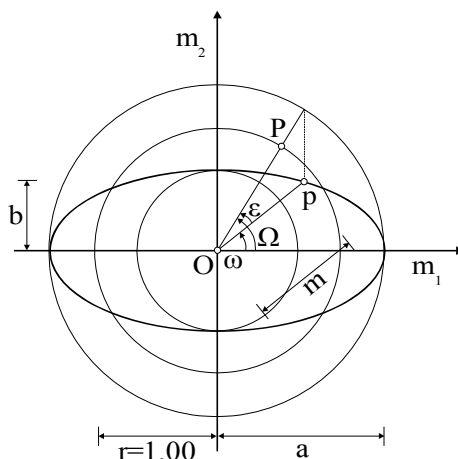
Τα διαφορικά dx και dy του νόμου της απεικόνισης εκφράζουν τις στοιχειώδεις μετακινήσεις στο επίπεδο της απεικόνισης κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y . Αν θεωρήσουμε ότι αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους ως προς τα $d\varphi$ και $d\lambda$, θα έχουμε:

$$d\varphi = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} dy - \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx}{J} \quad \text{και} \quad d\lambda = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} dx - \frac{\partial x}{\partial \varphi} dy}{J},$$

δεδομένου ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ιακωβιανή (J).

Αντικαθιστώντας τα $d\varphi$ και $d\lambda$ στην εξίσωση του κύκλου και εκτελώντας ορισμένες πράξεις, θα έχουμε στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνα του κύκλου την γραμμή με την εξίσωση:

$$\left[\rho^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dx^2 + \left[\rho^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 \right] dy^2 - 2 \left[r^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \rho^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \right] dx dy = J^2 dS^2.$$



Σχήμα 1.8 Δείκτρια Tissot

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφτεί απλούστερα με την παρακάτω μορφή:

$$a^2 dx^2 + b^2 dy^2 - 2c dx dy = k^2.$$

Είναι όμως γνωστό, ότι η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση μιας έλλειψης, της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας εμφανίζει στροφή ως προς τον άξονα x . Επομένως προκύπτει το συμπέρασμα ότι:

κάθε στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) απεικονίζεται στο επίπεδο ως έλλειψη ανεξάρτητα του συγκεκριμένου νόμου της απεικόνισης.

Αν ο στοιχειώδης κύκλος γίνει μοναδιαίος ($dS=1$), τότε η έλλειψη θα μας δίνει μια άμεση εποπτεία των παραμορφώσεων της απεικόνισης (Σχήμα 1.8). Η έλλειψη που αντιστοιχεί σε κύκλο μοναδιαίας ακτίνας είναι γνωστή ως δείκτρια Tissot. Οι ημιάξονες της έλλειψης είναι προσανατολισμένοι στις διευθύνσεις των κυρίων κλιμάκων με το μεγάλο ημιάξονα να είναι ίσος με τη μέγιστη γραμμική κλίμακα (m_1) και το μικρό ημιάξονα αντίστοιχα να είναι ίσος με την ελάχιστη γραμμική κλίμακα (m_2).

1.7 Παραμορφώσεις πεπερασμένων μεγεθών

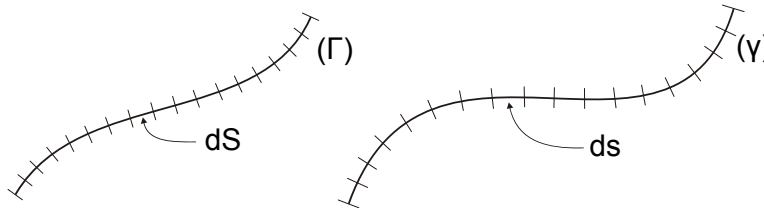
Όλα όσα μελετήθηκαν για τις παραμορφώσεις, αναφέρονται στην απεικόνιση στοιχειωδών μεγεθών από το ελλειψοειδές στο επίπεδο. Στις εφαρμογές όμως,

χρειάζεται πάντα να υπολογίζουμε τις παραμορφώσεις για πεπερασμένα μεγέθη. Η μελέτη μιας ολοκληρωμένης αντιμετώπισης των παραμορφώσεων πεπερασμένων μεγεθών ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτών των σημειώσεων. Γι' αυτό το λόγο στη συνέχεια του κεφαλαίου θα διατυπωθούν μόνο ορισμένες βασικές αρχές της μελέτης των παραμορφώσεων πεπερασμένων μεγεθών.

1.7.1 Παραμόρφωση μήκους πεπερασμένης γραμμής

Ας θεωρήσουμε μια γραμμή Γ μήκους S πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, τότε η εικόνα της στο επίπεδο της απεικόνισης θα είναι η γ με μήκος s (Σχήμα 1.9). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$ds = m dS.$$



Σχήμα 1.9 Πεπερασμένη γραμμή στο ελλειψοειδές και στο επίπεδο απεικόνισης

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η γραμμή αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών γραμμών. Επομένως, το μήκος της γραμμής θα προσδιορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$s = \int_S m dS.$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης (m) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το μήκος της πεπερασμένης γραμμής θα δίνεται από τη σχέση:

$$s = \left(\frac{1}{S} \int_S m dS \right) S.$$

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος της γραμμής:

$$\bar{m} = \frac{1}{S} \int_S m \, dS .$$

το μήκος της γραμμής στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

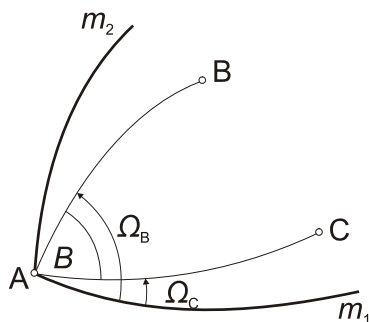
$$s = \bar{m} S .$$

Στην πράξη η μέση κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας τη γραμμή σε τμήματα και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης για κάθε τμήμα.

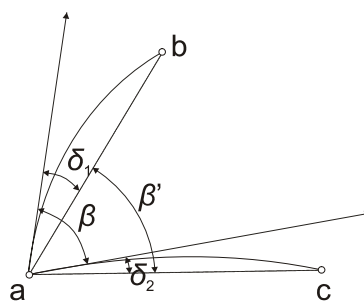
1.7.2 Παραμόρφωση γωνίας

Οι γωνιακές παραμορφώσεις αναφέρονται στις γωνίες που σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες των αντίστοιχων γραμμών στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και των εικόνων τους στο επίπεδο της απεικόνισης. Επειδή είναι χρήσιμο στη μελέτη των γωνιακών παραμορφώσεων να αξιοποιηθούν οι απλές σχέσεις της ευκλείδειας γεωμετρίας στο επίπεδο και δεδομένου ότι οι εικόνες γραμμών της επιφάνειας του ελλειψοειδούς στο επίπεδο είναι εν γένει καμπύλες γραμμές, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ χορδής και εφαπτομένης στα άκρα των γραμμών. Αυτό σημαίνει ότι κάθε γωνία θα πρέπει να διορθώνεται και για τη γωνιακή διαφορά τόξου-χορδής (δ). Έτσι, η γωνία β' που είναι η εικόνα της γωνίας B (Σχήματα 1.10 και 1.11), όπως ορίζεται από τα σημεία: b, a και c στο επίπεδο της απεικόνισης ως εικόνες των σημείων: B, A και C πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, θα είναι:

$$\beta' = B + \varepsilon - \delta_1 + \delta_2, \text{ όπου: } \varepsilon = \beta - B.$$



Σχήμα 1.10 Η γωνία στο ελλειψοειδές



Σχήμα 1.11 Η γωνία στο επίπεδο

Η διόρθωση ε μπορεί να υπολογιστεί από τη διαφορά των διορθώσεων που αντιστοιχούν στις γωνίες διεύθυνσης (Ω_B και Ω_C) των δύο πλευρών της γωνίας στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, δηλαδή:

$$\varepsilon = \varepsilon_B - \varepsilon_C.$$

1.7.3 Σχέση μεταξύ αζιμουθίου και γωνία διεύθυνσης – σύγκλιση των μεσημβρινών

Η μέτρηση των διευθύνσεων στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς γίνεται με τη βοήθεια των αζιμουθίων A , ενώ στο επίπεδο με τις γωνίες διεύθυνσης α . Ως **αζιμούθιο** μιας γραμμής (με άκρα τα σημεία P και Q) στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς σε κάποιο σημείο P, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραμμής στο σημείο αυτό με το μεσημβρινό που διέρχεται από το σημείο P. Το αζιμούθιο μετριέται δεξιόστροφα από τη βορεινή φορά του μεσημβρινού μέχρι τη γραμμή. Ως **γωνία διεύθυνσης** μιας γραμμής στο επίπεδο σε κάποιο σημείο p, ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την εφαπτομένη της γραμμής στο σημείο αυτό με τη θετική φορά του άξονα y . Η γωνία διεύθυνσης μετριέται δεξιόστροφα από τον άξονα των y προς την εφαπτομένη της γραμμής. Παρατηρώντας τα Σχήματα 1.12 και 1.13 η γωνία A' αποτελεί την εικόνα της γωνίας του αζιμουθίου A στο επίπεδο, επομένως για τη γωνία A' ισχύει:

$$A' = A + \varepsilon,$$

όπου: ε είναι η γωνιακή παραμόρφωση του αζιμουθίου A .

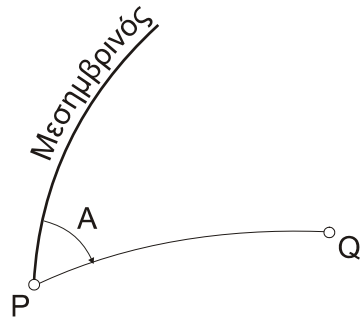
Η γωνία A' όμως, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13, σχηματίζεται από εφαπτόμενες των εικόνων του μεσημβρινού και της γραμμής με άκρα τα σημεία p και q στο επίπεδο, θα δίνεται από τη σχέση:

$$A' = \alpha + \gamma - \delta,$$

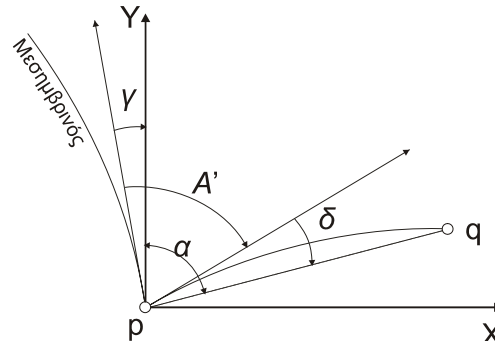
όπου: γ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τη θετική φορά του άξονα y και της εφαπτομένης της εικόνας του μεσημβρινού που διέρχεται από το σημείο p στο επίπεδο και: δ είναι η διαφορά τόξου-χορδής της γραμμής με άκρα τα σημεία p και q.

Η γωνία γ , που ονομάζεται σύγκλιση μεσημβρινού, έχει οριστεί στην ενότητα 1.5. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις η γωνία διεύθυνσης συνδέεται με τη γωνία του αζιμουθίου ως εξής:

$$\alpha = A - \gamma + \varepsilon + \delta.$$



Σχήμα 1.12 Γωνία αζιμουθίου



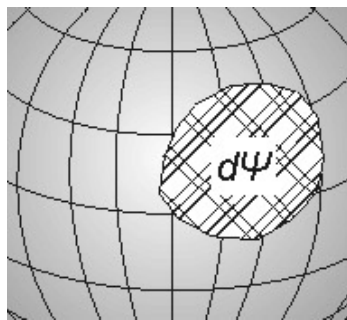
Σχήμα 1.13 Γωνία διεύθυνσης

Με δεδομένο ότι ένας χάρτης απεικονίζει -στις περισσότερες περιπτώσεις- μια περιοχή έκτασης μερικών μοιρών, οι γωνίες ϵ και δ είναι μικρές όμως η γωνία γ μπορεί να είναι, ανάλογα με την προβολή, μεγαλύτερη από μία μοίρα.

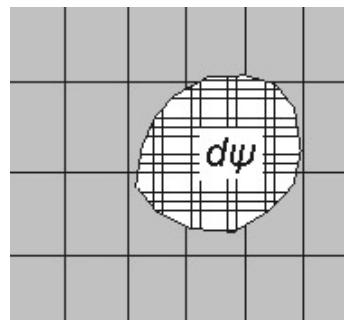
1.7.4 Παραμόρφωση εμβαδού χωρίου

Ας θεωρήσουμε ένα χωρίο εμβαδού Ψ πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, τότε η εικόνα του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα έχει εμβαδόν ψ (Σχήματα 1.14 και 1.15). Αξιοποιώντας τη γνωστή σχέση της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης θα έχουμε:

$$d\psi = M d\Psi.$$



Σχήμα 1.14 Χωρίο στο ελλειψοειδές



Σχήμα 1.15 Χωρίο στο επίπεδο

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι το χωρίο αποτελείται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού στοιχειωδών χωρίων. Επομένως, το εμβαδόν του θα προσδιορίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\psi = \int_{\Psi} M d\Psi .$$

Γνωρίζουμε όμως, ότι η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης (M) είναι συνάρτηση της θέσης και της διεύθυνσης. Το εμβαδόν του χωρίου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \left(\frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi \right) \Psi .$$

Επειδή όμως, η παράσταση που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες αποτελεί τη μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης κατά την έκταση του χωρίου θα έχουμε:

$$\bar{M} = \frac{1}{\Psi} \int_{\Psi} M d\Psi .$$

και το εμβαδόν του χωρίου στο επίπεδο της απεικόνισης θα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi = \bar{M} \Psi .$$

Στην πράξη η μέση κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης προσδιορίζεται προσεγγιστικά, χωρίζοντας το χωρίο σε στοιχειώδεις επιφάνειες και υπολογίζοντας τη μέση τιμή της κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης για κάθε στοιχειώδη επιφάνεια.

1.8 Βιβλιογραφία

- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.
- Maling, D.H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλίππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Richardus, P. and R.K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.

Thomas, P.D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U.S. Department of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No 251. Washington, 1952, p. 142.

