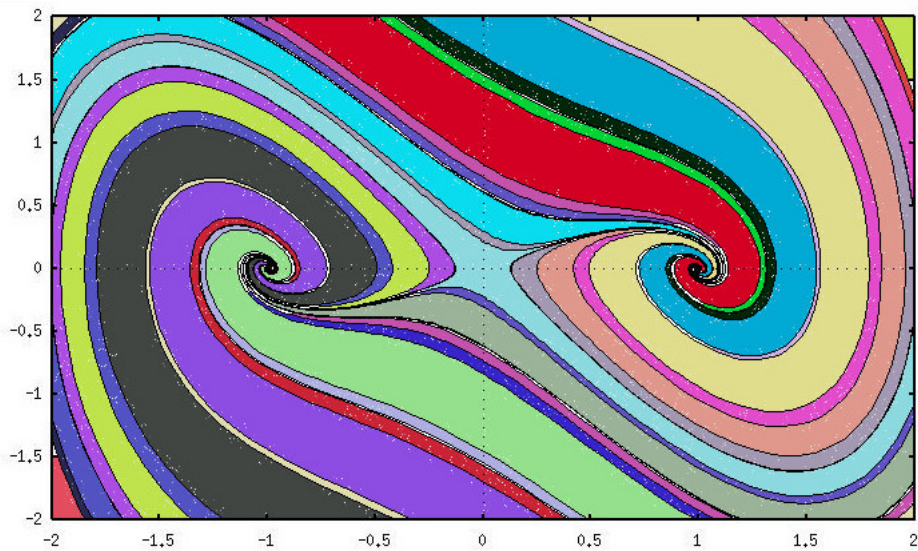


*Εισαγωγή στα Μη-Γραμμικά
Δυναμικά Συστήματα
και Φυσικοχημικές Εφαρμογές*



Αντώνης Καραντώνης
Αναπλ. Καθηγητής, ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές πάνω στα *Μη-Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα* είναι μία πρώτη προσέγγιση του θέματος αυτού και αποτελούν την ύλη ενός μαθήματος ενός εξαμήνου που έγινε για πρώτη φορά στο Τμήμα Χημείας του Πανεπιστημίου Σαϊτάμα, στην Ιαπωνία, την Άνοιξη του 2000. Στη συνέχεια, το μάθημα αυτό έγινε υπό μορφή σεμιναρίου στη Σχολή Χημικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. την Άνοιξη του 2004, εμπλουτισμένο με πειραματικές επιδείξεις, προβολές ταινιών καθώς και με ένα νέο Κεφάλαιο με θέμα τους ‘Συζευγμένους ταλαντωτές’. Το αντικείμενο εντάχθηκε στο μάθημα του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών *Υπολογιστική Μηχανική* του Ε.Μ.Π. το 2013 και διδάσκεται στο πλαίσιο του μαθήματος ‘Μη γραμμική δυναμική - Ανάλυση Πολλαπλών Κλιμάκων’.

Ο κύριος στόχος τόσο των διαλέξεων όσο και των σημειώσεων αυτών είναι η παρουσίαση των *βασικών* εννοιών της θεωρίας των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, με έμφαση σε σχετικά φυσικά φαινόμενα. Η θεωρία των δυναμικών συστημάτων είναι κατά κύριο λόγο μια μαθηματική θεωρία και γιαυτό μεγάλο μέρος των σημειώσεων είναι αφιερωμένο σε ορισμούς, θεωρήματα και μαθηματικές τεχνικές, αλλά με τρόπο πολύ εφαρμοσμένο. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου έχει γίνει προσπάθεια να παρουσιαστούν παραδείγματα, μερικά από αυτά από τον φυσικό κόσμο, έτσι ώστε να γίνονται φανερές οι εφαρμογές τους. Επιπλέον, ένα κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε αριθμητικές τεχνικές που επιτρέπουν στον αναγνώστη να δοκιμάσει να λύσει μόνος του δικά του προβλήματα.

Είναι προφανές ότι οι σημειώσεις αυτές δεν παρουσιάζουν μια πλήρη εικόνα της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων και των εφαρμογών τους. Όμως μία πιο πλήρης και έγκυρη πληροφόρηση μπορεί να προκύψει μέσω της αναφερόμενης βιβλιογραφίας.

¹ Στοιχειοθεσία με L^AT_EX

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή και ορισμοί	5
1.1	Εισαγωγή	5
1.2	Βασικές έννοιες	6
1.3	Είδη δυναμικής συμπεριφοράς	8
1.4	Ευστάθεια	9
1.5	Παραδείγματα	9
2	Γραμμικά Συστήματα	25
2.1	Στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα	25
2.1.1	Γενικότητες	25
2.1.2	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα	29
2.2	Λύση γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων	32
2.3	Αυτόνομα συστήματα στις δύο διαστάσεις	34
2.4	Παραδείγματα	37
3	Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας	49
3.1	Γραμμικοποίηση	49
3.2	Γραμμικοποιημένη Ευστάθεια	51
3.3	Παραδείγματα	51
4	Στοιχειώδεις Διακλαδώσεις	59
4.1	Ορισμοί	59
4.2	Απλοποίηση του μη γραμμικού συστήματος	60
4.3	Θεωρία κεντρικής πολλαπλότητας	61
4.4	Στατικές διακλαδώσεις	64
4.4.1	Διακλάδωση σάγματος - κόμβου	64
4.4.2	Υπερκρίσιμη διακλάδωση	67
4.4.3	Διχαλωτή διακλάδωση	69
4.5	Κανονικές μορφές	71

4.5.1	Συστήματα μίας διάστασης	71
4.5.2	Συστήματα ανώτερης διάστασης	73
4.6	Η διακλάδωση Hopf	76
4.6.1	Η κανονική μορφή για ένα σύστημα με ένα ζεύγος φαντα- στικών ιδιοτιμών	76
4.6.2	Η κανονική μορφή σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων	79
4.6.3	Απλοποιημένη ανάλυση της διακλάδωσης Hopf	79
4.7	Παραδείγματα	81
5	Συζευγμένοι Ταλαντωτές	113
5.1	Εισαγωγή	113
5.2	Ασθενής σύζευξη	114
5.3	Οι εξισώσεις Bonhoeffer-van der Pol	119
6	Αριθμητικές μέθοδοι και τεχνικές	129
6.1	Στόχος του κεφαλαίου	129
6.2	Στατικές καταστάσεις: Η μέθοδος Newton-Raphson	130
6.2.1	Μέθοδος απαλοιφής Gauss	131
6.2.2	Διάσπαση LU	135
6.3	Χρήση βιβλιοθηκών	137
6.4	Ολοκλήρωση ΣΔΕ: Η μέθοδος Runge-Kutta	137
6.5	Το πακέτο AUTO 97	139
6.6	Παραδείγματα	139
7	Χάος μέσα από παραδείγματα	151
7.1	Εισαγωγή	151
7.2	Η λογιστική απεικόνιση	152
7.3	Διασκεδάζοντας με τις διακριτές απεικονίσεις	157
7.4	Οι εξισώσεις Rössler	159

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή και ορισμοί

1.1 Εισαγωγή

Στον φυσικό κόσμο, ο όρος *δυναμικό σύστημα* περιγράφει κάθε φυσικό φαινόμενο που εξελίσσεται με το χρόνο. Ένα φυσικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μεταβλητών, οπότε δυναμικό σύστημα είναι ένα φυσικό σύστημα στο οποίο μία ή περισσότερες μεταβλητές μεταβάλλονται με το χρόνο. Τα περισσότερα φαινόμενα που παρατηρούμε στη φύση εξελίσσονται με το χρόνο, οπότε είναι φανερό ότι η μελέτη των δυναμικών συστημάτων είναι πολύ σημαντική.

Στη συνέχεια, θα μελετηθούν συστήματα που βρίσκονται μακριά από την θερμοδυναμική ισορροπία, ειδικότερα σε *μη-διατηρητικά* δυναμικά συστήματα (dissipative), δηλαδή συστήματα που ανταλλάσσουν ενέργεια και μάζα με το περιβάλλον, κατηγορία στην οποία ανοίκουν τα περισσότερα φυσικοχημικά συστήματα.

Τα δυναμικά συστήματα μελετώνται συστηματικά από μαθηματικούς, φυσικούς και χημικούς εδώ και 150 χρόνια. Παρόλα αυτά συχνά αναφέρεται η θεωρία των δυναμικών συστημάτων ως ένας μοντέρνος κλάδος των φυσικών επιστημών. Αυτό συμβαίνει λόγω της ‘ανακάλυψης’ του *παράξενου* ή αλλιώς *χαοτικού* *ελκυστή*. Η χαοτική απόκριση είναι ένα είδος δυναμικής συμπεριφοράς που χαρακτηρίζεται από μεγάλη ευαισθησία του συστήματος στις αρχικές συνθήκες (δηλ. το σύστημα εξελίσσεται πολύ διαφορετικά αν αλλάξουν πολύ λίγο οι αρχικές καταστάσεις), μη προβλεπόμενη για μεγάλους μελλοντικούς χρόνους αλλά που περιγράφεται από ντετερμινιστικούς νόμους.

1.2 Βασικές έννοιες

Στις σημειώσεις αυτές θα ασχοληθούμε κυρίως με φυσικά συστήματα που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής,

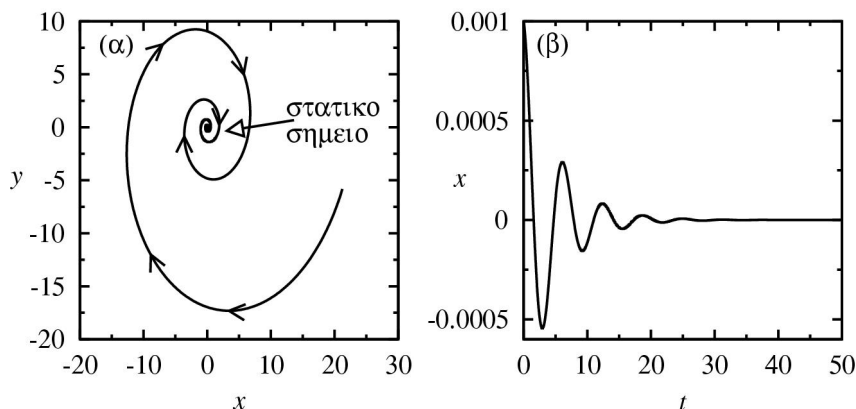
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Προφανώς, η Εξ. (1.1), μπορεί να γραφεί με έναν πιο συμπαγή τρόπο,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}),\tag{1.2}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$ και $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$. Στην Εξ. (1.2), η τελεία πάνω από το σύμβολο σημαίνει ' $\frac{d}{dt}$ ' και το έντονο σύμβολο παριστά ένα διάνυσμα. Το διάνυσμα $\mathbf{x}$ το καλούμε *δυναμικές μεταβλητές*, το $\boldsymbol{\mu}$ *παραμέτρους* του συστήματος και t τον *χρόνο*. Σε ένα φυσικό σύστημα, το $\mathbf{x}$ είναι οι μεταβλητές που παρατηρούμε πειραματικά, είτε άμεσα είτε μέσω μίας συνάρτησης απόκρισης. Το διάνυσμα $\boldsymbol{\mu}$ είναι οι παράμετροι του συστήματος και παραμένουν σταθερές. Φυσικά και ο χρόνος t είναι μία μεταβλητή αλλά εφόσον δεν μπορούμε να επέμβουμε στην εξέλιξη της τη θεωρούμε *ανεξάρτητη* μεταβλητή. Αν θεωρήσουμε ως παράδειγμα τη χρονική εξέλιξη μιας ομογενούς χημικής αντίδρασης τότε $\mathbf{x}$ είναι οι συγκεντρώσεις των αντιδρώντων ή των προϊόντων και $\boldsymbol{\mu}$ μπορεί να είναι η θερμοκρασία, η πίεση ή ο όγκος. Η Εξ. (1.2) συχνά καλείται *συνήθης διαφορική εξίσωση* (ΣΔΕ), *διανυσματικό πεδίο* ή απλά *δυναμικό σύστημα*. Στη περίπτωση που το δεξιό σκέλος της Εξ (1.2) είναι μία μη-γραμμική συνάρτηση, τότε την καλούμε *μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα*. Ως *διάσταση* του δυναμικού συστήματος ορίζεται το πλήθος των δυναμικών μεταβλητών που απαιτούνται για να περιγράψουν το σύστημα. Στην περίπτωση της Εξ. (1.2) η διάσταση είναι n . Η Εξ. (1.2) μαζί με κάποιες αρχικές συνθήκες συχνά καλείται *πρόβλημα αρχικών συνθηκών*. Τέλος, αν το δεξιό σκέλος της Εξ. (1.2) δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, τότε το δυναμικό σύστημα ονομάζεται *αυτόνομο*.

Δυναμικά συστήματα της μορφής της Εξ. (1.2) μπορούν να περιγράψουν εξελισσόμενες διαδικασίες με ειδικές ιδιότητες, οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία στη Φυσιχοημεία. Αυτές οι ιδιότητες είναι οι [Arnold, 1973]:

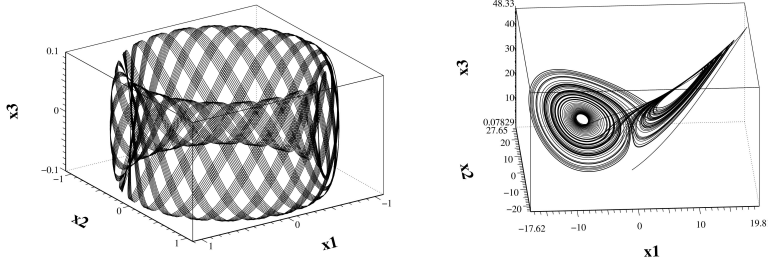


Σχήμα 1.1: (α) Τροχιές που καταλήγουν σε ένα ευσταθές σημείο και (β) προβολή μιας ολοκληρωμένης καμπύλης.

- **Ντετερμινιστικότητα:** Ολόκληρο το μέλλον και ολόκληρο το παρελθόν του συστήματος ορίζονται μονοσήμαντα από την κατάσταση που βρίσκεται το σύστημα στον παρόντα χρόνο. (Το σύστημα καλείται *ντετερμινιστικό*.)
- **Πεπερασμένη διάσταση:** Ο αριθμός των μεταβλητών που απαιτούνται για την περιγραφή του συστήματος είναι πεπερασμένος.
- **Διαφορισιμότητα:** Η μεταβολή της κατάστασης με το χρόνο περιγράφεται από διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Μερικά παραδείγματα φυσικών συστημάτων που δεν περιγράφονται από τις εξισώσεις που θεωρούμε εδώ είναι η κίνηση ενός κβαντικού σωματιδίου (δεν είναι ντετερμινιστική), η κίνηση των ρευστών (δεν έχει πεπερασμένη διάσταση) και η κίνηση των χροστικών κυμάτων (δεν είναι διαφορίσιμη).

Ο χώρος που ορίζεται από τις δυναμικές μεταβλητές ονομάζεται *χώρος των φάσεων*. Προφανώς, η διάσταση του χώρου αυτού είναι n . Η λύση της Εξ. (1.2) υπό ορισμένες αρχικές συνθήκες $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}(t = t_0)$ γράφεται ως $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ και καλείται *τροχιά* ή *καμπύλη στο χώρο των φάσεων* που περνά από το σημείο $\mathbf{x}_0$ για $t = t_0$. Το γράφημα $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ ως προς το t ονομάζεται *ολοκληρωμένη καμπύλη*. Τέλος, το σύνολο των σημείων του χώρου των φάσεων τα οποία ανήκουν σε μία τροχιά που περνά από το $\mathbf{x}_0$ καλείται *τροχιά* που περνά από το $\mathbf{x}_0$.



Σχήμα 1.2: (α) Τροχιές πάνω σε ένα τόρο, και (β) ο χαοτικός ελκυστής Lorenz

1.3 Είδη δυναμικής συμπεριφοράς

Στη παράγραφο αυτή θα δοθούν μόνο μερικοί ορισμοί και γεωμετρικές αναπαραστάσεις διαφόρων ειδών δυναμικής συμπεριφοράς, ενώ συγκεκριμένα αναλυτικά παραδείγματα θα παρουσιαστούν σε επόμενα κεφάλαια.

- **Στατικό σημείο.** Στατικό σημείο ενός δυναμικού συστήματος που περιγράφεται από την Εξ. (1.2) είναι ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε,

$$f(\bar{x}) = 0. \quad (1.3)$$

Από την Εξ. (1.3) παρατηρούμε ότι το στατικό σημείο είναι μία λύση η οποία δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Τα στατικά σημεία καλούνται επίσης *σημεία ισορροπίας* ή *στατικές καταστάσεις*. Υπάρχουν διαφορετικά είδη στατικών καταστάσεων, τα οποία θα αναφερθούν σε επόμενα κεφάλαια. Στο Σχ. 1.1 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα στατικού σημείου στο χώρο $\mathbb{R}^2$ και η αντίστοιχη ολοκληρωμένη καμπύλη.

- **Οριακός κύκλος.** Σε ότι αφορά τον οριακό κύκλο θα δώσουμε ένα πολύ γενικό ορισμό. Ας θεωρήσουμε την Εξ. (1.2) όπου $x \in \mathbb{R}^2$. Μία περιοδική λύση αυτού του δυναμικού συστήματος καλείται *οριακός κύκλος* αν κάθε μία άλλη λύση του συστήματος πλησιάζει αυτήν την περιοδική λύση για $t \rightarrow \pm\infty$. Μία γραφική αναπαράσταση δίνεται στο Σχ. 1.10. (Ο οριακός κύκλος ορίζεται επίσης ως μία απομονωμένη περιοδική τροχιά.)
- **Τόρος.** Ο τόρος αποτελεί συμπεριφορά μη περιοδική, ειδικότερα σχεδόν περιοδική. Σχεδόν περιοδική συμπεριφορά ορίζεται η λύση που αποτελείται

από δύο τουλάχιστον ασύμμετρες συχνότητες δηλαδή,

$$\frac{\theta}{\phi} = \alpha \neq \frac{p}{q}, \quad (1.4)$$

όπου $q \in \mathbb{N}^*$ και $p \in \mathbb{Z}^*$.

Ένα παράδειγμα σχεδόν περιοδικότητας πάνω σε ένα τόρο φαίνεται στο Σχ. 1.2(α)

- **Χάος.** Το χάος αποτελεί μη περιοδική συμπεριφορά, ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες. Στο Σχ. 1.2(β) παρουσιάζεται ο χαοτικός ελκυστής Lorenz.

1.4 Ευστάθεια

Ας θεωρήσουμε το αυτόνομο δυναμικό σύστημα Εξ. (1.2). Έστω $\bar{\mathbf{x}}(t)$ μια λύση του συστήματος. Η λύση $\bar{\mathbf{x}}(t)$ είναι *ευσταθής* αν άλλες λύσεις που βρίσκονται κοντά στο $\bar{\mathbf{x}}(t)$ σε ένα δεδομένο χρόνο, παραμένουν κοντά στο $\bar{\mathbf{x}}(t)$ για όλους τους επόμενους χρόνους. Η λύση θα είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής* αν γειτονικές λύσεις συγκλίνουν στη λύση $\bar{\mathbf{x}}(t)$ όταν $t \rightarrow \infty$. Οι ορισμοί αυτοί μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως εξής: [Wiggins, 1990]:

Ορισμός 1.1 (Ευστάθεια Lyapunov) Η λύση $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ονομάζεται *ευσταθής* (ευσταθής κατά Lyapunov) αν, για δεδομένο ε , υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon)$ έτσι ώστε, για κάθε άλλη λύση $\mathbf{y}(t)$ που ικανοποιεί τη σχέση $|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \delta$, τότε $|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)| < \varepsilon$ για $t > t_0$.

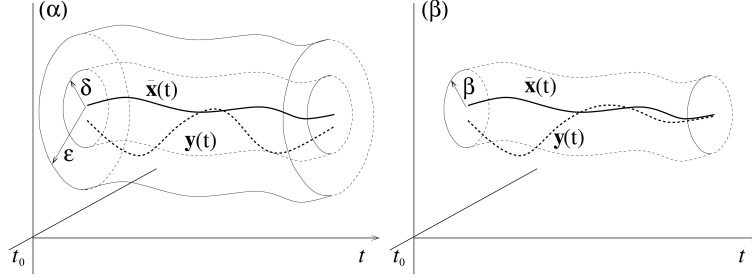
Μια γεωμετρική ερμηνεία της ευστάθειας Lyapunov παρουσιάζεται στο Σχ. 1.3(α).

Ορισμός 1.2 (Ασυμπτωτική ευστάθεια) Η λύση $\bar{\mathbf{x}}(t)$ ονομάζεται *ασυμπτωτικά ευσταθής* αν είναι *ευσταθής* κατά Lyapunov και αν υπάρχει σταθερή $\beta > 0$ έτσι ώστε, αν $|\bar{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{y}(t_0)| < \beta$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)| = 0$.

Μια γεωμετρική ερμηνεία της ασυμπτωτικής ευστάθειας παρουσιάζεται στο Σχ. 1.3(β)

1.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.1 Η πειραματική παρατήρηση έχει δείξει ότι ο ρυθμός διάσπασης ενός ραδιοενεργού υλικού είναι ανάλογος της ποσότητας του υλικού κάθε χρονική στιγμή. Να μελετηθεί η δυναμική της διεργασίας.



Σχήμα 1.3: (α) Ευστάθεια Lyapunov (β) ασυμπτωτική ευστάθεια.

Λύση:

Εφόσον ο ρυθμός διάσπασης (μείωσης) είναι ανάλογος της μάζας κάθε χρονική στιγμή, τότε η δυναμική καθορίζεται από τη εξίσωση,

$$\dot{x} = -kx \quad (1.5)$$

όπου $k > 0$ και $x(t)$ η ποσότητα κάθε χρονική στιγμή t . Ο χώρος των φάσεων είναι μονοδιάστατος $M = \{x : x > 0\}$. Το σημείο $\bar{x} = 0$ είναι η στατική κατάσταση του συστήματος. Η λύση της εξίσωσης είναι,

$$x(t) = x(0)e^{-kt} \quad (1.6)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση τείνει ασυμπτωτικά στη στατική κατάσταση. Το διανυσματικό πεδίο είναι μονοδιάστατο $\mathbf{v} = -kx$. Το μέτρο του διανύσματος βαίνει μειούμενο καθώς το x τείνει στο μηδέν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 1.4.

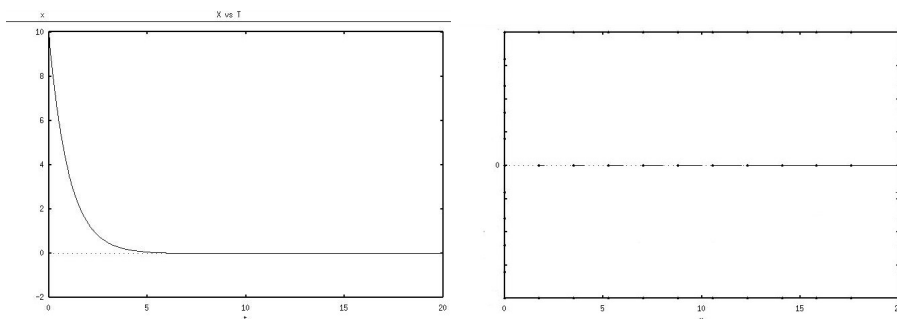
Παράδειγμα 1.2 Η πειραματική παρατήρηση έχει δείξει ότι ο ρυθμός αναπαραγωγής των βακτηρίων είναι ανάλογος της ποσότητας των βακτηρίων κάθε χρονική στιγμή. Να μελετηθεί η δυναμική του φαινομένου.

Λύση:

Εφόσον ο ρυθμός αναπαραγωγής (αύξησης) είναι ανάλογος της μάζας κάθε χρονική στιγμή, τότε η δυναμική καθορίζεται από τη εξίσωση,

$$\dot{x} = kx \quad (1.7)$$

όπου $k > 0$ και $x(t)$ η ποσότητα κάθε χρονική στιγμή t . Ο χώρος των φάσεων είναι μονοδιάστατος $M = \{x : x > 0\}$. Το σημείο $\bar{x} = 0$ είναι η στατική κατάσταση



Σχήμα 1.4: Η χρονική εξέλιξη της ποσότητας ραδιοενεργού υλικού και ο χώρος των φάσεων για $k = 1$ και $x(0) = 10$.

του συστήματος. Η λύση της εξίσωσης είναι,

$$x(t) = x(0)e^{kt} \quad (1.8)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση αποκλείει από τη στατική κατάσταση. Το διανυσματικό πεδίο είναι μονοδιάστατο $\mathbf{v} = kx$. Το μέτρο του διανύσματος βαίνει αυξανόμενο καθώς το x τείνει στο άπειρο. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 1.5.

Παράδειγμα 1.3 Τι θα συμβεί αν ο ρυθμός αύξησης είναι ανάλογος του πλήθους των ζευγών κάθε χρονική στιγμή;

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή η δυναμική καθορίζεται από την εξίσωση,

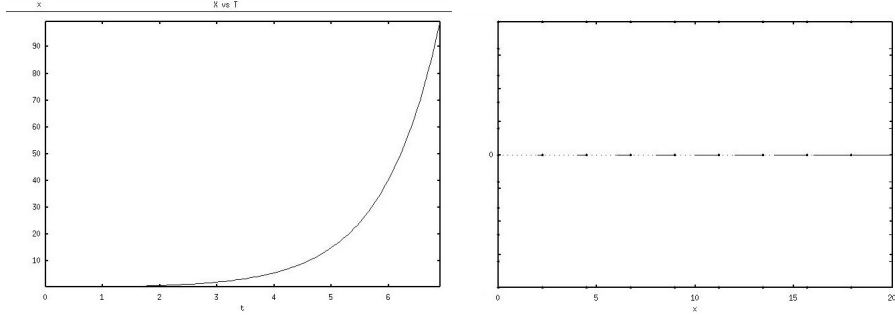
$$\dot{x} = kx^2 \quad (1.9)$$

όπου $k > 0$. Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι,

$$x(t) = -\frac{1}{kt - x(0)^{-1}} \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση τείνει στο άπειρο τη χρονική στιγμή $t = 1/kx(0)$ και όχι καθώς το t τείνει στο άπειρο, Σχ. 1.6

Παράδειγμα 1.4 Να μελετηθεί η δυναμική της πτώσης ενός σώματος από ύψος h_0 .



Σχήμα 1.5: Η χρονική εξέλιξη της ποσότητας ραδιοενεργού υλικού και ο χώρος των φάσεων για $k = 1$ και $x(0) = 0.1$.

Λύση:

Η πτώση του σώματος καθορίζεται από τις εξισώσεις του Γαλιλαίου,

$$\dot{h} = v \quad (1.11)$$

$$\dot{v} = -g \quad (1.12)$$

όπου $h(t)$ και $v(t)$ το ύψος και η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Για αρχική ταχύτητα $v(0) = 0$ η λύση είναι,

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.13)$$

$$v(t) = -gt \quad (1.14)$$

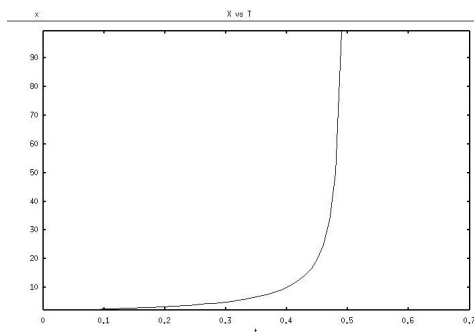
Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα αυξάνεται (κατ' απόλυτη τιμή) γραμμικά ως προς τον χρόνο ενώ το ύψος μειώνεται παραβολικά.

Ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση δύο και το διανυσματικό πεδίο είναι το διάνυσμα $\mathbf{v}(t) = [v(t), -g]$. Το μέτρο του διανυσματικού πεδίου $|\mathbf{v}| = \sqrt{v^2 + g^2}$ αυξάνεται καθώς αυξάνεται η ταχύτητα ενώ η κλίση $dv/dh = -g/v$ τείνει στο άπειρο για μικρές ταχύτητες και στο μηδέν για μεγάλες ταχύτητες. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 1.7

Παράδειγμα 1.5 Έστω το δυναμικό σύστημα,

$$\ddot{x}_1 + kx_1 = 0 \quad (1.15)$$

με $x_1(t=0) = c$ και $\dot{x}_1(t=0) = 0$. Έστω $k = 1$.



Σχήμα 1.6: Η χρονική εξέλιξη της δυναμικής μεταβλητής όταν ο ρυθμός αύξησης εξαρτάται από τον αριθμό των ζευγών, για $k = 1$ και $x(0) = 2$. Η μεταβλητή τείνει στο άπειρο τη χρονική στιγμή $t = 1/kx(0) = 0.5$.

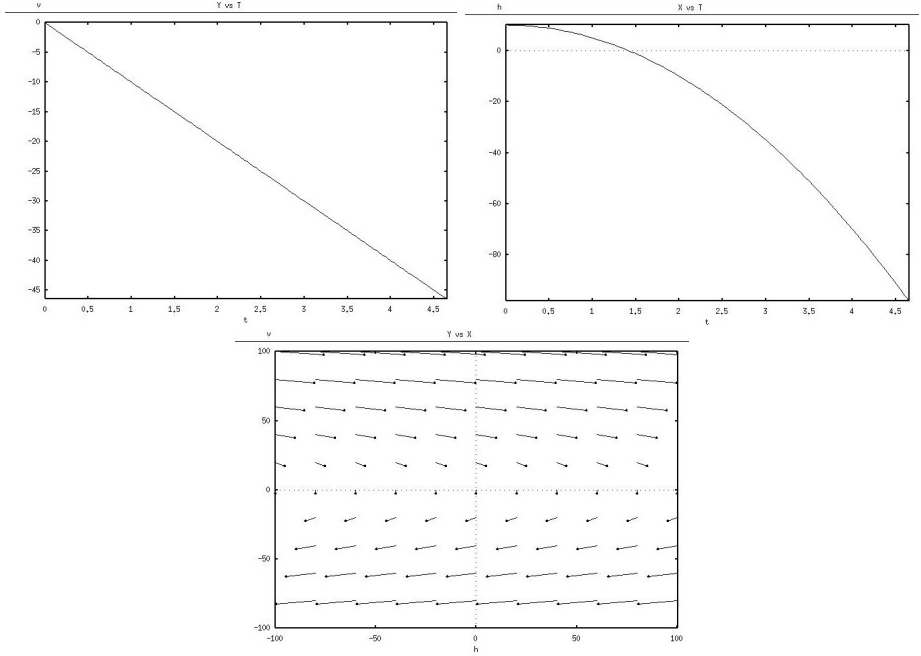
1. Να γραφεί η Εξ. (1.15) ως σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων.
2. Ποια είναι η διάσταση του συστήματος;
3. Να γραφεί η Εξ. (1.15) σε διανυσματική μορφή.
4. Να σχηματιστεί μια τροχιά του συστήματος (Συμβουλή: να διαφρεθούν μεταξύ τους οι εξισώσεις που προέκυψαν από το πρώτο ερώτημα και να ολοκληρωθεί η εξίσωση που προκύπτει).
5. Να σχηματιστεί μια κλειστή τροχιά του συστήματος.
6. Να σχηματιστεί μια ολοκληρωτική καμπύλη (Συμβουλή: να χρησιμοποιηθούν μιγαδικές συντεταγμένες).