Κεφάλαιο 2

2. ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ - ΠΡΟΒΟΛΩΝ

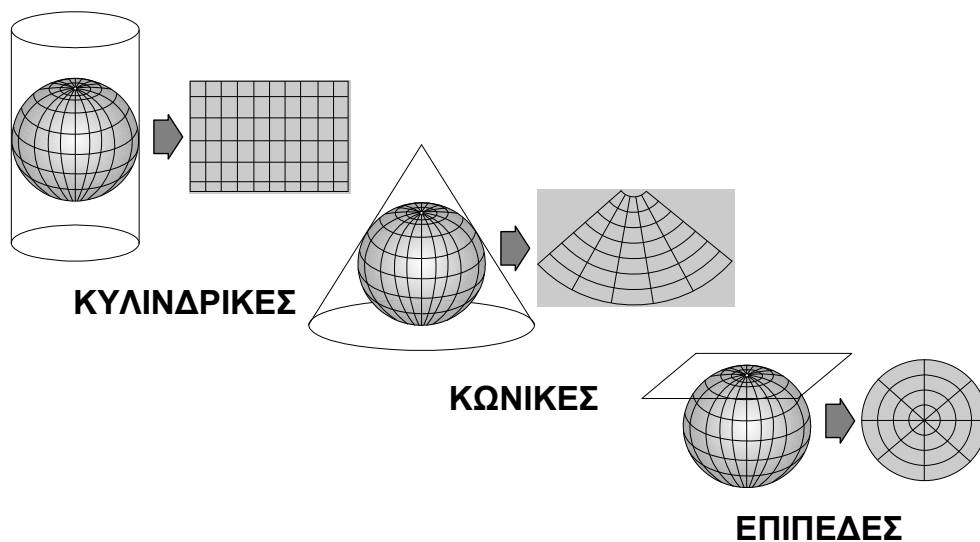
2.1 Εισαγωγή στις αρχές των απεικονίσεων

Οι απεικονίσεις στη χαρτογραφία αναφέρονται στην προβολή ή απεικόνιση της επιφάνειας αναφοράς, δηλαδή του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής (ή της σφαίρας) στο επίπεδο, δηλαδή στο επίπεδο του χάρτη. Η απεικόνιση αυτή πάντα συνοδεύεται από παραμορφώσεις. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να επινοήσουμε τρόπους απεικόνισης που να διατηρούν ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες των χωρικών οντοτήτων αναλλοίωτες (για παράδειγμα: τα εμβαδά ή τις γωνίες ή τα μήκη σε ορισμένες όμως διευθύνσεις), αλλά είναι αδύνατο να παραμένουν ταυτόχρονα όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες αναλλοίωτες.

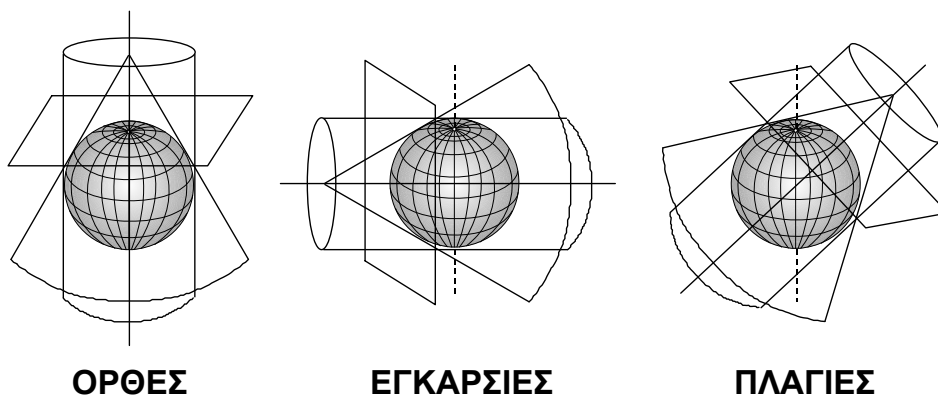
2.2 Βασικές αρχές απεικονίσεων-προβολών

Η απεικόνιση αντί να γίνει απ' ευθείας στην επιφάνεια ενός **επιπέδου**, μπορεί να γίνει πρώτα πάνω σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια και στη συνέχεια αυτή να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Τέτοιες κατάλληλες αναπτυσσόμενες επιφάνειες είναι η παράπλευρη επιφάνεια ενός **κυλίνδρου** ή ενός **κώνου** (Σχήμα 2.1). Οι απεικονίσεις λοιπόν, ανάλογα με την αναπτυσσόμενη επιφάνεια που χρησιμοποιούμε, ονομάζονται κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες ή αζιμουθιακές.

Ανάλογα με τον προσανατολισμό του κυλίνδρου, του κώνου ή του επιπέδου σε σχέση με την επιφάνεια αναφοράς (έλλειψοειδές εκ περιστροφής ή σφαίρα) οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: **ορθές**, **εγκάρσιες** και **πλάγιες** (Σχήμα 2.2). Ορθές ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας ταυτίζεται με τον άξονα περιστροφής της γης. Εγκάρσιες ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας είναι κάθετος με τον άξονα περιστροφής της γης. Πλάγιες, τέλος, ονομάζονται οι απεικονίσεις που ο άξονας συμμετρίας της αναπτυσσόμενης επιφάνειας σχηματίζει τυχαία γωνία με τον άξονα περιστροφής της γης.



Σχήμα 2.1 Κυλινδρικές, κωνικές και επίπεδες απεικονίσεις



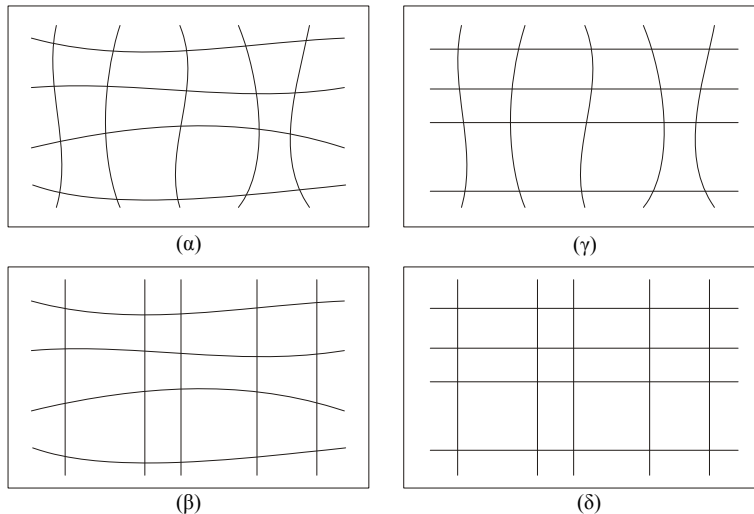
Σχήμα 2.2 Ορθές, εγκάρσιες και πλάγιες απεικονίσεις

Οι απεικονίσεις μπορούν να πραγματοποιηθούν με καθαρά γεωμετρικούς τρόπους. Αρκεί να προβάλλουμε τα σημεία του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας σε ένα επίπεδο ή σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια. Γι' αυτό το λόγο άλλωστε πολλές φορές χρησιμοποιούμε και τον όρο προβολή. Η προβολή αυτή μπορεί να είναι κεντρική ή παράλληλη. Στις περισσότερες περιπτώσεις μια κεντρική προβολή απεικονίζει μονοσήμαντα μόνο ένα μέρος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας, για παράδειγμα μόνο το ένα ημισφαίριο. Η απεικόνιση όμως μπορεί να πραγματοποιηθεί και με καθαρά αναλυτικό τρόπο, χωρίς να προέρχεται από

γεωμετρική προβολή, ή και να προκύψει από συνδυασμό αναλυτικής και γεωμετρικής μεθόδου.

Στο ελλειψοειδές ή τη σφαίρα συνήθως χρησιμοποιούμε ως σύστημα αναφοράς το σύστημα των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ, λ) , ενώ στο επίπεδο ένα σύστημα ορθογωνίων (x, y) ή πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) . Κάθε απεικόνιση ορίζεται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων f, g οι οποίες και καθορίζουν τις παραμορφώσεις των γεωμετρικών μεγεθών από το ελλειψοειδές ή τη σφαίρα στο επίπεδο. Επομένως, ο νόμος κάθε απεικόνισης ή προβολής εκφράζεται από τις σχέσεις:

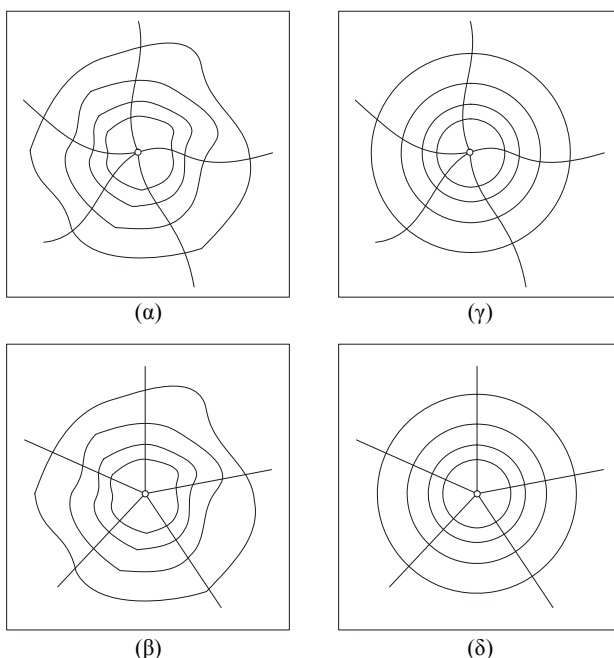
$$x = f(\varphi, \lambda) \text{ και} \\ y = g(\varphi, \lambda).$$



Σχήμα 2.3 Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με ορθογώνιες συντεταγμένες

Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων, που αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις συναρτήσεων f και g ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x, y) για το χάρτη. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 2.3α) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι: $x=f(\varphi, \lambda)$ και $y=g(\varphi, \lambda)$ και οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων είναι εν γένει καμπύλες γραμμές. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 2.3β) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $x=f(\lambda)$ και $y=g(\varphi, \lambda)$. Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη: x είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση

(Σχήμα 2.3γ) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $x=f(\varphi,\lambda)$ και $y=g(\varphi)$. Δηλαδή, όταν η συντεταγμένη: y είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού πλάτους, τότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν μια παράλληλη δέσμη ευθειών. Τέλος, όταν ισχύει: $x=f(\lambda)$ και $y=g(\varphi)$, τότε και οι μεσημβρινοί αλλά και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών (Σχήμα 2.3δ). Η τελευταία αυτή περίπτωση αναφέρεται στις ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις.



Σχήμα 2.4 Εικόνες μεσημβρινών και παραλλήλων γενικών περιπτώσεων απεικονίσεων που ορίζονται με πολικές συντεταγμένες

Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων χαρακτηριστικών περιπτώσεων συναρτήσεων f και g ως προς ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων (ρ,θ) για το χάρτη. Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 2.4α) έχουμε τη γενική μορφή μιας προβολής. Δηλαδή, όταν οι σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση είναι: $\rho=f(\varphi,\lambda)$ και $\theta=g(\varphi,\lambda)$ τότε εικόνες των παραλλήλων είναι κλειστές καμπύλες γραμμές και των μεσημβρινών κεντρική δέσμη καμπύλων γραμμών. Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 2.4β) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και παραλλήλων όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi,\lambda)$ και $\theta=g(\lambda)$. Δηλαδή, η πολική γωνία: θ είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού μήκους, τότε οι εικόνες των μεσημβρινών αποτελούν μια κεντρική δέσμη ευθειών. Στην τρίτη περίπτωση (Σχήμα 2.4γ) παρουσιάζονται οι εικόνες των μεσημβρινών και

παραλλήλων όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi)$ και $\gamma=g(\varphi,\lambda)$. Δηλαδή, η πολική ακτίνα: ρ είναι συνάρτηση μόνον του γεωγραφικού πλάτους, τότε οι εικόνες των παραλλήλων αποτελούν ομόκεντρους κύκλους. Τέλος, όταν ισχύει: $\rho=f(\varphi)$ και $\theta=g(\lambda)$, τότε οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως ομόκεντροι κύκλοι (Σχήμα 2.4δ).

Ανάλογα με τις παραμορφώσεις που επιφέρουν σε γεωμετρικά μεγέθη, οι απεικονίσεις διακρίνονται σε: **σύμμορφες**, **ισοδύναμες** και **ισαπέχουσες**. Σύμμορφες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτη τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων, δηλαδή διατηρούν το σχήμα τους. Ισοδύναμες ονομάζονται οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα εμβαδά. Τέλος, ισαπέχουσες ονομάζονται οι απεικονίσεις εκείνες οι απεικονίσεις που διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη σε ορισμένες μόνο διευθύνσεις.

Συνήθως, επιλέγουμε μια απεικόνιση με βασικό κριτήριο την απλότητα των σχέσεων που την ορίζουν, όμως πολλές φορές το είδος του χάρτη που πρόκειται να δημιουργηθεί είναι δυνατό να καθορίζει το είδος της απεικόνισης που θα χρησιμοποιηθεί. Έτσι, για τους θεματικούς χάρτες χρησιμοποιούμε συνήθως ισοδύναμες απεικονίσεις ενώ για τους τοπογραφικούς χάρτες σύμμορφες. Πολλές φορές, χρησιμοποιούμε πλάγιες απεικονίσεις για να ελαχιστοποιήσουμε τις παραμορφώσεις σε μια περιορισμένη περιοχή.

2.3 Βιβλιογραφία

- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.
- Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Richardus, P. and R. K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.
- Tobler, W. R. "A classification of map projections". *Annals of the Association of American Geographers*, 52, 1962, pp. 167-175.

Κεφάλαιο 3

3. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

3.1 Εισαγωγή στα συστήματα απεικονίσεων

Από την απειρία των απεικονίσεων που μπορούμε να φανταστούμε για να απεικονίσουμε την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς ή μιας σφαίρας στο επίπεδο μόνο ένας μικρός σχετικά αριθμός χρησιμοποιείται στην πράξη για χαρτογραφικούς σκοπούς και μάλιστα, ένας ακόμη μικρότερος για γεωδαιτικούς σκοπούς.

Ένα σύστημα προβολής ή απεικόνισης μπορεί να προκύψει με γεωμετρικό ή αναλυτικό τρόπο. Ο νόμος της απεικόνισης μπορεί να ορισθεί ακόμα και αυθαίρετα αλλά συνήθως στην πράξη προκύπτει από την ολοκλήρωση μιας διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες. Ένας απλός τρόπος δημιουργίας μιας οικογένειας συστημάτων απεικόνισης είναι να ξεκινήσουμε με μια απλή ισαπέχουσα απεικόνιση σε κύλινδρο ή κώνο ή επίπεδο και να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη ή ισοδύναμη. Μπορούμε ακόμα να εφαρμόσουμε στροφή 90° στην αναπτυσκόμενη επιφάνεια μιας ορθής απεικόνισης για να παραχθεί μια εγκάρσια ή μια τυχαία στροφή με σκοπό να δημιουργηθεί μια πλάγια απεικόνιση.

3.2 Ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις

Οι κυλινδρικές απεικονίσεις προκύπτουν από την απεικόνιση της επιφάνειας του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στην παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου, η οποία εφάπτεται σε αυτήν.

3.2.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή

Η ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή ορίζεται στη σφαίρα από τις σχέσεις:

$x = R \lambda,$
 $y = R \varphi,$
 όπου: R η ακτίνα της σφαίρας.

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις αυτές οι γεωγραφικές συντεταγμένες, συναρτήσει των ορθογωνίων δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = \frac{y}{R}.$$

Οι σχέσεις της προβολής για την απεικόνιση της επιφάνειας ενός ελλειψοειδούς, είναι:

$x = a \lambda$ και
 $y = M,$
 όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς και M το μήκος του μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι το πλάτος φ .

Το μήκος του μεσημβρινού (M) υπολογίζεται με τη βοήθεια του παρακάτω αναπτύγματος σειρών:

$$M = a(1 - e^2) [M_0 \varphi - M_2 \sin 2\varphi + M_4 \sin 4\varphi - M_6 \sin 6\varphi].$$

Με:

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \dots$$

$$M_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \dots$$

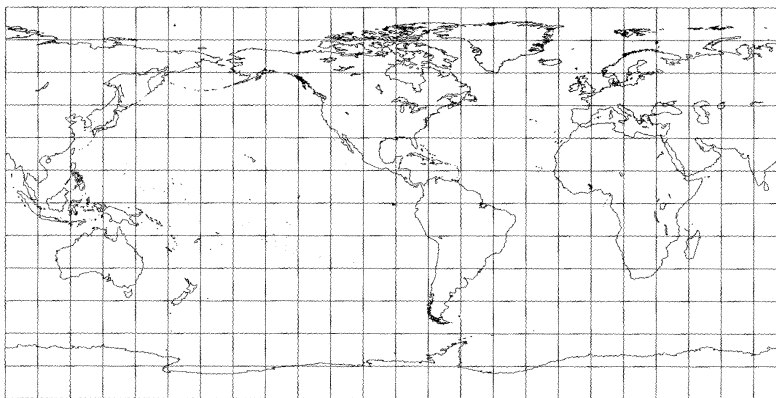
$$M_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \dots$$

$$M_6 = \frac{35}{3072}e^6 + \dots,$$

όπου: e η πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Εξετάζοντας τις σχέσεις αυτές εύκολα παρατηρούμε ότι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται σε ευθείες κάθετες μεταξύ τους, που μάλιστα στην περίπτωση της σφαίρας ισαπέχουν. Δηλαδή στην επιφάνεια της σφαίρας, το

δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων απεικονίζεται στο επίπεδο σε ένα δίκτυο τετραγώνων (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 Ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή

Οι κύριες κλίμακες της απεικόνισης, δηλαδή οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο για τη σφαίρα θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{R d\varphi} = \frac{R d\varphi}{R d\varphi} = 1,$$

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Ενώ για το ελλειψοειδές θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{dy}{dM} = \frac{dM}{dM} = 1,$$

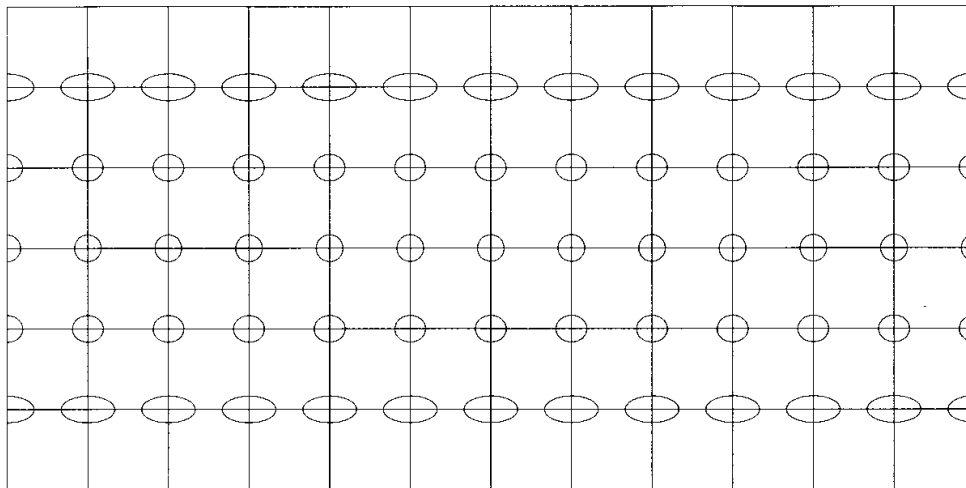
$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{dx}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{a d\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\lambda} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Εξετάζοντας τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, συμπεραίνουμε ότι τα μήκη των μεσημβρινών διατηρούνται αναλλοίωτα στο επίπεδο της απεικόνισης και επειδή ισχύει $m_p \geq m_m$, ο μεγάλος ημιάξονας της δείκτριας Tissot είναι προσανατολισμένος κατά τη διεύθυνση των παραλλήλων.

Για τις παραμορφώσεις επιφανειών και γωνιών, εάν αντικαταστήσουμε στις γνωστές σχέσεις τις κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο, θα έχουμε για τη σφαίρα:

$$M = \frac{1}{\cos \varphi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Η προβολή αυτή δεν είναι σύμμορφη ούτε ισοδύναμη. Είναι όμως ιδιαίτερα απλή. Οι παραμορφώσεις είναι αρκετά σημαντικές εκτός από τις περιοχές που βρίσκονται κοντά στον ισημερινό (Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισαπέχουσας προβολής

3.2.2 Μερκατορική προβολή

Η Μερκατορική προβολή είναι μια σύμμορφη ορθή κυλινδρική απεικόνιση. Προκύπτει από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή με κατάλληλη μετάθεση των θέσεων των παραλλήλων στο επίπεδο της απεικόνισης ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της συμμορφίας. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

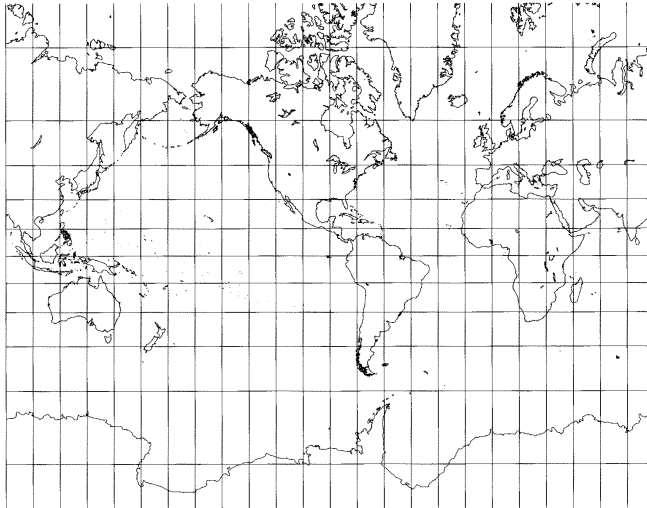
$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{R d\varphi} = \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Όμως: $dx = R d\lambda$, οπότε θα έχουμε:

$$dy = \frac{R}{\cos \varphi} d\varphi \Rightarrow y = R \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi.$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

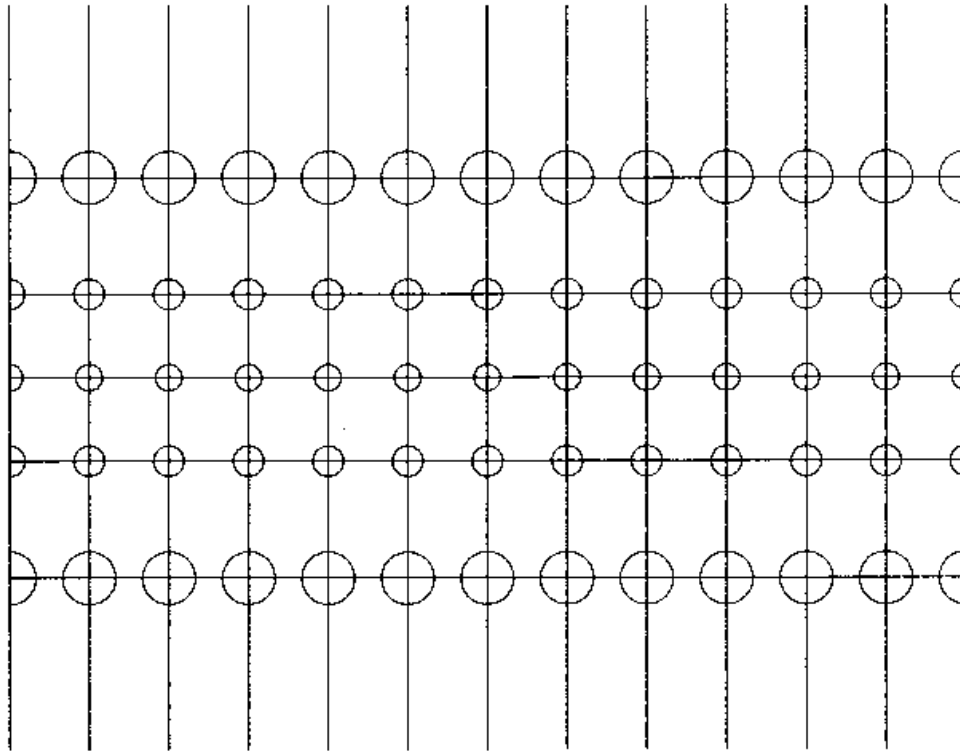
$$y = R \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$



Σχήμα 3.3 Ορθή Μερκατορική προβολή

Στην απεικόνιση αυτή οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι απεικονίζονται ως παράλληλες δέσμες ευθειών και μάλιστα οι μεσημβρινοί ισαπέχουν μεταξύ τους (Σχήμα 3.3). Η ορθή Μερκατορική προβολή είναι σύμμορφη απεικόνιση ($\epsilon=0$), δηλαδή οι ελλείψεις παραμόρφωσης εκφυλίζονται σε κύκλους (Σχήμα 3.4). Οι κύριες κλίμακες (δηλαδή, οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο) δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$



Σχήμα 3.4 Οι κύκλοι παραμόρφωσης της ορθής Μερκατορικής προβολής

ενώ η επιφανειακή κλίμακα θα είναι:

$$M = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την προβολή, προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = 2 \arctan \left(e^{\frac{y}{R}} \right) - \frac{\pi}{2}.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να απεικονίσουμε την επιφάνεια του ελλειψοειδούς στο επίπεδο, διατηρούμε τη σχέση:

$x = a \lambda$, όπου: a ο μεγάλος ημιάξονας του ελλειψοειδούς.

Ακολουθώντας την ίδια πορεία, λόγω του ότι επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της συμμορφίας, θα έχουμε:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{dy}{\rho d\varphi} = \frac{dx}{N \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως: $dx = a d\lambda$, θα έχουμε:

$$dy = \frac{\rho a}{N \cos \varphi} d\varphi = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi \Rightarrow y = a \int_0^\varphi \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = a \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right].$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για τη σύμμορφη αυτή απεικόνιση οι κύριες κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης στο ελλειψοειδές είναι:

$$m_m = m_p = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}.$$

Τέλος, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης είναι:

$$M = \frac{1-e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Η ορθή Μερκατορική προβολή χρησιμοποιείται στη ναυτιλία, επειδή έχει την ιδιότητα να απεικονίζει τις λοξοδρομίες σε ευθείες γιατί αφενός είναι σύμμορφη αφετέρου η σύγκλιση των μεσημβρινών είναι μηδενική σε κάθε σημείο της προβολής. Οι **λοξοδρομίες** είναι γραμμές στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που έχουν σε κάθε σημείο σταθερό αζιμούθιο.

3.2.3 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή

Ξεκινώντας πάλι από την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να δημιουργήσουμε μια απεικόνιση που να είναι ισοδύναμη. Για να προσδιορίσουμε το νόμο της απεικόνισης στη σφαίρα διατηρούμε ξανά τη σχέση:

$$x = R \lambda,$$

και επειδή επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της ισοδυναμίας, θα έχουμε:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{R d\varphi} \frac{dx}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως: $dx = R d\lambda$, θα έχουμε:

$$dy = R \cos \varphi d\varphi \Rightarrow y = R \int_0^{\varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση προκύπτει ότι:

$$y = R \sin \varphi.$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{y}{R}.$$

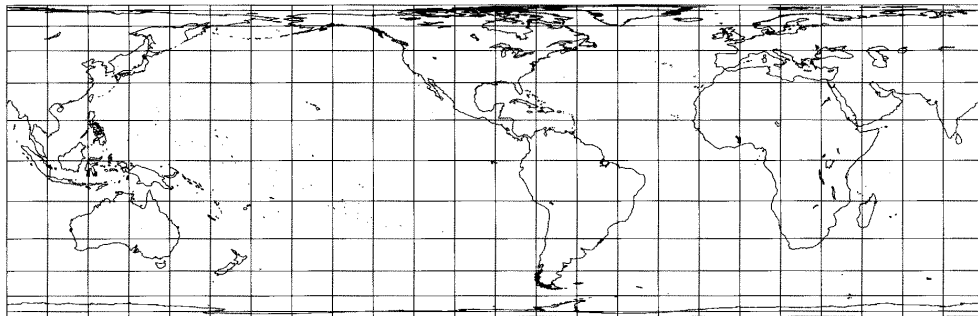
Η απεικόνιση αυτή (Σχήμα 3.5) είναι ισοδύναμη (δηλαδή $M=1$). Οι κύριες κλίμακες (στη σφαίρα) δίνονται από τις σχέσεις:

$$m_m = \cos \varphi \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \varphi},$$

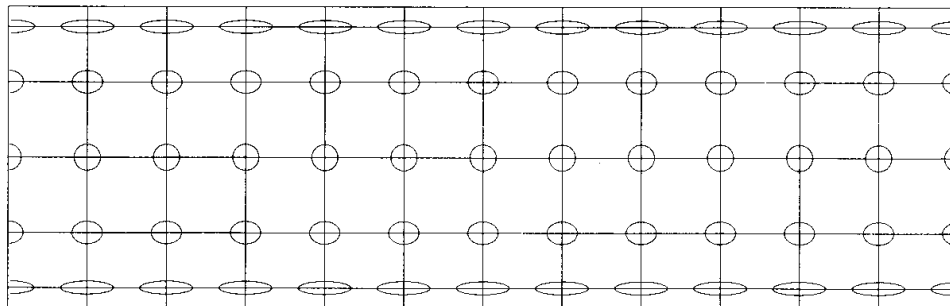
ενώ η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση θα είναι:

$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}.$$

Όπως και με τις υπόλοιπες ορθές κυλινδρικές απεικονίσεις, οι παραμορφώσεις και σε αυτήν αυξάνουν όσο αυξάνεται το γεωγραφικό πλάτος (Σχήμα 3.6). Η ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή έχει περιορισμένες εφαρμογές που κατά κανόνα αναφέρονται σε άτλαντες οι οποίοι περιλαμβάνουν χάρτες με πολύ μικρές κλίμακες και απεικονίζουν συνήθως ολόκληρη την επιφάνεια της γης. Στις περιπτώσεις αυτές αρκεί η χρήση των σχέσεων της απεικόνισης στη σφαίρα.