(Σημείωση: Η Εξ. (1.15) περιγράφει τις ταλαντώσεις μικρού πλάτους ενός εκκρεμούς στο χώρο των δύο διαστάσεων)

Λύση:

1. Η Εξ. (1.15) μπορεί να γραφεί ως σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων θέτοντας,

$$\dot{x}_1 = x_2.$$



Σχήμα 1.7: Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και του ύψους κατά την πτώση ενός σώματος καθώς και ο χώρος των φάσεων για $g = 10$, $h_0 = 10$ και $v_0 = 0$.

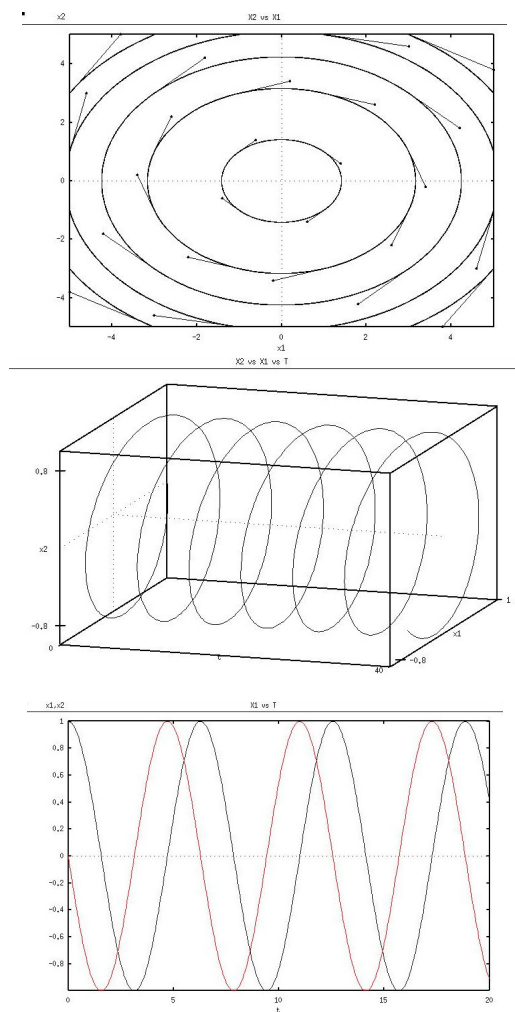
Υπό αυτή την αλλαγή μεταβλητών, η Εξ. (1.15) γράφεται,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (1.16)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1, \quad (1.17)$$

όπου $x_1(t = 0) = c$ και $x_2(t = 0) = 0$. Παρατηρούμε ότι η στατική κατάσταση του συστήματος είναι $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$.

2. Το σύστημα περιγράφεται από δύο δυναμικές μεταβλητές, άρα η διάσταση του συστήματος είναι $n = 2$.



Σχήμα 1.8: Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μία ολοκληρωτική καμπύλη και προβολές των ολοκληρωτικών καμπυλών της Εξ. (1.15) για $k = 1$.

3. Το σύστημα μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή θεωρώντας,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

δηλαδή,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.20)$$

4. Μια τροχιά του συστήματος μπορεί να γραφεί διαιρώντας την Εξ. (1.16) με την Εξ. (1.17) και ολοκληρώνοντας,

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1}. \quad (1.21)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με διαχωρισμό των μεταβλητών,

$$x_1^2(t) = -x_2^2(t) + A, \quad (1.22)$$

όπου A η σταθερή ολοκλήρωσης. Λόγω των αρχικών συνθηκών, $A = c^2$, άρα,

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = c^2. \quad (1.23)$$

Παρατηρούμε από την Εξ. (1.23) ότι η τροχιά είναι ένας κύκλος με ακτίνα c και κέντρο την αρχή των αξόνων (Σχ. 1.8). Παρατηρούμε ότι ενώ η στατική κατάσταση είναι το σημείο $(0,0)$, οι τροχιές ποτέ δεν τείνουν προς το σημείο αυτό, ούτε απομακρύνονται από αυτό. Αντίθετα, η στατική κατάσταση περιβάλλεται από περιοδικές τροχιές, η ακτίνα των οποίων καθορίζεται αποκλειστικά από την αρχική συνθήκη $x_1(t=0) = c$. Επίσης, οι τροχιές δεν τείνουν προς μία περιοδική τροχιά, συνεπώς οι περιοδικές τροχιές *δεν είναι οριακοί κύκλοι*.

5. Οι τροχιές είναι αυτές που φαίνονται στο Σχ. 1.8.
6. Για να υπολογίσουμε μια ολοκληρωτική καμπύλη θα πρέπει να βρεθεί μια λύση. Αν και υπάρχουν πολλοί τρόποι για να λυθούν οι Εξ. (1.16-1.17), εδώ θα εισαγάγουμε ένα χρήσιμο τρόπο λύσης του προβλήματος αυτού. Ας ακολουθήσουμε τη συμβουλή να εισαγάγουμε μιγαδικές συντεταγμένες, δηλ.,

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2, \\ \bar{z} &= x_1 - ix_2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

όπου η διαγράμμιση παριστά το συζυγή μιγαδικό. Διαφορίζοντας την Εξ. (1.24) προκύπτει,

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = -i(x_1 + ix_2) = -iz \\ \dot{\bar{z}} &= \dot{x}_1 - i\dot{x}_2 = i(x_1 - ix_2) = i\bar{z}\end{aligned}\quad (1.25)$$

δεδομένου ότι $1/i = -i$. Συνεπώς, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει είναι,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z}, \quad (1.26)$$

όπου $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ και αρχικές συνθήκες $z(0) = c$ και $\bar{z}(0) = c$. Εφόσον στην Εξ. (1.26) η πρώτη γραμμή είναι συζυγής της δεύτερης, μπορεί να μελετηθεί μόνο η πρώτη (ή μόνο η δεύτερη) σχέση από αυτό το σύστημα, δηλαδή,

$$\dot{z} = -iz, \quad (1.27)$$

όπου η λύση είναι $z(t) = ce^{-it}$. Εφόσον η δεύτερη εξίσωση είναι συζυγής της πρώτης, η λύση της είναι $\bar{z} = ce^{it}$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του De Moivre¹ έχουμε,

$$x_1(t) = c \cos t, \quad (1.28)$$

$$x_2(t) = -c \sin t. \quad (1.29)$$

Όπως αναμένονταν, η λύση είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1, δηλαδή κυκλική συχνότητα 2π , και πλάτος c . Μία ολοκληρωμένη καμπύλη παρουσιάζεται στο Σχ. 1.8 για $c = 1$.

Στην παραπάνω ανάλυση θεωρήθηκε $k = 1$. Στην περίπτωση που η σταθερά είναι διάφορη της μονάδας, το σύστημα είναι,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1\end{aligned}\quad (1.30)$$

Η στατική κατάσταση του συστήματος παραμένει η τιμή $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$. Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση,

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{kx_1} \quad (1.31)$$

¹Σχέση DeMoivre: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

η οποία μπορεί να λυθεί με διαχωρισμό μεταβλητών. Η λύση της είναι,

$$\frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{k} = c^2 \quad (1.32)$$

Παρατηρούμε ότι η τροχιά στον χώρο των φάσεων είναι μία έλλειψη με μικρό και μεγάλο ημιάξονα $c\sqrt{k}$ και c .

Η ολοκληρωμένη καμπύλη μπορεί να προκύψει εύκολα, μετασχηματίζοντας το σύστημα με αλλαγή της κλίμακας του χρόνου. Έτσι, αν τεθεί,

$$\tau = \sqrt{k}t \quad (1.33)$$

τότε το σύστημα Εξ. (1.30) γράφεται,

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -y_1 \end{aligned} \quad (1.34)$$

όπου $y_1 = \sqrt{k}x_1$. Μετασχηματίζοντας σε μιγαδικές συντεταγμένες,

$$\frac{dz}{d\tau} = -iz \quad (1.35)$$

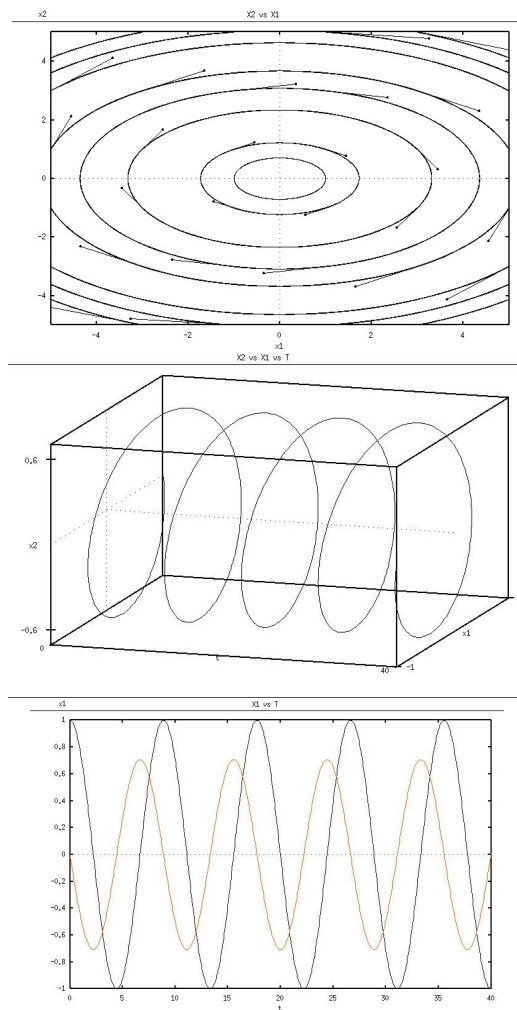
με αρχική συνθήκη $z(0) = c\sqrt{k}$. Λύνοντας με διαχωρισμό των μεταβλητών προκύπτει ότι $z(\tau) = c\sqrt{k}e^{-i\tau} = c\sqrt{k}\cos(\tau) - c\sqrt{k}\sin(\tau)$. Συνεπώς, η λύση είναι,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t) \\ x_2(t) &= -c\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) \end{aligned}$$

Επιστρέφοντας τον μετασχηματισμό της μεταβλητής $y_1(t)$,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c\cos(\sqrt{k}t) \\ x_2 &= -c\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή $x_1(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ και πλάτος c ενώ η $x_2(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ και πλάτος $c\sqrt{k}$. Η παραπάνω ανάλυση παρουσιάζεται στο Σχ. 1.9 για $k = 0.5$.



Σχήμα 1.9: Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων για διαφορετικές αρχικές συνθήκες, μία ολοκληρωτική καμπύλη και προβολές των ολοκληρωτικών καμπυλών της Εξ. (1.15) για $k = 0.5$.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρήστε το σύστημα [Nemytskii and Stepanov, 1989],

$$\dot{x} = -y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - (x^2 + y^2)), \quad (1.36)$$

$$\dot{y} = x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(1 - (x^2 + y^2)). \quad (1.37)$$

1. Βρείτε μία λύση του συστήματος (Συμβουλή: χρησιμοποιείτε πολικές συντεταγμένες).
2. Σχηματίστε τη λύση στο χώρο των φάσεων και τις τροχιές που ξεκινούν εντός και εκτός της λύσης.

Λύση:

1. Ξεκινάμε εισάγοντας πολικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Υπό αυτόν το μετασχηματισμό οι Εξ. (1.36) και (1.37) γράφονται,

$$\dot{x} = -y + \frac{x}{r}(1 - r^2), \quad (1.39)$$

$$\dot{y} = x + \frac{y}{r}(1 - r^2). \quad (1.40)$$

Πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (1.39) με x και την Εξ. (1.40) με y και προσθέτοντας τις προκύπτουσες σχέσεις προκύπτει,²

$$\dot{r} = 1 - r^2, \quad (1.41)$$

όπου $r \geq 0$. Αναλόγως, πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (1.39) με y και την Εξ. (1.40) με x και αφαιρώντας τις προκύπτουσες σχέσεις προκύπτει,³

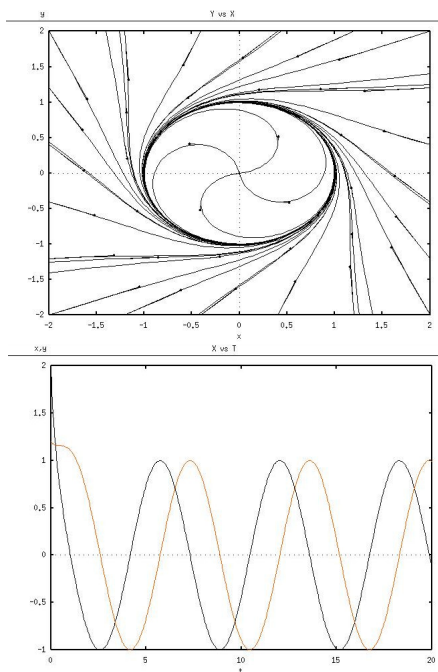
$$\dot{\theta} = 1. \quad (1.42)$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι η Εξ. (1.41) έχει δύο στατικά σημεία,

$$1 - \bar{r}^2 = 0 \Rightarrow \bar{r} = \pm 1. \quad (1.43)$$

²Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$

³Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$.



Σχήμα 1.10: Ένας οριακός κύκλος και οι τροχιές που τον πλησιάζουν τόσο από το εσωτερικό του όσο και από το εξωτερικό του (πάνω). Ολοκληρωτικές καμπύλες για $x(0) = 2$, $y(0) = 1.2$ (κάτω).

Εφόσον η μεταβλητή r παριστάνει την ακτίνα, το αρνητικό πρόσημο δεν έχει φυσική σημασία, άρα το μόνο στατικό σημείο είναι $\bar{r} = 1$. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι τα στατικά σημεία της Εξ. (1.41) παριστάνουν περιοδικές τροχιές για το πλήρες σύστημα, Εξ. (1.41) και (5.3). Άρα, το σύστημα έχει μία περιοδική τροχιά με ακτίνα μονάδα.

Η Εξ. (1.41) λύνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 1 - r^2 \Rightarrow \frac{dr}{1 - r^2} = dt \\ &\Rightarrow \frac{dr}{(1 + r)(1 - r)} = dt \end{aligned}$$

Για το κλάσμα του αριστερού σκέλους έχουμε,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+r)(1-r)} &= \frac{A}{1+r} + \frac{B}{1-r} \\ \Rightarrow A + B + r(A - B) &= 1 \\ \Rightarrow A = B &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2(1+r)} dr + \int \frac{1}{2(1-r)} dr &= \int dt \\ \Rightarrow \ln(1+r) - \ln|1-r| &= 2t + C \\ \Rightarrow \ln \frac{1+r}{|1-r|} &= 2t + C\end{aligned}$$

Για τιμές της ακτίνας $0 < r < 1$ η λύση είναι,

$$r(t) = \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1}$$

ενώ, για $r \geq 1$ η λύση είναι,

$$r(t) = \frac{Ae^{2t} + 1}{Ae^{2t} - 1}$$

όπου $A = \left| \frac{1+r_0}{1-r_0} \right|$ και $r(t=0) = r_0$.

Προφανώς, και στις δύο περιπτώσεις $r(t) \rightarrow 1$ όταν $t \rightarrow +\infty$.

2. Εφόσον $r \rightarrow 1$ όταν $t \rightarrow +\infty$ όταν η αρχική τιμή του r βρίσκεται εντός ή εκτός της περιοδικής τροχιάς, ο οριακός κύκλος είναι ευσταθής. Μία γραφική αναπαράσταση της ασυμπτωτικής λύσης και των τροχιών προς τον οριακό κύκλο παρουσιάζονται στο Σχ. 1.10.

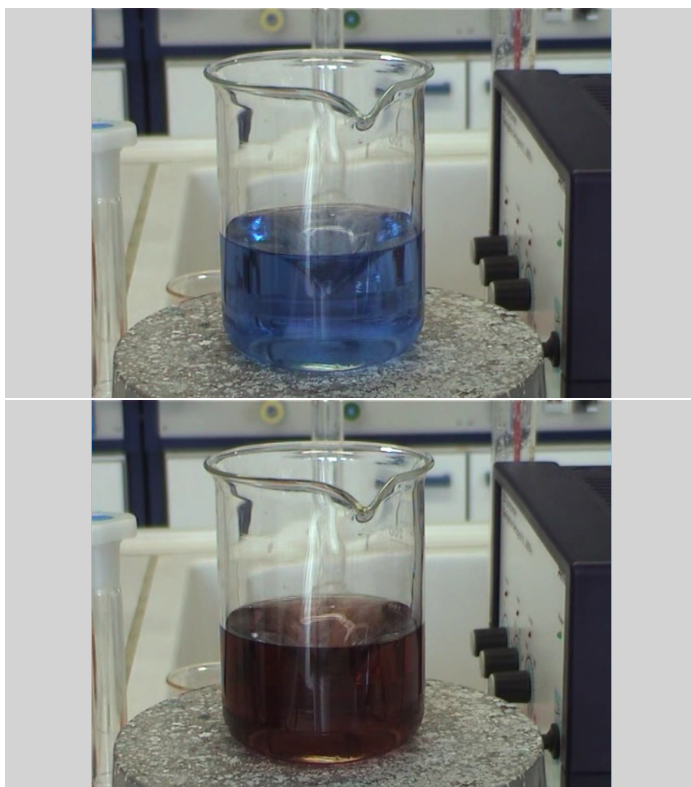
Παράδειγμα 1.7 Να υλοποιηθεί πειραματικά η ταλαντούμενη αντίδραση *Belousov-Zhabotinskii*.

Λύση:

Προκειμένου να υλοποιηθεί η αντίδραση θα πρέπει να παρασκευαστούν τρία διαλύματα:

- Διάλυμα Α: Ανάμιξη, 800 ml νερό, 60 g NaBrO_3 και 24 g πυκνό H_2SO_4 .
- Διάλυμα Β: Ανάμιξη 25 g $\text{CH}_2(\text{COOH})_2$ (μηλονικό οξύ) και 250 ml νερό.
- Διάλυμα Γ: Ανάμιξη 0.5 g ο-φαινανθρολίνη, 1 g $\text{Fe}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ και 100 ml νερό.

Αναμιγνύουμε 180 ml του διαλύματος Α, 130 ml νερού, 30 ml του διαλύματος Β και 10 ml του διαλύματος Γ. Εφόσον η αντίδραση πραγματοποιείται υπό ανάδευση, το χρώμα του διαλύματος αλλάζει περιοδικά από κόκκινο σε μπλε, με περίοδο περίπου 20 s.



Σχήμα 1.11: Δύο στιγμιότυπα από την ταλαντούμενη αντίδραση Belousov-Zhabotinskii.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικά Συστήματα

2.1 Στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δόθηκαν ορισμένες γενικές πληροφορίες για δυναμικά συστήματα που μπορούν να γραφούν με τη μορφή της Εξ. (1.2). Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μία ειδική κατηγορία δυναμικών συστημάτων τα οποία μπορούν να γραφούν με τη μορφή,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Στην Εξ. (2.1) ο πίνακας $\mathbf{A}$ διάστασης $n \times n$ καλείται ο *πίνακας των συντελεστών ή παραμέτρων*. Το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ συνεχίζει να παριστάνει τις *δυναμικές μεταβλητές* του συστήματος. Το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από την Εξ. (2.1) καλείται *γραμμικό δυναμικό σύστημα*.

Είναι μάλλον προφανές ότι η συμπεριφορά (λύσεις) του συστήματος αυτού εξαρτάται από τις ιδιότητες του πίνακα των παραμέτρων, $\mathbf{A}$. Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου θα υποθέσουμε ότι ο $\mathbf{A}$ είναι ένας πίνακας ανεξάρτητος του χρόνου, δηλαδή, το γραμμικό δυναμικό σύστημα είναι αυτόνομο. Εφόσον οι ιδιότητες του $\mathbf{A}$ είναι σημαντικές και ο $\mathbf{A}$ είναι απλά ένας πίνακας $n \times n$, θα υπενθυμίσουμε ορισμένα στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα που θα είναι χρήσιμα για τη μελέτη της δυναμικής του συστήματος.

2.1.1 Γενικότητες

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μερικούς αρχικούς ορισμούς [Anton, 1987]. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι οι αριθμητικοί κανόνες πράξεων μεταξύ πινάκων είναι γνωστοί. Τα στοιχεία ενός πίνακα $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ ή απλά $\mathbf{A}$ θα συμβολίζονται ως $a_{i,j}$ όπου i

συμβολίζει τη γραμμή και j τη στήλη του πίνακα, δηλ.,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Μερικοί χρήσιμοι ορισμοί δίνονται παρακάτω:

- Ένας πίνακας διάστασης $n \times n$ ονομάζεται *τετράγωνος* πίνακας.
- Ένας τετράγωνος πίνακας όπου όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν εκτός από τα στοιχεία $a_{i,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ονομάζεται *διαγώνιος* πίνακας.
- Ο διαγώνιος πίνακας με $a_{i,i} = 1$ ονομάζεται *μοναδιαίος* πίνακας, $\mathbf{I}$, και έχει την ιδιότητα,

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

- Ο συζυγής μιγαδικός ενός πίνακα $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, συμβολίζεται με $\bar{\mathbf{A}}$, και ορίζεται ως $\bar{\mathbf{A}} = (\bar{a}_{i,j})$, όπου $\bar{a}_{i,j}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός του $a_{i,j}$.
- Ο μετατεθειμένος πίνακας του $\mathbf{A}$, που συμβολίζεται $\mathbf{A}^T$, ορίζεται ως $\mathbf{A}^T = (a_{j,i})$.
- Η ορίζουσα του $\mathbf{A}$ συμβολίζεται ως $\det \mathbf{A}$. Θα θεωρήσουμε ότι ο ορισμός της ορίζουσας είναι γνωστός και θα υπενθυμίζουμε μόνο τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1 Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας τετράγωνος πίνακας, τότε ο ελάσσων (*minor*) του στοιχείου $a_{i,j}$ συμβολίζεται με $M_{i,j}$ και ορίζεται σαν την ορίζουσα του υποπίνακα που παραμένει μετά τη διαγραφή της i -ης σειράς και j -ης στήλης από τον πίνακα $\mathbf{A}$. Ο αριθμός $(-1)^{i+j}M_{i,j}$ συμβολίζεται ως $C_{i,j}$ και καλείται ο *παράγοντας* (*cofactor*) του στοιχείου $a_{i,j}$.

- Ο συζυγής (*adjoint*) του $\mathbf{A}$, $\text{adj}(\mathbf{A})$, είναι ο μετατεθειμένος πίνακας των παραγόντων (*cofactors*).
- Αν $\det \mathbf{A} = 0$ τότε ο $\mathbf{A}$ καλείται *ιδιάζων*.
- Ένας μη-ιδιάζων πίνακας $\mathbf{A}$ έχει *αντίστροφο*, $\mathbf{A}^{-1}$, ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη,

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

Αν υπάρχει ο $\mathbf{A}^{-1}$ τότε λέμε ότι ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι *αντιστρέψιμος*. Ο αντιστροφος πίνακας δίνεται από τη σχέση,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj}(\mathbf{A}). \quad (2.2)$$

Τέλος, να παρατηρήσουμε ότι κάθε γραμμικό σύστημα της μορφής,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad (2.3)$$

μπορεί να μετασχηματισθεί στη μορφή της Εξ. (2.1) αρκεί ο πίνακας $\mathbf{A}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Η στατική κατάσταση της Εξ. (2.3) είναι,

$$\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Ας θέσουμε,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}$$

Οπότε, δεδομένου ότι η $\bar{\mathbf{y}}$ είναι σταθερά,

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{b}$$

αλλά $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, οπότε,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Η στατική κατάσταση της Εξ. (2.3) μπορεί να βρεθεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας μία γλώσσα προγραμματισμού και τις βιβλιοθήκες LAPACK. Ένα παράδειγμα γραμμένο σε FORTRAN παρουσιάζεται παρακάτω για ένα σύστημα διάστασης $n = 5$ όπου ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6.80 & -6.05 & -0.45 & 8.32 & -9.67 \\ -2.11 & -3.30 & 2.58 & 2.71 & -5.14 \\ 5.66 & 5.36 & -2.70 & 4.35 & -7.26 \\ 5.97 & -4.44 & 0.27 & -7.17 & 6.08 \\ 8.23 & 1.08 & 9.04 & 2.14 & -6.87 \end{pmatrix}$$

και το διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4.02 \\ 6.19 \\ -8.22 \\ -7.57 \\ -3.03 \end{pmatrix}$$

Η ρουτίνα που λύνει την εξίσωση $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι η `sgesv`.


```

PROGRAM LINEAR
c  Compile with
c  gfortran lin1.f -o lin1.bin /usr/lib/lapack/liblapack.so.3.6.0
c  or something similar

      INTEGER          N, NRHS
      PARAMETER        ( N = 5, NRHS = 1 )
      INTEGER          LDA, LDB
      PARAMETER        ( LDA = N, LDB = N )

      INTEGER          INFO

      INTEGER          IPIV( N )
      REAL             A( LDA, N ), B( LDB, NRHS )

c  Coefficient matrix A
c  6.80  -6.05  -0.45  8.32  -9.67
c  -2.11  -3.30  2.58  2.71  -5.14
c  5.66   5.36  -2.70  4.35  -7.26
c  5.97  -4.44  0.27  -7.17  6.08
c  8.23   1.08  9.04  2.14  -6.87

      DATA            A/
$  6.80,-2.11, 5.66, 5.97, 8.23,
$ -6.05,-3.30, 5.36,-4.44, 1.08,
$ -0.45, 2.58,-2.70, 0.27, 9.04,
$  8.32, 2.71, 4.35,-7.17, 2.14,
$ -9.67,-5.14,-7.26, 6.08,-6.87
$      /

c  Vector b
c  4.02
c  6.19
c  -8.22
c  -7.57
c  -3.03

      DATA            B/
$  4.02, 6.19,-8.22,-7.57,-3.03
$      /

      EXTERNAL          SGESV
      EXTERNAL          PRINT_MATRIX, PRINT_INT_VECTOR

C  Solve the equations  $A \cdot X = B$ .

      CALL SGESV( N, NRHS, A, LDA, IPIV, B, LDB, INFO )

C  Check for the exact singularity.

      IF( INFO.GT.0 ) THEN
        WRITE(*,*)'The diagonal element of the triangular factor of A,'
        WRITE(*,*)'U(' ,INFO,',',INFO,') is zero, so that'
        WRITE(*,*)'A is singular; the solution could not be computed.'
        STOP

```

```

      END IF

C      Print solution.

      CALL PRINT_MATRIX( 'Solution', N, NRHS, B, LDB )

      STOP
      END

C      Auxiliary routine: printing a matrix.

      SUBROUTINE PRINT_MATRIX( DESC, M, N, A, LDA )
      CHARACTER*(*)      DESC
      INTEGER              M, N, LDA
      REAL                 A( LDA, * )

      INTEGER              I, J

      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) DESC
      DO I = 1, M
         WRITE(*,9998) ( A( I, J ), J = 1, N )
      END DO

9998 FORMAT( 11(:,1X,F6.2) )
      RETURN
      END

```

Η λύση που προκύπτει (δηλαδή η στατική κατάσταση του αντίστοιχου δυναμικού συστήματος) είναι,

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -0.80 \\ -0.70 \\ 0.59 \\ 1.32 \\ 0.57 \end{pmatrix}$$

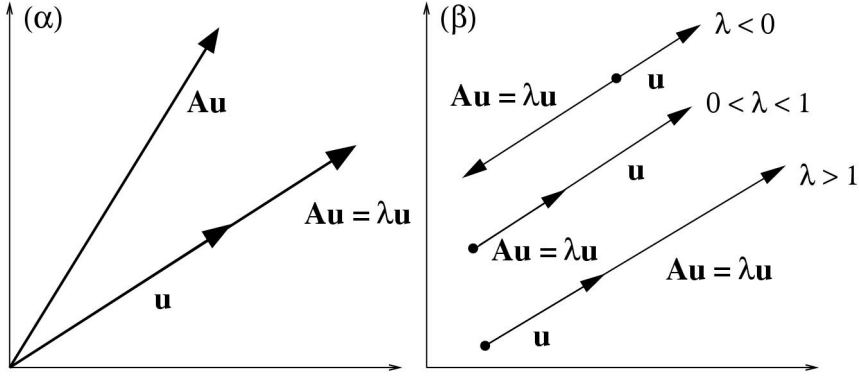
2.1.2 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Θα παρατηρήσουμε παρακάτω ότι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα παίζουν σημαντικό ρόλο στη λύση συνήθων διαφορικών εξισώσεων και την ανάλυση της ευστάθειας τους. Υπενθυμίζουμε τους επόμενους ορισμούς,

Ορισμός 2.2 Αν $\mathbf{A}$ είναι ένας πίνακας $n \times n$, τότε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{u}$ καλείται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$ αν,

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \quad (2.4)$$

για κάποιο μονοδιάστατο αριθμό λ . Ο αριθμός λ καλείται ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{u}$ καλείται το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στο λ .



Σχήμα 2.1: (α) Γεωμετρική ερμηνεία ιδιοτιμής και ιδιοδιανύσματος και (β) δράση του $\mathbf{A}$ σε ένα ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{u}$ που εξαρτάται από την ιδιοτιμή, λ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα έχουν απλή γεωμετρική ερμηνεία, όπως φαίνεται στο Σχ. (2.1).

Ας σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού πίνακα μπορούν να είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί. Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $\mathbf{A}$ μπορούν να υπολογιστούν λύνοντας την *χαρακτηριστική εξίσωση*,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.5)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για ένα πίνακα 2×2 η Εξ. (2.5) μπορεί να γραφεί,

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0, \quad (2.6)$$

όπου το *ίχνος* του $\mathbf{A}$, $\operatorname{tr} \mathbf{A}$, είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

Δύο $n \times n$ πίνακες, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$, ονομάζονται *όμοιοι* αν υπάρχει μη-ιδιάζων πίνακας $\mathbf{S}$ έτσι ώστε,

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1}. \quad (2.7)$$

Σημειώστε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που αφορά την *κανονική μορφή* (canonical form) ενός πίνακα [Coddington and Levinson, 1955; Hirsch and Smale, 1974]:

Θεώρημα 2.1 Κάθε πίνακας $\mathbf{A}$ διάστασης $n \times n$ είναι όμοιος με τον πίνακα $\mathbf{J}$ της μορφής (μορφή *Jordan*),

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

όπου $\mathbf{J}_0$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$, και (στοιχείο *Jordan*),

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_{q+i} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{q+i} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{q+i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{q+i} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

για $i = 1, 2, \dots, s$. Ο μονοδιάστατος αριθμοί λ_j , $j = 1, 2, \dots, q+s$, είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$, όχι απαραίτητα διακριτές (δύο διαφορετικές ιδιοτιμές μπορεί να έχουν την ίδια τιμή).

Στην ειδική περίπτωση όπου όλες οι ιδιοτιμές λ_i είναι διακριτές τότε ο $\mathbf{A}$ είναι όμοιος με το διαγώνιο πίνακα,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα, η κανονική μορφή ενός πίνακα που ως ιδιοτιμές ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών $a \pm ib$ με πολλαπλότητα 1 και μία πραγματική ιδιοτιμή μ με πολλαπλότητα 2, είναι,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, ότι για να λύσουμε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ σε διαγώνιο. Το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Ορισμός 2.3 (Το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης) Δεδομένου ενός πίνακα $\mathbf{A}$ διάστασης $n \times n$, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $\mathbf{S}$ έτσι ώστε $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ είναι διαγώνιος;

Η διαδικασία διαγωνιοποίησης ενός πίνακα $\mathbf{A}$ με πραγματικές ιδιοτιμές έχει ως εξής,

- **Βήμα 1:** Βρίσκουμε n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\mathbf{A}$, π.χ., $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.
- **Βήμα 2:** Σχηματίζουμε τον πίνακα $\mathbf{S}$ με τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ ως διανύσματα-στήλες.
- **Βήμα 3:** Ο πίνακας $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ είναι διαγώνιος με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ως διαγώνια στοιχεία.

Ας σημειωθεί ότι αν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικοί αριθμοί, η διαδικασία είναι λίγο διαφορετική. Έτσι, για ένα πίνακα $\mathbf{A}$ με μιγαδικές ιδιοτιμές,

- **Βήμα 1:** Βρίσκουμε τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i + i\mathbf{w}_i$.
- **Βήμα 2:** Σχηματίζουμε τον πίνακα $\mathbf{S}$ με $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \dots$, ως διανύσματα-στήλες.
- **Βήμα 3:** Ο πίνακας $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ είναι τμηματικά διαγώνιος με $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ως διαγώνια στοιχεία.

2.2 Λύση γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες για τη λύση της Εξ. (2.1). Στη παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε δύο εναλλακτικές διαδικασίες.

Ας θεωρήσουμε την Εξ. (2.1) και έναν αντιστρέψιμο πίνακα $\mathbf{S}$ ο οποίος μετασχηματίζει τον $\mathbf{A}$ σε κανονική μορφή μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας,

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}. \quad (2.10)$$

Η Εξ. (2.1) μπορεί να γραφεί,

$$\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}. \quad (2.11)$$

Θέτοντας,

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}, \quad (2.12)$$

η αρχική εξίσωση γράφεται σε κανονική μορφή,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad (2.13)$$

όπου ο $\mathbf{J}$ δίνεται από την Εξ. (2.8). Αν οι ιδιοτιμές, λ_i του $\mathbf{A}$ είναι πραγματικές και διακριτές τότε ο $\mathbf{J}$ είναι απλά ο διαγώνιος πίνακας με λ_i ως στοιχεία της διαγωνίου. Έτσι, οι Εξ. (2.13) είναι αποσυνζευμένες και μπορούν να λυθούν άμεσα. Αν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές και διακριτές τότε ο $\mathbf{J}$ αποτελείται από τα τμήματα $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ κατά μήκος της διαγωνίου και η Εξ. (2.13) μπορεί να λυθεί άμεσα (πιθανόν εισάγοντας πολικές ή μιγαδικές συντεταγμένες, όπως φαίνεται και στα παραδείγματα που ακολουθούν). Η διαδικασία είναι πιο πεπλεγμένη αν οι ιδιοτιμές έχουν κάποια πολλαπλότητα αλλά και στη περίπτωση αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί, όπως θα δούμε στα παραδείγματα.

Μία διαφορετική μεθοδολογία για τη λύση της Εξ. (2.1) μπορεί να ακολουθηθεί αν θεωρήσουμε για μία στιγμή τη μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση,

$$\dot{x} = ax. \quad (2.14)$$

Γνωρίζουμε ότι η λύση της Εξ. (2.14) είναι,

$$x = ke^{at}, \quad (2.15)$$

όπου k είναι μία μονοδιάστατη σταθερά. Στην περίπτωση ενός πολυδιάστατου συστήματος της μορφής τη Εξ. (2.1), μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{k}, \quad (2.16)$$

όπου $\mathbf{k}$ είναι τώρα ένα σταθερό διάνυσμα και η εκθετική μορφή ενός πίνακα ορίζεται από την παρακάτω σειρά,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \dots = \mathbf{I} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m\mathbf{A}^m}{m!}. \quad (2.17)$$

Αν και η Εξ. (2.16) φαίνεται πάρα πολύ απλή, δεν είναι ιδιαίτερα πρακτικό να υπολογιστεί η Εξ. (2.16) μέσω της Εξ. (2.17). Αντί αυτού ακολουθούμε μια διαφορετική διαδικασία: γνωρίζουμε ότι αν ο πίνακας $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται τότε μπορούμε να γράψουμε,

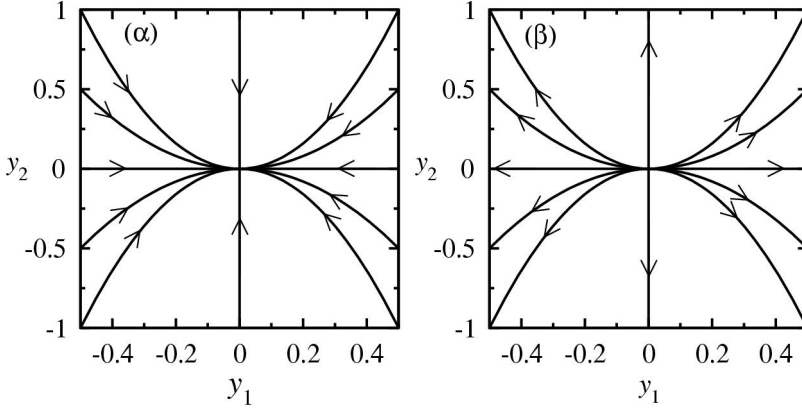
$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}, \quad (2.18)$$

όπου $\mathbf{\Lambda}$ είναι διαγώνιος με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο.

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.17), η Εξ. (2.18) γράφεται,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{\Lambda}}\mathbf{S}^{-1}. \quad (2.19)$$

Ας σημειωθεί ότι αν οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές, χρειάζονται ορισμένες τροποποιήσεις στη παραπάνω διαδικασία.



Σχήμα 2.2: (α) Ευσταθής κόμβος $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$ και (β) ασταθής κόμβος $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$.

2.3 Αυτόνομα συστήματα στις δύο διαστάσεις

Ας θεωρήσουμε τη περίπτωση της Εξ. (2.1) για $n = 2$. Σε αυτή τη περίπτωση το γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί ως,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\tag{2.20}$$

όπου οι συντελεστές είναι πραγματικοί μονοδιάστατοι αριθμοί (μπορεί να έχουν και τιμή μηδέν). Προφανώς, σε αυτό το σύστημα η αρχή των αξόνων είναι πάντα ένα στατικό σημείο. Όπως αναφέρθηκε στη προηγούμενη παράγραφο, υπάρχει ένας μετασχηματισμός ομοιότητας, Εξ. (2.7) ο οποίος μετασχηματίζει τον $\mathbf{A}$ σε κανονική μορφή. Στη περίπτωση ενός δισδιάστατου συστήματος, οι περιπτώσεις είναι σχετικά περιορισμένες [Hirsch and Smale, 1974; Grimshaw, 1990].

1. **Κόμβος - δύο πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές με το ίδιο πρόσημο:** Σε αυτή τη περίπτωση $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η κανονική μορφή του $\mathbf{A}$ είναι,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\tag{2.21}$$

Συνεπώς, η λύση του συστήματος αυτού, σε νέο σύστημα συντεταγμένων είναι,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Στην περίπτωση αυτή, η αρχή των αξόνων ονομάζεται **κόμβος**. Παρατηρούμε από την Εξ. (2.24) ότι εφόσον τα λ_1 και λ_2 και αρνητικοί αριθμοί, οι τροχιές πλησιάζουν ασυμπτωτικά την αρχή των αξόνων, δηλ. έχουμε έναν **ευσταθή κόμβο**. Αν λ_1 και λ_2 είναι και οι δύο θετικοί αριθμοί τότε οι τροχιές αποκλίνουν εκθετικά από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το στατικό σημείο είναι ένας **ασταθής κόμβος**. Ένα παράδειγμα ευσταθούς και ασταθούς κόμβου παρουσιάζεται στο Σχ. (2.2).

2. Ακανόνιστος κόμβος - Μία πραγματική ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 2:

Στη περίπτωση αυτή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η κανονική μορφή του **A** είναι,

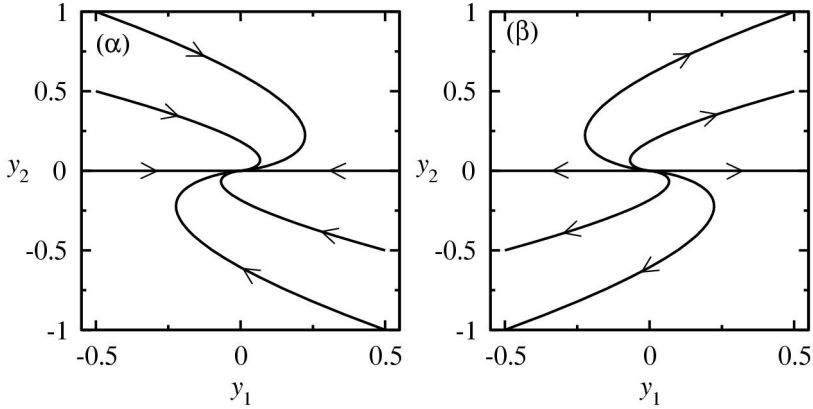
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Συνεπώς, η λύση του συστήματος στο νέο σύστημα συντεταγμένων είναι,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (y_1(0) + y_2(0)t)e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= y_2(0)e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Σε αυτή τη περίπτωση η αρχή των αξόνων ονομάζεται **ακανόνιστος κόμβος**. Παρατηρούμε από την Εξ. (2.22) ότι αν το λ είναι αρνητικό τότε οι τροχιές πλησιάζουν την αρχή των αξόνων, δηλ. έχουμε έναν **ευσταθή ακανόνιστο κόμβο**. Αν το λ είναι θετικό τότε οι τροχιές αποκλίνουν από την αρχή των αξόνων δηλ. έχουμε έναν **ασταθή ακανόνιστο κόμβο**. Ένα παράδειγμα ευσταθούς και ασταθούς ακανόνιστου κόμβου παρουσιάζονται στο Σχ. (2.3).

3. Σαγματικό σημείο - Δύο διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές με αντίθετο πρόσημο: Στην περίπτωση αυτή η κανονική μορφή θα δίνεται από την Εξ. (2.21) και η λύση από την Εξ. (2.22). Παρόλα αυτά, λόγω των διαφορετικών προσήμων των ιδιοτιμών, το στατικό σημείο χαρακτηρίζεται από δύο διαφορετικά είδη τροχιών. Η μία τείνει να πλησιάσει και η άλλη να αποκλίνει από την αρχή των αξόνων. Ας σημειωθεί ότι το σαγματικό σημείο είναι πάντα ένα ασταθές σημείο. Ένα παράδειγμα σαγματικού σημείου παρουσιάζεται στο Σχ. (2.4)



Σχήμα 2.3: (α) Ευσταθής ακανόνιστος κόμβος για $\lambda = -1$ και (β) ασταθής ακανόνιστος κόμβος για $\lambda = 1$.

4. **Εστία - Ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών:** Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η κανονική μορφή του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι,

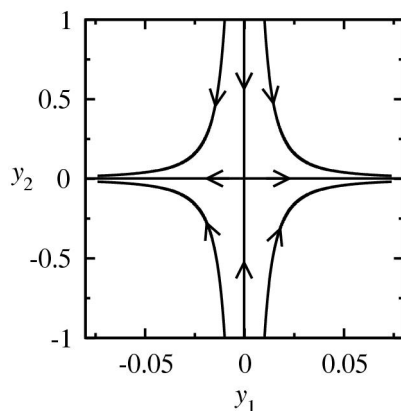
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί εύκολα εισάγοντας πολικές ή μιγαδικές συντεταγμένες και η λύση είναι,

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0)e^{at} \\ \vartheta(t) &= \vartheta(0) - bt \end{aligned} \quad (2.26)$$

Στη περίπτωση αυτή η αρχή των αξόνων (το στατικό σημείο) ονομάζεται **εστία**. Παρατηρούμε από την Εξ. (2.26) ότι η ευστάθεια του στατικού σημείου καθορίζεται από το a ενώ το b καθορίζει μόνο την διεύθυνση περιστροφής. Αν το a είναι αρνητικός αριθμός τότε οι τροχιές πλησιάζουν σπειροειδώς στην αρχή των αξόνων, δηλαδή έχουμε μία **ευσταθή εστία**. Αν το a είναι θετικό τότε οι τροχιές αποκλίνουν σπειροειδώς από την αρχή των αξόνων, δηλαδή έχουμε μία **ασταθή εστία**. Ένα παράδειγμα ευσταθούς κι ασταθούς εστίας παρουσιάζεται στο Σχ. (2.5).

5. **Κέντρο - Ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών** Στη περίπτωση αυτή έχουμε $\lambda_{1,2} = \pm ib$ και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1, η κανονική μορφή



Σχήμα 2.4: Σαγματικό σημείο για $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = -0.2$

του πίνακα $\mathbf{A}$ δίνεται ξανά από την Εξ. (2.25) αλλά για $a = 0$. Η λύση του συστήματος είναι,

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) \\ \vartheta(t) &= \vartheta(0) - bt \end{aligned} \quad (2.27)$$

Σε αυτή τη περίπτωση η αρχή των αξόνων καλείται *κέντρο*. Παρατηρούμε από την Εκ. (2.27) ότι το κέντρο δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Οι τροχιές που ξεκινούν από το σημείο r_0 σχηματίζουν κλειστές τροχιές γύρω από το στατικό σημείο, όπως φαίνεται στο Σχ. (1.8).

2.4 Παραδείγματα

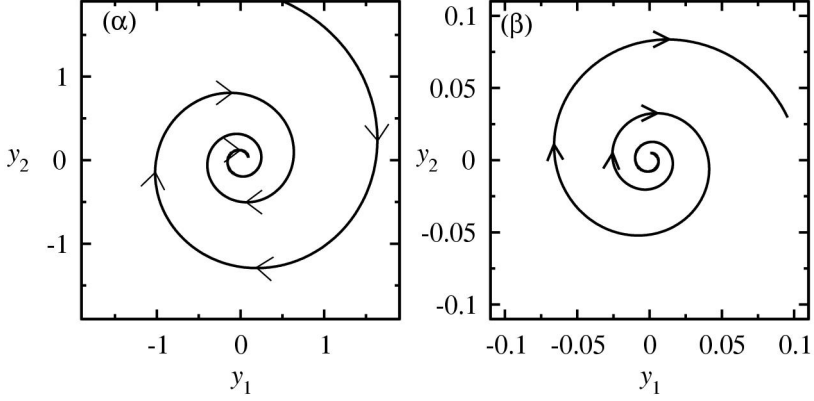
Παράδειγμα 2.1 Αποδείξτε ότι η Εξ. (2.16) είναι λύση του συστήματος Εξ. (2.1).

Λύση:

Αν η Εξ. (2.16) είναι λύση του συστήματος Εξ. (2.1) τότε θα πρέπει να ισχύει,

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}. \quad (2.28)$$

Ας ξεκινήσουμε από το αριστερό σκέλος αυτής της εξίσωσης. Εφόσον το $\mathbf{k}$



Σχήμα 2.5: (α) Ευσταθής εστία για $a = -0.15$ και $b = 1$ και (β) ασταθής εστία για $a = 0.15$ και $b = 1$.

είναι ένα σταθερό διάνυσμα μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}) = \frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{k}, \quad (2.29)$$

ή, χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.17,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{k} &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}}{h} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{t\mathbf{A}}e^{h\mathbf{A}} - e^{t\mathbf{A}}}{h} \right) \mathbf{k} \\ &= e^{t\mathbf{A}} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}}{h} \right) \mathbf{k} \\ &= e^{t\mathbf{A}} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \text{h.o.t.} - \mathbf{I}}{h} \right) \mathbf{k} \\ &= e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ αντιμετωπίζεται με κάθε όρο αυτής της σειράς για το $e^{\mathbf{A}t}$, άρα η απόδειξη τελειώνει.

Παράδειγμα 2.2 Βρείτε τη λύση του συστήματος (σε κανονική μορφή) ενός γραμμικού συστήματος για $n = 2$ που έχει μία ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 2.

Λύση:

Η κανονική μορφή ενός δισδιάστατου συστήματος με μία ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 2 είναι,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Η δεύτερη εξίσωση στο σύστημα της Εξ. (2.31) μπορεί να λυθεί αμέσως. Η λύση είναι,

$$y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Αντικαθιστώντας το $y_2(t)$ στην πρώτη εξίσωση της Εξ. (2.31) προκύπτει,

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + c_2 e^{\lambda t}. \quad (2.32)$$

Η Εξ. (2.32) μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο της μεταβολής μίας σταθεράς. Συνεπώς, η λύση που αντιστοιχεί στην ομογενή εξίσωση είναι,

$$y_1(t) = c e^{\lambda t}.$$

Τώρα, αναζητούμε μία γενική λύση της μορφής Εξ. (2.32) της γενικής μορφής,

$$y_1(t) = c(t) e^{\lambda t}.$$

συνεπώς,

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dc}{dt} e^{\lambda t} + c \lambda e^{\lambda t}$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην Εξ. (2.32) προκύπτει,

$$\frac{dc}{dt} = c_2$$

και λύνοντας για c έχουμε $c(t) = c_1 + c_2 t$. Άρα, η λύση είναι,

$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t},$$

η οποία συμφωνεί με την Εξ. (2.24).

Παράδειγμα 2.3 Βρείτε μία λύση της κανονικής μορφής ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος διάστασης $n = 2$, το οποίο έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών.

Λύση:

Η κανονική μορφή ενός δισδιάστατου συστήματος που έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών, $\lambda = a + ib$ και $\bar{\lambda} = a - ib$ είναι,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί είτε εισάγοντας πολικές συντεταγμένες είτε μιγαδικές συντεταγμένες. Θα παρουσιαστούν και οι δύο περιπτώσεις.

1η Περίπτωση: Χρήση πολικών συντεταγμένων

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $y_1(t) = r(t) \cos \vartheta(t)$ και $y_2(t) = r(t) \sin \vartheta(t)$ προκύπτει,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar \\ \dot{\vartheta} &= -b \end{aligned} \quad (2.34)$$

οι οποίες έχουν ως λύση,

$$\begin{aligned} r(t) &= c_1 e^{at} \\ \vartheta(t) &= c_2 - bt \end{aligned} \quad (2.35)$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{at} \cos(c_2 - bt) \\ y_2(t) &= c_1 e^{at} \sin(c_2 - bt) \end{aligned}$$

ή,¹

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{at} (c_1 \cos bt + c_2 \sin bt) \\ y_2(t) &= e^{at} (c_2 \cos bt - c_1 \sin bt) \end{aligned} \quad (2.36)$$

2η Περίπτωση: Χρήση μιγαδικών συντεταγμένων

Κάνοντας χρήση μιγαδικών συντεταγμένων, $z = y_1 + iy_2$ και $\bar{z} = y_1 - iy_2$, έχουμε,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (a - ib)z \\ \dot{\bar{z}} &= (a + ib)\bar{z} \end{aligned}$$

¹Εδώ γίνεται χρήση των ταυτοτήτων: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ και $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.

Η δεύτερη εξίσωση είναι απλά η συζυγής μιγαδική της πρώτης, άρα μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψη μόνο μία από τις δύο.

Η λύση της πρώτης εξίσωσης είναι,

$$z(t) = ce^{(a-ib)t}$$

ή, χρησιμοποιώντας την σχέση του De Moivre,

$$z(t) = ce^{at}(\cos bt - i \sin bt). \quad (2.37)$$

Ας σημειώσουμε ότι στην περίπτωση αυτή, η σταθερή c είναι, γενικά, ένας μιγαδικός αριθμός, δηλ. $c = c_1 + ic_2$. Φυσικά, η λύση της δεύτερης εξίσωσης είναι απλά ο συζυγής μιγαδικός της Εξ. (2.37), δηλαδή,

$$\bar{z}(t) = \bar{c}e^{at}(\cos bt + i \sin bt). \quad (2.38)$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, $y_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ και $y_2 = \frac{1}{2}(i\bar{z} - iz)$ προκύπτει η Εξ. (2.36).

Παράδειγμα 2.4 Να λυθεί το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_1^0$ και $x_2(0) = x_2^0$.

Λύση:

Η Εξ. (2.39) μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.40)$$

Ας ξεκινήσουμε βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$. Σύμφωνα με την Εξ. (2.6), έχουμε,

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0,$$

δηλαδή, $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -4$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές, διαφορετικές μεταξύ τους. Άρα, το σημείο $(0, 0)$ είναι ένας ευσταθής κόμβος, αφού οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές. Τώρα θα πρέπει να αναζητήσουμε δύο

γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Σύμφωνα με την Εξ. (2.4) έχουμε για την λ_i ,

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς,

$$\begin{aligned} -3u_1 + 2u_2 &= \lambda_i u_1 \\ u_1 - 2u_2 &= \lambda_i u_2 \end{aligned}$$

Αν λύσουμε αυτό το σύστημα, για τα ιδιοδιανύσματα προκύπτει,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας $\mathbf{S}$ είναι,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

και ο αντίστροφός του είναι,

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

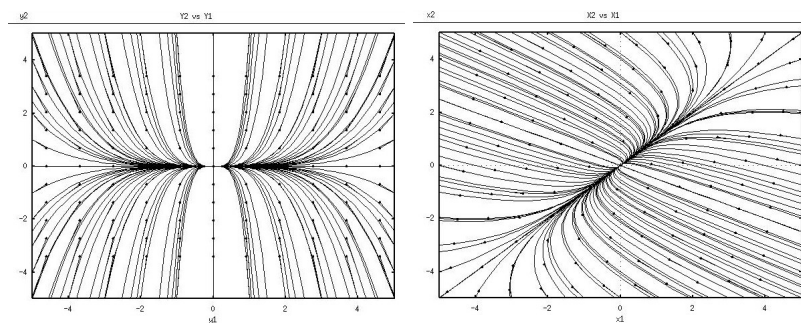
Υπό τον μετασχηματισμό $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ και δεδομένου ότι οι ιδιοτιμές είναι διακριτές και πραγματικές, η κανονική μορφή δίνεται από την Εξ. (2.21) και η λύση από την Εξ. (2.22) για $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -4$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1^0 e^{-t} \\ y_2(t) &= y_2^0 e^{-4t} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Οι αρχικές συνθήκες του κανονικού συστήματος θα είναι $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}^0$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} y_1^0 &= \frac{1}{3}x_1^0 + \frac{2}{3}x_2^0 \\ y_2^0 &= -\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{1}{3}x_2^0 \end{aligned}$$

Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων του κανονικού συστήματος παρουσιάζονται στο Σχ. 2.6. Είναι φανερό ότι αντιστοιχούν σε αυτές ενός ευσταθούς κόμβου.



Σχήμα 2.6: Ο χώρος των φάσεων $y_1 - y_2$ του κανονικού συστήματος και $x_1 - x_2$ του αρχικού συστήματος, για το παράδειγμα (2.4).

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές $\mathbf{x}$ η λύση μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.12), δηλαδή, $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{2}{3}x_2^0\right)e^{-t} - 2\left(-\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{1}{3}x_2^0\right)e^{-4t}, \\ x_2 &= \left(\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{2}{3}x_2^0\right)e^{-t} + \left(-\frac{1}{3}x_1^0 + \frac{1}{3}x_2^0\right)e^{-4t}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων του αρχικού συστήματος παρουσιάζονται στο Σχ. 2.6.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να υπολογιστούν και αριθμητικά χρησιμοποιώντας κάποια γλώσσα προγραμματισμού και τις βιβλιοθήκες LAPACK. Η ρουτίνα που επιτελεί αυτούς τους υπολογισμούς είναι η `sgeev`. Ένα παράδειγμα γραμμένο σε FORTRAN δίνεται παρακάτω:

```
PROGRAM EIGEN
C   Compile with
C   gfortran eigen.f -o eigen.bin /usr/lib/lapack/liblapack.so.3.6.0
C   or something similar

INTEGER N
C   The dimension of the matrix A (2x2 in this example)
PARAMETER (N=2)
```



```

INTEGER LDA, LDVL, LDVR
PARAMETER (LDA=N,LDVL=N,LDVR=N)
INTEGER LWMAX
PARAMETER (LWMAX=1000)
INTEGER INFO,LWORK

REAL A(LDA,N),VL(LDVL,N),VR(LDVR,N),
$   WR(N),WI(N),WORK(LWMAX)

C   The matrix A (2x2 in this example)

DATA          A/
$   -3,1,
$   2,-2
$   /

LWORK = -1

CALL sgeev('N', 'V', N, A, LDA, WR, WI, VL, LDVL, VR,
$   LDVR, WORK, LWORK, INFO)

LWORK = MIN( LWMAX, INT( WORK( 1 ) ) )

CALL SGEEV( 'N', 'V', N, A, LDA, WR, WI, VL, LDVL,
$   VR, LDVR, WORK, LWORK, INFO )

CALL PRINT_EIGENVALUES( 'Eigenvalues', N, WR, WI )

C   Print right eigenvectors.

CALL PRINT_EIGENVECTORS( 'Right eigenvectors', N, WI, VR, LDVR )
STOP
END

SUBROUTINE PRINT_EIGENVALUES( DESC, N, WR, WI )
CHARACTER*(*)  DESC
INTEGER        N
REAL           WR( * ), WI( * )
REAL           ZERO
PARAMETER      ( ZERO = 0.0 )
INTEGER        J

WRITE(*,*)
WRITE(*,*) DESC
DO J = 1, N

    IF( WI( J ).EQ.ZERO ) THEN
        WRITE(*,9998,ADVANCE='NO') WR( J )
    ELSE
        WRITE(*,9999,ADVANCE='NO') WR( J ), WI( J )
    END IF
END DO
WRITE(*,*)

9998 FORMAT( 11(:,1X,F6.3) )
9999 FORMAT( 11(:,1X,'(',F6.4,',',F6.4,')') )
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PRINT_EIGENVECTORS( DESC, N, WI, V, LDV )
CHARACTER*(*)  DESC
INTEGER        N, LDV
REAL           WI( * ), V( LDV, * )
REAL           ZERO
PARAMETER      ( ZERO = 0.0 )
INTEGER        I, J

WRITE(*,*)
WRITE(*,*) DESC
DO I = 1, N
  J = 1
  DO WHILE( J.LE.N )
    IF( WI( J ).EQ.ZERO ) THEN
      WRITE(*,9998,ADVANCE='NO') V( I, J )
      J = J + 1
    ELSE
      WRITE(*,9999,ADVANCE='NO') V( I, J ), V( I, J+1 )
      WRITE(*,9999,ADVANCE='NO') V( I, J ), -V( I, J+1 )
      J = J + 2
    END IF
  END DO
  WRITE(*,*)
END DO

9998 FORMAT( 11(:,1X,F6.4) )
9999 FORMAT( 11(:,1X,'( ',F6.4,', ',F6.4,')' ) )
RETURN
END

```

Το αποτέλεσμα που δίνει που παραπάνω πρόγραμμα είναι,

Eigenvalues
-4.000 -1.000

Right eigenvectors
-.8944 -.7071
0.4472 -.7071

Παράδειγμα 2.5 *Να λυθεί το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 + 10x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Λύση:

Η Εξ. (2.43) γράφεται σε διανυσματική μορφή ως εξής,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι,

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

συνεπώς, ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών, δηλαδή, $\lambda = 2 + i$ και $\bar{\lambda} = 2 - i$, δηλαδή η αρχή των αξόνων είναι μία (ασταθής) εστία. Η κανονική μορφή του συστήματος είναι,

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

και η λύση,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ y_2(t) &= e^{2t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t) \end{aligned}$$

Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων του κανονικού συστήματος παρουσιάζονται στο Σχ. 2.7. Είναι φανερό ότι αντιστοιχούν σε αυτές μίας ασταθούς εστίας.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη λ είναι,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3+i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}.$$

Στη περίπτωση αυτή όπου οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές, ο πίνακας $\mathbf{S}$ έχει ως στήλες τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$, δηλαδή

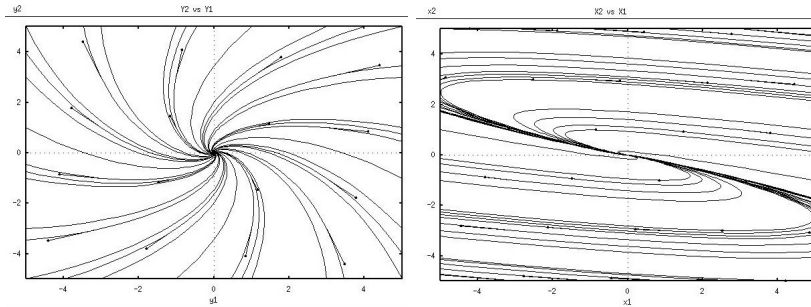
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον έχουμε ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών, η κανονική μορφή δίνεται από την Εξ. (2.25) και η λύση από την Εξ. (2.36). Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ επιστρέφουμε στις αρχικές μεταβλητές και προκύπτει η λύση,

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2t}\{c_1(3 \cos t - \sin t) + c_2(3 \sin t + \cos t)\} \\ x_2 &= e^{2t}(-c_1 \cos t - c_2 \sin t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Οι τροχιές στον χώρο των φάσεων του αρχικού συστήματος παρουσιάζονται στο Σχ. 2.7.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μπορούν να υπολογιστούν και αριθμητικά με το πρόγραμμα που παρουσιάστηκε παραπάνω, αλλάζοντας απλά τον ορισμό του πίνακα $\mathbf{A}$, δηλαδή,



Σχήμα 2.7: Ο χώρος των φάσεων $y_1 - y_2$ του κανονικού συστήματος και $x_1 - x_2$ του αρχικού συστήματος, για το παράδειγμα (2.5).

```

DATA          A/
$      5,-1,
$      10,-1
$      /

```

Το αποτέλεσμα που δίνει το πρόγραμμα είναι,

```

Eigenvalues
( 2.0000, 1.0000) ( 2.0000,-1.0000)

Right eigenvectors
(0.9535,0.0000) (0.9535,-.0000)
(-.2860,0.0953) (-.2860,-.0953)

```


Κεφάλαιο 3

Γραμμική Ανάλυση Ευστάθειας

3.1 Γραμμικοποίηση

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι τα στατικά σημεία ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος μπορούν να είναι ευσταθή ή ασταθή, ανάλογα με το πρόσημο των ιδιοτιμών του πίνακα των παραμέτρων. Επίσης, στο Κεφ. 1 δόθηκαν κάποιοι ορισμοί για την ευστάθεια των μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων, αλλά δεν παρουσιάστηκε κάποιος τρόπος προσδιορισμού της ευστάθειας ή αστάθειας κάποιας λύσης τους.

Πριν ξεκινήσουμε, θα υπενθυμίσουμε στο *θεώρημα Taylor* σύμφωνα με το οποίο μία μονοδιάστατη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σαν σειρά ως εξής,

$$f(x) = f(a) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} (x-a) + \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=a} \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (3.1)$$

Για να γραφεί η συνάρτηση $f(a)$ σαν τη σειρά της Εξ. (3.1), η συνάρτηση θα πρέπει να έχει πεπερασμένες παράγωγους όλων των τάξεων στο σημείο $x = a$. Το *θεώρημα Taylor* για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών γράφεται,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(a, b) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{a,b} (x-a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{a,b} (y-b) \\ & + \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{a,b} \frac{(x-a)^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{a,b} \frac{(y-b)^2}{2!} \\ & + \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{a,b} \frac{2(x-a)(y-b)}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα. Δηλαδή, έχουμε ένα n -διάστατο αυτόνομο μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα της μορφής,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

το οποίο έχει ένα στατικό σημείο, $\bar{\mathbf{x}}(t)$, άρα,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (3.4)$$

Ας συγκρατήσουμε επίσης ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι ένα n -διάστατο διάνυσμα με στοιχεία τις μη-γραμμικές συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την ευστάθεια του στατικού σημείου, $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να διερευνήσουμε η φύση των λύσεων κοντά στο σημείο $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Έστω, λοιπόν, μία λύση κοντά στο στατικό σημείο,

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}, \quad (3.5)$$

και ας αναλύσουμε σε σειρά την $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ γύρω από το στατικό σημείο,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \dots \quad (3.6)$$

Είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε ότι στην Εξ. (3.6),

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\ \left. \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \\ \vdots & & & \\ \left. \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Ας αντικαταστήσουμε την Εξ. (3.5) και Εξ. (3.6) στην Εξ. (3.3). Ως αποτέλεσμα θα έχουμε,

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} + \dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \dots \quad (3.8)$$

Αλλά, $\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, άρα, έχουμε,

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\delta\mathbf{x} + \dots \quad (3.9)$$

Η Εξ. (3.9) περιγράφει την εξέλιξη των τροχιών κοντά στο στατικό σημείο $\bar{\mathbf{x}}(t)$. Εφόσον, σε ότι αφορά το πρόβλημα της ευστάθειας μας ενδιαφέρουν λύσεις πολύ κοντά στο στατικό σημείο, αγνοούμε τους όρους υψηλής τάξης (καθώς επίσης και το σύμβολο 'δ') και έχουμε,

$$\dot{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}. \quad (3.10)$$

Αλλά η Εξ. (3.10) είναι απλά ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα. Άρα η ευστάθεια του στατικού σημείου καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$, που περιγράφεται από την Εξ. (3.7). Ο πίνακας αυτός καλείται ο *Ιακωβιανός* του συστήματος. Κάποιες φορές η Εξ. (3.10) γράφεται χρησιμοποιώντας διαφορετικό σύμβολο για τον Ιακωβιανό, δηλ.,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}, \quad (3.11)$$

Αλλά δεν πρέπει να υπάρχει σύγχυση του Ιακωβιανού πίνακα με το πίνακα σε μορφή Jordan.