Σχήμα 3.5 Ορθή κυλινδρική ισοδύναμη προβολή



Σχήμα 3.6 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κυλινδρικής ισοδύναμης προβολής

3.3 Ορθές κωνικές απεικονίσεις

Οι κωνικές προβολές προκύπτουν από ένα κώνο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα κατά μήκος ενός παραλλήλου. Ο παράλληλος αυτός ονομάζεται βασικός παράλληλος και χαρακτηρίζεται από το γεωγραφικό του πλάτος (φ_0). Οι κωνικές προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων (ρ, θ). Όταν ο κώνος αναπτυχθεί στο επίπεδο οι μεσημβρινοί

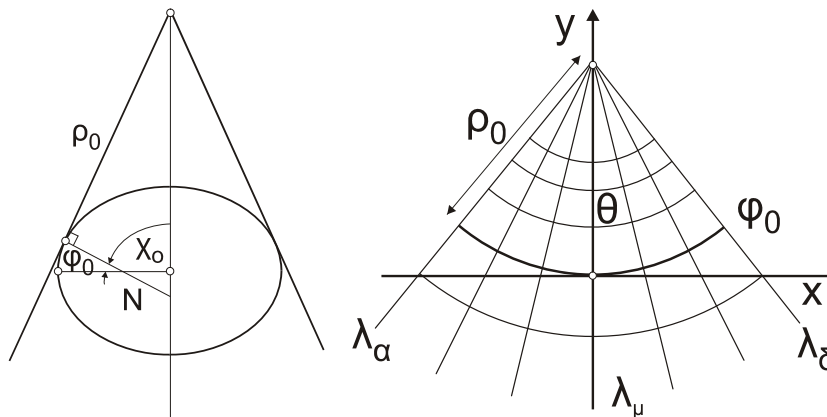
απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο την κορυφή του κώνου και οι παράλληλοι ως τόξα ομόκεντρων κύκλων με το ίδιο κέντρο (Σχήμα 3.7). Η πολική ακτίνα του βασικού παράλληλου (ρ_0) από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (Σχήμα 3.7) θα είναι, για το ελλειψοειδές:

$$\rho_0 = \frac{N}{\tan \varphi_0} = N \tan \chi_0,$$

όπου: χ η πολική απόσταση, δηλαδή η συμπληρωματική γωνία του γεωγραφικού πλάτους, $\chi=90^\circ-\varphi$,

ή για τη σφαίρα:

$$\rho_0 = \frac{R}{\tan \varphi_0} = R \tan \chi_0.$$



Σχήμα 3.7 Γεωμετρία κωνικών απεικονίσεων

Λόγω της επαφής του κώνου με την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας ο βασικός παράλληλος θα απεικονίζεται στο επίπεδο χωρίς παραμορφώσεις. Επομένως, για την πολική γωνία (θ) θα ισχύει:

$$d\theta = \frac{ds_{\rho_0}}{\rho_0} = \frac{N \cos \varphi_0 d\lambda}{N \cot \varphi_0},$$

δηλαδή: $\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0$.

Είναι φανερό, ότι στις κωνικές απεικονίσεις η σύγκλιση των μεσημβρινών θα είναι: $\gamma=\theta$. Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε

ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο επίπεδο του χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = \rho_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου: $\theta = (\lambda - \lambda_\mu) \sin \varphi_0 = (\lambda - \lambda_\mu) \cos \chi_0$, με λ_μ τον μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής.

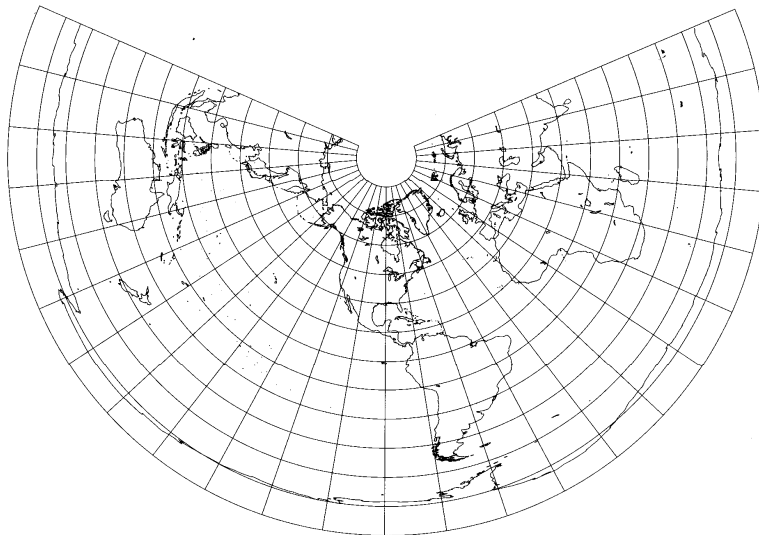
Ο άξονας y ταυτίζεται με τον μέσο μεσημβρινό της περιοχής και ο άξονας x εφάπτεται στο βασικό παράλληλο (Σχήμα 3.7).

3.3.1 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή

Όπως και με την προηγούμενη κατηγορία των απεικονίσεων έτσι και στις κωνικές ξεκινάμε με την ισαπέχουσα, που αποτελεί την απλούστερη των περιπτώσεων. Ο νόμος της απεικόνισης για τη σφαίρα θα ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + R(\varphi_0 - \varphi).$$



Σχήμα 3.8 Ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή

Είναι φανερό ότι στην ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή ο πόλος του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν απεικονίζεται ως σημείο αλλά ως τόξο κύκλου (Σχήμα 3.8).

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που ορίζουν την απεικόνιση, έχουμε:

$$\lambda = \frac{\theta}{\sin \varphi_0},$$

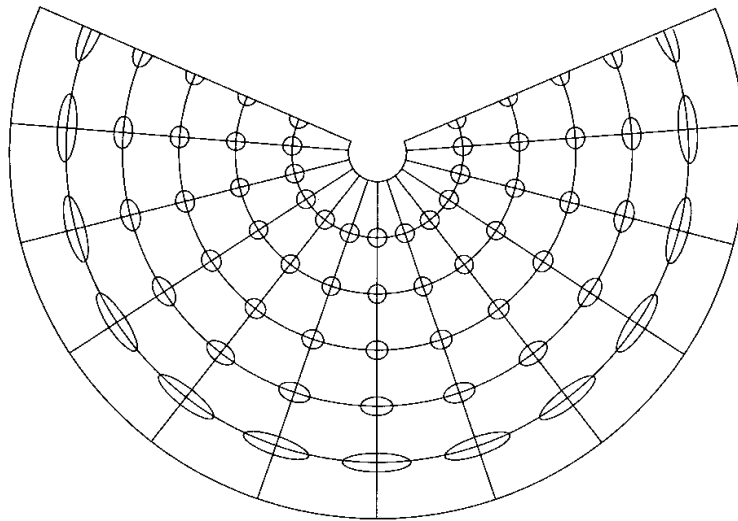
$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\rho - \rho_0}{R}.$$

Οι κύριες κλίμακες, δηλαδή οι κλίμακες γραμμικής παραμόρφωσης κατά μεσημβρινό και παράλληλο της σφαίρας θα είναι:

$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{R d\varphi}{R d\varphi} = 1,$$

και:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \sin \varphi_0 d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{\rho \sin \varphi_0}{R \cos \varphi}.$$



Σχήμα 3.9 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ορθής κωνικής ισαπέχουσας προβολής

Εξετάζοντας τη σχέση της κλίμακας κατά παράλληλο (m_p) παρατηρούμε αφενός ότι ο βασικός παράλληλος παραμένει αναλλοίωτος, αφετέρου ότι οι παραμορφώσεις αυξάνονται όσο απομακρυνόμαστε από το βασικό παράλληλο (Σχήμα 3.9).

Με ανάλογο τρόπο μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης αυτής αν η επιφάνεια της σφαίρας αντικατασταθεί από ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Τότε θα έχουμε:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0,$$

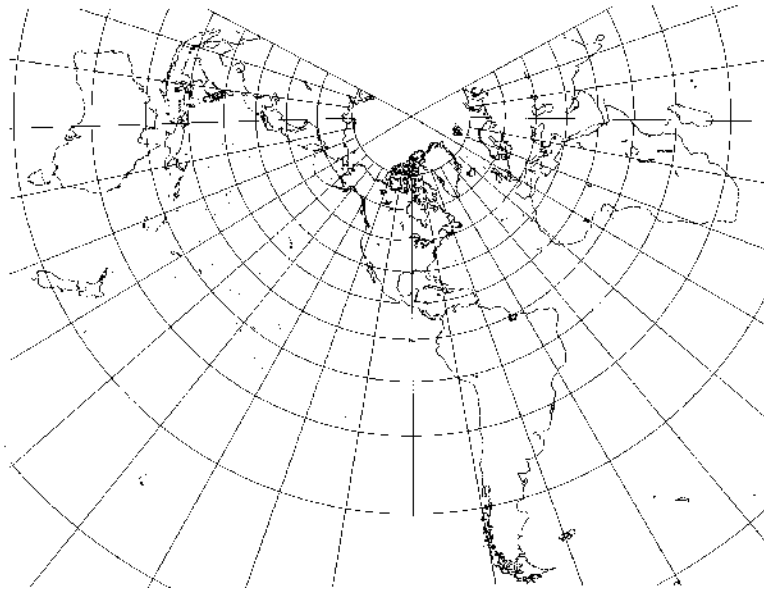
$$\rho = \rho_0 - M.$$

όπου: M το τόξο μεσημβρινού από πλάτος φ_0 μέχρι φ .

3.3.2 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert

Ξεκινώντας από την ορθή κωνική ισαπέχουσα προβολή μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε σύμμορφη μεταθέτοντας τις θέσεις των παραλλήλων (Σχήμα 3.10). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία θ :

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$



Σχήμα 3.10 Σύμμορφη κωνική προβολή - Lambert

Στη συνέχεια, θα προσδιορίσουμε την πολική ακτίνα (ρ) με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της συμμορφίας. Θα πρέπει, λοιπόν, οι κύριες κλίμακες να είναι ίσες, δηλαδή:

$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$, θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho \cos \chi_0}{R \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \cos \chi_0 \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\ln \rho = \cos \chi_0 \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = k \left(\tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

Η σταθερά k προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για $\chi = \chi_0$ γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι: $\rho = R \tan \chi_0$. Επιλύοντας ως προς τη σταθερά k , θα έχουμε:

$$k = R \tan \chi_0 \left(\cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0},$$

Με αντικατάσταση, λοιπόν, θα έχουμε για την πολική ακτίνα στη σφαίρα την παρακάτω σχέση:

$$\rho = R \tan \chi_0 \left(\cot \frac{\chi_0}{2} \right)^{\cos \chi_0} \left(\tan \frac{\chi}{2} \right)^{\cos \chi_0}.$$

Αντιστρέφοντας προκύπτουν οι σχέσεις:

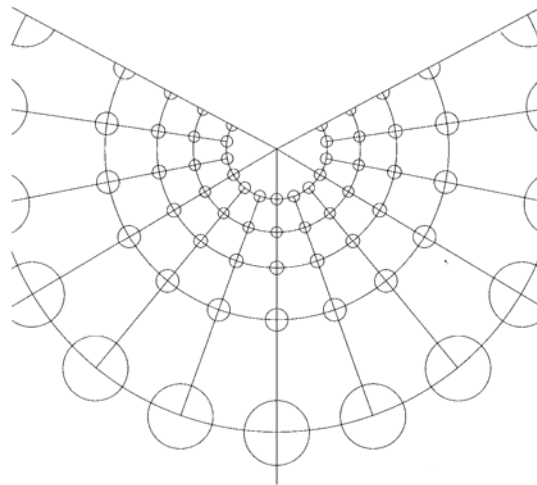
$$\lambda = \frac{\theta}{\cos \chi_0} \quad \text{και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\left(\frac{\rho}{R \tan \chi_0} \right)^{\frac{1}{\cos \chi_0}} \tan \frac{\chi_0}{2} \right).$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο (δηλαδή, οι κύριες κλίμακες) θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{-d\rho}{R d\varphi}.$$

Στο Σχήμα 3.11 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων της προβολής σε σκαρίφημα καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης, οι οποίες λόγω της συνθήκης της σύμμορφιας εκφυλίζονται σε κύκλους. Η προβολή Lambert είχε πολύ μεγάλη διάδοση στην Ευρώπη στο διάστημα του μεσοπολέμου, για χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές. Σήμερα, έχει αντικατασταθεί από την εγκάρσια Μερκατορική προβολή.



Σχήμα 3.11 Οι κύκλοι παραμόρφωσης της σύμμορφης κωνικής προβολής - Lambert

Με ανάλογη διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0,$$

$$\text{και: } \rho = N_0 \tan \chi_0 \left(\frac{\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}\right)^{\frac{e}{2}}}{\tan\left(45^\circ - \frac{\varphi_0}{2}\right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0}\right)^{\frac{e}{2}}} \right)^{\sin \varphi_0}.$$

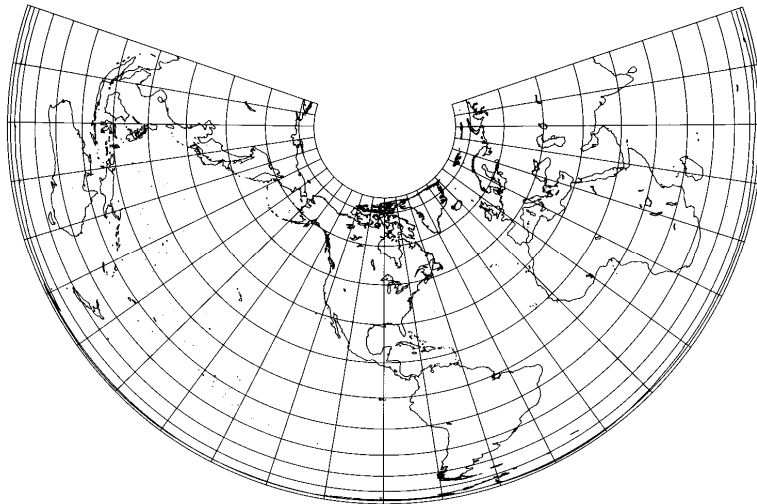
Οι κύριες κλίμακες στο ελλειψοειδές είναι:

$$m = m_m = m_p = \frac{\rho \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}$$

3.3.3 Ισοδύναμη κωνική προβολή - Albers

Η ορθή κωνική προβολή μετατρέπεται σε ισοδύναμη αν η πολική ακτίνα προσδιοριστεί με τρόπο που να διατηρείται η ιδιότητα της ισοδυναμίας (Σχήμα 3.12). Θα διατηρήσουμε λοιπόν τη σχέση για την πολική γωνία θ :

$$\theta = \lambda \sin \varphi_0 = \lambda \cos \chi_0.$$



Σχήμα 3.12 Ισοδύναμη κωνική προβολή – Albers

Ας προσδιορίσουμε τώρα την πολική ακτίνα εξασφαλίζοντας τη συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή για να διαμορφώσουμε τη διαφορική εξίσωση της πολικής ακτίνας (ρ), θα έχουμε:

$$\frac{ds_m ds_p}{dm dp} = 1 \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως: $d\theta = \cos \chi_0 d\lambda$ και $d\chi = -d\phi$. Θα έχουμε:

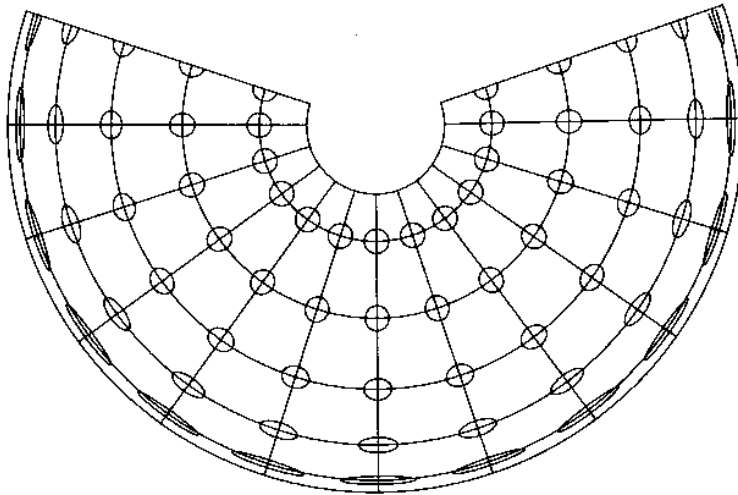
$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho \cos \chi_0}{R \sin \chi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \frac{\sin \chi}{\cos \chi_0} d\chi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\rho^2 = -2R^2 \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} + C.$$

Η σταθερά C προσδιορίζεται από την ίδια σχέση σε μία οριακή θέση. Πράγματι, για $\chi = \chi_0$ γνωρίζουμε ότι η πολική ακτίνα πρέπει να είναι: $\rho = R \tan \chi_0$. Επιλύοντας ως προς τη σταθερά C , θα έχουμε:

$$C = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2.$$



Σχήμα 3.13 Οι ελλείψεις παραμόρφωσης της ισοδύναμης κωνικής προβολής - Albers

Με αντικατάσταση, λοιπόν, θα έχουμε για την πολική ακτίνα την παρακάτω σχέση για τη σφαίρα:

$$\rho^2 = R^2 \tan^2 \chi_0 + 2R^2 \left(1 - \frac{\cos \chi}{\cos \chi_0} \right).$$

Ας σημειωθεί, ότι και σε αυτήν την απεικόνιση η εικόνα του πόλου του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας δεν θα είναι σημείο αλλά τόξο κύκλου. Στο Σχήμα 3.13 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων σε σκαρίφημα για την προβολή αυτή και οι ελλείψεις παραμόρφωσης.

3.4 Ορθές επίπεδες απεικονίσεις

Οι επίπεδες προβολές προκύπτουν από ένα επίπεδο που εφάπτεται στο ελλειψοειδές ή στη σφαίρα σε κάποιο σημείο. Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις το σημείο αυτό είναι ο πόλος. Στη συνέχεια, τα σημεία από την επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας προβάλλονται στο επίπεδο. Οι επίπεδες προβολές ορίζονται για λόγους ευκολίας με τη βοήθεια των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) . Στις ορθές επίπεδες απεικονίσεις, ή αζιμουθιακές όπως αλλιώς λέγονται, οι μεσημβρινοί απεικονίζονται ως κεντρική δέσμη ευθειών με κέντρο τον πόλο της σφαίρας και οι παράλληλοι ως ομόκεντροι κύκλοι με το ίδιο κέντρο.

Στις περιπτώσεις που επιθυμούμε να μετατρέψουμε τις πολικές σε ορθογώνιες συντεταγμένες και μάλιστα, έτσι ώστε η απεικονιζόμενη περιοχή να παρουσιάζεται ορθά στο χάρτη, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho \sin \theta,$$

$$y = y_0 - \rho \cos \theta,$$

όπου: $\theta = \lambda - \lambda_\mu$, με λ_μ : το μέσο μεσημβρινό της απεικονιζόμενης περιοχής.

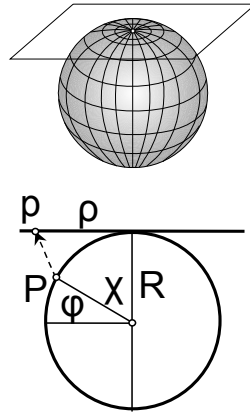
Ο άξονας y ταυτίζεται με το μέσο μεσημβρινό της περιοχής και ο άξονας x εφάπτεται στον παράλληλο για τον οποίο η πολική ακτίνα είναι ίση με $\rho = y_0$.

3.4.1 Ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή - Postel

Η επίπεδη αυτή προβολή, μπορεί να οριστεί σε αντιστοιχία με την ορθή κυλινδρική ισαπέχουσα προβολή αν αντί για ορθογώνιες χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες. Ο πόλος της σφαίρας απεικονίζεται σε σημείο, οι μεσημβρινοί σε κεντρική δέσμη ευθειών που διέρχεται από τον πόλο και οι παράλληλοι σε ομόκεντρος κύκλους με κέντρο τον πόλο. Οι ακτίνες των παραλλήλων είναι ίσες με τις πραγματικές τους αποστάσεις πάνω στη σφαίρα, μετρούμενες από τον πόλο (Σχήμα 3.15). Για την απεικόνιση αυτή θα έχουμε:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \chi.$$



Σχήμα 3.15 Γεωμετρική αρχή προβολής Postel

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις, έχουμε:

$$\lambda = \theta \text{ και } \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

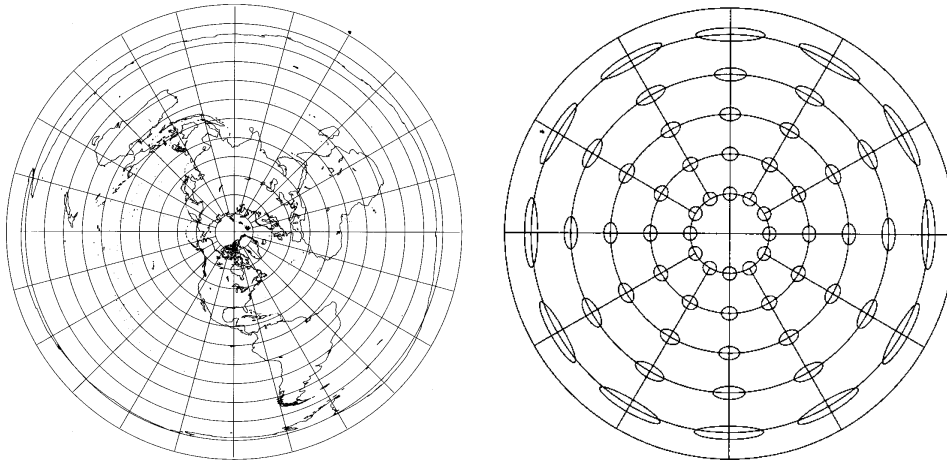
$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{-R d\chi}{-R d\chi} = 1.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} = \frac{\chi}{\sin \chi}.$$

Εξετάζοντας την κλίμακα κατά μεσημβρινό παρατηρούμε ότι: $m_p \geq 1$. Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{\chi}{\sin \chi} \text{ και } \sin E = \frac{\chi - \sin \chi}{\chi + \sin \chi}.$$



Σχήμα 3.16 Η προβολή Postel του βόρειου ημισφαιρίου της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

Η προβολή αυτή είναι πολύ απλή στην κατασκευή της και οι παραμορφώσεις στην περιοχή του πόλου είναι αρκετά μικρές. Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή δεν είναι ούτε σύμμορφη ούτε ισοδύναμη.

Στο Σχήμα 3.16 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρη την επιφάνεια της γης και (δεξιά) οι ελλείψεις παραμόρφωσης της απεικόνισης.

3.4.2 Πολική στερεογραφική προβολή

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε σύμμορφη ακολουθώντας την ίδια γνωστή πλέον διαδικασία. Επομένως για την πολική γωνία θα έχουμε:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της συμμορφίας, δηλαδή:

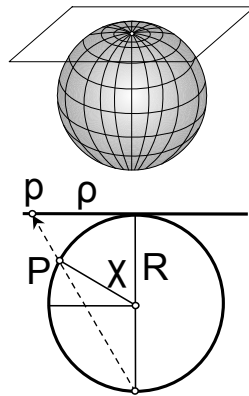
$$m_m = m_p \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} = \frac{ds_p}{dp} \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda}.$$

Επειδή όμως, $d\theta = d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$. Θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} = \frac{\rho}{R \cos \varphi} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\chi}{\sin \chi}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\ln \rho = \ln \tan \frac{\chi}{2} + C \quad \text{ή} \quad \rho = c \tan \frac{\chi}{2}.$$



Σχήμα 3.17 Γεωμετρική αρχή στερεογραφικής προβολής

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης μας δίνει μια οικογένεια από σύμμορφες απεικονίσεις, τα μέλη της οποίας εξαρτώνται από τη σταθερά c . Για την τιμή όμως της σταθεράς $c=2R$, η απεικόνιση που προκύπτει προέρχεται από κεντρική προβολή της σφαίρας από τον αντίποδα του πόλου στο επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο (Σχήμα 3.17).

Επομένως, επιλέγουμε να έχουμε:

$$\rho = 2R \tan \frac{\chi}{2}.$$

Οι αντίστροφες σχέσεις της στερεογραφικής προβολής είναι:

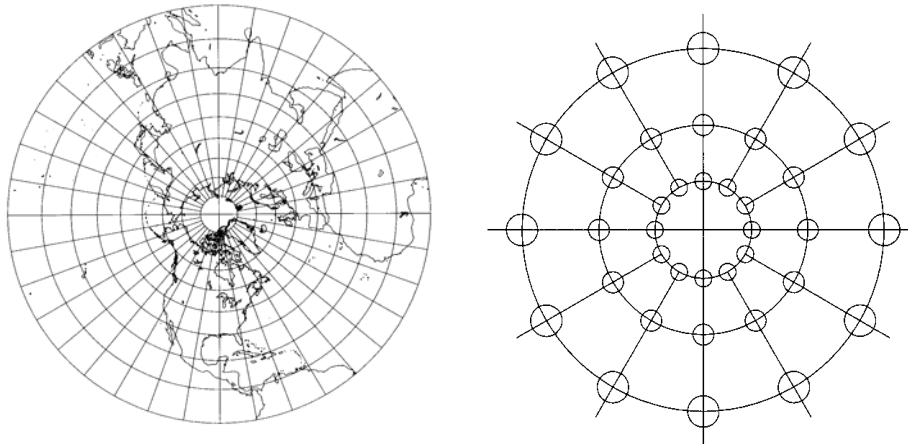
$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = m_p = \frac{1}{\cos^2 \frac{\chi}{2}},$$

ενώ, η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης θα είναι:



Σχήμα 3.18 Η στερεογραφική προβολή (αριστερά) και οι κύκλοι παραμόρφωσης (δεξιά)

$$M = \frac{1}{\cos^4 \frac{\chi}{2}}.$$

Η προβολή αυτή ήταν γνωστή στους αρχαίους Έλληνες με την ονομασία στερεογραφική προβολή. Χαρακτηριστική ιδιότητα της συγκεκριμένης προβολής είναι η απεικόνιση των κύκλων της σφαίρας σε κύκλους στο επίπεδο (σύμμορφη). Στο Σχήμα 3.18 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της γης.