3.2 Γραμμικοποιημένη Ευστάθεια

Μία σημαντική ερώτηση είναι το τι συμπεράσματα μπορούνε να εξάγουμε για τις λύσεις της Εξ. (3.3) βασισμένοι στη μελέτη της Εξ. (3.10); Με άλλα λόγια, η ευστάθεια του μη-γραμμικού συστήματος καθορίζεται πάντα από την ευστάθεια του γραμμικοποιημένου συστήματος; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί μετά από τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.1 (Υπερβολικά στατικά σημεία) Ένα στατικό σημείο $\bar{x}$ καλείται υπερβολικό αν καμία από τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού $D_x f(\bar{x})$ είναι μηδέν ή φανταστικός αριθμός.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε ένα θεώρημα το οποίο αναφέρει τις συνθήκες υπό τις οποίες το γραμμικοποιημένο σύστημα καθορίζει την ευστάθεια του αντίστοιχου μη-γραμμικού συστήματος.

Θεώρημα 3.1 Αν $\bar{x}$ είναι ένα υπερβολικό στατικό σημείο τότε η ασυμπτωτική συμπεριφορά κοντά σε αυτό το σημείο (άρα και η ευστάθεια του) καθορίζεται από τη γραμμικοποίηση.

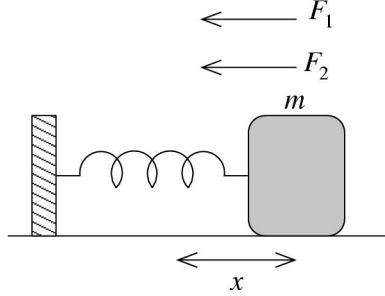
Άρα, αν ο Ιακωβιανός δεν έχει μηδενικές ή φανταστικές ιδιοτιμές, η ευστάθεια καθορίζεται από το γραμμικό σύστημα, Εξ. (3.10). Αν έστω και μία ιδιοτιμή είναι μηδέν ή φανταστική τότε δεν μπορούμε να εξάγουμε κανένα συμπέρασμα μελετώντας το γραμμικοποιημένο σύστημα.

3.3 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1 Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα που παρουσιάζεται στο Σχ. (3.1). Ας υποθέσουμε ότι το σώμα έχει μάζα m και το ελατήριο εξασκεί μία δύναμη $F_1 = k(x^3 - x)$ όπου x είναι η μετατόπιση. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι η μάζα κινείται σε ένα μέσο το οποίο εξασκεί τριβή F_2 ανάλογη με την ταχύτητα, v [Stoker, 1950].

1. Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τις αδιατάρακτες εξισώσεις Duffing,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - ay\end{aligned}\tag{3.12}$$



Σχήμα 3.1: Το σύστημα μάζα-ελατήριο με τριβή

2. Βρείτε τα στατικά σημεία του συστήματος για $a \geq 0$
3. Μελετήστε την ευστάθεια των στατικών σημείων με γραμμικοποίηση.
4. Σχηματίστε τις τροχιές στο χώρο των φάσεων κοντά στα στατικά σημεία

Λύση:

Η συνολική δύναμη που εξασκείται στη μάζα είναι,

$$F_{\text{tot}} = F_1 + F_2 = m\gamma,$$

όπου γ είναι η επιτάχυνση. Εφόσον F_1 είναι η δύναμη του ελατηρίου και F_2 είναι ανάλογη της ταχύτητας θα έχουμε,

$$m\gamma + cv + k(x^3 - x) = 0,$$

ή, θέτοντας $\gamma = \ddot{x}$, $v = \dot{x}$, $a = c/m$ και $\kappa = k/m$,

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \kappa(x^3 - x) = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι $\kappa = 1$ και ας θέσουμε $y = \dot{x}$. Υπό αυτόν τον μετασχηματισμό προκύπτει η Εξ. (3.12).

Τα στατικά σημεία της Εξ. (3.12) είναι λύσεις του αλγεβρικού συστήματος,

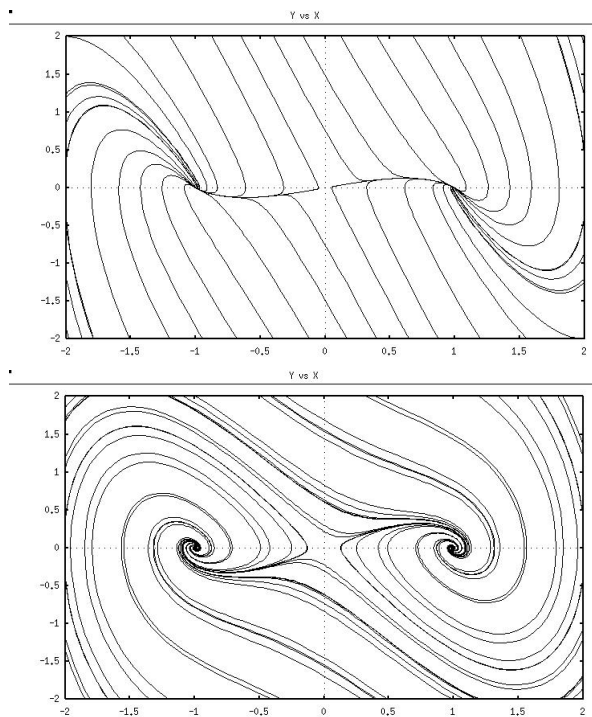
$$\begin{aligned} \bar{y} &= 0 \\ \bar{x} - \bar{x}^3 - a\bar{y} &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Άρα, το σύστημα έχει τρία στατικά σημεία, δηλαδή,

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &= (0, 0) \\(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &= (1, 0) \\(\bar{x}_3, \bar{y}_3) &= (-1, 0)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Ο Ιακωβιανός του πίνακα είναι,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3\bar{x}^2 & -a \end{pmatrix}\tag{3.15}$$



Σχήμα 3.2: Τροχιές στον χώρο των φάσεων για τον ταλαντωτή Duffing για $a = 3$ (επάνω) και $a = 1$ (κάτω).

Άρα, οι ιδιοτιμές του γραμμικού συστήματος είναι,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4(1 - 3\bar{x}^2)}. \quad (3.16)$$

Για το πρώτο στατικό σημείο, $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0)$, Εξ. (3.16) γράφεται,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}.$$

Είναι φανερό ότι, για $a > 0$, τότε λ_1 και λ_2 είναι πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} > 0 \\ \lambda_2 &= -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4} < 0 \end{aligned}$$

άρα, η αρχή των αξόνων είναι ένα *σαγματικό σημείο* (ασταθές).

Για το δεύτερο στατικό σημείο, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (1, 0)$, η Εξ. (3.16) γράφεται,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 8}.$$

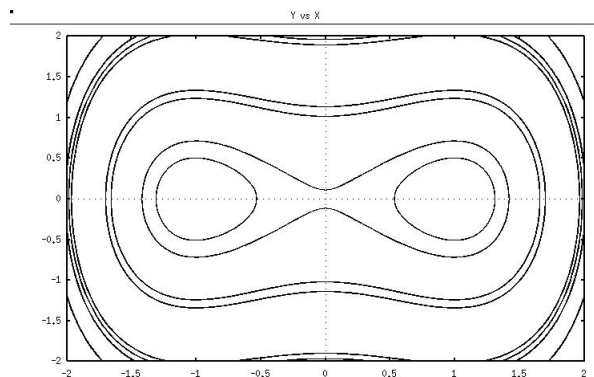
Για $0 < a < \sqrt{8}$, τα λ_1 και λ_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί με αρνητικό πραγματικό μέρος (επειδή $a > 0$). Άρα, αυτό το στατικό σημείο είναι μία *ευσταθής εστία*. Για $a > \sqrt{8}$, λ_1 και λ_2 είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι προφανές ότι,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 8} < 0 \\ \lambda_2 &= -\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 8} < 0 \end{aligned}$$

άρα, αυτό το στατικό σημείο είναι *ευσταθής κόμβος*. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (-1, 0)$.

Ας μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν $a = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στο σημείο $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0)$ είναι $\lambda_{1,2} = \pm 1$, επομένως το σημείο αυτό παραμένει *σαγματικό*. Οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα στατικά σημεία είναι φανταστικές, $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Άρα, για το γραμμικοποιημένο σύστημα, αυτά τα στατικά σημεία θα είναι κέντρα, αλλά δεν μπορούμε να εξάγουμε κανένα συμπέρασμα για την ευστάθεια τους.

Οι τροχιές για την περίπτωση $0 < a < \sqrt{8}$ παρουσιάζονται στο Σχ. 3.2. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αρχή των αξόνων $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0)$ είναι ένα *σαγματικό σημείο* και οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την ευσταθή εστία στο σημείο $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (1, 0)$ και $(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (-1, 0)$.



Σχήμα 3.3: Τροχιές στον χώρο των φάσεων για τον ταλαντωτή Duffing για $a = 0$.

Οι τροχιές για την περίπτωση $a = 0$ παρουσιάζονται στο Σχ. 3.3. Παρατηρούμε ότι τα στατικά σημεία $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (1, 0)$ και $(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = (-1, 0)$ είναι κέντρα και περιβάλλονται από οικογένειες περιοδικών τροχιών. Το στατικό σημείο $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (0, 0)$ παραμένει ένα σάγμα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ύπαρξη περιοδικών τροχιών μεγάλης ακτίνας που περιβάλλουν και τα τρία στατικά σημεία, οι οποίες δεν μπορούν να προβλεφθούν από τη μελέτη του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Παράδειγμα 3.2 Θεωρήστε δύο μεταβλητές x και y οι οποίες εκφράζουν, αντιστοίχα, τον αριθμό των μελών δυο πληθυσμών, εκ των οποίων ο ένα ζει εις βάρος του άλλου. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι [Davis, 1962]:

- Η μεταβλητή x εκφράζει τον πληθυσμό των θηραμάτων και η μεταβλητή y τον πληθυσμό των αρπακτικών.
- Τα αρπακτικά εξαρτώνται μόνο από τα θηράματα ως πηγή τροφής.
- Υπάρχει άπειρη τροφή για τα θηράματα

Υπό αυτές τις παραδοχές,

1. Δείξτε ότι το σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις Volterra-Lotka (εξισώσεις θηράματος - αρπακτικού),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - Bxy \\ \dot{y} &= -Dy + Cxy \\ A, B, C, D &> 0\end{aligned}\tag{3.17}$$

όπου x είναι ο πληθυσμός των θηραμάτων και y ο πληθυσμός των αρπακτικών.

2. Βρείτε τα στατικά σημεία του συστήματος.
3. Μελετήστε την ευστάθεια των στατικών σημείων με γραμμικοποίηση.
4. Σχηματίστε τις τροχιές στο χώρο των φάσεων, κοντά στα στατικά σημεία.

Λύση:

Τα στατικά σημεία του συστήματος μπορούν να βρεθούν λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα,

$$\begin{aligned} A\bar{x} - B\bar{x}\bar{y} &= 0 \\ -D\bar{y} + C\bar{x}\bar{y} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο στατικά σημεία, δηλαδή,

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{y}_1) &= (0, 0) \\ (\bar{x}_2, \bar{y}_2) &= (D/C, A/B) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ο Ιακωβιανός του συστήματος είναι,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B\bar{y} & -B\bar{x} \\ C\bar{y} & -D + C\bar{x} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Για το πρώτο στατικό σημείο $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (0, 0)$ οι ιδιοτιμές είναι,

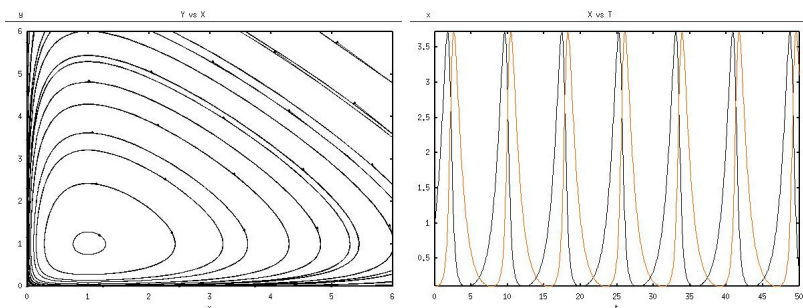
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A > 0 \\ \lambda_2 &= -D < 0 \end{aligned}$$

Εφόσον $A, D > 0$ το σημείο αυτό είναι ένα *σαγματικό σημείο* (ασταθές).

Για το δεύτερο στατικό σημείο $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (D/C, A/B)$ οι ιδιοτιμές είναι,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +i\sqrt{AD} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{AD} \end{aligned}$$

Άρα, το στατικό σημείο $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (D/C, A/B)$ είναι ένα *κέντρο* μια που οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές. Οπότε δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποια πληροφορία για την ευστάθεια.



Σχήμα 3.4: Οι τροχιές στο χώρο των φάσεων και χρονική εξέλιξη των μεταβλητών x (μαύρη καμπύλη) και y (έγχρωμη καμπύλη) του συστήματος Volterra-Lotka για $A = B = C = D = 1$

Η Εξ. (3.17) μπορεί να γραφεί στη μορφή,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(Cx - D)}{x(A - By)}. \quad (3.20)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί με διαχωρισμό των μεταβλητών. Η λύση είναι,

$$A \ln |y| - By = -D \ln |x| + Cx + k,$$

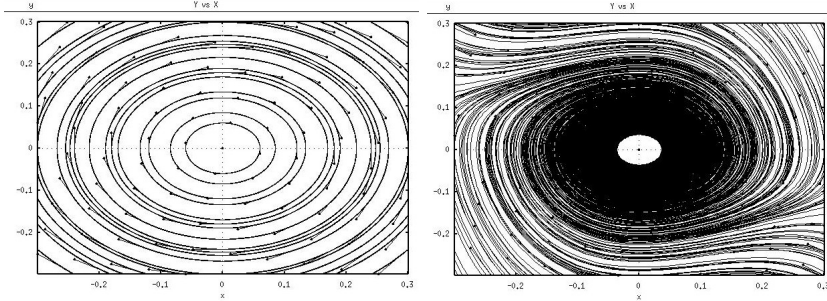
όπου k είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Σχηματίζοντας τη λύση στο χώρο των φάσεων παρατηρούμε ότι πραγματικά υπάρχει μία οικογένεια περιοδικών τροχιών γύρω από το στατικό σημείο $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (D/C, A/B)$. (Σχ. 3.4).

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι ανεξάρτητα του αριθμού των ειδών, κανένα είδος δεν θα εξαφανιστεί αλλά ούτε θα αυξηθεί πέρα από κάποιο όριο. Από την άλλη πλευρά, εκτός από την στατική κατάσταση $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (D/C, A/B)$ (η οποία δεν είναι και τόσο πιθανή) οι πληθυσμοί δεν παραμένουν ποτέ σε μία σταθερή τιμή.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρήστε το σύστημα [Guckenheimer and Holmes, 1983],

$$\ddot{x} + \varepsilon x^2 \dot{x} + x = 0 \quad (3.21)$$

1. Γράψτε την Εξ. (3.21) ως ένα δισδιάστατο δυναμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων.
2. Βρείτε τα στατικά σημεία.



Σχήμα 3.5: Τροχιές του γραμμικού συστήματος και τροχιές της Εξ. (3.21) για $\varepsilon = 20$.

3. Εξετάστε την ευστάθεια του στατικού σημείου στην αρχή των αξόνων και δείξτε ότι η ευστάθεια δεν καθορίζεται από τη γραμμικοποίηση.

Λύση:

Η Εξ. (3.21) μπορεί να γραφεί ως ένα δισδιάστατο σύστημα θέτοντας $x_1 = x$ και $x_2 = \dot{x}$. Συνεπώς, έχουμε,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Προφανώς, το σημείο $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ είναι ένα στατικό σημείο του συστήματος με ιδιοτιμές $\lambda_1 = +i$ και $\lambda_2 = -i$. Έτσι, το στατικό σημείο (υπό τη γραμμική έννοια) είναι ένα κέντρο, βλ. Σχ. 3.5. Αλλά, το στατικό σημείο είναι μη-υπερβολικό κι έτσι δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του. Πραγματικά, αν ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις (με τη βοήθεια του υπολογιστή) θα δούμε ότι το σημείο στην αρχή των αξόνων είναι μία μη-υπερβολική, ασθενώς ελκυστική, εστία για $\varepsilon > 0$ (αντίθετα είναι ασθενώς απωθητική εστία για $\varepsilon < 0$). Φυσικά, για $\varepsilon = 0$ η αρχή των αξόνων είναι πραγματικά κέντρο. Η κατάσταση αυτή παρουσιάζεται στο Σχ. (3.5).

Κεφάλαιο 4

Στοιχειώδεις Διακλαδώσεις

4.1 Ορισμοί

Ως αυτό στο σημείο μελετήθηκαν δυναμικά συστήματα της μορφής,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k,\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου θεωρήθηκε ότι οι παράμετροι $\boldsymbol{\mu}$ έχουν σταθερή τιμή. Αν μια ή περισσότερες από τις παραμέτρους μεταβάλλονται τότε μπορεί να συμβούν αλλαγές οι οποίες μεταβάλλουν τη ποιοτική δομή των λύσεων της Εξ. (4.1) για ορισμένες τιμές των $\boldsymbol{\mu}$. Αυτές οι αλλαγές καλούνται διακλαδώσεις και οι τιμές των παραμέτρων καλούνται σημεία διακλάδωσης. Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα την περίπτωση $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$. Τα στατικά σημεία της Εξ. (4.1) θα είναι οι λύσεις της παρακάτω εξίσωσης,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mu) = 0,\tag{4.2}$$

και θα εξαρτώνται από το μ . Το διάγραμμα της $\bar{\mathbf{x}}$, ως προς μ καλείται διάγραμμα διακλάδωσης (στην περίπτωση αυτή το $\bar{\mathbf{x}}$ μπορεί να παριστάνει όχι μόνο σημεία αλλά και περιοδικές τροχιές κ.λ.π.) Αν υπάρχουν περισσότερες της μιας παραμέτρου διακλάδωσης, π.χ., μ_1 και μ_2 , τότε το διάγραμμα στο επίπεδο που αντιστοιχεί σε τιμές των παραμέτρων όπου παρατηρείται διακλάδωση, καλείται σύνολο διακλάδωσης.

Από τα προηγούμενα κεφάλαια γνωρίζουμε ότι αν ένα στατικό σημείο είναι υπερβολικό, η ευστάθεια του καθορίζεται με γραμμικοποίηση. Επομένως είναι απλό να κατανοήσουμε ότι διακλάδωση θα λάβει χώρα όταν τουλάχιστον μία από τις ιδιοτιμές του δυναμικού συστήματος γίνεται μηδενική ή φανταστική καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος $\boldsymbol{\mu}$, δηλ. όταν το στατικό σημείο γίνεται μη-υπερβολικό. Κατ' αυτό τον τρόπο φθάνουμε στο σημείο να μελετήσουμε μη-υπερβολικά στατικά σημεία. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ύπαρξη μη-υπερβολικού στατικού

σημείου είναι μία αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για διακλάδωση. Αυτό σημαίνει ότι όταν μια ή περισσότερες από τις ιδιοτιμές του συστήματος είναι μηδενικές ή φανταστικές τότε μπορεί να παρατηρηθεί διακλάδωση. Από την άλλη πλευρά, για να παρατηρηθεί διακλάδωση, μία ή περισσότερες από τις ιδιοτιμές θα πρέπει να είναι μηδέν ή φανταστικές.

4.2 Απλοποίηση του μη γραμμικού συστήματος

Στο σημείο αυτό, να υπενθυμίσουμε τη διαδικασία απλοποίησης ενός μη γραμμικού συστήματος, με τα όσα έχουν αναφερθεί στο πλαίσιο της γραμμικής άλγεβρας. Έστω, λοιπόν, το σύστημα διάστασης n ,

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{G}(\mathbf{w}) \quad (4.3)$$

1. Εύρεση των στατικών καταστάσεων με επίλυση του αλγεβρικού συστήματος,

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{w}}) = 0 \quad (4.4)$$

2. Μετασχηματισμός του συστήματος ώστε η στατική κατάσταση να είναι η αρχή των αξόνων,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{w}} \quad (4.5)$$

Το σύστημα μετασχηματίζεται στο εξής,

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{G}(\mathbf{v} + \bar{\mathbf{w}}) = \mathbf{H}(\mathbf{v}) \quad (4.6)$$

3. Ανάπτυξη του διανυσματικού πεδίου σε σειρά Taylor,

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}) = \mathbf{H}(0) + D\mathbf{H}(0)\mathbf{v} + \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{v}) \quad (4.7)$$

όπου $\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{v})$ οι μη γραμμικοί όροι. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{H}(0) = 0$, το σύστημα γράφεται,

$$\dot{\mathbf{v}} = D\mathbf{H}(0)\mathbf{v} + \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{v}) \quad (4.8)$$

4. Μετασχηματισμός του πίνακα $D\mathbf{H}(0)$ σε μορφή Jordan.

- Εύρεση των ιδιοτιμών λ_i με λύση του αλγεβρικού συστήματος,

$$\det(D\mathbf{H}(0) - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (4.9)$$

- Εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων με λύση του αλγεβρικού συστήματος,

$$D\mathbf{H}(0)\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i \quad (4.10)$$

- Σχηματισμός του πίνακα,

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n] \quad (4.11)$$

και υπολογισμός του αντιστρόφου $\mathbf{S}^{-1}$.

- Μετασχηματισμός σε μορφή Jordan μέσω του μετασχηματισμού,

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (4.12)$$

Το σύστημα γίνεται,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}D\mathbf{H}(0)\mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{T}\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

- Τέλος, θέτοντας $\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}D\mathbf{H}(0)\mathbf{S}$ και $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{T}\mathbf{x})$ προκύπτει η απλοποιημένη μορφή,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

Η διαδικασία αυτή έχει απλοποιήσει το γραμμικό μέρος στο μέγιστο δυνατό βαθμό (ιδανικά, ο πίνακας $\mathbf{J}$ είναι διαγώνιος με τις ιδιοτιμές ως στοιχεία της διαγωνίου).

4.3 Θεωρία κεντρικής πολλαπλότητας

Ας θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα με διάσταση $n = c + s$ όπου c ιδιοτιμές είναι μηδέν ή φανταστικές και s ιδιοτιμές είναι πραγματικές ή μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος (στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι απλές, έχουν δηλαδή πολλαπλότητα μονάδα). Είναι σχετικά απλό να φανταστούμε ότι λόγω της παρουσίας των s ιδιοτιμών με αρνητικό πραγματικό μέρος, κάθε τροχιά ταχύτατα θα συγκλίνει σε ένα υποχώρο (καλούμε αυτόν τον υποχώρο *πολλαπλότητα*) όπου η ευστάθεια του συστήματος εξαρτάται από τις c ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος. Αυτός ο υποχώρος, όπου η ευστάθεια καθορίζεται από τις ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος, καλείται *κεντρική πολλαπλότητα*. Το ερώτημα τώρα είναι πώς να υπολογίσουμε αυτή τη κεντρική πολλαπλότητα.

Ας ορίσουμε αρχικά το πρόβλημα. Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα της μορφής Εξ. (4.1) όπου c ιδιοτιμές είναι μηδενικές ή φανταστικές και s ιδιοτιμές είναι αρνητικές ή φανταστικές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Χρησιμοποιώντας εργαλεία από τη γραμμική άλγεβρα, αυτό το σύστημα μπορεί να γραφεί (στο σημείο αυτό ας αγνοήσουμε την ύπαρξη των παραμέτρων),

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^c, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Στην Εξ. (4.15) οι πίνακες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι σε κανονική μορφή Jordan. Ας θεωρήσουμε ότι η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο. Ας σημειώσουμε ότι στην Εξ. (4.15), ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει c ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος και ο $\mathbf{B}$ έχει s ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος. Ήρθε τώρα η ώρα να διατυπώσουμε δύο θεωρήματα [Carr, 1981]:

Θεώρημα 4.1 (Υπαρξη της κεντρικής πολλαπλότητας) Υπάρχει μία κεντρική πολλαπλότητα για την Εξ. (4.15) που παρίσταται με τη σχέση $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Η δυναμική της Εξ. (4.15), όταν περιορίζεται στην κεντρική πολλαπλότητα, ορίζεται από το παρακάτω σύστημα,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u})), \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^c,\end{aligned}\tag{4.16}$$

για μικρό $\mathbf{u}$.

Από το Θεώρημα (4.1) μπορούμε να σημειώσουμε ότι η μελέτη του αρχικού συστήματος διάστασης n περιορίζεται τώρα στη κεντρική πολλαπλότητα που έχει διάσταση c . Άρα, το αρχικό πρόβλημα έχει απλοποιηθεί μια που η διάσταση του έχει μειωθεί. Το επόμενο θεώρημα ορίζει ότι η ευστάθεια του στατικού σημείου του αρχικού δυναμικού συστήματος καθορίζεται από την ευστάθεια των στατικών σημείων της Εξ. (4.16).

Θεώρημα 4.2 Ας θεωρήσουμε ότι η μηδενική λύση της Εξ. (4.16) είναι ευσταθής (ασυμπτωτικά ευσταθής) (ασταθής). Τότε η μηδενική λύση της Εξ. (4.15) είναι ευσταθής (ασυμπτωτικά ευσταθής) (ασταθής).

Τώρα που γνωρίζουμε ότι η κεντρική πολλαπλότητα υπάρχει και η ευστάθεια του αρχικού συστήματος καθορίζονται από την ευστάθεια του συστήματος μειωμένης διάστασης επί της κεντρικής πολλαπλότητας, ας περιγράψουμε ένα αλγόριθμο για τον υπολογισμό της αναλυτικής μορφής της Εξ. (4.16). Η κεντρική πολλαπλότητα θα δίνεται από,

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}).\tag{4.17}$$

Διαφορίζοντας ως προς το χρόνο έχουμε,

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}.\tag{4.18}$$

Αντικαθιστώντας τη Εξ. (4.17) στην Εξ. (4.15) έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{B}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας την Εξ. (4.19) στην Εξ. (4.18) προκύπτει,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})[\mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] - \mathbf{Bh}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = 0, \quad (4.20)$$

όπου $D_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x})$ είναι ένας πίνακας με στοιχεία $\frac{\partial h_i}{\partial x_j}$. Αν λύσουμε την Εξ. (4.20) προκύπτει η αναλυτική μορφή της $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε αναλυτικά την Εξ. (4.16). Δυστυχώς, η Εξ. (4.20) είναι μία ημι-γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η οποία είναι πολύ δύσκολο να λυθεί για τους αγνώστους $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Παρόλα αυτά, υπάρχει ένα θεώρημα που δηλώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ σε οποιοδήποτε επιθυμητό βαθμό ακρίβειας λύνοντας την Εξ. (4.20) για τον ίδιο βαθμό ακρίβειας. Συνεπώς, θεωρούμε την ανάλυση σε σειρά της $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, αντικαθιστούμε στην Εξ. (4.20) και υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές της σειράς. Το πώς γίνεται αυτό φαίνεται στα παραδείγματα.

Όλα τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν στην περίπτωση που το σύστημα εξαρτάται από μία παράμετρο μ . Στην περίπτωση αυτή το μ θεωρείται ως μία επιπλέον δυναμική μεταβλητή του συστήματος και μπορεί να εφαρμοστεί ο ίδιος αλγόριθμος όπως και παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή το στατικό σημείο υπό μελέτη είναι το $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \mu) = (0, 0, 0)$. Έτσι, στην περίπτωση αυτή, γράφουμε την Εξ. (4.15) ως εξής,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu), \\ \dot{\mu} &= 0, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{By} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu), \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^c, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^s, \mu \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται ως εξής,

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mu),$$

και η Εξ. (4.20) ως,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mu)[\mathbf{Ax} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mu), \mu)] - \mathbf{Bh}(\mathbf{x}, \mu) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mu), \mu) = 0, \quad (4.22)$$

όπου $D_{\mathbf{x}}\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mu)$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $\frac{\partial h_i(\mathbf{x}, \mu)}{\partial x_j}$. Η δυναμική επί της κεντρικής θα καθορίζεται από τη σχέση,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{Au} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mu), \mu), \\ \dot{\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Η ακριβής διαδικασία για να βρεθεί η ευστάθεια του μη-υπερβολικού στατικού σημείου του παραμετροποιημένου συστήματος θα παρουσιαστεί στα παραδείγματα.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία της κεντρικής πολλαπλότητας δεν εφαρμόζεται μόνο σε προβλήματα διακλαδώσεων. Μπορούμε να πούμε ότι η θεωρία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε τρεις τουλάχιστον περιπτώσεις:

- Μελέτη της ευστάθειας μη-υπερβολικών στατικών σημείων (Παράδειγμα 4.1).
- Μείωση της διάστασης του συστήματος (Παράδειγμα 4.2).
- Μελέτη των διακλαδώσεων κοντά σε ένα μη-υπερβολικό στατικό σημείο (Παράδειγμα 4.3).

4.4 Στατικές διακλαδώσεις

Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθούν οι πιο απλές διακλαδώσεις. Για να μην χρειαστεί να αναφερθούμε σε επιπλέον θεωρήματα και μαθηματικές μεθόδους, θα ακολουθήσουμε μία ανορθόδοξη διαδικασία για την παρουσίαση των διακλαδώσεων αυτών. Δυστυχώς, δεν μπορούμε να αποφύγουμε τα μαθηματικά όταν θα ασχοληθούμε με διακλαδώσεις που οδηγούν σε ταλαντώσεις.