Με ανάλογη διαδικασία μπορούν να προσδιοριστούν οι σχέσεις της απεικόνισης για το ελλειψοειδές, οι οποίες είναι:

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = \left(\frac{2a^2}{b} \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{\frac{e}{2}} \right) \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}.$$

3.4.3 Πολική επίπεδη ισοδύναμη προβολή - Lambert

Η ορθή επίπεδη ισαπέχουσα προβολή, μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμη. Για την πολική γωνία θα έχουμε:

$$\theta = \lambda.$$

Θα προσδιορίσουμε, λοιπόν, την πολική ακτίνα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της ισοδυναμίας, δηλαδή:

$$m_m m_p = 1 \Rightarrow \frac{ds_m}{dm} \frac{ds_p}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{-d\rho}{R d\varphi} \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = 1.$$

Επειδή όμως $d\theta = d\lambda$ και $d\chi = -d\varphi$, θα έχουμε:

$$\frac{d\rho}{R d\chi} \frac{\rho}{R \cos \varphi} = 1 \Rightarrow \rho d\rho = R^2 \sin \chi d\chi.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$\rho^2 = -2R^2 \cos \chi + C \Rightarrow \rho^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} - 2R^2 + c.$$

Η σταθερά c προσδιορίζεται για την οριακή θέση, όπου $\chi=0$ και επομένως θα πρέπει: $\rho=0$, τότε:

$$c = 2R^2.$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$\rho = 2R \sin \frac{\chi}{2}.$$

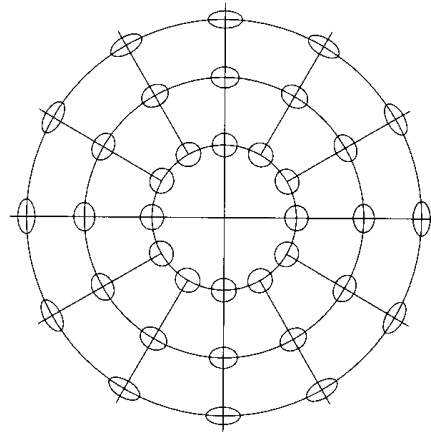
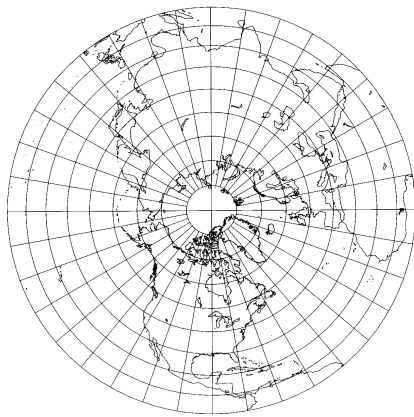
Με αντιστροφή των σχέσεων έχουμε:

$\lambda = \theta$ και

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\rho}{2R}.$$

Οι κλίμακες κατά μεσημβρινό και παράλληλο θα είναι:

$$m_m = \cos \frac{\chi}{2} \text{ και } m_p = \frac{1}{\cos \frac{\chi}{2}}.$$



Σχήμα 3.19 Η ορθή επίπεδη ισοδύναμη προβολή για το βόρειο ημισφαίριο της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

Η κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης φυσικά θα είναι μονάδα ($M=1$), ενώ η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση (E) σε διεύθυνση θα είναι:

$$\sin E = \frac{1 - \cos^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\chi}{2}}.$$

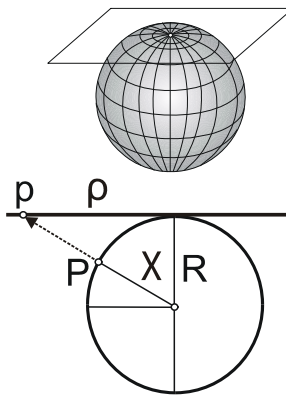
Στο Σχήμα 3.19 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

3.4.4 Πολική γωνιομική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από γεωμετρική κεντρική προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε ένα επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο με κέντρο προβολής το κέντρο της σφαίρας. Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι (Σχήμα 3.20):

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \tan \chi.$$



Σχήμα 3.20 Η γεωμετρική αρχή πολικής γωνιομικής προβολής

Οι αντίστροφες σχέσεις της απεικόνισης είναι:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

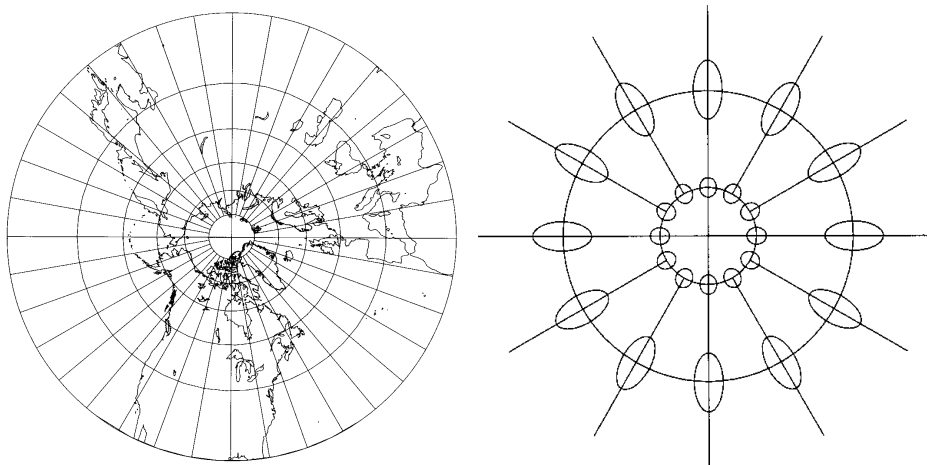
$$m_m = \frac{ds_m}{dm} = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{-\frac{R}{\cos^2 \chi} d\chi}{-R d\chi} = \frac{1}{\cos^2 \chi}.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{dp} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \tan \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} \Rightarrow m_p = \frac{1}{\cos \chi}$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και τη μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \frac{1}{\cos^3 \chi} \text{ και } \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}$$



Σχήμα 3.21 Η γνομονική προβολή (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά)

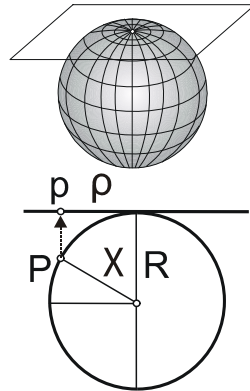
Η πολική γνομονική προβολή έχει τη σημαντική ιδιότητα να προβάλλονται οι μέγιστοι κύκλοι στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας σε ευθείες. Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, η συντομότερη οδός μεταξύ δύο σημείων στη σφαίρα θα είναι στην απεικόνιση η ευθεία που ενώνει τις προβολές των δύο σημείων. Στο Σχήμα 3.21 (αριστερά) παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της γης καθώς και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά).

3.4.5 Πολική ορθογραφική προβολή

Η απεικόνιση αυτή προκύπτει από ορθή παράλληλη προβολή της επιφάνειας της σφαίρας σε επίπεδο που εφάπτεται στον πόλο. Οι αναλυτικές σχέσεις της προβολής αυτής επομένως θα είναι (Σχήμα 3.22):

$$\theta = \lambda,$$

$$\rho = R \sin \chi.$$



Σχήμα 3.22 Γεωμετρική αρχή ορθογραφικής προβολής

Αντιστρέφοντας προκύπτει ότι:

$$\lambda = \theta \text{ και}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\rho}{R}.$$

Η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των μεσημβρινών θα είναι:

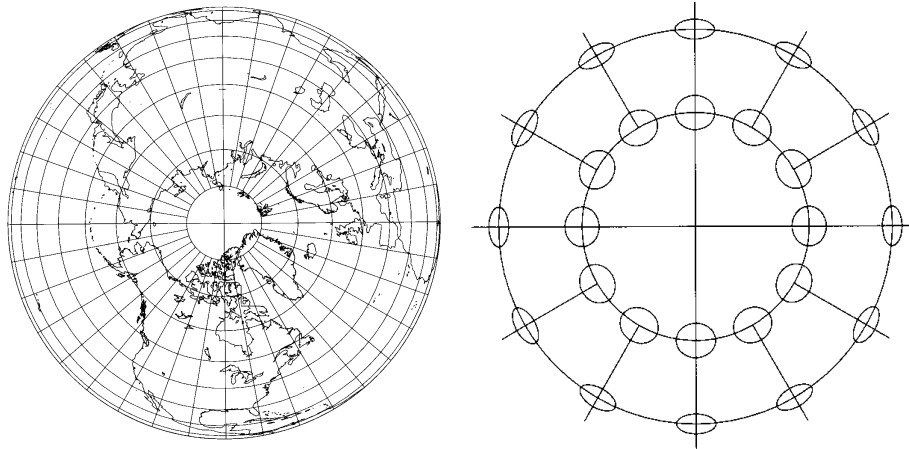
$$m_m = \frac{-d\rho}{R d\varphi} = \frac{R \cos \chi d\chi}{R d\chi} = \cos \chi.$$

Ενώ, η κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης κατά μήκος των παραλλήλων:

$$m_p = \frac{ds_p}{d\rho} = \frac{\rho d\theta}{R \cos \varphi d\lambda} = \frac{R \sin \chi d\lambda}{R \sin \chi d\lambda} = 1.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να εκφράσουμε τις σχέσεις που προσδιορίζουν την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης και την μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση σε διεύθυνση:

$$M = \cos \chi \quad \text{και} \quad \sin E = \tan^2 \frac{\chi}{2}.$$



Σχήμα 3.23 Η ορθογραφική προβολή και οι ελλείψεις παραμόρφωσης

Στο Σχήμα 3.23 παρουσιάζεται το δίκτυο των μεσημβρινών και παραλλήλων για ολόκληρο το βόρειο ημισφαίριο της επιφάνειας της γης (αριστερά) και οι ελλείψεις παραμόρφωσης (δεξιά). Στο Σχήμα 3.24 παρουσιάζονται σε σύγκριση μεταξύ τους οι παράλληλοι για όλες τις περιπτώσεις των επίπεδων απεικονίσεων. Παρατηρώντας το Σχήμα 3.24, βλέπουμε ότι οι παράλληλοι της σύμμορφης απεικόνισης (στερεογραφική) απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουν προς τον ισημερινό σε σχέση με την ισαπέχουσα. Αντίθετα οι παράλληλοι της ισοδύναμης προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό. Ανάλογη εικόνα έχουμε και για τις δύο άλλες προβολές λόγω της γεωμετρικής αρχής ορισμού τους. Στη γωνιωματική προβολή οι μεσημβρινοί απομακρύνονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς όμως να είναι σύμμορφη. Ενώ οι παράλληλοι της ορθογραφικής προβολής συμπιέζονται μεταξύ τους όσο πλησιάζουμε τον ισημερινό, χωρίς βέβαια να είναι ισοδύναμη.



Σχήμα 3.24 Συγκριτική παρουσίαση επίπεδων απεικονίσεων

3.5 Βιβλιογραφία

- Αγατζά-Μπαλοδήμου, Α.Μ. "Τα προβολικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα". Εισήγηση στο Σεμινάριο: Τάσεις και εξελίξεις στην επιστήμη του Αγρονόμου και Τοπογράφου Μηχανικού. Πανελλήνιος Σύλλογος Διπλωματούχων Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Αθήνα, Μάρτιος, 1985, σ. 45.
- Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.
- Bugayevskiy, L.M. and J.P. Snyder. *Map Projections. A Reference Manual*. Taylor & Francis, London, 1995, p 328.
- Cuenin, R. *Cartographie Generale*. Tome 1. Editions Eyrolles, Paris, 1972, p. 324.
- Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.
- Maling, D. H. *Measurements from Maps*. Pergamon Press. Oxford, 1989, p. 577.
- Νάκος, Β. "Αυτόματη Χαρτογράφηση για Χάρτες Μικρής Κλίμακας". Διπλωματική Εργασία. Ανώτατη Σχολή Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1979, σελ.81.
- Νάκος, Β. και Β. Φιλιππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.

- Richardus, P. and R. K. Adler. *Map projections*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1972, p. 174.
- Snyder, J.P. *An Album of Map Projections*. United States Geological Survey, Professional Paper **1453**, 1989, p. 249.
- Thomas, P. D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U.S. Dept. of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No. 251. Washington, 1952, p. 142.

Κεφάλαιο 4

4. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

4.1 Εισαγωγή στα Ελληνικά χαρτογραφικά συστήματα

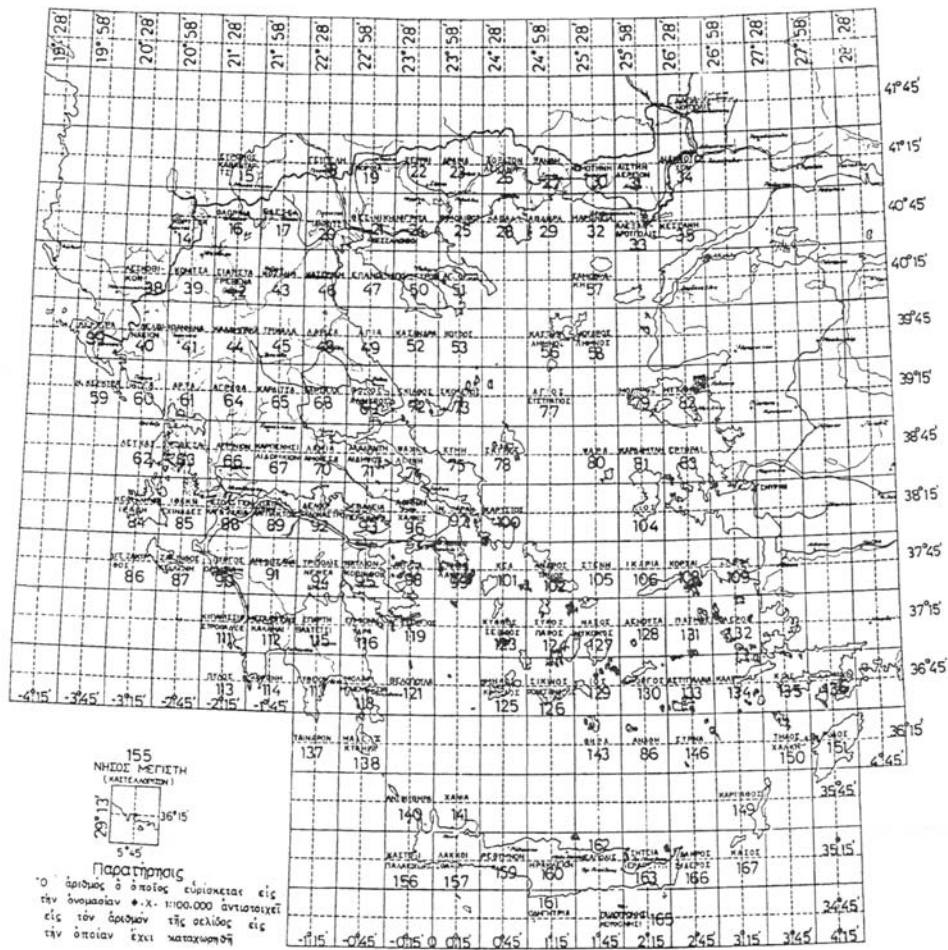
Με τον όρο σύστημα απεικόνισης ορίζουμε μια απεικόνιση εφαρμοσμένη σε συγκεκριμένο ελλειψοειδές. Το σύστημα απεικόνισης έτσι όπως ορίστηκε αποτελεί ένα σύστημα αναφοράς του γεωγραφικού χώρου. Ένα σύστημα απεικόνισης αξιολογείται σε γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εργασίες προσδιορίζοντας τη θέση στο χώρο οποιουδήποτε αντικειμένου επιθυμούμε. Στην Ελλάδα σήμερα βρίσκονται σε χρήση τέσσερα συστήματα απεικονίσεων.

4.2 Το σύστημα Hatt

Το σύστημα Hatt εφαρμόζεται στην Πλάγια Αζιμουθιακή Ισαπέχουσα Προβολή και στο ελλειψοειδές Bessel (με μεγάλο ημιάξονα $a=6.377.397,155\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=0,003342773$). Η απεικόνιση αυτή όπως φαίνεται και από την ονομασία της είναι ισαπέχουσα, δηλαδή, διατηρεί αναλλοίωτα τα μήκη στοιχειωδών γραμμών από το ελλειψοειδές στο επίπεδο κατά τις διευθύνσεις που συνδέουν το κέντρο της προβολής με τα σημεία του χώρου. Ολόκληρη η χώρα στο σύστημα Hatt έχει χωριστεί σε 130 περίπου σφαιροειδή τραπέζια διαστάσεων $30' \times 30'$, κάθε ένα από τα οποία αποτελεί και διαφορετικό τοπικό σύστημα (Σχήμα 4.1). Η αφετηρία του συστήματος είναι το Αστεροσκοπείο Αθηνών από το μεσημβρινό του οποίου μετράται το γεωγραφικό μήκος. Τα κέντρα των σφαιροειδών τραπέζιων αποτελούν κέντρα της προβολής και ονομάζονται κέντρα φύλλου, οι γεωγραφικές τους συντεταγμένες βρίσκονται σε ακέραιες μοίρες και $15'$ ή $45'$. Στην έκταση κάθε σφαιροειδούς τραπέζιου οι παραμορφώσεις μηκών φθάνουν τα 5 ppm (parts per million), δηλαδή οι παραμορφώσεις είναι της τάξης του 1:200.000. Το σύστημα Hatt αποτελούσε το επίσημο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς της χώρας και την ευθύνη της διαχείρισής του είχε η ΓΥΣ (Γεωγραφική

Υπηρεσία Στρατού). Σήμερα, το σύστημα αυτό βρίσκεται σε φθίνουσα χρήση λόγω των μειονεκτημάτων του. Μεταξύ των οποίων ξεχωρίζει και η ασυμβατότητά του με τις σύγχρονες τεχνολογίες δεδομένου ότι το ελλειψοειδές δεν είναι γεωκεντρικό και ως εκ τούτου δεν μπορούν εύκολα σε αυτό να εκφραστούν δεδομένα προερχόμενα από την τεχνολογία των GPS. Στις εφαρμογές αντικαθίσταται πλέον από το σύστημα ΕΓΣΑ'87.

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ Φ.Χ. ΚΛΙΜΑΚΟΣ 1:100.000



Σχήμα 4.1 Η διανομή του συστήματος Hatt

4.3 Το σύστημα UTM-6° (Universal Transverse Mercator)

Το σύστημα UTM εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή απεικόνιση και αρχικά στο ελλειψοειδές Hayford. Σήμερα στο σύστημα αυτό το ελλειψοειδές Hayford αντικαταστάθηκε από το ελλειψοειδές GRS-80 (με μεγάλο ημιάξονα $a=6378137\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=1/298,25722$). Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή είναι σύμμορφη απεικόνιση, δηλαδή διατηρεί αναλλοίωτη τη μορφή στοιχειωδών σχημάτων από το ελλειψοειδές στο επίπεδο. Στο σύστημα UTM ολόκληρη η επιφάνεια της γης χωρίζεται σε 60 ζώνες (τοπικά συστήματα) πλάτους 6° η κάθε μία. Η Ελλάδα απεικονίζεται σε δύο ζώνες με κεντρικούς μεσημβρινούς αντίστοιχα $\lambda_0=21^\circ$ (34η ζώνη) και $\lambda_0=27^\circ$ (35η ζώνη) από το μεσημβρινό του Greenwich. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) της απεικόνισης είναι 0.9996, ενώ στις τετμημένες (E-eastings) προστίθεται η σταθερά 500.000m. Οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό και είναι της τάξης των 500ppm (δηλαδή 1:2.000). Το σύστημα UTM έχει παγκόσμια χρήση και στην Ελλάδα το διαχειρίζεται αποκλειστικά η ΓΥΣ.

4.4 Το σύστημα ΕΜΠ-3° (Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή)

Το σύστημα ΕΜΠ εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή και στο ελλειψοειδές Bessel (με μεγάλο ημιάξονα $a=6.377.397,155\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=0,003342773$). Η απεικόνιση έχει την ιδιότητα της συμμορφίας. Με το σύστημα ΕΜΠ-3° η χώρα χωρίζεται σε τρεις ζώνες πλάτους 3°, με αφητηρία το Αστεροσκοπείο Αθηνών. Ο κεντρικός μεσημβρινός της πρώτης ζώνης είναι ο μεσημβρινός με $\lambda_0=-3^\circ$, της δεύτερης ζώνης $\lambda_0=0^\circ$ και της τρίτης $\lambda_0=3^\circ$. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) της απεικόνισης είναι 0.9999, ενώ στις τετμημένες (X) προστίθεται η σταθερά 200.000m και στις τεταγμένες (Y) αφαιρείται η σταθερά που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού από τον ισημερινό μέχρι τον παράλληλο των 34°. Οι παραμορφώσεις στο σύστημα αυτό αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό. Στην έκταση κάθε ζώνης οι παραμορφώσεις είναι της τάξης των 100ppm (δηλαδή 1:10.000). Το σύστημα της ΕΜΠ δημιουργήθηκε για τις ανάγκες του Υπουργείου Δημοσίων Έργων λόγω των μειονεκτημάτων που παρουσίαζε το σύστημα Hatt. Η Επιχείρηση Πολεοδομική Ανασυγκρότηση (ΕΠΑ'83) βασίστηκε σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Σήμερα, παρουσιάζει και αυτό φθίνουσα χρήση καθώς αντικαθίσταται από το ΕΓΣΑ'87.

4.5 Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΕΓΣΑ'87)

Το σύστημα ΕΓΣΑ'87 εφαρμόζεται στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή και στο ελλειψοειδές GRS-80 (με μεγάλο ημιάξονα $a=6378137\text{m}$ και επιπλάτυνση $f=1/298,25722$). Η απεικόνιση έχει την ιδιότητα της συμμορφίας. Με το σύστημα αυτό η χώρα περιέχεται σε μία μόνο ζώνη με κεντρικό μεσημβρινό $\lambda_0=24^\circ$ από το μεσημβρινό του Greenwich. Ο συντελεστής κλίμακας (k_0) είναι 0.9996, ενώ στις τετμημένες (X) προστίθεται η σταθερά 500.000m. Όπως και στις άλλες εφαρμογές της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής οι παραμορφώσεις αυξάνονται ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης από τον κεντρικό μεσημβρινό. Οι μέγιστες παραμορφώσεις στην έκταση της χώρας φθάνουν στα 670 ppm. Το σύστημα ΕΓΣΑ'87 είναι συμβατό με τις απαιτήσεις της σύγχρονης τεχνολογίας δεδομένου ότι εφαρμόζεται σε γεωκεντρικό ελλειψοειδές και αποτελεί πλέον σήμερα το επίσημο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς της χώρας. Την ευθύνη της διαχείρισης του συστήματος έχει ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ).

4.6 Μετατροπές μεταξύ διαφορετικών προβολικών συστημάτων

Σε πολλές χαρτογραφικές αλλά και γεωδαιτικές εφαρμογές οι συντεταγμένες ενός συνόλου σημείων του γεωγραφικού χώρου χρειάζεται να μετατραπούν από ένα προβολικό σύστημα σε κάποιο άλλο. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απλή αν τα δύο συστήματα αναφέρονται στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum – ελλειψοειδές) και υλοποιείται εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν οι δύο προβολές. Αν όμως τα δύο συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή), τότε η διαδικασία της μετατροπής γίνεται πολύπλοκη και σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις μπορεί να υλοποιηθεί μόνο προσεγγιστικά με τη βοήθεια γεωμετρικών μετασχηματισμών (π.χ. ομοπαράλληλο μετασχηματισμό) ή πολωνύμων (π.χ. 2^{ου} βαθμού).

Στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (datum – ελλειψοειδές), τότε η μετατροπή γίνεται προσδιορίζοντας τις γεωγραφικές συντεταγμένες (φ, λ) από τις ορθογώνιες (x_1, y_1), εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο προβολικό σύστημα. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x_2, y_2) από τις γεωγραφικές (φ, λ), εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο προβολικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι αν κάποιο από τα δύο προβολικά συστήματα είναι κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με την ακρίβεια που συνοδεύει τις σχέσεις που ορίζουν τα δύο προβολικά συστήματα και επομένως, αν η ακρίβεια είναι ικανοποιητική, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε γεωδαιτικές

όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες. Κλασικό παράδειγμα της περίπτωσης αυτής αποτελεί η μετατροπή συντεταγμένων από το σύστημα Hatt στο σύστημα της Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής 3° (EMΠ-3°) και αντίστροφα.

Στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή) και είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, δηλαδή γνωρίζουμε το διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες $[\Delta X_{12}, \Delta Y_{12}, \Delta Z_{12}]$ μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς, τότε η μετατροπή μπορεί να γίνει με τα ακόλουθα στάδια. Αρχικά, προσδιορίζονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες (φ_1, λ_1) από τις ορθογώνιες (x_1, y_1) , εφαρμόζοντας τις σχέσεις που ορίζουν το πρώτο προβολικό σύστημα. Ακολουθεί η μετατροπή των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ_1, λ_1) σε γεωκεντρικές (X_1, Y_1, Z_1) στο πρώτο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς με τη βοήθεια των σχέσεων:

$$X_1 = N_1 \cos \varphi_1 \cos \lambda_1,$$

$$Y_1 = N_1 \cos \varphi_1 \sin \lambda_1,$$

$$Z_1 = N_1(1 - e_1^2) \sin \varphi_1,$$

όπου N_1 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και e_1 πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος φ_1 .

Στο επόμενο στάδιο, εφαρμόζεται το γνωστό διάνυσμα μετάθεσης σε γεωκεντρικές συντεταγμένες μεταξύ των δύο γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς ώστε να προκύψουν οι γεωκεντρικές (X_2, Y_2, Z_2) στο δεύτερο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X_{12} \\ \Delta Y_{12} \\ \Delta Z_{12} \end{pmatrix}.$$

Ακολουθεί η μετατροπή των γεωκεντρικών συντεταγμένων σε γεωγραφικές (φ_2, λ_2) στο δεύτερο γεωδαιτικό σύστημα, χρησιμοποιώντας τις αντίστροφες των σχέσεων που εφαρμόστηκαν προηγουμένως:

$$\lambda_2 = \arctan \left(\frac{Y_2}{X_2} \right),$$

$$\varphi_2 = \arctan \left(\frac{Z_2 + e_2^2 N_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \right).$$

όπου N_2 η ακτίνα της κυρίας καθέτου και e_2 πρώτη εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς σε γεωγραφικό πλάτος φ_2 .

Από τις σχέσεις αυτές ο προσδιορισμός του γεωγραφικού πλάτους (φ_2) γίνεται με προσεγγιστική τεχνική μέσω διαδοχικών επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί η απαραίτητη ακρίβεια. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες (x_2, y_2) από τις γεωγραφικές (φ_2, λ_2) , εφαρμόζοντας τις αντίστροφες σχέσεις που ορίζουν το δεύτερο προβολικό σύστημα. Πρέπει να σημειωθεί, ότι και στην περίπτωση αυτή αν κάποιο από τα δύο προβολικά συστήματα είναι κωνική ή επίπεδη απεικόνιση τότε είναι απαραίτητη και η ανάλογη μετατροπή των πολικών συντεταγμένων (ρ, θ) σε ορθογώνιες ή αντίστροφα. Με τη διαδικασία αυτή η μετατροπή γίνεται με ακρίβεια της τάξης μερικών cm, επομένως, μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε ορισμένες γεωδαιτικές όσο και σε χαρτογραφικές εργασίες.

Τέλος, στις περιπτώσεις που τα δύο προβολικά συστήματα ανήκουν σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς (datum – ελλειψοειδή) και δεν είναι γνωστή η μεταξύ τους σχέση, η μετατροπή μπορεί να γίνει με προσεγγιστικές τεχνικές. Η διαδικασία της μετατροπής προϋποθέτει να είναι γνωστές οι συντεταγμένες ορισμένων σημείων και στα δύο προβολικά συστήματα. Εφαρμόζοντας είτε γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ή πολυώνυμα μπορούν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των γεωμετρικών μετασχηματισμών ή των πολυώνυμων με τη βοήθεια των σημείων με γνωστές συντεταγμένες και στη συνέχεια μέσω των συντελεστών να γίνει η μετατροπή ακολουθώντας μια προσεγγιστική τεχνική. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται περισσότερα των απαραίτητων σημείων με γνωστές συντεταγμένες στα δύο συστήματα ώστε οι συντελεστές να προσδιοριστούν ύστερα από διαδικασία συνόρθωσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (MET). Έτσι, είναι δυνατός ο έλεγχος της ακρίβειας της μετατροπής ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες της ενδεχόμενης εφαρμογής.

Σε αρκετές περιπτώσεις μετατροπών εφαρμόζεται ως γεωμετρικός μετασχηματισμός ο ομοπαράλληλος μετασχηματισμός, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

όπου (x_1, y_1) οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο προβολικό σύστημα, (x_2, y_2) οι συντεταγμένες στο δεύτερο προβολικό σύστημα και a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) οι συντελεστές του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού.

Περισσότερα στοιχεία για τον ομοπαράλληλο μετασχηματισμό καθώς και άλλων γεωμετρικών μετασχηματισμών δίνονται στο Κεφάλαιο 9, που περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίασή τους.

Σε περιπτώσεις μετατροπών που εφαρμόζονται πολυώνυμα συνήθως χρησιμοποιείται ένα πλήρες πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού, το οποίο ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \\ x_1^2 \\ y_1^2 \\ x_1 y_1 \end{pmatrix},$$

όπου (x_1, y_1) οι ορθογώνιες συντεταγμένες στο πρώτο προβολικό σύστημα, (x_2, y_2) οι συντεταγμένες στο δεύτερο προβολικό σύστημα και a_i ($i = 1, 2, \dots, 12$) οι συντελεστές του πολυωνύμου.

Περισσότερα στοιχεία για την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, όταν έχουμε γνωστά περισσότερα από τα απαραίτητα σημεία για τον προσδιορισμό των συντελεστών είτε του ομοπαράλληλου μετασχηματισμού ή του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού, δίνονται στο Κεφάλαιο 6, το οποίο περιλαμβάνει μια αναλυτική παρουσίαση των μεθόδων παρεμβολής.