4.4.1 Διακλάδωση σάγματος - κόμβου

Ας θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα της μορφής της Εξ. (4.1). Ας θεωρήσουμε επίσης ότι η αρχή των αξόνων, $(\bar{x}, \mu) = (0, 0)$, είναι ένα μη-υπερβολικό στατικό σημείο. Αν το σύστημα έχει μία απλή μηδενική ιδιοτιμή και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι είτε μιγαδικές ή πραγματικές (αλλά όχι μηδενικές) τότε γνωρίζουμε από τη θεωρία της κεντρικής πολλαπλότητας ότι μπορούμε να μειώσουμε τη διάσταση του συστήματος. Στη περίπτωση αυτή η διάσταση του συστήματος που καθορίζει την ευστάθεια στη κεντρική πολλαπλότητα είναι μονάδα ($c = 1$), δηλαδή,

$$\dot{x} = f(x, \mu). \quad (4.24)$$

Η ιδιοτιμή αυτού του μονοδιάστατου συστήματος είναι $\lambda = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{0,0} = 0$. Ας αναλύσουμε τη συνάρτηση $f(x, \mu)$ σε σειρά Taylor,

$$\begin{aligned} f(x, \mu) = f(0, 0) + \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{0,0} x + \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} \Big|_{0,0} \mu + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Big|_{0,0} \frac{x^2}{2} \\ + \frac{\partial^2 f(x, \mu)}{\partial x^2} \Big|_{0,0} \frac{\mu^2}{2} + \frac{\partial^2 f(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} \Big|_{0,0} x\mu + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Εφόσον η αρχή των αξόνων είναι στατικό σημείο ισχύει $f(0, 0) = 0$ και, επιπλέον, εφόσον είναι μη-υπερβολικό σημείο τότε $\frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \Big|_{0,0} = 0$. Συνεπώς, η Εξ. (4.25) γράφεται ως,

$$\dot{x} = a_1\mu + a_2x^2 + a_3\mu^2 + a_4\mu x + \dots, \quad (4.26)$$

όπου οι σταθερές έχουν προφανές νόημα.

Ως πρώτο βήμα, ας θεωρήσουμε ότι,

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{0,0} \neq 0 \quad (4.27)$$

$$a_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{0,0} \neq 0 \quad (4.28)$$

$$a_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \Big|_{0,0} = 0 \quad (4.29)$$

Υπό αυτές τις συνθήκες η Εξ. (4.26) γράφεται ως εξής,

$$\dot{x} = a_1\mu + a_2x^2 + \dots \quad (4.30)$$

Θέτοντας $t \rightarrow \sqrt{\frac{1}{|a_1 a_2|}} t$ και $x \rightarrow \sqrt{\frac{|a_1|}{|a_2|}} x$, και αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης, έχουμε,

$$\dot{x} = \mu + \beta x^2, \quad (4.31)$$

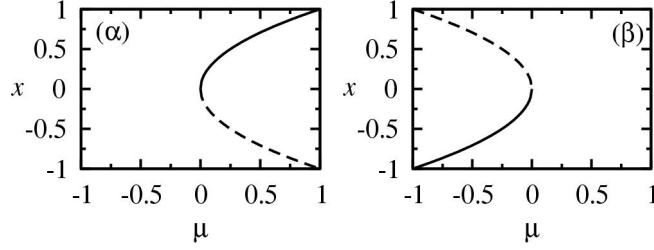
όπου $\beta = \pm 1$. Ας μελετήσουμε την Εξ. (4.31) καθώς μεταβάλλεται το μ . Ας σημειώσουμε αρχικά ότι για $\mu = 0$ η αρχή των αξόνων είναι μη-υπερβολικό σημείο. Τα στατικά σημεία της Εξ. (4.31) είναι,

$$\bar{x} = \begin{cases} \pm\sqrt{-\mu} & \text{αν } \beta = 1 \\ \pm\sqrt{\mu} & \text{αν } \beta = -1 \end{cases} \quad (4.32)$$

Εφόσον επιθυμούμε τα στατικά σημεία να είναι πραγματικοί αριθμοί τότε $\mu \geq 0$ όταν $\beta = -1$ και $\mu \leq 0$ όταν $\beta = 1$. Έτσι, σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι στατικά σημεία υπάρχουν μόνο στο ένα ημιεπίπεδο του χώρου των παραμέτρων, το οποίο εξαρτάται από την τιμή του β .

Η ευστάθεια αυτών των στατικών σημείων καθορίζεται από την ιδιοτιμή, $\lambda = 2\beta\bar{x}$. Ας διερευνήσουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

- Για $\beta = 1$, η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο $+\sqrt{-\mu}$ είναι θετική, οπότε αυτός ο κλάδος είναι ασταθής. Η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο $-\sqrt{-\mu}$ είναι αρνητική, οπότε αυτός ο κλάδος είναι ευσταθής.



Σχήμα 4.1: Διακλάδωση σάγματος - κόμβου για (α) $\beta = -1$ και (β) $\beta = 1$.

- Για $\beta = -1$, η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο $+\sqrt{\mu}$ είναι αρνητική, οπότε αυτός ο κλάδος στατικών καταστάσεων είναι ευσταθής. Η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο $-\sqrt{\mu}$ είναι θετική, οπότε αυτή η ιδιοτιμή είναι ασταθής.

Αυτή η διακλάδωση καλείται διακλάδωση *σάγματος - κόμβου*. Οι περιπτώσεις για $\beta = -1$ και $\beta = 1$ φαίνονται στο Σχ. 4.1.

Τι συμβαίνει όμως αν $a_4 \neq 0$; Στην περίπτωση αυτή μπορεί ναδειχθεί ότι *τοπικά* υπάρχει η διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων. Συνεπώς, οι όροι της μορφής μx δεν επηρεάζουν την ποιοτική συμπεριφορά στη γειτονιά του μη-υπερβολικού στατικού σημείου. Περισσότερες λεπτομέρειες για την περίπτωση αυτή δίνονται στο Παράδειγμα (4.4).

Τι συμβαίνει με τους όρους υψηλότερης τάξης; Επηρεάζουν την εξίσωση της διακλάδωσης σάγματος - κόμβου, Εξ. (4.31);. Στη περίπτωση αυτή μπορεί ναδειχθεί ότι, για άλλη μία φορά, *τοπικά* έχουμε μία διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων. Συνεπώς, όροι της μορφής x^3 μπορούν να αγνοηθούν. Η περίπτωση αυτή διερευνάται στο Παράδειγμα (4.5).

Ως συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι η διακλάδωση σάγματος - κόμβου λαμβάνει χώρα στην αρχή των αξόνων αν,

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο,

$$f(0,0) = 0. \quad (4.33)$$

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα μη-υπερβολικό στατικό σημείο,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0,0} = 0. \quad (4.34)$$

- Επιπλέον, θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{0,0} &\neq 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{0,0} &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

- Η κανονική μορφή της διακλάδωσης σάγματος - κόμβου είναι,

$$\dot{x} = \mu \pm x^2 \quad (4.36)$$

4.4.2 Υπερκρίσημη διακλάδωση

Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε τι συμβαίνει αν μία από τις συνθήκες για τη διακλάδωση σάγματος - κόμβου παύσει να ισχύει. Ειδικότερα, θα διερευνήσουμε την περίπτωση,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{0,0} = 0. \quad (4.37)$$

Στην περίπτωση αυτή θα εισάγουμε έναν επιπλέον όρο μx θέτοντας,

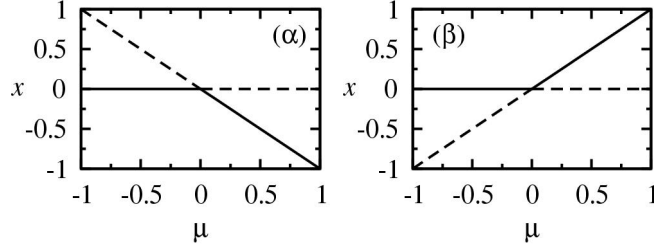
$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right|_{0,0} \neq 0 \quad (4.38)$$

Έτσι, καταλήγουμε στη μελέτη της εξίσωσης,

$$\dot{x} = \mu x + \beta x^2, \quad (4.39)$$

όπου $\beta = \pm 1$. Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (4.39) είναι $\bar{x} = 0$ και $\bar{x} = -\frac{\mu}{\beta}$. Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda = \mu + 2\beta\bar{x}$. Έτσι παρατηρούμε ότι η στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ είναι ευσταθής όταν $\mu < 0$ και ασταθής όταν $\mu > 0$. Από την άλλη πλευρά, η στατική κατάσταση $\bar{x} = -\frac{\mu}{\beta}$ είναι ασταθής για $\mu < 0$ και ευσταθής $\mu > 0$. Αυτή η διακλάδωση ονομάζεται *υπερκρίσημη*. Οι περιπτώσεις $\beta = 1$ και $\beta = -1$ παρουσιάζονται στο Σχ. 4.2.

Τι θα συμβεί αν 'διαταράξουμε' την υπερκρίσημη διακλάδωση προσθέτοντας όρους χαμηλότερης τάξης στην Εξ. (4.39); (δηλαδή, αν διατηρήσουμε όρους χαμηλότερης τάξης στη σειρά Taylor). Προφανώς, η προσθήκη ενός όρου της μορφής $a\mu$ συμβαίνει να είναι ίδιος με την περίπτωση της Εξ. (4.105). Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η υπερκρίσημη διακλάδωση μετατρέπεται σε διακλάδωση σάγματος



Σχήμα 4.2: Υπερκρίσημη διακλάδωση για (α) $\beta = 1$ και (β) $\beta = -1$.

- κόμβου στην αρχή των αξόνων Η γενική περίπτωση προσθήκης όρων χαμηλής τάξης, όπου ο όρος αυτός είναι μία σταθερά, διερευνάται στο Παράδειγμα (4.6).

Ως συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι η υπερκρίσημη διακλάδωση λαμβάνει χώρα στην αρχή των αξόνων όταν,

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο,

$$f(0,0) = 0. \quad (4.40)$$

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα μη-υπερβολικό στατικό σημείο,

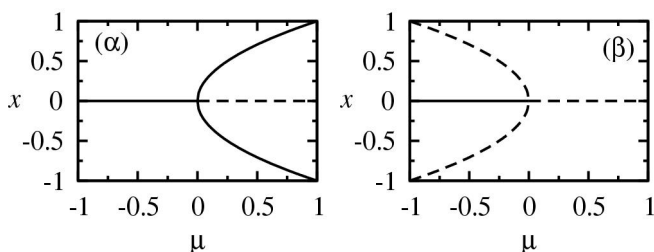
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0,0} = 0. \quad (4.41)$$

- Επιπλέον, θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{0,0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{0,0} &\neq 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right|_{0,0} &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

- Η κανονική μορφή της υπερκρίσημης διακλάδωσης είναι,

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2 \quad (4.43)$$



Σχήμα 4.3: Διχλωτή διακλάδωση για (α) $\beta = -1$, και (β) $\beta = 1$.

4.4.3 Διχλωτή διακλάδωση

Η εναπομένουσα περίπτωση είναι όταν ισχύει η παρακάτω συνθήκη,

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{0,0} = 0. \quad (4.44)$$

Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να εισάγουμε όρους της μορφής x^3 εφόσον λόγω της παραπάνω συνθήκης μη-γραμμικοί όροι δευτέρας τάξης απομακρύνονται. Συνεπώς θα πρέπει να μελετηθεί η εξίσωση,

$$\dot{x} = \mu x + \beta x^3, \quad (4.45)$$

όπου $\beta = \pm 1$. Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (4.45) είναι $\bar{x} = 0$ και $\bar{x} = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\beta}}$. Η πρώτη στατική κατάσταση υπάρχει για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . Εφόσον επιθυμούμε να είναι οι στατικές καταστάσεις πραγματικοί αριθμοί, ισχύουν τα παρακάτω,

- Για $\beta = 1$, οι στατικές καταστάσεις $\bar{x} = \pm \sqrt{-\mu}$ υπάρχουν μόνο όταν $\mu \leq 0$.
- Για $\beta = -1$, οι στατικές καταστάσεις $\bar{x} = \pm \sqrt{\mu}$ υπάρχουν μόνο όταν $\mu \geq 0$.

Η ιδιοτιμή του συστήματος είναι $\lambda = \mu + 3\beta\bar{x}^2$. Άρα, η στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ είναι ευσταθής όταν $\mu < 0$ και ασταθής όταν $\mu > 0$. Για τις υπόλοιπες στατικές καταστάσεις έχουμε,

- Για $\beta = 1$, η ιδιοτιμή είναι $\lambda = -2\mu$ κι εφόσον $\mu < 0$ οι στατικές καταστάσεις $\bar{x} = \pm \sqrt{-\mu}$ είναι ασταθείς.

- Για $\beta = -1$, η ιδιοτιμή είναι $\lambda = -2\mu$ κι εφόσον $\mu > 0$ οι στατικές καταστάσεις $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ είναι ευσταθείς.

Αυτή η διακλάδωση καλείται *διχαλωτή διακλάδωση*. Η διχαλωτή διακλάδωση παρουσιάζεται σχηματικά στο Σχ. 4.3.

Ας διερευνήσουμε τι συμβαίνει αν ‘διαταραχθεί’ η διχαλωτή διακλάδωση προσθέτοντας έναν σταθερό όρο στην Εξ. (4.45). Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε,

$$\dot{x} = \varepsilon + \mu x + \beta x^3. \quad (4.46)$$

Για άλλη μία φορά, οι διακλαδώσεις είτε εξαφανίζονται είτε μετατρέπονται σε διακλαδώσεις σάγματος - κόμβου, ανάλογα με το πρόσημο του ε . Οι περιπτώσεις αυτές διερευνώνται στο Παράδειγμα 4.7.

Ως συμπέρασμα, μπορούμε να πούμε ότι μια διχαλωτή διακλάδωση λαμβάνει χώρα στην αρχή των αξόνων όταν,

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο,

$$f(0, 0) = 0. \quad (4.47)$$

- Η αρχή των αξόνων είναι ένα μη-υπερβολικό σημείο,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{0,0} = 0. \quad (4.48)$$

- Επιπλέον, θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \mu} \right|_{0,0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{0,0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu} \right|_{0,0} &\neq 0, \\ \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{0,0} &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

- Η κανονική μορφή της διχαλωτής διακλάδωσης είναι,

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3 \quad (4.50)$$

4.5 Κανονικές μορφές

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι στην περίπτωση που το σύστημα έχει μία απλή μηδενική ιδιοτιμή τότε η συμπεριφορά κοντά στο σημείο ισορροπίας καθορίζεται από απλά συστήματα διαφορικών εξισώσεων ή αλλιώς *κανονικών μορφών*. Επιπλέον, παρατηρήσαμε ότι κάποιοι μη γραμμικοί όροι είναι σημαντικοί και καθορίζουν την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος ενώ άλλοι δεν εισάγουν κανένα νέο τοπικό φαινόμενο κοντά στο σημείο διακλάδωσης, κι έτσι μπορούν να αγνοηθούν. Τέλος, παρατηρήσαμε ότι κάποια είδη διακλαδώσεων μετατρέπονται σε άλλα (ή εξαφανίζονται εντελώς) αν το σύστημα ‘διαταραχθεί’.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί η θεωρία των κανονικών μορφών, η οποία επιτρέπει την συστηματική απλοποίηση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων κοντά στο σημείο διακλάδωσης. Στην επόμενη παράγραφο θα εφαρμοστεί η μέθοδος για την περίπτωση όπου το σύστημα έχει μιγαδικές ιδιοτιμές.

4.5.1 Συστήματα μίας διάστασης

Ας θεωρήσουμε ένα μονοδιάστατο σύστημα,

$$\dot{x} = f(x) = \lambda x + \alpha_2 x^2 + \dots \quad (4.51)$$

Το ερώτημα που θέτουμε είναι αν υπάρχει μετασχηματός της μεταβλητής x έτσι ώστε να απαλειφθούν οι όροι δεύτερης τάξης. Έστω ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι της μορφής,

$$x = y + \beta_2 y^2 \quad (4.52)$$

Συνεπώς, το ερώτημα είναι αν υπάρχει β_2 τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν όροι δεύτερης τάξης στη μετασχηματισμένη εξίσωση. Διαφορίζοντας την Εξ. (4.52) ως προς τον χρόνο,

$$\dot{x} = \dot{y} + 2\beta_2 y \dot{y} = (1 + 2\beta_2 y) \dot{y} \quad (4.53)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.52) και (4.53) στην Εξ. (4.51) προκύπτει,

$$(1 + 2\beta_2 y) \dot{y} = \lambda y + (\lambda \beta_2 + \alpha_2) y^2 + 2\alpha_2 \beta_2 y^3 + \alpha_2 \beta_2^2 y^4 + \dots$$

δηλαδή,

$$\dot{y} = (1 + 2\beta_2 y)^{-1} [\lambda y + (\lambda \beta_2 + \alpha_2) y^2] \quad (4.54)$$

όπου οι όροι τάξης ανώτερης του δύο έχουν παραληφθεί. Αλλά,

$$(1 + 2\beta_2 y)^{-1} = 1 - 2\beta_2 y + \dots$$

συνεπώς, η Εξ. (4.54) γράφεται,

$$\dot{y} = \lambda y - 2\beta_2 \lambda y^2 + \beta_2 \lambda y^2 + \alpha_2 y^2 - 2\lambda \beta_2^2 y^3 - 2\beta_2 \alpha_2 y^3$$

Αγνοώντας όρους τάξης ανώτερης του δύο,

$$\dot{y} = \lambda y + (\alpha_2 - \beta_2 \lambda) y^2 \quad (4.55)$$

Συνεπώς, όροι δεύτερης τάξης μπορούν να απαληφθούν θέτοντας,

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda}$$

εφόσον η ιδιοτιμή λ είναι διάφορη του μηδενός, $\lambda \neq 0$. Παρατηρούμε ότι η δυνατότητα μετασχηματισμού ώστε να απαληφθούν οι όροι δεύτερης τάξης καθορίζεται από την τιμή της ιδιοτιμής.

Ας διαπιστώσουμε τις συνθήκες όπου και όροι τρίτης τάξης μπορούν να απαληφθούν. Το δυναμικό σύστημα είναι,

$$\dot{x} = \lambda x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots \quad (4.56)$$

και ο προτεινόμενος μετασχηματισμός,

$$x = y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 \quad (4.57)$$

Διαφορίζοντας ως προς τον χρόνο,

$$\dot{x} = \dot{y} + 2\beta_2 y \dot{y} + 3\beta_3 y^2 \dot{y} = (1 + 2\beta_2 y + 3\beta_3 y^2) \dot{y} \quad (4.58)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική εξίσωση,

$$(1 + 2\beta_2 y + 3\beta_3 y^2) \dot{y} = \lambda y + (\lambda \beta_2 + \alpha_2) y^2 + (\lambda \beta_3 + 2\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3) y^3$$

όπου έχουν αγνοηθεί όροι ανώτερης τάξης από την τρίτη. Ισοδύναμα, έχουμε,

$$\dot{y} = (1 + 2\beta_2 y + 3\beta_3 y^2)^{-1} [\lambda y + (\lambda \beta_2 + \alpha_2) y^2 + (\lambda \beta_3 + 2\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3) y^3]$$

Αλλά, για τον πολλαπλασιαστή του δεξιού σκέλους έχουμε,

$$(1 + 2\beta_2 y + 3\beta_3 y^2)^{-1} = 1 - 2\beta_2 y + (4\beta_2^2 - 3\beta_3) y^2 + \dots$$

Αγνοώντας όρους τάξης ανώτερης του τρία, η εξίσωση μας γράφεται,

$$\dot{y} = \lambda y + (\alpha_2 - \lambda \beta_2) y^2 + (\alpha_3 - 2\lambda \beta_3 + 2\lambda \beta_2^2) y^3 \quad (4.59)$$

Συνεπώς, όροι δεύτερης τάξης μπορούν να απαληφθούν αν,

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda}$$

καθώς και οι όροι τρίτης τάξης μπορούν να αναπληφθούν αν,

$$\beta_3 = \frac{\alpha_3}{2\lambda} + \frac{\alpha_2^2}{\lambda^2}$$

εφόσον $\lambda \neq 0$.

4.5.2 Συστήματα ανώτερης διάστασης

Ας θεωρήσουμε ένα n -διάστατο δυναμικό σύστημα το οποίο έχει μηδενικές ή φανταστικές ιδιοτιμές για ένα στατικό σημείο στην αρχή των αξόνων. Η διάσταση του συστήματος αυτού μπορεί να μειωθεί κάνοντας χρήση του θεωρήματος της κεντρικής πολλαπλότητας και να παρασταθεί ως εξής,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{y}) + \dots \quad (4.60)$$

όπου $\mathbf{A}$ είναι σε μορφή Jordan και $\mathbf{f}^{(m)}(\mathbf{y})$ είναι οι μη γραμμικότητες 2ας, 3ης κ.λ.π. τάξης (ήδη γνωρίζουμε πως να μετατρέψουμε ένα δυναμικό σύστημα σε αυτή τη μορφή).

Θα ήταν επιθυμητό στο σημείο αυτό να εισάγουμε ένα μετασχηματισμό στις δυναμικές μεταβλητές που θα μετέτρεπε την Εξ. (4.60) στην απλούστερη δυνατή μορφή της (θα εξαφάνιζε όσο το δυνατό περισσότερους μη γραμμικούς όρους). Ας θεωρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να παρασταθεί ως εξής,

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{y}) + \mathbf{h}^{(3)}(\mathbf{y}) + \dots \quad (4.61)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ έχει ως στοιχεία τις μη γραμμικές συναρτήσεις,

$$h_i = \alpha_{i,1}y_1^2 + \alpha_{i,2}y_2^2 + \alpha_{i,3}y_1y_2 + \dots$$

Διαφορίζοντας την Εξ. (4.61) ως προς τον χρόνο, προκύπτει,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}_y\mathbf{h})\dot{\mathbf{y}} \quad (4.62)$$

όπου, ο πίνακας $\mathbf{D}_y\mathbf{h}$ είναι της μορφής,

$$\mathbf{D}_y\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \dots \\ \vdots & & \\ \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \frac{\partial h_n}{\partial y_1} & \dots \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.62) και (4.61) στην Εξ. (4.60),

$$\dot{\mathbf{y}} \approx (\mathbf{I} - \mathbf{D}_y \mathbf{h})(\mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{h}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}))$$

ή, αναλυτικότερα,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{h} + \mathbf{f} - \mathbf{D}_y \mathbf{h} \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{D}_y \mathbf{h} \mathbf{A} \mathbf{h} - \mathbf{D}_y \mathbf{h} \mathbf{f} \quad (4.63)$$

Αν ληφθούν υπόψη μόνο οι μη γραμμικότητες 2ας τάξης, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{A} \mathbf{h}^{(2)} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{D}_y \mathbf{h}^{(2)} \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{D}_y \mathbf{h}^{(2)} \mathbf{A} \mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{D}_y \mathbf{h}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)} \quad (4.64)$$

όπου τα στοιχεία των διανυσμάτων $\mathbf{h}^{(2)}(\mathbf{y})$ και $\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{y})$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις 2ας τάξης. Στην παραπάνω σχέση, οι δύο τελευταίοι όροι είναι τουλάχιστον 3ης τάξης και μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς, υπό τον μετασχηματισμό Εξ. (4.61) οι μη γραμμικότητες 2ας τάξης μπορούν να εξαλειφθούν αν ισχύει η σχέση,

$$\mathbf{D}_y \mathbf{h}^{(2)} \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(2)} = \mathbf{f}^{(2)} \quad (4.65)$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για όρους ανώτερης τάξης, προκύπτει ότι όροι τάξης $m > 2$ μπορούν να εξαλειφθούν εφόσον,

$$\mathbf{D}_y \mathbf{h}^{(m)} \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(m)} = \mathbf{g}^{(m)} \quad (4.66)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{g}^{(m)}(\mathbf{y})$ εξαρτάται και από τις λύσεις (αν υπάρχουν) της αντίστοιχης σχέσης για $m - 1$. Η Εξ. (4.66) μπορεί να γραφεί και με τη μορφή,

$$L_A(\mathbf{h}^{(m)}) = \mathbf{g}^{(m)} \quad (4.67)$$

όπου το τελεστής L_A είναι ο παρακάτω,

$$L_A(\cdot) = \mathbf{D}_y(\cdot) \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{A}(\cdot)$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι διαγώνιος, με τις ιδιοτιμές του ως στοιχεία της διαγωνίου, συνεπώς κάθε γραμμή της Εξ. (4.65) είναι της μορφής,

$$\frac{\partial h_i^{(m)}}{\partial y_1} \lambda_1 y_1 + \frac{\partial h_i^{(m)}}{\partial y_2} \lambda_2 y_2 + \dots - \lambda_i h_i^{(2)} = g_i^{(m)}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i^{(m)}}{\partial y_j} \lambda_j y_j - \lambda_i h_i^{(m)} = g_i^{(m)} \quad (4.68)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\partial h_i^{(m)}}{\partial y_j} = \alpha_{i,j} m_j y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_j^{m_j-1} \dots$$

συνεπώς,

$$\frac{\partial h_i^{(m)}}{\partial y_j} y_j = \alpha_{i,j} m_j y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_j^{m_j} \dots = m_j h_j^{(m)}$$

Άρα, η Εξ. (4.68) γράφεται,

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j h_i^{(m)} - \lambda_i h_i^{(m)} = g_i^{(m)} \quad (4.69)$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (4.68) και (4.69) παρατηρούμε ότι,

$$L_A(h_i^{(m)}) = \left(\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j - \lambda_i \right) h_i^{(m)}$$

δηλαδή οι ιδιοτιμές του τελεστή L_A είναι $\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j - \lambda_i$. Συνεπώς, η Εξ. (4.66) έχει λύση (οι όροι m τάξης μπορούν να εξαλειφθούν) αν οι ιδιοτιμές του τελεστή L_A είναι διάφορες του μηδενός. Άρα, οι μη γραμμικότητες που δεν μπορούν να εξαλειφθούν είναι αυτές για τις οποίες ισχύει η *συνθήκη συντονισμού*,

$$\sum_{j=1}^n m_j \lambda_j - \lambda_i = 0 \quad (4.70)$$

Για να βρούμε, λοιπόν, ποιοι όροι παραμένουν είτε υπολογίζουμε τους όρους συντονισμού, χρησιμοποιώντας την Εξ. (4.70), ή κάνουμε χρήση του παρακάτω αποτελέσματος: Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι μη γραμμικοί όροι που παραμένουν μπορούν να βρεθούν λύνοντας το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους,

$$D_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_q(\mathbf{x}) \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{P}_q(\mathbf{x}), \quad (4.71)$$

όπου ο αστερίσχος παριστά τον συζυγή και, ως συνήθως, ο πίνακας $D_{\mathbf{x}} \mathbf{P}$ έχει στοιχεία της μορφής $\frac{\partial P_{i,q}}{\partial x_i}$. Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το ποιοι όροι παραμένουν ή εξαλείφονται καθορίζονται πλήρως από το *γραμμικό μέρος* του μη γραμμικού δυναμικού συστήματος.

4.6 Η διακλάδωση Hopf

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός μη γραμμικού δυναμικού συστήματος που έχει ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών $\lambda = \pm i\omega$. Υπό αυτές τις συνθήκες και χρησιμοποιώντας γνώσεις της γραμμικής άλγεβρας και του θεωρήματος της κεντρικής πολλαπλότητας, το σύστημα μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα δύο διαστάσεων,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Ας χρησιμοποιήσουμε μιγαδικές συντεταγμένες θέτοντας $z = x + iy$ και $\bar{z} = x - iy$ (η γραμμή επί του συμβόλου συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό). Υπό αυτό το μετασχηματισμό η Εξ. (4.72) γράφεται,

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(z, \bar{z}) \\ F_2(z, \bar{z}) \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

4.6.1 Η κανονική μορφή για ένα σύστημα με ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών

Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κανονικών μορφών για την Εξ. (4.73).

- **Περίπτωση 1: Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη συντονισμού**

Ας αρχίσουμε με τους όρους δεύτερης τάξης. Στην περίπτωση αυτή τα στοιχεία του διανύσματος Φ_2 θα είναι z^2 , $\bar{z}^2$ και $z\bar{z}$. Το μονώνυμο z^2 μπορεί να γραφεί και ως $z^{m_1}\bar{z}^{m_2}$ όπου $m_1 = 2$ και $m_2 = 0$. Άρα, η Εξ. (4.70) γράφεται, για $\lambda_i = i\omega$,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega - 2i\omega = -i\omega.$$

Η σχέση αυτή δεν μπορεί ποτέ να είναι ίση με το μηδέν. Άρα οι όροι της μορφής z^2 μπορούν να εξαλειφθούν.

Το μονώνυμο $\bar{z}^2$ μπορεί να γραφεί και ως $\bar{z}^{m_1}z^{m_2}$ όπου $m_1 = 2$ και $m_2 = 0$. Άρα, η Εξ. (4.70) μπορεί να γραφεί,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega + 2i\omega = 3i\omega,$$

η οποία δεν μπορεί να είναι ίση με το μηδέν. Άρα, όροι της μορφής $\bar{z}^2$ μπορούν να εξαλειφθούν.

Το μονώνυμο $z\bar{z}$ μπορεί να γραφεί ως $z^{m_1}\bar{z}^{m_2}$ όπου $m_1 = 1$ και $m_2 = 1$. Άρα, η Εξ. (4.70) μπορεί να γραφεί,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega - (i\omega - i\omega) = i\omega,$$

η οποία δεν μπορεί να είναι ίση με το μηδέν. Άρα, όροι της μορφής $z\bar{z}$ μπορούν να εξαλειφθούν. Ακριβώς η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί για την άλλη ιδιοτιμή, δηλ. $\lambda_i = -i\omega$ η οποία θα έχει το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. Συμπερασματικά όλοι οι όροι δεύτερης τάξης μπορούν να εξαλειφθούν μέσω ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με τους όρους τρίτης τάξης. Στην περίπτωση αυτή, τα στοιχεία του διανύσματος Φ_3 θα είναι z^3 , $\bar{z}^3$, $z^2\bar{z}$ και $z\bar{z}^2$. Χρησιμοποιώντας την Εξ. (4.70) όπως πριν, θα έχουμε για τους όρους της μορφής z^3 ,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega - 3i\omega = -2i\omega.$$

Για τους όρους της μορφής $\bar{z}^3$ έχουμε,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega + 3i\omega = 4i\omega.$$

Για τους όρους $z^2\bar{z}$ έχουμε,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega - 2i\omega + i\omega = 0.$$

Τέλος, για τους όρους της μορφής $z\bar{z}^2$,

$$\lambda_i - \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j = i\omega - i\omega + 2i\omega = 2i\omega.$$

Έτσι, όλοι οι όροι τρίτης τάξης μπορούν να εξαλειφθούν εκτός από τους όρους συντονισμού της μορφής $z^2\bar{z}$.

Γενικά, μπορούμε να σημειώσουμε ότι η συνθήκη συντονισμού μπορεί να γραφεί,

$$\lambda - (m_1\lambda + m_2\bar{\lambda}) = 0$$

Εφόσον $\lambda = -\bar{\lambda}$ η συνθήκη συντονισμού ικανοποιείται μόνο όταν,

$$1 - m_1 + m_2 = 0. \quad (4.74)$$

Προφανώς, η συνθήκη αυτή δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα όταν το m_1 και m_2 είναι άρτιοι αριθμοί. Αυτό σημαίνει ότι *όλοι οι όροι άρτιας τάξης μπορούν να εξαλειφθούν*. Άρα, έως τους όρους πέμπτης τάξης, η κανονική μορφή της Εξ. (4.73) είναι,

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cz^2\bar{z} \\ \bar{c}\bar{z}^2z \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

όπου $c = a + ib$ είναι μία μιγαδική σταθερά.

• **Περίπτωση 2: Χρήση της Εξ. (4.71)**

Εναλλακτικά, οι όροι συντονισμού μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας της Εξ. (4.71). Αναλυτικά, η εξίσωση αυτή γράφεται,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega & 0 \\ 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ \bar{P} \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Μετά από μερικές αριθμητικές πράξεις, καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial z}z + \frac{\partial P}{\partial \bar{z}}\bar{z} &= -P, \\ -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}z + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{z}}\bar{z} &= \bar{P}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Κάνοντας χρήση αυτής της μεθόδου έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{-P} &= \frac{dz}{-z} = \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}, \\ \frac{d\bar{P}}{\bar{P}} &= \frac{dz}{-z} = \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Ολοκληρώνοντας την δεύτερη ισότητα έχουμε για το πρώτο ολοκλήρωμα,

$$z\bar{z} = c,$$

όπου c είναι μία πραγματική σταθερά. Ολοκληρώνοντας την πρώτη ισότητα έχουμε,

$$P = \phi(z\bar{z})z,$$

όπου η σταθερή ολοκλήρωσης, ϕ είναι συνάρτηση του πρώτου ολοκληρώματος, $z\bar{z} = c$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εφόσον το πρώτο ολοκληρώμα είναι μία συνάρτηση δεύτερης τάξης η P δεν μπορεί ποτέ να είναι συνάρτηση δεύτερης τάξης (ουσιαστικά δεν μπορεί να είναι συνάρτηση άρτιας τάξης). Άρα, όροι δεύτερης τάξης μπορούν να εξαλειφθούν. Για τους όρους τρίτης τάξης, θέτουμε $\phi(z\bar{z}) = z\bar{z}$ και άρα οι εναπομείναντες όροι τρίτης τάξης είναι της μορφής $P = z^2\bar{z}$. Άρα, η κανονική μορφή δίνεται από την Εξ. (4.75).

4.6.2 Η κανονική μορφή σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων

Η επίδραση των παραμέτρων διακλάδωσης στην κανονική μορφή μπορεί να μελετηθεί στην Εξ. (4.75) θέτοντας,

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cz^2\bar{z} \\ \bar{c}\bar{z}^2z \end{pmatrix}.$$

Άρα, η παραμετροποιημένη κανονική μορφή σε μιγαδικές συντεταγμένες γράφεται,

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega & \mu \\ \mu & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cz^2\bar{z} \\ \bar{c}\bar{z}^2z \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε,

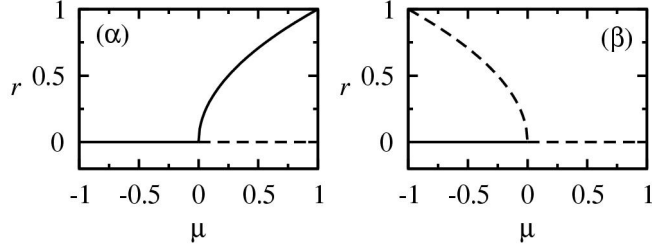
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (ax - by)(x^2 + y^2) \\ (bx + ay)(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Τέλος, σε πολικές συντεταγμένες έχουμε,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + ar^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2. \end{aligned} \quad (4.81)$$

4.6.3 Απλοποιημένη ανάλυση της διακλάδωσης Hopf

Για να αναλύσουμε τη διακλάδωση Hopf ας θεωρήσουμε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες Εξ. (4.81). Ας αγνοήσουμε τον όρο br^2 στη δεύτερη εξίσωση και ας μελετήσουμε μόνο την πρώτη. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για αυτή την



Σχήμα 4.4: Διακλάδωση Hopf για (α) $a < 0$, (β) $a > 0$. Οι κλάδοι με $\bar{r} > 0$ αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές.

εξίσωση στατικές καταστάσεις με $\bar{r} > 0$ αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές (με ακτίνα $\bar{r}$) ενώ στατικές καταστάσεις με $\bar{r} = 0$ αντιστοιχούν σε σημεία.

Αν δούμε την πρώτη εξίσωση στην Εξ. (4.81) αμέσως καταλαβαίνουμε ότι αντιστοιχεί σε μία διχαλωτή διακλάδωση ενός μονοδιάστατου συστήματος. Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (4.81) είναι λύσεις της εξίσωσης,

$$\bar{r}(\mu + a\bar{r}^2) = 0.$$

Άρα η $\bar{r} = 0$ είναι μία στατική κατάσταση (ένα σημείο) για κάθε μ . Οι άλλες στατικές καταστάσεις είναι $\bar{r} = \pm\sqrt{\frac{-\mu}{a}}$. Εφόσον η μεταβλητή r παριστάνει την ακτίνα, η αρνητική λύση μπορεί να αγνοηθεί και έτσι έχουμε ένα κλάδο στατικών καταστάσεων, δηλαδή, $\bar{r} = \sqrt{\frac{-\mu}{a}}$. Αυτός ο κλάδος υπάρχει για $-\mu/a > 0$.

Η ιδιοτιμή του συστήματος που αντιστοιχεί στη στατική κατάσταση $\bar{r} = \sqrt{\frac{-\mu}{a}}$ είναι $\lambda = -2\mu$. Άρα, αν $\mu > 0$ (δηλαδή $a < 0$) αυτή η στατική κατάσταση είναι ευσταθής. Επιπλέον, η περιοδική τροχιά θα είναι κι αυτή σταθερή. Αν $\mu < 0$ (δηλαδή $a > 0$) η στατική κατάσταση είναι ασταθής, και η περιοδική τροχιά είναι κι αυτή ασταθής.

Σε ότι αφορά τη στατική κατάσταση $\bar{r} = 0$, η ιδιοτιμή της είναι $\lambda = \mu$. Άρα είναι ευσταθής για $\mu < 0$ και ασταθής για $\mu > 0$.

Αυτό το σενάριο διακλάδωσης ονομάζεται διακλάδωση Hopf. Κατά τη διάρκεια μίας διακλάδωσης Hopf ένα στατικό σημείο αντιστρέφει την ευστάθειά του και ταυτόχρονα γεννιέται μία περιοδική τροχιά. Αυτή η περιοδική τροχιά είναι ένας οριακός κύκλος (βλ. Παράδειγμα (4.8)). Οι δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται στο Σχ. 4.4.

4.7 Παραδείγματα

Παράδειγμα 4.1 Ας θεωρήσουμε το παρακάτω μη γραμμικό δυναμικό σύστημα,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y - x^5, \\ \dot{y} &= -y + x^2.\end{aligned}\tag{4.82}$$

1. Να γραφεί η Εξ. (4.82) στη μορφή της Εξ. (4.15).
2. Να μελετηθεί η ευστάθεια για το στατικό σημείο στην αρχή των αξόνων.

Λύση:

Η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο για το σύστημα, δηλαδή, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας για το σύστημα αυτό στην αρχή των αξόνων είναι,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

και οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -1$. Άρα, η αρχή των αξόνων είναι ένα μη-υπερβολικό στατικό σημείο και η ευστάθεια του δεν μπορεί να μελετηθεί με γραμμικοποίηση.

Η Εξ. (4.82) είναι ήδη σε κανονική μορφή, Εξ. (4.15), όπου,

$$\begin{aligned}A &= 0, \\ B &= -1, \\ f(x, y) &= x^2y - x^5, \\ g(x, y) &= x^2.\end{aligned}\tag{4.83}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται,

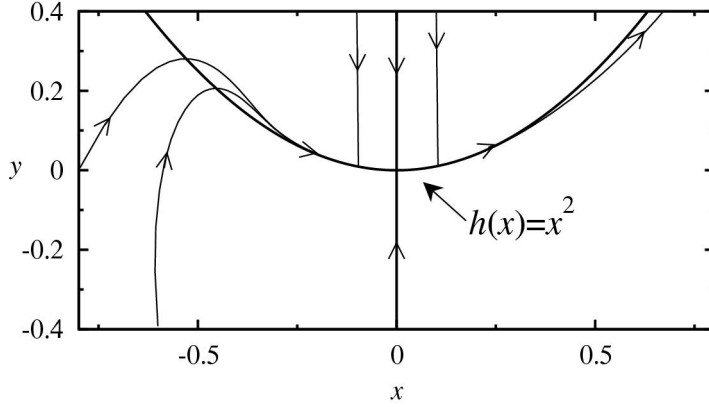
$$h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots\tag{4.84}$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (4.84) και (4.83) στην Εξ. (4.20) έχουμε,

$$(2ax + 3bx^2 + \dots)(ax^4 + bx^5 - x^5 + \dots) + ax^2 + bx^3 - x^2 + \dots = 0.$$

Εξισώνοντας συντελεστές ίσης τάξης του x προκύπτει $a = 1$ και $b = 0$. Άρα, η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται,

$$h(x) = x^2 + O(4),\tag{4.85}$$



Σχήμα 4.5: Τροχιές προς την κεντρική πολλαπλότητα για την Εξ. (4.82).

όπου το σύμβολο $O(n)$ συμβολίζει όρους n -οστής τάξης. Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.85) στην Εξ. (4.16) προκύπτει η εξίσωση που καθορίζει τη δυναμική επί της κεντρικής πολλαπλότητας,

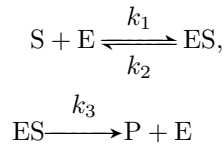
$$\dot{u} = u^4 + O(5). \quad (4.86)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι,

$$u(t) = (-3t + c)^{-1/3}$$

όπου $c > 0$ η σταθερά ολοκλήρωσης. Η μεταβλητή $u(t)$ τείνει στο άπειρο καθώς ο χρόνος t τείνει στην τιμή $c/3$. Συνεπώς, η στατική κατάσταση $\bar{u} = 0$ είναι ασταθής, άρα και η στατική κατάσταση $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ θα είναι ασταθής, σύμφωνα με το Θεώρημα (4.2). Οι τροχιές προς και επί της κεντρικής πολλαπλότητας για την Εξ. (4.82) παρουσιάζονται στο Σχ. 4.5.

Παράδειγμα 4.2 Ας θεωρήσουμε μία ενζυμική αντίδραση τύπου *Michaelis-Menden*,



όπου $[S]$, $[E]$, $[ES]$ και $[P]$ είναι οι συγκεντρώσεις του υποστρώματος, του ενζύμου, του ενζύμου-υποστρώματος και του προϊόντος, αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι k_1 , k_2 και k_3 είναι οι κινητικές σταθερές αυτών των αντιδράσεων.

1. Γράψτε τις κινητικές εξισώσεις του συστήματος.
2. Μετατρέψτε τις εξισώσεις σε αδιάστατη μορφή.
3. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα της κεντρικής πολλαπλότητας για να μειώσετε τη διάσταση του συστήματος.

Λύση: Οι κινητικές εξισώσεις για τις αντιδράσεις είναι,

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1[S][E] + k_2[ES] \quad (4.87)$$

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1[S][E] - k_2[ES] - k_3[ES] \quad (4.88)$$

$$\frac{d[E]}{dt} = -k_1[S][E] + k_2[ES] + k_3[ES] \quad (4.89)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{d[ES]}{dt} + \frac{d[E]}{dt} = 0$$

συνεπώς,

$$[ES] + [E] = [E]^0$$

όπου $[E]^0$ μία σταθερά (δηλαδή η συνολική συγκέντρωση του ενζύμου $[E]^0$ παραμένει σταθερή). Βάσει της παρατήρησης αυτής, το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα δύο διαστάσεων,

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1[S]([E]^0 - [ES]) + k_2[ES] \quad (4.90)$$

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1[S]([E]^0 - [ES]) - (k_2 + k_3)[ES] \quad (4.91)$$

Οι μονάδες του k_1 είναι, π.χ., $\text{mol}^{-1}\ell\cdot\text{s}^{-1}$ και του k_2 και k_3 είναι s^{-1} . Για να μετατραπεί το σύστημα σε αδιάστατη μορφή, θέτουμε,

$$[S] = \frac{k_2 + k_3}{k_1}x = K_m x$$

$$[ES] = [E]^0 y$$

$$t = \frac{\tau}{k_1 K_m}$$

όπου η σταθερά K_m με μονάδες mol/ℓ ονομάζεται σταθερά Michaelis-Menden. Υπό αυτή την αλλαγή μεταβλητών, το σύστημα γράφεται,

$$\begin{aligned}x' &= \varepsilon[-x + (x + c)y] = \varepsilon f(x, y), \\y' &= x - (x + 1)y,\end{aligned}\tag{4.92}$$

όπου $c = \frac{k_2}{k_2 + k_3}$, $\varepsilon = \frac{[E]^0}{K_m}$ και $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\tau}$.

Προφανώς, η τιμή $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ είναι ένα στατικό σημείο της Εξ. (4.92). Ο Ιακωβιανός πίνακας σε αυτό το σημείο γράφεται,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & c\varepsilon \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

και οι ιδιοτιμές είναι,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon - 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon + 1)^2 - 4\varepsilon(1 - c)}.$$

Για $\varepsilon = 0$, οι ιδιοτιμές είναι, $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -1$. Τώρα, αν θεωρήσουμε τη παράμετρο ε ως μία επιπλέον μεταβλητή του συστήματος, η Εξ. (4.92) γράφεται,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon f(x, y) \\ -xy \end{pmatrix}, \\ \dot{\varepsilon} &= 0.\end{aligned}\tag{4.93}$$

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα της κεντρικής πολλαπλότητας στην Εξ. (4.93) θα πρέπει να μετασχηματίσουμε το γραμμικό μέρος σε κανονική μορφή (μορφή Jordan). Ο μετασχηματισμός αυτός μας είναι γνωστός από τη γραμμική άλγεβρα. Θα πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά τα ιδιοδυναμίσματα του πίνακα, επιλύοντας τα συστήματα,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ s_1 - s_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -s_1 \\ s_1 - s_2 = -s_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Άρα, ο πίνακας $\mathbf{S}$ θα είναι,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

με αντίστροφο,

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix},$$

δηλαδή, $x = u$ και $y = u - v$. Συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon f(u, v) \\ u^2 - uv + \varepsilon f(u, v) \end{pmatrix}, \quad (4.94)$$

$$\dot{\varepsilon} = 0.$$

όπου $f(u, v) = -u + (u + c)(u - v)$.

Η Εξ. (4.94) είναι τώρα σε μορφή όπου μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα της κεντρικής πολλαπλότητας. Έτσι, στην περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= -1, \\ f(u, v, \varepsilon) &= \varepsilon f(u, v), \\ g(u, v, \varepsilon) &= u^2 - uv + \varepsilon f(u, v). \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται ως εξής,

$$v = h(u, \varepsilon) = \alpha u^2 + \beta u\varepsilon + \gamma \varepsilon^2 + O(3).$$

Σύμφωνα με την Εξ. (4.22) έχουμε,

$$\frac{\partial h}{\partial u}[0u + \varepsilon f(u, h)] - (-1)h - u^2 + uh - \varepsilon f(u, h) = 0, \quad (4.95)$$

όπου $\partial h / \partial u = 2\alpha u + \beta \varepsilon$. Αρα, έως τους όρους τρίτης τάξης η Εξ. (4.95) γράφεται,

$$(\alpha - 1)u^2 + \varepsilon u(\beta + c - 1) + \gamma \varepsilon^2 + O(3) = 0. \quad (4.96)$$

Εξισώνοντάς τους συντελεστές ίδιας τάξης του u στην Εξ. (4.96) προκύπτει $\alpha = 1$, $\beta = 1 - c$ και $\gamma = 0$. Τώρα, εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές των συντελεστών μπορούμε να γράψουμε αναλυτικά την κεντρική πολλαπλότητα με όρους μέχρι και τρίτης τάξης, δηλαδή,

$$v = h(u, \varepsilon) = u^2 + (1 - c)\varepsilon u + O(3).$$

Η εξίσωση που καθορίζει τη δυναμική του συστήματος, Εξ. (4.23), θα είναι,

$$u' = \varepsilon(c-1)(u-u^2) + O(3) \quad (4.97)$$

Ας δούμε το νόημα της Εξ. (4.97). Αν θεωρήσουμε ότι η συγκέντρωση του συμπλόκου ES είναι αμετάβλητη στο χρόνο, τότε $dy/dt = 0$. Στη περίπτωση αυτή, από την δεύτερη εξίσωση της (4.92) προκύπτει ότι,

$$y = \frac{x}{x+1}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση της (4.92) προκύπτει,

$$x' = \frac{(c-1)x}{x+1} = (c-1)x(x+1)^{-1}. \quad (4.98)$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το μηδέν έχουμε,¹

$$x' \approx (c-1)(x-x^2). \quad (4.99)$$

Συγκρίνοντας την Εξ. (4.97) με την Εξ. (4.99) παρατηρούμε ότι ουσιαστικά αποδείξαμε την προσέγγιση της ημι-στατικής κατάστασης (Quasi steady state approximation, QSSA).

Παράδειγμα 4.3 Ας θεωρήσουμε το σύστημα *Lorenz*,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= \rho x + x - y - xz, \\ \dot{z} &= -\beta z + xy. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Έστω, σ και $\beta > 0$. Θεωρείστε το ρ ως παράμετρο διακλάδωσης και μελετήστε τις διακλαδώσεις γύρω από την αρχή των αξόνων.

Λύση:

Προφανώς, η αρχή των αξόνων είναι ένα στατικό σημείο για το σύστημα. Ο Ιακωβιανός είναι,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

¹Κάνοντας χρήση της σειράς MacLaurin: $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-\dots$

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού είναι,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\rho\sigma},$$

$$\lambda_3 = -\beta.$$

Για $\rho = 0$, οι ιδιοτιμές είναι,

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = -\sigma - 1,$$

$$\lambda_3 = -\beta.$$

Εφόσον $\lambda_1 = 0$ το στατικό σημείο είναι μη-υπερβολικό και δεν μπορεί να εξαχθεί κανένα συμπέρασμα για την ευστάθεια του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε το ρ ως μία επιπλέον δυναμική μεταβλητή του συστήματος. Οι εξισώσεις Lorenz γράφονται,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho x - xz \\ xy \end{pmatrix}, \quad (4.101)$$

$$\dot{\rho} = 0.$$

Το επόμενο βήμα είναι να μετασχηματίσουμε την Εξ. (4.101) στην κανονική μορφή, δηλ. την Εξ. (4.21). Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i είναι,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \sigma \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, ο πίνακας που μετασχηματίζει τον Ιακωβιανό σε μορφή Jordan είναι,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

με αντίστροφο,

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix}.$$

Κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

η Εξ. (4.100) μετασχηματίζεται στην κανονική μορφή,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} \sigma\rho(u+\sigma v) - \sigma w(u+\sigma v) \\ -\rho(u+\sigma v) + w(u+\sigma v) \\ (1+\sigma)(u+\sigma v)(u+v) \end{pmatrix},$$

$$\dot{\rho} = 0. \quad (4.102)$$

Η Εξ. (4.102) είναι τώρα στη μορφή της Εξ. (4.21). Εφόσον έχουμε δύο μη-μηδενικές ιδιοτιμές και το ρ είναι μία παράμετρος διακλάδωσης, η κεντρική πολλαπλότητα γράφεται,

$$\mathbf{h}(u, \rho) = \begin{pmatrix} h_1(u, \rho) \\ h_2(u, \rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 u^2 + a_2 u \rho + a_3 \rho^3 + \dots \\ b_1 u^2 + b_2 u \rho + b_3 \rho^3 + \dots \end{pmatrix}. \quad (4.103)$$

Αντικαθιστώντας την Εξ. (4.103) και,

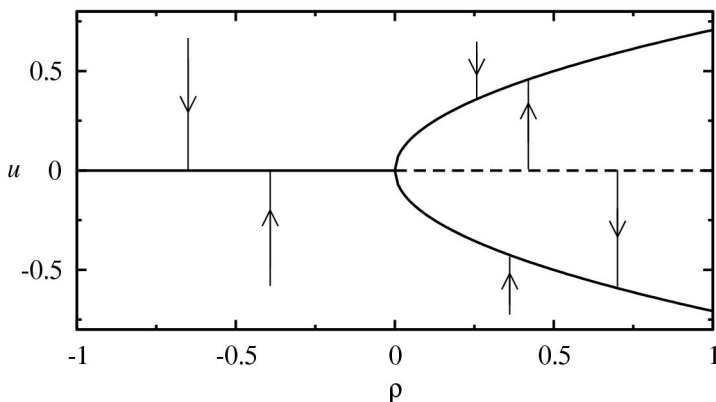
$$\begin{aligned} A &= 0, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -\sigma - 1 & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, \\ f(u, v, w, \rho) &= \frac{1}{1+\sigma} [\sigma\rho(u+\sigma v) - \sigma w(u+\sigma v)], \\ \mathbf{g}(u, v, w, \rho) &= \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} -\rho(u+\sigma v) + w(u+\sigma v) \\ (1+\sigma)(u+\sigma v)(u+v) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

στην. (4.22) και εξισώνοντας του συντελεστές, έχουμε,

$$\mathbf{h}(u, \rho) = \begin{pmatrix} h_1(u, \rho) \\ h_2(u, \rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+\sigma)^2} u \rho + \dots \\ \frac{1}{\beta} u^2 + \dots \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, η εξίσωση που καθορίζει τη δυναμική επί της κεντρικής πολλαπλότητας είναι,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u \left(\frac{\sigma}{1+\sigma} \rho - \frac{\sigma}{\beta} u^2 + \dots \right), \\ \dot{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα διακλάδωσης κοντά στην αρχή των αξόνων για την Εξ. (4.104).

Παρατηρώντας την Εξ. (4.104) παρατηρούμε ότι στην γειτονιά της αρχής των αξόνων, ισχύουν τα παρακάτω:

- Για $\rho < 0$ υπάρχει ένα στατικό σημείο $\bar{u} = 0$.
- Για $\rho > 0$ υπάρχουν τρία στατικά σημεία, δηλ., $\bar{u} = 0$, $\bar{u} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{1+\sigma}\rho}$.

Η ιδιοτιμή του συστήματος Εξ. (4.104) είναι $\lambda = \frac{\sigma}{1+\sigma}\rho - 3\frac{\sigma}{\beta}\bar{u}^2$. Άρα, το στατικό σημείο $\bar{u} = 0$ είναι ευσταθές για $\rho < 0$ και ασταθές για $\rho > 0$. Τα στατικά σημεία $\bar{u} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{1+\sigma}\rho}$ είναι πάντα ευσταθή. Το διάγραμμα διακλάδωσης κοντά στην αρχή των αξόνων για την Εξ. (4.104) παρουσιάζεται στο Σχ. 4.6.

Παράδειγμα 4.4 Μελετήστε την επίδραση των όρων της μορφής μx στη διακλάδωση σάγματος - κόμβου.

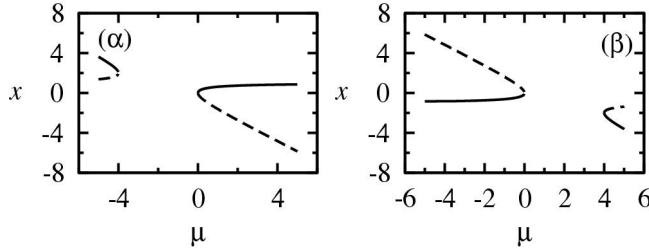
Λύση:

Θα πρέπει να μελετηθεί η Εξ. (4.26) για $a_4 \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να γράψουμε,

$$\dot{x} = \mu + \beta x^2 + a\mu x. \quad (4.105)$$

Τα στατικά σημεία της Εξ. (4.105) είναι,

$$\bar{x} = \begin{cases} -\frac{a\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2\mu^2 - 4\mu} & \text{if } \beta = 1 \\ -\frac{a\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2\mu^2 + 4\mu} & \text{if } \beta = -1 \end{cases} \quad (4.106)$$



Σχήμα 4.7: Διακλάδωση σάγματος - κόμβου για την Εξ. (4.105), $a = 1$ και (α) $\beta = -1$, (β) $\beta = 1$.

Παρατηρούμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, πραγματικά στατικά σημεία υπάρχουν μόνο στην περιοχή $\mu \leq 0$ και $\mu \geq \frac{4}{a^2}$. Οι ιδιοτιμές αυτών των στατικών σημείων είναι $\lambda = \pm 0.5\sqrt{\mu(a^2\mu - 4)}$. Άρα, υπό την επίδραση των όρων $a\mu x$ αναμένεται μία διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων και μία επιπλέον διακλάδωση σάγματος - κόμβου στο σημείο $\mu = \frac{4}{a^2}$. Άρα, τοπικά η διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων παραμένει ποιοτικά η ίδια υπό την επίδραση των επιπλέον όρων. Άρα, οι όροι της μορφής $a\mu x$ μπορούν να αγνοηθούν, αν μας ενδιαφέρει η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος κοντά στην αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να θέσουμε $a_4 = 0$ στην Εξ. (4.26) (Βλ. Σχ. 4.7)

Παράδειγμα 4.5 Να μελετηθεί η επίδραση των όρων τρίτης τάξης στην διακλάδωση σάγματος - κόμβου.

Λύση:

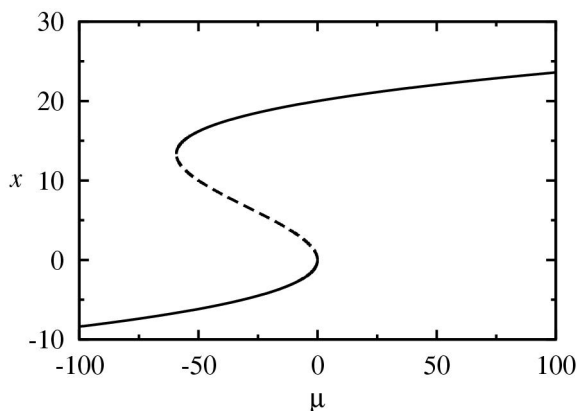
Θα πρέπει να μελετηθεί η παρακάτω περίπτωση,

$$\dot{x} = \mu + x^2 + ax^3 \quad (4.107)$$

Οι στατικές καταστάσεις του συστήματος αυτού είναι,

$$\mu = -\bar{x}^2 - a\bar{x}^3 \quad (4.108)$$

Παρατηρούμε ότι οι στατικές καταστάσεις παρίστανται από μία καμπύλη τύπου-S, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.8. Οι ιδιοτιμές της Εξ. (4.107) είναι $\lambda = \bar{x}(3a\bar{x} + 2)$ οπότε αναμένεται μία διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων και μία επιπλέον διακλάδωση σάγματος - κόμβου στο σημείο $(\bar{x}, \mu) = (-\frac{2}{3a}, -\frac{4}{27a^2})$. Άρα, για άλλη μία φορά, η διακλάδωση σάγματος - κόμβου στην αρχή των αξόνων



Σχήμα 4.8: Διακλάδωση σάγματος - κόμβου για την Εξ. (4.107) για $a = -0.05$ και $\beta = 1$.

παραμένει ποιοτικά αναλλοίωτη υπό την επίδραση όρων ανώτερης τάξης. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως ότι αν θεωρήσουμε την ολική συμπεριφορά του συστήματος παρατηρούμε ότι οι όροι ανώτερης τάξης εισάγουν μία υστέρηση στο διάγραμμα διακλάδωσης.

Παράδειγμα 4.6 Να μελετηθεί η επίδραση μίας σταθερής διαταραχής στην υπερκρίσιμη διακλάδωση.

Λύση:

Στη γενική περίπτωση, αν εισαγάγουμε ένα σταθερό όρο στην υπερκρίσιμη διακλάδωση προκύπτει,

$$\dot{x} = \varepsilon + \mu x + \beta x^2. \quad (4.109)$$

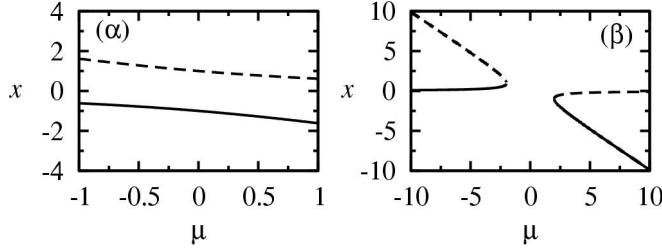
Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $\beta = -1$. Οι στατικές καταστάσεις δίνονται από τη σχέση,

$$\bar{x} = \frac{\mu}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 + 4\varepsilon},$$

και οι ιδιοτιμές από τη σχέση,

$$\lambda = -2\bar{x} + \mu = \pm \sqrt{\mu^2 + 4\varepsilon}.$$

Προφανώς, όταν $\varepsilon > 0$, οι ιδιοτιμές δεν μπορούν να είναι μηδέν, οπότε η διακλάδωση στην αρχή των αξόνων έχει εξαλειφθεί εντελώς υπό την επίδραση μίας



Σχήμα 4.9: Διαταραγμένη υπερκρίσιμη διακλάδωση για $\beta = -1$ και (α) $\varepsilon > 0$, (β) $\varepsilon < 0$.

σταθερής διαταραχής. Ένας κλάδος στατικών καταστάσεων είναι ευσταθής και ένας άλλος κλάδος ασταθής για κάθε τιμή του μ .

Όταν $\varepsilon < 0$, πραγματικές στατικές καταστάσεις υπάρχουν μόνο στην περιοχή $\mu > 2\sqrt{-\varepsilon}$ και $\mu < -2\sqrt{-\varepsilon}$. Στα σημεία $\mu = \pm 2\sqrt{-\varepsilon}$ η ιδιοτιμή γίνεται ίση με το μηδέν, και δύο διακλαδώσεις σάγματος - κόμβου λαμβάνουν χώρα. Άρα, η υπερκρίσιμη διακλάδωση έχει εξαλειφθεί εντελώς, ανεξάρτητα πόσο μικρή είναι η τιμή του ε . Οι περιπτώσεις αυτές παρουσιάζονται στο Σχ. 4.9. Λόγω αυτής της ‘ευαισθησίας’ της υπερκρίσιμης διακλάδωσης σε διαταραχές, είναι μάλλον απίθανο να παρατηρηθεί μία υπερκρίσιμη διακλάδωση σε πραγματικά (φυσικά) συστήματα υπό πειραματικές συνθήκες όπου του σύστημα βρίσκεται υπό την επίδραση τυχαίων διαταραχών.

Παράδειγμα 4.7 Να μελετηθεί η επίδραση διαταραχών χαμηλής τάξης στην διχαλωτή διακλάδωση.

Λύση:

Για να διερευνηθεί η επίδραση όρων χαμηλής τάξης στη διχαλωτή διακλάδωση θα πρέπει να διερευνήσουμε την Εξ. (4.46). Αυτή η εξίσωση είναι μία εξίσωση τρίτης τάξης και αρχικά θα παρουσιάσουμε μία γενική σχέση που αποτελεί λύση εξισώσεων τρίτης τάξης.

Ας ξεκινήσουμε με μία γενική εξίσωση τρίτης τάξης,

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0.$$

Τώρα, έστω

$$\begin{aligned} y &= x - \frac{p}{3} \\ a &= \frac{1}{3}(3q - p^2) \\ b &= -\frac{1}{27}(2p^3 - 9pq + 27r) \end{aligned}$$

Υπό αυτόν τον μετασχηματισμό προκύπτει,

$$x^3 + ax + b = 0. \quad (4.110)$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \\ B &= \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \end{aligned}$$

οι λύσεις είναι,

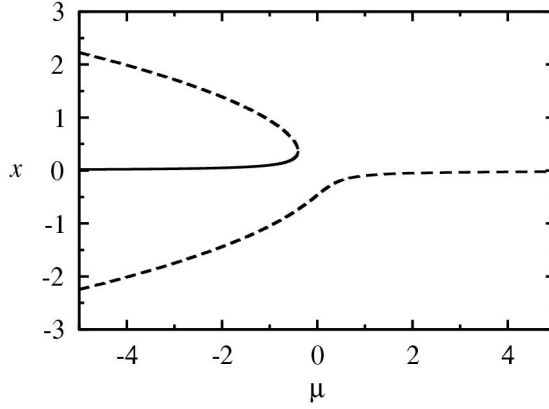
$$\begin{aligned} x_1 &= A + B, \\ x_2 &= -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}, \\ x_3 &= -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Η Εξ. (4.46) είναι ήδη στη μορφή της Εξ. (4.110) όπου τα στατικά σημεία είναι λύσεις της εξίσωσης,

$$\beta \bar{x}^3 + \mu \bar{x} + \varepsilon = 0.$$

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση $\beta = 1$. Άρα, $a = \mu$ και $b = \varepsilon$ στην Εξ. (4.110). Αν σχηματίσουμε το διάγραμμα των *πραγματικών* λύσεων της Εξ. (4.46) προκύπτει το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχ. 4.10. Είναι φανερό ότι η διχλωτή διακλάδωση εξαφανίζεται, μία νέα διακλάδωση σάγματος - κόμβου προκύπτει καθώς επίσης και ένας επιπλέον κλάδος στατικών καταστάσεων.