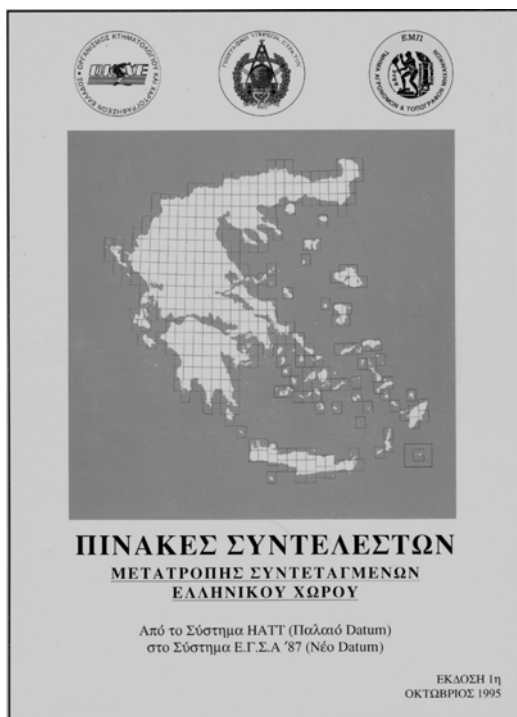
Ειδικότερα για χαρτογραφικές εφαρμογές σχετικές με τη μετατροπή από το παλαιό σύστημα αναφοράς της χώρας (σύστημα Hatt) στο νέο (ΕΓΣΑ'87) και με τη βοήθεια συντεταγμένων των τριγωνομετρικών σημείων του κρατικού δικτύου της χώρας, εκφρασμένες και στα δύο συστήματα, προσδιορίστηκαν οι συντελεστές πολυωνύμων 2^{ου} βαθμού για κάθε φύλλο χάρτη (του συστήματος Hatt) κλίμακας 1:50.000. Με τη βοήθεια των συντελεστών αυτών μπορεί να γίνει η μετατροπή των συντεταγμένων από το παλαιό σύστημα (Hatt) στο σύγχρονο (ΕΓΣΑ'87) με ακρίβεια της τάξης μερικών δεκάδων cm. Οι συντελεστές των πολυωνύμων περιλαμβάνονται σε ειδική έκδοση (Σχήμα 4.2) του Οργανισμού Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδος (ΟΚΧΕ), της Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού (ΓΥΣ) και της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΣΑΤΜ-ΕΜΠ). Τα πολυώνυμα 2^{ου} βαθμού που χρησιμοποιούνται για τη μετατροπή είναι της μορφής:

$$X = A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 y^2 + A_5 x y,$$

$$Y = B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 y^2 + B_5 x y,$$

όπου (X, Y) είναι οι ζητούμενες συντεταγμένες στο προβολικό επίπεδο του συστήματος ΕΓΣΑ'87, (x, y) είναι οι γνωστές συντεταγμένες στα προβολικά

επίπεδα του συστήματος Hatt, A0, A1, A2, A3, A4, A5 και B0, B1, B2, B3, B4, B5 οι συντελεστές μετατροπής (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.2 Φυλλάδιο μετατροπών



Περιλαμβανόμενα Φύλλα Χαρτών Κλίμακας 1:50.000		Υπολογισθέντες Πολυωνυμικοί Συντελεστές 2ου Βαθμού			
Κωδικός	Όνομα	A1	Τιμή	B1	Τιμή
037	Αμφιλοχία	A0	236395.18	B0	4293221.14
		A1	0.9999088	B1	-0.0331876
		A2	0.0331796	B2	0.9999168
		A3	-3.30 E-09	B3	0.13 E-09
		A4	3.21 E-09	B4	-0.00 E-09
056	Αστακός	A5	-0.52 E-09	B5	-6.47 E-09
		A0	236395.55	B0	4293220.55
		A1	0.9998981	B1	-0.0332230
		A2	0.0331868	B2	0.9998956
		A3	-4.86 E-09	B3	1.17 E-09
074	Βόνιτσα	A4	3.06 E-09	B4	-0.37 E-09
		A5	-0.03 E-09	B5	-8.87 E-09
		A0	236395.55	B0	4293220.55
		A1	0.9998981	B1	-0.0332230
		A2	0.0331868	B2	0.9998956
130	Κάλαμος	A3	-4.86 E-09	B3	1.17 E-09
		A4	3.06 E-09	B4	-0.37 E-09
		A5	-0.03 E-09	B5	-8.87 E-09
		A0	236395.55	B0	4293220.55
		A1	0.9998981	B1	-0.0332230

Σχήμα 4.3 Πίνακας συντελεστών

4.7 Βιβλιογραφία

Βέης, Γ. *Μαθηματική Χαρτογραφία*. Εργαστήριο Τοπογραφίας, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1977, σελ. 69.

Βέης, Γ. *Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς*. Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας. Αθήνα, 1987.

Bugayevskiy, L.M. and J.P. Snyder. *Map Projections. A Reference Manual*. Taylor & Francis, London, 1995, p 328.

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Πίνακες συντελεστών μετατροπής συντεταγμένων Ελληνικού χώρου* (Έκδοση 1η), Αθήνα, 1995, σ. 108.

Maling, D. H. *Coordinate systems and map projections*. G. Philip & Son Ltd., London, 1973, p. 255.

Μπαλοδήμου Α. "Έν προβολικόν σύστημα διά την Ελλάδα". *Τεχνικά Χρονικά*. Νο. 10, 1973.

- Νάκος, Β. και Β. Φιλίππακοπούλου. *Γενική Χαρτογραφία*. Τμήμα Αγρονόμων Τοπογράφων Μηχανικών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 1993, σελ. 220.
- Thomas, P. D. *Conformal projections in geodesy and cartography*. U. S. Dept. of Commerce, Coast & Geodetic Survey. Special Publication No. **251**. Washington, 1952, p. 142.
- Yang, Q., Snyder, J.P, and Tobler, W.R. *Map Projection Transformation. Principles and Applications*. Taylor & Francis, London, 2000, p. 367.

Παράρτημα

ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Π.1 Εισαγωγή

Σε κάθε χώρα οι χάρτες εκδίδονται από δημόσιους ή ιδιωτικούς φορείς. Οι δημόσιοι φορείς, και αυτό χωρίς να είναι απόλυτος κανόνας, συνήθως εκδίδουν τοπογραφικούς ή θεματικούς χάρτες όλου του εύρους των κλιμάκων. Οι ιδιωτικοί φορείς κυρίως εκδίδουν τουριστικούς χάρτες, οδηγούς πόλεων ή χάρτες ειδικού σκοπού.

Τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στην Ελλάδα έχει η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ). Το παράδειγμα αυτό χαρακτηρίζει και άλλες χώρες, ώστε παραδοσιακά να έχει επικρατήσει στρατιωτικές υπηρεσίες να αποτελούν τους πιο βασικούς χαρτογραφικούς φορείς (για παράδειγμα στο Ηνωμένο Βασίλειο η αντίστοιχη χαρτογραφική υπηρεσία είναι η Ordnance Survey). Πριν μια εισσοσαετία στη χώρα μας ιδρύθηκε ένας δημόσιος χαρτογραφικός φορέας, ο Οργανισμός Κτηματολογίου και Χαρτογραφίσεων Ελλάδας (ΟΚΧΕ) που υπάγεται στο Υπουργείο Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων. Σκοπός του ΟΚΧΕ είναι να αποτελέσει το βασικό κρατικό χαρτογραφικό φορέα της χώρας, ώστε να μεταφερθεί το κέντρο βάρους των χαρτογραφικών δραστηριοτήτων από το στρατό στο δημόσιο. Στη συνέχεια, δίνεται μια συνοπτική αναφορά των πιο βασικών φορέων έκδοσης χαρτών στην Ελλάδα.

Π.2 Σειρές χαρτών Γεωγραφικής Υπηρεσίας Στρατού

Η ΓΥΣ όπως αναφέρθηκε και στα προηγούμενα έχει τη σημαντικότερη χαρτογραφική δραστηριότητα στην χώρα μας και εκδίδει ένα μεγάλο εύρος, κυρίως τοπογραφικών, χαρτών. Σχεδόν το σύνολο των χαρτογραφικών σειρών που παράγονται και χορηγούνται στο κοινό από τη ΓΥΣ είναι στην Εγκάρσια

Μερκατορική Προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM. Θα διακρίνουμε τους χάρτες που εκδίδονται από τη ΓΥΣ σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την κλίμακα.

Π.2.1 Χάρτες μικρής κλίμακας

Στην κατηγορία των μικρών κλιμάκων εκδίδονται πέντε χάρτες:

1. Χάρτης της Ελλάδας που απεικονίζεται η ακτογραμμή και τα σύνορα της χώρας σε κλίμακες 1:2.000.000 και 1:2.500.000. Ο χάρτης αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόβαθρο για τη σύνθεση θεματικών χαρτών.
2. Χάρτης του οδικού δικτύου σε κλίμακα 1:1.000.000.
3. Γεωφυσικός χάρτης της Ελλάδας με σχολική κυρίως χρήση, σε κλίμακα 1:500.000.
4. Στρατηγικός χάρτης Λατινικής ονοματολογίας σε κλίμακα 1:500.000.
5. Στρατηγικός χάρτης σε κλίμακα 1:400.000.

Π.2.2 Χάρτες μεσαίας κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται τέσσερις σειρές¹ χαρτών:

1. Σειρά στρατηγικής χρήσης με Λατινική ονοματολογία κλίμακας 1:250.000.
2. Σειρά στρατηγικής χρήσης σε κλίμακα 1:200.000.
3. Σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:100.000. Οι χάρτες της σειράς είναι 136.
4. Η σειρά γενικής χρήσης με κάλυψη ολόκληρης της χώρας σε κλίμακα 1:50.000. Η σειρά αυτή αποτελεί την πιο γνωστή έκδοση χάρτη που παρέχει η ΓΥΣ. Οι χάρτες της σειράς είναι 387.

Π.2.3 Χάρτες μεγάλης κλίμακας

Στην κατηγορία αυτή εκδίδονται οι παρακάτω σειρές χαρτών:

1. Σειρές κλίμακας 1:25.000 και 1:20.000 που έχουν περιορισμένη κάλυψη.
2. Σειρά κλίμακας 1:10.000 με περιορισμένη κάλυψη.

¹ Ως χαρτογραφική σειρά θεωρείται μια διανομή διαδοχικών φύλλων χαρτών ίδιας κλίμακας που καλύπτουν μια ευρύτερη περιοχή ή και την έκταση μιας χώρας.

3. Σειρά κλίμακας 1:5.000, που αποτελεί και το βασικό χάρτη της χώρας. Η σειρά αυτή καλύπτει σχεδόν ολόκληρη την χώρα. Παρουσιάζει, όμως, ορισμένα προβλήματα: σημαντικός αριθμός φύλλων δεν είναι ενημερωμένος και η ποιότητα των χαρτών δεν είναι η καλύτερη δυνατή.

Π.3 Σειρές χαρτών Υδρογραφικής Υπηρεσίας Πολεμικού Ναυτικού

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη ΓΥΣ η ΥΥΠΝ αποτελεί τη στρατιωτική υπηρεσία με χαρτογραφικές δραστηριότητες στον χώρο που καταλαμβάνεται από θάλασσα. Οι χάρτες που εκδίδονται από την ΥΥΠΝ είναι οι υδρογραφικοί χάρτες, δηλαδή ναυτικοί χάρτες και λιμενοδείκτες και μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες.

1. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει διεθνείς σειρές ναυτικών χαρτών της Μεσογείου σε κλίμακες 1:4.200.000 και 1:2.250.000.
2. Στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται οι ναυτικοί χάρτες του Ελληνικού θαλάσσιου χώρου σε κλίμακες 1:1.750.000, 1:1.000.000 και 1:500.000.
3. Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τους ναυτικούς χάρτες μεσαίων κλιμάκων δηλαδή: 1:250.000, 1:150.000, 1:100.000, 1:75.000 και 1:50.000.
4. Στην τελευταία ομάδα ανήκουν οι λιμενοδείκτες, ναυτικοί χάρτες μεγάλης κλίμακας. Οι κλίμακες των λιμενοδεικτών παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία (1:40.000, 1:25.000, 1:20.000, 1:15.000, 1:12.500, 1:10.000, 1:7.500, 1:6.000, 1:5.000, 1:4.000, 1:3.000, 1:2.500 και 1:2.000).

Όλοι οι χάρτες της ΥΥΠΝ είναι στην Ορθή Μερκατορική Προβολή που χρησιμοποιείται στην ναυτιλία.

Π.4 Σειρές χαρτών Υπηρεσίας Πολιτικής Αεροπορίας

Η ΥΠΑ εκδίδει για τις ανάγκες της δύο σειρές αεροναυτικών χαρτών που καλύπτουν τον Ελληνικό χώρο. Οι σειρές αυτές είναι στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή, όπως εφαρμόζεται στο σύστημα UTM και έχουν κλίμακες αντίστοιχα 1:1.000.000 και 1:500.000.

Π.5 Χάρτες Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας

Η ΕΣΥΕ παρέχει μια σειρά τοπογραφικών χαρτών για ολόκληρη τη χώρα σε κλίμακα 1:200.000. Κάθε χάρτης της σειράς απεικονίζει και ένα νομό της χώρας καθώς και όλα τα διοικητικά όρια σε αυτόν. Οι χάρτες της σειράς είναι 52. Τέλος,

η ΕΣΥΕ διαχειρίζεται χάρτες κλίμακας 1:5.000 για κάθε οικισμό της χώρας με πληθυσμό μεγαλύτερο από 1500 κατοίκους.

Π.6 Χάρτες Υπουργείου Περιβάλλοντος Χωροταξίας και Δημοσίων Έργων

Το ΥΠΕΧΩΔΕ παρέχει τους τοπογραφικούς χάρτες μεγάλης κλίμακας (ή τοπογραφικά διαγράμματα) που καλύπτουν τις αστικές περιοχές. Οι χάρτες αυτοί είναι στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή όπως αυτή εφαρμόζεται στο σύστημα ΕΜΠ-3° και έχουν κλίμακες 1:2.000 και 1:1.000.

Π.7 Βιβλιογραφία

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Περί χαρτογραφήσεως-αεροφωτογραφήσεως και χορηγήσεως χαρτογραφικού-αεροφωτογραφικού υλικού εις μη στρατιωτικές υπηρεσίας*. Αρχηγείον Ενόπλων Δυνάμεων, 2α Μικτή Επιτελική Ομάς. Αθήνα, 1971, σελ. 25.

Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού. *Βιβλίο διαιρέσεως διαγραμμάτων κλίμακας 1:1.000*. Α' Διεύθυνση, Υποδιεύθυνση Τοπογραφίας, Αθήνα, 1990, σελ. 171.

Υδρογραφική Υπηρεσία Πολεμικού Ναυτικού. *Συνοπτικό Ευρετήριο Ναυτικών Χαρτών Ελληνικής Εκδόσεως*. Τμήμα Χαρτογραφίας, Αθήνα, 1989.