Παράδειγμα 4.8 Αποδείξτε ότι η περιοδική τροχιά που προκύπτει μέσω μίας διακλάδωσης Hopf είναι ένας οριακός κύκλος (Βοήθεια: χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες).



Σχήμα 4.10: Διαταραγμένη διχαλωτή διακλάδωση της Εξ. (4.46) για $\varepsilon = 1$ και $\beta = 1$.

Λύση: Ας ακολουθήσουμε τη βοήθεια που προτείνει η άσκηση και ας χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για την κανονική μορφή της διακλάδωσης Hopf, Εξ (4.81),

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \mu r + ar^3, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega + br^2.\end{aligned}\tag{4.112}$$

Εφόσον η πρώτη εξίσωση στην Εξ. (4.112) είναι ασύζευκτη από τη δεύτερη, ας ξεκινήσουμε λύνοντας αυτή τη σχέση. Η σχέση αυτή γράφεται,

$$\int \frac{dr}{(\mu + ar^2)r} = t + c,$$

όπου c είναι η σταθερή ολοκλήρωσης. Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε,

$$\frac{1}{(\mu + ar^2)r} = \frac{Br + C}{\mu + ar^2} + \frac{A}{r}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές όρων ίσης τάξης του r έχουμε, $A = 1/\mu$, $B = -a/\mu$ και $C = 0$. Άρα, προκύπτει η παρακάτω σχέση,

$$\frac{1}{\mu} \int \frac{1}{r} dr - \frac{a}{\mu} \int \frac{r}{\mu + ar^2} dr = t + c.$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα. Προκύπτει,

$$\frac{1}{\mu} \ln r - \frac{1}{2\mu} \ln(\mu + ar^2) = t + c.$$

Για να βρούμε τη σταθερά της ολοκλήρωσης c , ας θέσουμε $r(t = 0) = r_0$. Έτσι προκύπτει,

$$c = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{r_0^2}{\mu + ar_0^2} \right).$$

Μετά από πράξεις έχουμε,

$$r(t) = \left[-\frac{a}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{a}{\mu} \right) \exp(-2\mu t) \right]^{-1/2}. \quad (4.113)$$

Αν $\mu > 0$ τότε από την Εξ. (4.113) προκύπτει,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \sqrt{\frac{-\mu}{a}},$$

άρα το a πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός και η περιοδική τροχιά είναι ένας ευσταθής οριακός κύκλος.

Αν $\mu < 0$ τότε,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \sqrt{\frac{-\mu}{a}},$$

άρα το a πρέπει να είναι θετικός αριθμός και η περιοδική τροχιά είναι ένας ασταθής οριακός κύκλος.

Για τη δεύτερη εξίσωση στην Εξ. (4.112) έχουμε,

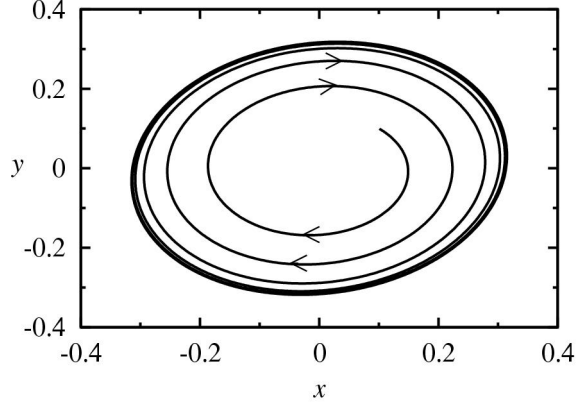
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - b\frac{\mu}{a}.$$

Άρα, προκύπτει,

$$\theta(t) = \left(\omega - \frac{b}{a}\mu \right) t + \theta_0. \quad (4.114)$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το $\theta(t)$ δεν είναι ποτέ μηδέν αφού το ω είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του μ . Ο ευσταθής οριακός κύκλος της διακλάδωσης Hopf για $a < 0$ και $\mu > 0$ παρουσιάζεται στο Σχ. 4.11.

Παράδειγμα 4.9 Να μελετηθεί η επίδραση των όρων πέμπτης τάξης στην υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf.



Σχήμα 4.11: Ο ευσταθής οριακός κύκλος της διακλάδωσης Hopf για $a < 0$ και $\mu > 0$.

Λύση: Η κανονική μορφή της υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf είναι,

$$\dot{r} = \mu r + ar^3 + br^5 \quad (4.115)$$

όπου $a > 0$. Οι στατικές καταστάσεις του συστήματος υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $f(\bar{r}(\mu), \mu) = 0$, συνεπώς,

$$\bar{r} = 0 \quad (4.116)$$

$$\mu + a\bar{r}^2 + b\bar{r}^4 = 0 \quad (4.117)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση $\mu = -b\bar{r}^4 - a\bar{r}^2$ μπορούν να υπολογιστούν τα ακρότατα,

$$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{r}} = -\bar{r}(4b\bar{r}^2 + 2a) = 0$$

συνεπώς τα ακρότατα είναι,

$$\bar{r} = 0 \quad (4.118)$$

$$\bar{r} = \pm \sqrt{-\frac{a}{2b}} \quad (4.119)$$

όπου το ακρότατο με αρνητικό πρόσημο δεν έχει φυσική σημασία (η ακτίνα r δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός). Επίσης, παρατηρούμε ότι εφόσον $a > 0$ τότε

θα πρέπει $b < 0$. Από τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $\mu(\bar{r})$, προκύπτει,

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{r}^2} = -12b\bar{r}^2 - 2a$$

Η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $\frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{r}^2} = -2a < 0$ για $\bar{r} = 0$, συνεπώς στο σημείο $\bar{r} = 0$ η συνάρτηση εμφανίζει μέγιστο. Επίσης, η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με $\frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{r}^2} = 4a > 0$ για $\bar{r} = \sqrt{-a/2b}$, συνεπώς στο σημείο $\bar{r} = \sqrt{-a/2b}$ η συνάρτηση εμφανίζει ελάχιστο. Η τιμή του μ στο ελάχιστο $\bar{r} = \sqrt{-a/2b}$ είναι $\mu = \frac{a^2}{4b}$.

Η ευστάθεια των στατικών καταστάσεων μπορεί να προσδιορισθεί από την εξίσωση $f(\bar{r}(\mu), \mu) = 0$. Διαφορίζοντας και τα δύο σκέλη ως προς την παράμετρο μ προκύπτει,

$$\frac{df(\bar{r}(\mu), \mu)}{d\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

συνεπώς,

$$\lambda \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \mu}}{\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu}} = -\frac{\bar{r}}{\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu}} \quad (4.120)$$

Δεδομένου ότι $\bar{r} > 0$, προκύπτει ότι $\lambda < 0$ όταν $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu} > 0$. Δηλαδή, οι στατικές καταστάσεις είναι ευσταθείς όταν η κλίση της συνάρτησης $\bar{r}(\mu)$ είναι θετική. Επίσης, $\lambda > 0$ όταν $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \mu} < 0$. Δηλαδή, οι στατικές καταστάσεις είναι ασταθείς όταν η κλίση της συνάρτησης $\bar{r}(\mu)$ είναι αρνητική. Προφανώς, στο ακρότατο $(\bar{r}, \mu) = (\sqrt{-a/2b}, a^2/4b)$ έχουμε αλλαγή της ευστάθειας, δηλαδή παρατηρείται διακλάδωση. Η διακλάδωση αυτή είναι μία διακλάδωση σάγματος-κόμβου για περιοδικές τροχιές. Στο σημείο διακλάδωσης ένας ευσταθής και ένας ασταθής οριακός κύκλος συνενώνονται και εξαφανίζονται.

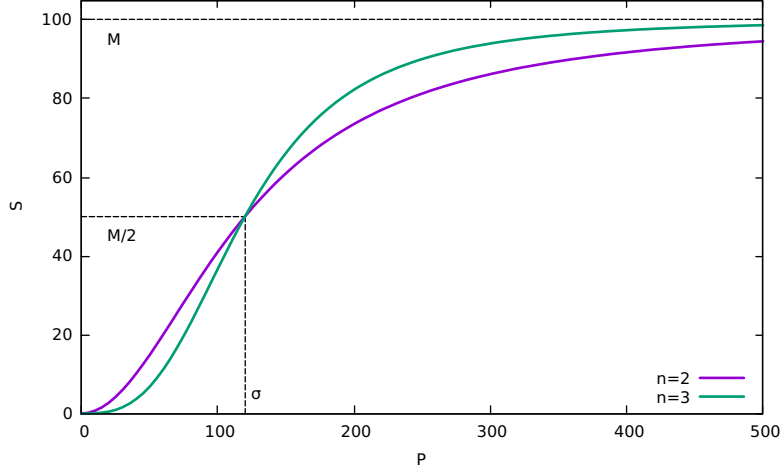
Αν θεωρήσουμε τόσο την μ όσο και την a ως παραμέτρους διακλάδωσης, τότε διαπιστώνουμε ότι,

Όταν $\mu = 0$ συμβαίνει διακλάδωση Hopf

Όταν $\mu = \frac{a^2}{4b}$ συμβαίνει διακλάδωση σάγματος - κόμβου περιοδικών τροχιών

Παράδειγμα 4.10 Να μελετηθεί η δυνατότητα μόμιμης μνήμης ενός δικτύου δύο πανομοιότυπων νευρώνων που επικοινωνούν διεγερτικά μέσω συναρτήσεων Naka-Rushton.

Λύση:



Σχήμα 4.12: Συνάρτηση Naka-Rushton για $M = 100$, $\sigma = 120$ και δύο διαφορετικές τιμές του παράγοντα N .

Η συνάρτηση Naka-Rushton είναι της μορφής,

$$S(P) = \begin{cases} \frac{MP^N}{\sigma^N + P^N} & \text{όταν } P \geq 0 \\ 0 & \text{όταν } P < 0 \end{cases} \quad (4.121)$$

όπου S είναι ο ρυθμός παλμών (spike rate) με μονάδες παλμοί ανά μονάδα χρόνου και P η ένταση της διέγερσης. Για πολύ μεγάλη ένταση διέγερσης, δηλαδή όταν $P \gg \sigma$ παρατηρούμε ότι $S(P) \approx M$. Συνεπώς η φυσική σημασία του παράγοντα M είναι ο μέγιστος ρυθμός παλμών του νευρώνα. Επίσης, παρατηρούμε ότι όταν $\sigma = P$, ο ρυθμός παλμών του νευρώνα είναι ίσος με $M/2$. Δηλαδή η φυσική σημασία του παράγοντα σ είναι η τιμή της έντασης της διέγερσης όπου ο νευρώνας ταλαντώνεται με ρυθμό ίσο με τον μισό του μεγίστου.

Η επίδραση του παράγοντα N φαίνεται στο Σχ. 4.12. Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας αυτός δεν μεταβάλλει τη φυσική σημασία των παραγόντων σ και M αλλά μεταβάλλει την εξάρτηση του ρυθμού ταλαντώσεων από την ένταση της διέγερσης.

Τέλος, να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση Naka-Rushton μπορεί να γραφεί και με τη μορφή,

$$S(P) = \theta(P) \frac{MP^N}{\sigma^N + P^N}$$

όπου $\theta(P)$ η συνάρτηση Heaviside.

Το πιο απλό μοντέλο που μπορούμε να θεωρήσουμε για ένα νευρώνα είναι το εξής,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\tau}E \quad (4.122)$$

όπου και πάλι η δυναμική μεταβλητή E παριστάνει τη συνότητα παλμών. Η χρονική εξέλιξη της συχνότητας παλμών για έναν τέτοιο νευρώνα είναι απλά,

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (4.123)$$

όπου E_0 η αρχική συχνότητα παλμών του νευρώνα, βλ. Σχ. 4.13 (πάνω).

Εφόσον ο νευρώνας διεγείρεται μέσω μίας συνάρτησης Naka-Rushton, η δυναμική του θα περιγράφεται από τη σχέση,

$$\tau \frac{dE}{dt} = -E + S(P) \quad (4.124)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι,

$$E(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}} S(P(s)) ds$$

Αν η διέγερση P δεν εξαρτάται από τον χρόνο, τότε για ένα νευρώνα που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία, τότε χρονική εξέλιξη της συχνότητας παλμών θα είναι,

$$E(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) S(P)$$

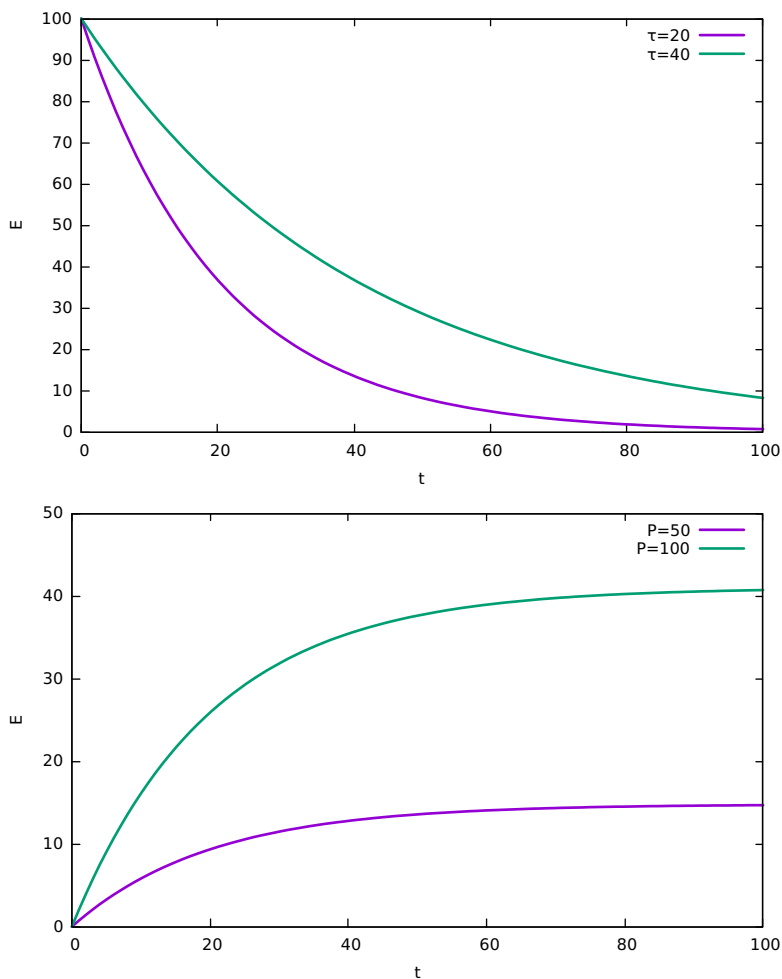
Η περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο Σχ. 4.13 (κάτω).

Ας θεωρήσουμε ένα δίκτυο δύο πανομοιότυπων νευρώνων όπου ο ένας διεγείρει τον άλλο μέσω συναρτήσεων Naka-Rushton. Το δίκτυο θα περιγράφεται από το σύστημα,

$$\begin{aligned} \tau \frac{dE_1}{dt} &= -E_1 + S(\alpha E_2) \\ \tau \frac{dE_2}{dt} &= -E_2 + S(\alpha E_1) \end{aligned} \quad (4.125)$$

όπου α η ισχύς της σύζευξης μεταξύ των δύο νευρώνων.

Οι στατικές καταστάσεις του δικτύου μπορούν να βρεθούν από τις ισοκλινείς, $E_1 = S(\alpha E_2)$ και $E_2 = S(\alpha E_1)$. Στο Σχ. (4.14) (πάνω) παρουσιάζονται οι ισοκλινείς για $\sigma = 120$. Παρατηρούμε ότι το δίκτυο έχει τρεις στατικές καταστάσεις, μία



Σχήμα 4.13: Πάνω: Χρονική εξέλιξη της συχνότητας παλμών ενός νευρώνα για αρχική συχνότητα παλμών $E_0 = 100$ δύο διαφορετικές τιμές χρονικών σταθερών τ . Κάτω: Χρονική εξέλιξη της συχνότητας των παλμών υπό σταθερή διέγερση P και $\sigma = 120$, $M = 100$, $\tau = 20$, $N = 2$.

στο σημείο (0,0), όπου και οι δύο νευρώνες βρίσκονται σε ηρεμία, μία στο σημείο (20,20) και μία τρίτη στο σημείο (80,80). Η ανάλυση ευστάθειας των στατικών καταστάσεων δείχνει ότι η πρώτη και η τρίτη είναι ευσταθείς κόμβοι ενώ η δεύτερη είναι (ασταθής) σαγματικό σημείο.

Στο Σχ. (4.14) (κάτω) παρουσιάζονται οι ισοκλινείς για $\sigma = 180$. Παρατηρούμε ότι το δίκτυο έχει μία στατική κατάσταση, στο σημείο (0,0), η οποία είναι ευσταθής κόμβος. Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι ο παράγοντας σ μπορεί να μεταβάλλει το πλήθος των στατικών καταστάσεων.

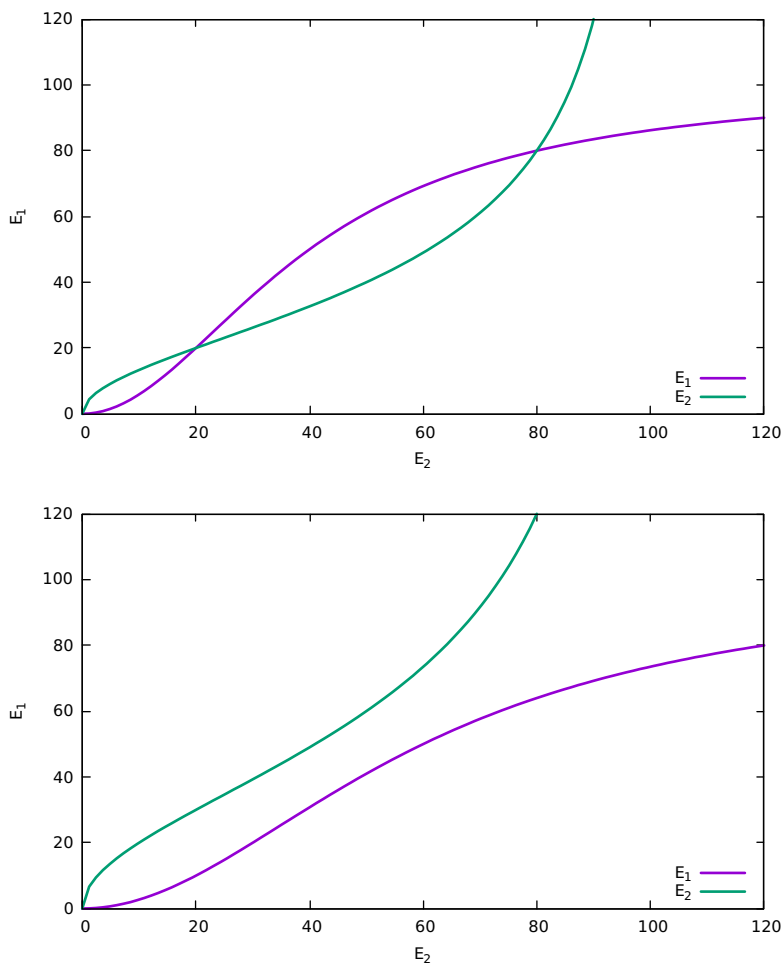
Ως το σημείο αυτό θεωρήθηκε ότι οι νευρώνες επικοινωνούν μεταξύ τους, αλλά δεν δέχονται εξωτερικό ερέθισμα. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι και οι δύο νευρώνες δέχονται ένα σταθερό ερέθισμα K το οποίο και πάλι επιρρεάζει τους νευρώνες μέσω της συνάρτησης Naka-Rushton. Η δυναμική του δικτύου θα καθορίζεται από το παρακάτω σύστημα,

$$\begin{aligned}\tau \frac{dE_1}{dt} &= -E_1 + S(\alpha E_2 + K) \\ \tau \frac{dE_2}{dt} &= -E_2 + S(\alpha E_1 + K)\end{aligned}\tag{4.126}$$

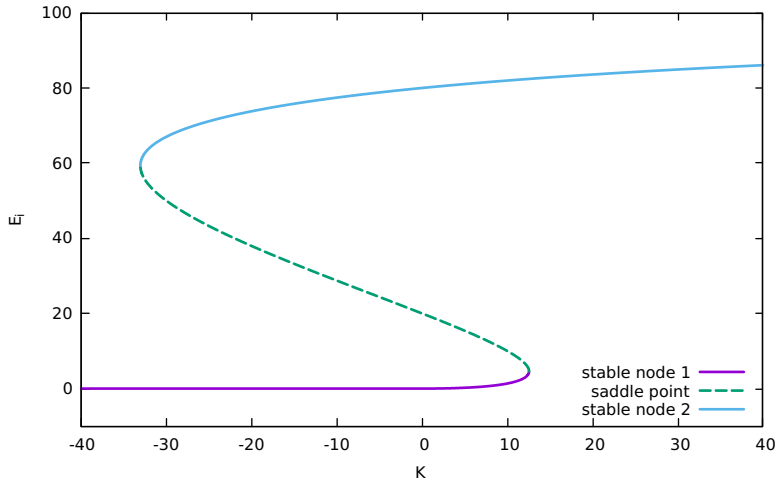
Αν θεωρήσουμε την ισχύ της εξωτερικής διέγερσης K ως παράμετρο διακλάδωσης του συστήματος, τότε προκύπτει το διάγραμμα του Σχ. 4.15. Παρατηρούμε ότι για αρνητικές τιμές της παραμέτρου, το δίκτυο έχει μία στατική κατάσταση (0,0) όπου και οι δύο νευρώνες είναι σε ηρεμία. Στο πεδίο τιμών από -33.05 έως 12.55 συνυπάρχουν δύο ευσταθείς στατικές καταστάσεις ενώ για πολύ θετικές τιμές της K υπάρχει μόνο μία ευσταθής κατάσταση όπου και οι δύο νευρώνες είναι ενεργοί. Τα σημεία -33.05 και 12.55 είναι σημεία διακλάδωσης τύπου σάγματος - κόμβου. Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι το δίκτυο παρουσία εξωτερικής διέγερσης εμφανίζει διπλή ευστάθεια και υστέρηση.

Ας δούμε αν το δίκτυο αυτό μπορεί να απομνημονεύσει μόνιμα μία πληροφορία ως μία κατάσταση όπου και οι δύο νευρώνες είναι ενεργοί, βλ. Σχ. 4.16. Αρχικά, το δίκτυο βρίσκεται σε ηρεμία, δηλαδή η συχνότητα παλμών των δύο νευρώνων είναι μηδενική. Το εξωτερικό ερέθισμα αυξάνεται σταδιακά (πράσινη καμπύλη) και ως αποτέλεσμα αυξάνεται και η συχνότητα παλμών των δύο νευρώνων. Τη χρονική στιγμή το εξωτερικό ερέθισμα μηδενίζεται ($K = 0$). Παρατηρούμε ότι το δίκτυο παραμένει ενεργό, *απουσία του εξωτερικού ερεθίσματος*.

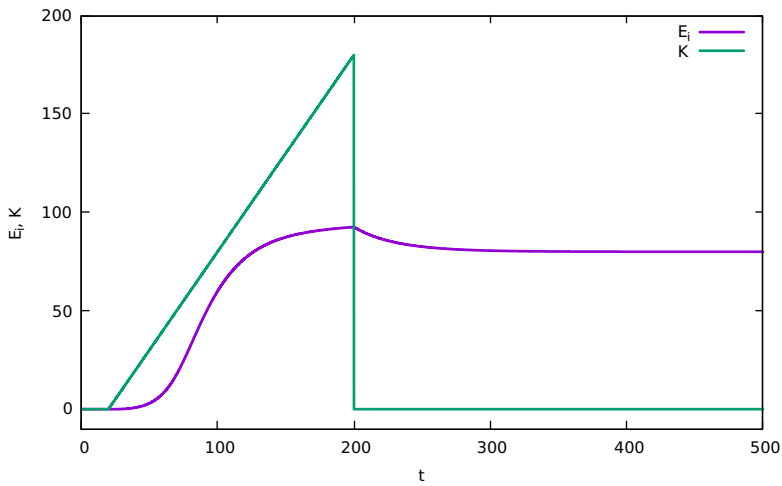
Αυτό που έχει συμβεί είναι το εξής: Καθώς αυξάνει η τιμή της K το δίκτυο μεταβαίνει από την κατάσταση ηρεμίας στην ενεργή κατάσταση μέσω της διακλάδωσης σάγματος - κόμβου στην τιμή 12.55. Όταν παύσει το εξωτερικό ερέθισμα, το δίκτυο δεν μεταβαίνει στην κατάσταση ηρεμίας αλλά παραμένει στην ενεργή



Σχήμα 4.14: Ισοκλινείς του δικτύου δύο νευρώνων με αμοιβαία διέγερση για $\sigma = 120$ (πάνω) και $\sigma = 180$ (κάτω). Υπόλοιπες σταθερές, $M = 100$, $\tau = 20$, $\alpha = 3$, $N = 2$.



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα διακλάδωσης του δικτύου δύο νευρώνων με εξωτερικό ερέθισμα ισχύος K . Παράμετροι: $\sigma = 120$, $M = 100$, $\tau = 20$, $\alpha = 3$, $N = 2$.



Σχήμα 4.16: Μόνιμη απομνημόνευση του δικτύου δύο νευρώνων με εξωτερικό ερέθισμα ισχύος K . Παράμετροι: $\sigma = 120$, $M = 100$, $\tau = 20$, $\alpha = 3$, $N = 2$.

κατάσταση που αντιστοιχεί στον άνω κλάδο του διαγράμματος διακλάδωσης για $K = 0$.

Η κατάσταση στην οποία καταλήγει το δίκτυο θα παραμείνει αμετάβλητη στο χρόνο, συνεπώς η πληροφορία έχει μείνει μόνιμα καταγεγραμμένη σε αυτό. Για να 'σβήσει' η πληροφορία θα πρέπει το δίκτυο να δεχθεί ένα αρνητικό ερέθισμα έτσι ώστε το σύστημα να μεταβεί στην κατάσταση ηρεμίας μέσω της δεύτερης διακλάδωσης σάγματος - κόμβου που παρατηρείται στο σημείο -33.05.

Παράδειγμα 4.11 *Να μελετηθεί η δυνατότητα μνήμης μικρής διάρκειας ενός δικτύου δύο πανομοιότυπων νευρώνων που επικοινωνούν διεγερτικά μέσω συναρτήσεων Naka-Rushton.*

Λύση:

Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι ένα απλό δίκτυο δύο νευρώνων μπορεί να αποθηκεύσει μόνιμα μία πληροφορία. Συχνά, όμως, στα έμβια όντα, η πληροφορία δεν απομνημονεύεται για πάντα αλλά για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα.

Για να τροποποιήσουμε το σύστημα ώστε να φέρεται ως μνήμη μικρής διάρκειας, παρατηρούμε ότι ο παράγοντας σ καθορίζει αν το σύστημα έχει μία ή δύο ευσταθείς στατικές καταστάσεις (βλ. προηγούμενο παράδειγμα). Συνεπώς, αν ο παράγοντας αυτό μεταβάλλεται (αυξάνεται) αργά με τον χρόνο, τότε το δίκτυο δεν θα παραμένει για πάντα στην ενεργή κατάσταση αλλά θα μεταβαίνει προς την κατάσταση ηρεμίας. Το προτεινόμενο μοντέλο είναι, λοιπόν, το εξής,

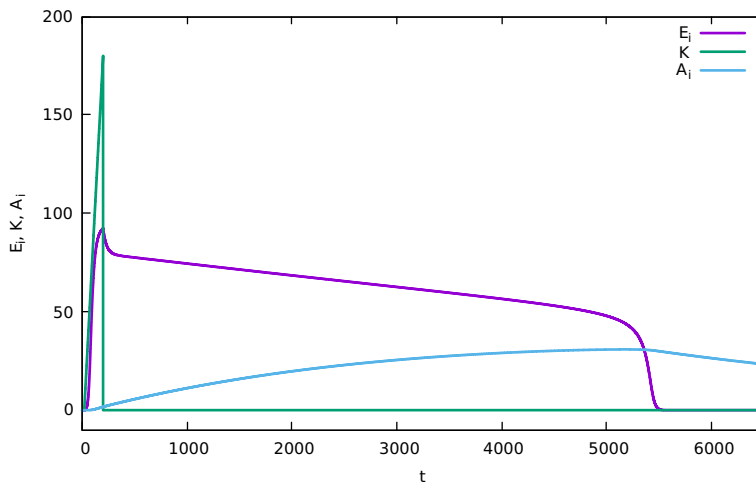
$$\begin{aligned}\tau \frac{dE_1}{dt} &= -E_1 + S(\alpha E_2 + K) \\ \tau \frac{dE_2}{dt} &= -E_2 + S(\alpha E_1 + K) \\ \tau_a \frac{dA_1}{dt} &= -A_1 + \beta E_1 \\ \tau_a \frac{dA_2}{dt} &= -A_2 + \beta E_2\end{aligned}\tag{4.127}$$

όπου, τώρα, η συνάρτηση Naka-Rushton είναι η εξής,

$$S(E_i, A_j) = \frac{M(\alpha E_i + K)^2}{(\sigma + A_i)^2 + (\alpha E_i + K)^2}\tag{4.128}$$

όπου $i = 1$ όταν $j = 2$ και $i = 2$ όταν $j = 1$.

Στο Σχ. 4.17 παρουσιάζεται η εξέλιξη του δικτύου υπό την επίδραση του εξωτερικού ερεθίσματος K . Τη χρονική στιγμή $t = 200$, το εξωτερικό ερέθισμα



Σχήμα 4.17: Απομνημόνευση μικρής διάρκειας του δικτύου δύο νευρώνων με εξωτερικό ερέθισμα ισχύος K . Παράμετροι: $\sigma = 120$, $M = 100$, $\tau = 20$, $\alpha = 3$, $N = 2$, $\tau_a = 4000$, $\beta = 0.7$.

παύει. Ως αποτέλεσμα, το δίκτυο παραμένει ενεργό για 5500 ms περίπου. Μετά από αυτό το διάστημα, το δίκτυο επιστρέφει στην κατάσταση ηρεμίας όπου η απομνημονευμένη πληροφορία έχει χαθεί.

Παράδειγμα 4.12 *Να μελετηθεί η δυνατότητα λήψης απόφασης ενός δικτύου δύο πανομοιότυπων νευρώνων που επικοινωνούν παρεμποδιστικά μέσω συναρτήσεων Naka-Rushton.*

Λύση:

Ας θεωρήσουμε το δίκτυο,

$$\begin{aligned}\tau \frac{dE_1}{dt} &= -E_1 + S(-\alpha E_2 + K_1) \\ \tau \frac{dE_2}{dt} &= -E_2 + S(-\alpha E_1 + K_2)\end{aligned}\tag{4.129}$$

όπου οι δύο νευρώνες είναι συζευγμένοι παρεμποδιστικά και δέχονται ένα εξωτερικό ερέθισμα K_i . Θέλουμε το δίκτυο να αποφασίζει βάσει των σχετικών εντάσεων των εξωτερικών ερεθισμάτων. Ειδικότερα, αν $K_1 > K_2$ ο νευρώνας (1) θα πρέπει να είναι ενεργός και ο (2) σε πλήρη ηρεμία ενώ αν $K_2 > K_1$ ο νευρώνας (2) θα πρέπει να είναι ενεργός και ο (1) σε πλήρη ηρεμία.

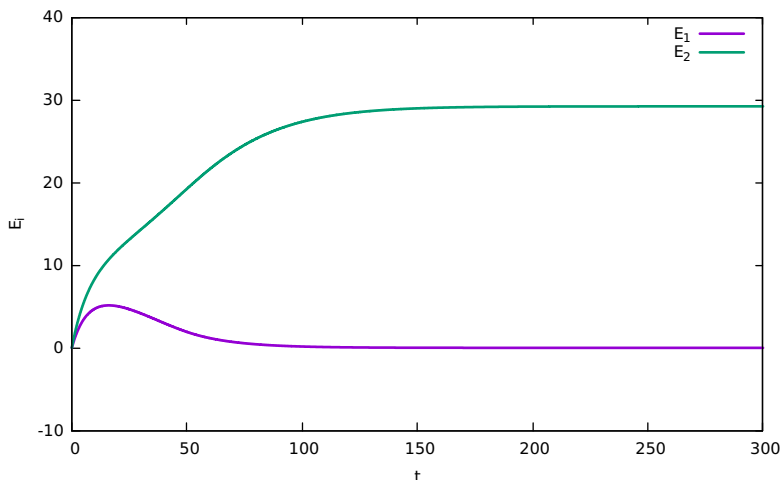
Στο Σχ. 4.18 παρουσιάζεται η περίπτωση όπου ο νευρώνας (1) δέχεται ερέθισμα $K_1 = 60$ και ο νευρώνας (2) ερέθισμα $K_2 = 65$. Παρατηρούμε ότι ο δίκτυο λαμβάνει την απόφαση ο (2) να είναι ενεργός ενώ ο (1) να βρίσκεται σε πλήρη ηρεμία. Το δίκτυο είναι τύπου the-winner-takes-it-all, δηλαδή άπαξ και το ένα ερέθισμα είναι μεγαλύτερο από το άλλο ο αντίστοιχος νευρώνας θα είναι ενεργός ενώ ο άλλος σε πλήρη ηρεμία.

Για να αλλάξει απόφαση το δίκτυο, θα πρέπει να δεχθεί ένα ισχυρό αντίθετο ερέθισμα, αλλιώς θα παραμείνει στην αρχική του απόφαση. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύει το γεγονός ότι έμβια όντα, και κυρίως οι άνθρωποι, αλλάζουν πολύ δύσκολα τις αρχικές τους αποφάσεις!

Παράδειγμα 4.13 *Να μελετηθεί η ευστάθεια της στατικής κατάστασης στην αρχή των αξόνων για το σύστημα,*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + ax^3 + by^2x \\ \dot{y} &= -y + cx^2 + dx^2y\end{aligned}$$

Λύση:



Σχήμα 4.18: Δικτύου δύο νευρώνων με δυνατότητα λήψης απόφασης και ερεθίσματα ισχύος $K_1 = 60$ και $K_2 = 65$. Παράμετροι: $\sigma = 120$, $M = 100$, $\tau = 20$, $\alpha = 3$, $N = 2$.

Το σύστημα έχει στατική κατάσταση την τιμή $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Από την μορφή του δυναμικού συστήματος διαπιστώνουμε ότι $A = 0$ και $B = -1$. Έστω η κεντρική πολλαπλότητα 2ου βαθμού,

$$y = h(x) = \alpha x^2 \quad (4.130)$$

Η σταθερά α θα προκύψει από την σχέση,

$$2\alpha x(0x + \alpha x^3 + ax^3 + bx\alpha^2 x^4) + \alpha x^2 - cx^2 - dx^2 \alpha x^2 = 0 \quad (4.131)$$

Εξισώνοντας όρους ίδιου βαθμού και αγνοώντας όρους βαθμού ανώτερου του δύο έχουμε,

$$(\alpha - c)x^2 = 0 \quad (4.132)$$

συνεπώς $\alpha = c$. Η κεντρική πολλαπλότητα είναι $h(x) = cx^2$. Συνεπώς, η εξίσωση που καθορίζει τη δυναμική είναι,

$$\dot{u} = uh(x) + au^3 + buh(x)^2 = (a + c)u^3 \quad (4.133)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι,

$$u(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{-2(a + c)t + u(0)^{-2}}}$$

Παρατηρούμε ότι,

- Για $(a + c) < 0$ η αρχή των αξόνων είναι ευσταθής στατική κατάσταση, βλ. Σχ. 4.19 (πάνω).
- Για $(a + c) > 0$ η αρχή των αξόνων είναι ασταθής στατική κατάσταση καθώς η λύση απειρίζεται καθώς ο χρόνος τείνει στην τιμή $1/2(a + c)u(0)^2$, βλ. Σχ. 4.19 (κάτω).
- Για $(a + c) = 0$, δεν μπορεί να προβλεφθεί η ευστάθεια του συστήματος.

Προκειμένου να προσδιορισθεί η ευστάθεια όταν $(a + c) = 0$ θεωρούμε την κεντρική πολλαπλότητα ως 3ου βαθμού,

$$h(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 \quad (4.134)$$

Οι σταθερές α και β προκύπτουν από τη σχέση,

$$(2\alpha x + 3\beta x^2)(x(\alpha x^2 + \beta x^3) + ax^3 + bx(\alpha x^2 + \beta x^3)^2) = 0$$

Αγνοώντας όρους ανώτερους του 3ου βαθμού προκύπτει,

$$(\alpha - c)x^2 + \beta x^3 = 0$$

δηλαδή $\alpha = c$ και $\beta = 0$. Δηλαδή προκύπτει η ίδια πολλαπλότητα με την προηγούμενη περίπτωση $h(x) = cx^2$, οπότε δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια.

Ας θεωρήσουμε μία πολλαπλότητα ως τετάρτου βαθμού,

$$h(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 \quad (4.135)$$

Αγνοώντας όρους ανώτερους του 4ου βαθμού, οι σταθερές προκύπτουν από τη σχέση,

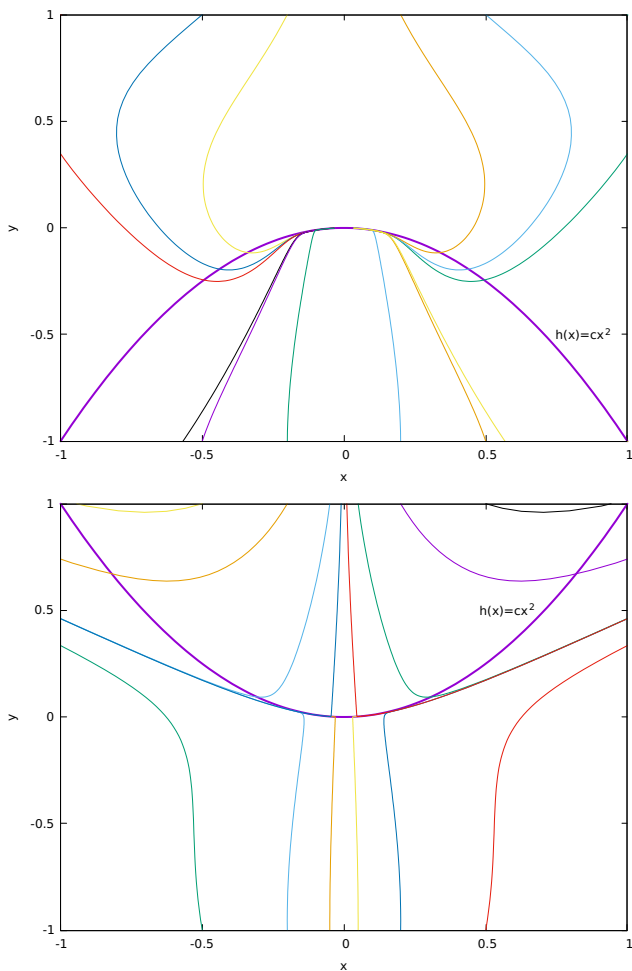
$$(2\alpha^2 + 2\alpha x + \gamma + \alpha a)x^4 + \beta x^3 + (a - c)x^2 = 0 \quad (4.136)$$

Συνεπώς $\beta = 0$ και $a = c$. Η σχέση, λοιπόν, γίνεται,

$$2c(a + c) + \gamma + cd = 0 \quad (4.137)$$

Δεδομένου ότι $(a + c) = 0$, έχουμε $\gamma = -cd$. Άρα, η κεντρική πολλαπλότητα είναι,

$$h(x) = cx^2 + cd x^4 \quad (4.138)$$



Σχήμα 4.19: Η κεντρική πολλαπλότητα και οι τροχιές που συγχλίνουν προς την αρχή των αξόνων για $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$ και $d = 1$ (πάνω) και που αποκλίνουν από την αρχή των αξόνων για $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ και $d = 1$ (κάτω).

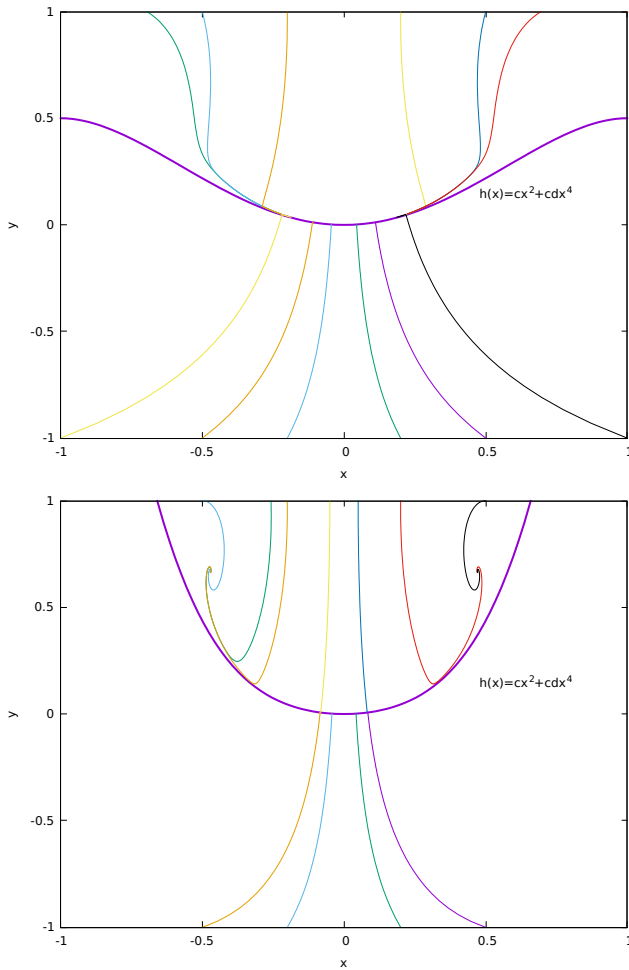
Η εξίσωση που καθορίζει τη δυναμική είναι,

$$\dot{u} = uh(u) + au^3 + buh(u) = (bc^2 + cd)u^5 \quad (4.139)$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι $(a + c) = 0$.

Παρατηρούμε ότι, όταν $(a + c) = 0$,

- Για $(cd + bc^2) < 0$ η αρχή των αξόνων είναι ευσταθής, βλ. Σχ. 4.20 (πάνω).
- Για $(cd + bc^2) > 0$ η αρχή των αξόνων είναι ασταθής, βλ. Σχ. 4.20 (κάτω).
- Για $(cd + bc^2) = 0$ απαιτείται προσέγγιση ανώτερου βαθμού.



Σχήμα 4.20: Η κεντρική πολλαπλότητα και οι τροχιές που συγχλίνουν προς την αρχή των αξόνων για $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ και $d = 0.5$ (πάνω) και που αποκλίνουν από την αρχή των αξόνων για $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ και $d = 3$ (κάτω).

Κεφάλαιο 5

Συζευγμένοι Ταλαντωτές

5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Ας υποτεθεί ότι ένα σύστημα αποτελείται από n ταλαντωτές. Κάθε (ασύζευκτος) ταλαντωτής έχει έναν οριακό κύκλο με περίοδο 2π . Ας θεωρηθεί ότι οι ταλαντωτές αυτοί αλληλεπιδρούν ασθενώς μεταξύ τους. Λόγω της αλληλεπίδρασης ή σύζευξης η φάση των ταλαντωτών αλλάζει. Επίσης, η μεταβολή της φάσης συνοδεύεται από μικρή μεβαβολή της έντασης των ταλαντώσεων. Θα θέλαμε να γνωρίζουμε αν οι ταλαντωτές θα συγχρονιστούν, να υπολογιστεί τη διαφορά φάσης τους και να καθορισθεί η ευστάθεια.

Προκειμένου να διερευνηθεί το παραπάνω πρόβλημα είναι χρήσιμοι οι παρακάτω ορισμοί [Hoppensteadt and Izhikevich, 1997]:

Ορισμός 5.1 Έστω δύο συζευγμένοι ταλαντωτές με φάσεις $\theta_1(t), \theta_2(t) \in [0, 2\pi]$. Η κατάσταση των ταλαντωτών καλείται κλειδωμένης συχνότητας (*frequency locking*) τύπου $p : q$ αν η φάση $\theta_1(t)$ εκτελεί p περιστροφές ενώ η φάση $\theta_2(t)$ εκτελεί q περιστροφές στο χώρο $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, όπου p/q είναι ένας συμμετρικός αριθμός.

Ορισμός 5.2 Έστω δύο συζευγμένοι ταλαντωτές με φάσεις $\theta_1(t), \theta_2(t) \in [0, 2\pi]$ οι οποίοι βρίσκονται σε κατάσταση κλειδωμένης συχνότητας $p : q$. Η κατάσταση των ταλαντωτών καλείται κλειδωμένη φάσης (*phase locked*) αν $q\theta_1(t) - p\theta_2(t) = \text{const}$.

Ο ορισμός της κλειδωμένης φάσης συνεπάγεται ότι η κλίση των τροχιών στο χώρο $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ θα είναι q/p , δηλ. $\theta_2(t)/\theta_1(t) = q/p$.

5.2 Ασθενής σύζευξη

Το θεώρημα που θα αποδειχθεί στην παράγραφο αυτή καλείται *θεώρημα Melkin* [Hoppensteadt and Izhikevich, 1997; Izhikevich, 2000]. Έστω ένα σύστημα n ασθενώς συζευμένων ταλαντωτών διάστασης m της μορφής,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \varepsilon \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

όπου $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nm}$ και $i = 1, 2, \dots, n$. Ας υποθεθεί επίσης ότι κάθε ασύζευκτος ταλαντωτής περιγράφεται από τη σχέση,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i), \quad (5.2)$$

κα έχει μία ευσταθή περιοδική λύση με περίοδο 2π , δηλ. $\tilde{\mathbf{x}}_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t + 2\pi) \in \mathbb{R}^m$. Έστω ότι $\tau = \varepsilon t$ είναι ο χρόνος και έστω $\phi_i(\tau)$ η (αργή) μεταβολή τη φάσης στο χρόνο ως προς τη φάση του ασύζευκτου ταλαντωτή $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$. Υπό αυτές τις παραδοχές, το διάνυσμα των μεταβολών φάσης $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$ είναι λύση της εξίσωσης,

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = H_i(\boldsymbol{\phi} - \phi_i, \varepsilon), \quad (5.3)$$

όπου $\boldsymbol{\phi} - \phi_i = (\phi_1 - \phi_i, \dots, \phi_n - \phi_i)^T$, $i = 1, \dots, n$ και η συνάρτηση σύζευξης δίνεται από τη σχέση,

$$H_i(\boldsymbol{\phi} - \phi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_i(t)^T \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \boldsymbol{\phi} - \phi_i)) dt, \quad (5.4)$$

όπου $\mathbf{q}_i(t) \in \mathbb{R}^m$ είναι περιοδική λύση με περίοδο 2π του γραμμικού συστήματος,

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = -D_{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i(t))^T \mathbf{q}_i, \quad (5.5)$$

που ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης,

$$\mathbf{q}_i(0)^T \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i(0)) = \mathbf{I}. \quad (5.6)$$

Απόδειξη

Έστω ότι λόγω της σύζευξης η περιοδική τροχιά διαταράσσεται και η φάση της αποκλίνει αργά από τη φάση της αδιατάρακτης τροχιάς. Εφόσον η περίοδος είναι 2π , η φάση της αδιατάρακτης τροχιάς μπορεί να ορισθεί με μέτρο τη περίοδο

αυτή, δηλαδή, $t \bmod(2\pi)$. Η εξέλιξη του i -οστού συζευγμένου ταλαντωτή που περιγράφεται από την Εξ. (5.1), μπορεί να γραφεί,

$$\mathbf{x}_i(t) = \tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i(\tau)) + \varepsilon \mathbf{p}_i(t + \phi_i(\tau), \varepsilon), \quad (5.7)$$

όπου $\phi_i(\tau)$ είναι η αποκλίσεις της φάσης και $\tau = \varepsilon t$ ο αργός χρόνος.

Διαφορίζοντας την Εξ. (5.7) ως προς τον χρόνο t προκύπτει,

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)}{d(t + \phi_i)} \left(1 + \varepsilon \frac{d\phi_i}{d\tau} \right) + \varepsilon \frac{d\mathbf{p}_i(t + \phi)}{dt}. \quad (5.8)$$

Αν αναλυθεί η συνάρτηση $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ σε μία σειρά Taylor γύρω από την περιοδική λύση $\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)$ προκύπτει,

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{x}}_i) + \dots \quad (5.9)$$

Λόγω της Εξ. (5.7), η Εξ. (5.9) γράφεται,

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \varepsilon D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{p}_i(t + \phi) + \dots, \quad (5.10)$$

οπότε η Εξ. (5.1) γράφεται ως,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \varepsilon D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{p}_i(t + \phi) + \varepsilon \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \quad (5.11)$$

Από τις Εξ. (5.8) και (5.11) προκύπτει,

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)}{d(t + \phi_i)} \left(1 + \varepsilon \frac{d\phi_i}{d\tau} \right) + \varepsilon \frac{d\mathbf{p}_i(t + \phi)}{dt} = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \varepsilon D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{p}_i(t + \phi) + \varepsilon \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \quad (5.12)$$

Εξισώνοντας όρους ίδιας τάξης του ε και σημειώνοντας ότι $\frac{d\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)}{d(t + \phi_i)} = \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i))$, προκύπτει,

$$\frac{d\mathbf{p}_i(t + \phi)}{dt} = D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \mathbf{p}_i(t + \phi) + \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \frac{d\phi_i}{d\tau}. \quad (5.13)$$

Η εξίσωση αυτή καθορίζει την εξέλιξη των διαταραχών $\mathbf{p}_i$ επί της περιοδικής τροχιάς του i -οστού συζευγμένου ταλαντωτή. Θέττοντας, $\mathbf{y}_i(t, \phi) = \mathbf{p}_i(t + \phi)$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο πίνακας $D_{\mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$ είναι ο Ιακωβιανός της Εξ. (5.2), υπολογισμένος επί της ασύζευκτης περιοδικής τροχιάς, $\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)$, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\frac{d\mathbf{y}_i(t, \phi)}{dt} = \mathbf{A}_i(t, \phi) \mathbf{y}_i(t, \phi) + \mathbf{b}_i(t, \phi), \quad (5.14)$$

όπου ο μη ομογενής όρος της εξίσωσης αυτής είναι,

$$\mathbf{b}_i(t, \phi) = \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \frac{d\phi_i}{d\tau}. \quad (5.15)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο ομογενής όρος της Εξ. (5.14), δηλαδή για $\mathbf{b}_i = 0$, είναι απλά η Εξ. (5.2), γραμμικοποιημένη γύρω από την ευσταθή ασύζευκτη τροχιά. Επίσης, εφόσον ο όρος ϕ θεωρείται ως παράμετρος λόγω της αργής μεταβολής του στο χρόνο, τόσο ο πίνακας $\mathbf{A}_i(t, \phi_i)$ όσο και το διάνυσμα $\mathbf{b}_i(t, \phi)$ έχουν περίοδο 2π στο χρόνο t (επειδή και η συνάρτηση $\tilde{\mathbf{x}}_i$ έχει περίοδο 2π).

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αποδείξουμε την *εναλλακτική του Fredholm* [Hale, 1969, 1992; Saaty, 1981]:

Θεώρημα 5.1 *Αν ο $\mathbf{A}_i(t, \phi_i)$ είναι ένας περιοδικός πίνακας με περίοδο 2π και $\mathbf{b}_i(t, \phi)$ είναι ένα περιοδικό διάνυσμα με περίοδο 2π τότε η Εξ. (5.14) έχει μία περιοδική λύση με περίοδο 2π αν και μόνο αν,*

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{q}_i^T(t, \phi_i) \mathbf{b}_i(t, \phi) dt = 0, \quad (5.16)$$

όπου $\mathbf{q}_i^T$ είναι όλες οι λύσεις της συζυγούς εξίσωσης του ομογενούς συστήματος,

$$\frac{d\mathbf{q}_i(t, \phi_i)}{dt} = -\mathbf{A}_i(t, \phi_i)^T \mathbf{q}_i(t, \phi_i). \quad (5.17)$$

Για να αποδείξουμε την εναλλακτική του Fredholm, ας θεωρήσουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (5.14). Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη μορφή,

$$L(\mathbf{y}_i) = \mathbf{b}_i(t), \quad (5.18)$$

όπου ο γραμμικός τελεστής $L(\cdot)$ ορίζεται ως,

$$L(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) - \mathbf{A}_i(\cdot),$$

στο χώρο του εσωτερικού γινομένου των περιοδικών διανυσματικών συναρτήσεων με περίοδο 2π , όπου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t) dt.$$

Για να επιδέχεται λύση η Εξ. (5.18) το διάνυσμα $\mathbf{b}_i$ πρέπει να ανήκει στο πεδίο ¹ του τελεστή L , δηλαδή,

$$\mathbf{b}_i \in R(L).$$

Το πεδίου του τελεστή L είναι ορθογώνιο με το kernel ² του συζυγούς L^* , δηλ.

$$R(L) \perp \ker(L^*).$$

Άρα, εφόσον το $\mathbf{b}_i$ ανοίγει στο $R(L)$ είναι ορθογώνιο ³ σε όλα τα διανύσματα στο χώρο $\ker(L^*)$, δηλ.

$$\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle = 0, \quad (5.19)$$

για κάθε $\mathbf{q}_i \in \ker(L^*)$,

$$L^*(\mathbf{q}_i) = 0. \quad (5.20)$$

Ας γράψουμε την αναλυτική μορφή του συζυγούς L^* . Από τον ορισμό, ο συζυγής ενός γραμμικού τελεστή L έχει την ιδιότητα,

$$\langle L^*(\mathbf{q}_i), \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{q}_i, L(\mathbf{b}_i) \rangle.$$

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική έκφραση του $L(\cdot)$ προκύπτει,

$$\langle L^*(\mathbf{q}_i), \mathbf{b}_i \rangle = \langle \mathbf{q}_i, \frac{d}{dt} \mathbf{b}_i \rangle - \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{A}_i \mathbf{b}_i \rangle,$$

ή αλλιώς,

$$\langle L^*(\mathbf{q}_i), \mathbf{b}_i \rangle = \frac{d\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle}{dt} - \langle \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}, \mathbf{b}_i \rangle - \langle \mathbf{A}_i^T \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle$$

Αλλά, λόγω τη συνθήκης ορθογωνίας $\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle = 0$ προκύπτει,

$$\langle L^*(\mathbf{q}_i), \mathbf{b}_i \rangle = -\langle \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}, \mathbf{b}_i \rangle - \langle \mathbf{A}_i^T \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle = \langle -\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} - \mathbf{A}_i^T \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle$$

Άρα, η Εξ. (5.20) γράφεται,

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} = -\mathbf{A}_i^T(t) \mathbf{q}_i(t), \quad (5.21)$$

¹Το πεδίο ενός γραμμικού τελεστή, $T : V \rightarrow W$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων στο χώρο W τα οποία είναι απεικονίσεις υπό την επίδραση του T σε τουλάχιστον ένα διάνυσμα που ανήκει στο χώρο V .

²Το kernel ενός γραμμικού τελεστή $T : V \rightarrow W$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων του V τα οποία ο T απεικονίζει στο $\mathbf{0}$.

³Απόδειξη της ορθογωνίας: Έστω $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = 0$. Τα διανύσματα $\mathbf{b}$ ορίζουν το πεδίο του $\mathbf{A}$ και τα διανύσματα $\mathbf{y}$ το kernel του $\mathbf{A}$. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτει, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} \rangle = 0$. Αλλά, λόγω του ορισμού του συζυγούς, η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με τη σχέση, $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = 0$ και τέλος $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

όπου $\mathbf{A}_i^T(t)$ είναι ο μετατεθειμένος Ιακωβιανός, υπολογισμένος επί της περιοδικής τροχιάς.

Από τη συνθήκη ορθογωνίας μπορεί να βρεθεί η αναλυτική εξάρτηση της εξέλιξης της φάσης ϕ_i . Έτσι, από τις Εξ. (5.19) και (5.15) προκύπτει,

$$\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{b}_i \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{q}_i(t) \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{q}_i(t) \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) \frac{\phi_i}{d\tau} \right) dt = 0.$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{x}_i(t)$ είναι λύση του γραμμικού ομογενούς συστήματος που σχετίζεται με την Εξ. (5.14), δηλ. $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}_i$. Είναι όμως γνωστό από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων ότι η λύση του ομογενούς και του αντίστοιχου συζυγούς συστήματος υπακούουν στη σχέση Butt, $\mathbf{q}_i(t) \mathbf{x}_i(t) = \text{const.}$ για κάθε t [Nemytskii and Stepanov, 1989; Coddington and Levinson, 1955]. Άρα, η συνθήκη κανονικοποίηση γράφεται, Της, ως σετ της νορμαλιζατιον,

$$\mathbf{q}_i(t) \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{q}_i(t) \mathbf{f}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) = 1, \quad (5.22)$$

και τελικά προκύπτει,

$$\frac{d\phi_i}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_i(t) \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i(t + \phi_i)) dt. \quad (5.23)$$

Η εξίσωση αυτή καθορίζει την εξέλιξη της απόκλισης της φάσης του i -οστού συζευγμένου ταλαντωτή ως προς τη φάση του i -οστού ασύζευκτου ταλαντωτή.

Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (5.23) θα είναι οι λύσεις συγχρονισμού του συζευγμένου συστήματος με διαφορά φάσης ίση με τη τιμή των στατικών καταστάσεων, δηλαδή, η φάση των συγχρονισμένων λύσεων θα δίνονται από την παρακάτω σχέση,

$$H_i(\phi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_i(t) \mathbf{g}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) dt = 0$$

Η ευστάθεια αυτών των στατικών καταστάσεων εξαρτάται από το πρόσημο της παραγώγου $\frac{\partial H_i}{\partial \phi_i}$ υπολογισμένης στις στατικές καταστάσεις. Αν είναι αρνητική (θετική), η συγχρονισμένη λύση θα είναι ευσταθής (ασταθής). Άρα, οι στατικές καταστάσεις της φάσης μπορούν να καθοριστούν από το σημείο που η συνάρτηση H_i ως προς ϕ_i περνά από τον άξονα των q . Η ευστάθεια καθορίζεται από τη κλίση στα σημεία αυτά.

Πρακτικά, για να υπολογιστεί η συνάρτηση $H_i(\phi_i)$, πρέπει αρχικά να λυθεί η Εξ. (5.2) ώστε να υπολογιστεί η περιοδική τροχιά του ασύζευκτου συστήματος,

$\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$. Στη συνέχεια, πρέπει να λυθεί η Εξ. (5.21), όπου ο $\mathbf{A}^T$ είναι ο μετατεθειμένο Ιακωβιανός, υπολογισμένος επί της τροχιάς $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$. Η περιοδική τροχιά για το συζυγές σύστημα, Εξ. (5.21), είναι *ασταθής*, και για το λόγο αυτό η εξίσωση αυτή θα πρέπει να ολοκληρωθεί *αντίθετα στο χρόνο*. Τέλος, η Εξ. (5.21) πρέπει να λυθεί μαζί με τη συνθήκη κανονικοποίησης, Εξ. (5.22) [Williams and Bowtell, 1997].

5.3 Οι εξισώσεις Bonhoeffer-van der Pol

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιαστούν ορισμένες τεχνικές λεπτομέρειες σχετικά με τη λύση του συζυγούς συστήματος και τον υπολογισμό της συνάρτησης σύζευξης H . Ως παράδειγμα θα χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Bonhoeffer-van der Pol,

$$\begin{aligned}\mu\dot{x} &= x - \frac{1}{3}x^3 - y, \\ \dot{y} &= x + d,\end{aligned}\tag{5.24}$$

για $d = 0.5$, οπότε οι Εξ. (5.24) έχουν μία ευσταθή περιοδική λύση με περίοδο $T(\mu)$. Η παράμετρος μ καθορίζει τόσο την περίοδο όσο και το αν οι ταλαντώσεις είναι τύπου ανατροπής (relaxation).

Επίσης, θεωρούμε δύο *όμοιους συζευγμένους* ταλαντωτές Bonhoeffer-van der Pol της μορφής,

$$\begin{aligned}\mu\dot{x}_i &= x_i - \frac{1}{3}x_i^3 - y_i + \varepsilon g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{y}_i &= x_i + d + \varepsilon g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{5.25}$$

όπου ε είναι η ισχύς της σύζευξης και το διάνυσμα,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

είναι το διάνυσμα σύζευξης.

Το ερώτημα είναι αν το σύστημα αυτό έχει συγχρονισμένες λύσεις, ποια είναι η διαφορά φάσης της συγχρονισμένης λύσης και ποια η ευστάθεια της. Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, το πρόβλημα είναι ο υπολογισμός των στατικών καταστάσεων της Εξ. (5.4). Αντιμετωπίζουμε, λοιπόν, δύο προβλήματα: Πρώτον, πρέπει να υπολογιστεί η περιοδική λύση του *ασύζευκτου* συστήματος, $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$. Δεύτερον, πρέπει να υπολογιστεί η λύση του συζυγούς συστήματος Εξ. (5.21), δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{q}_i(t)$.

Το πρώτο πρόβλημα είναι εύκολο υπολογιστικά. Ξεκινούμε τους υπολογισμούς με αρχικές συνθήκες κοντά στον οριακό κύκλο και ολοκληρώνουμε την Εξ. (5.24) για μεγάλους χρόνους ώστε να φθάσουμε ασυμπτωτικά στον οριακό κύκλο. Ως αποτέλεσμα, έχουμε υπολογίσει τις τιμές του $\tilde{\mathbf{x}}_i(t)$ για $t = 0$ έως $t_{\max}$, όπου $t_{\max} \gg T$.

Ως επόμενο βήμα, πρέπει να λυθεί η Εξ. (5.21). Ο πίνακας $\mathbf{A}_i^T$ είναι απλά ο μετατεθειμένος Ιακωβιανός της Εξ. (5.24) υπολογισμένος επί της περιοδικής τροχιάς. Άρα, για το συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει,

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu^{-1}(1-x^2) & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Εφόσον η Εξ. (5.24) έχει μία ευσταθή περιοδική τροχιά ως λύση, η Εξ. (5.26) έχει ως λύση μία ασταθή περιοδική τροχιά. Άρα, η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί θέτοντας $t \rightarrow -t$ δηλαδή λύνοντας το σύστημα για *αντίθετους χρόνους*. Συνεπώς, η Εξ. (5.26) γράφεται,

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^{-1}(1-x^2) & 1 \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

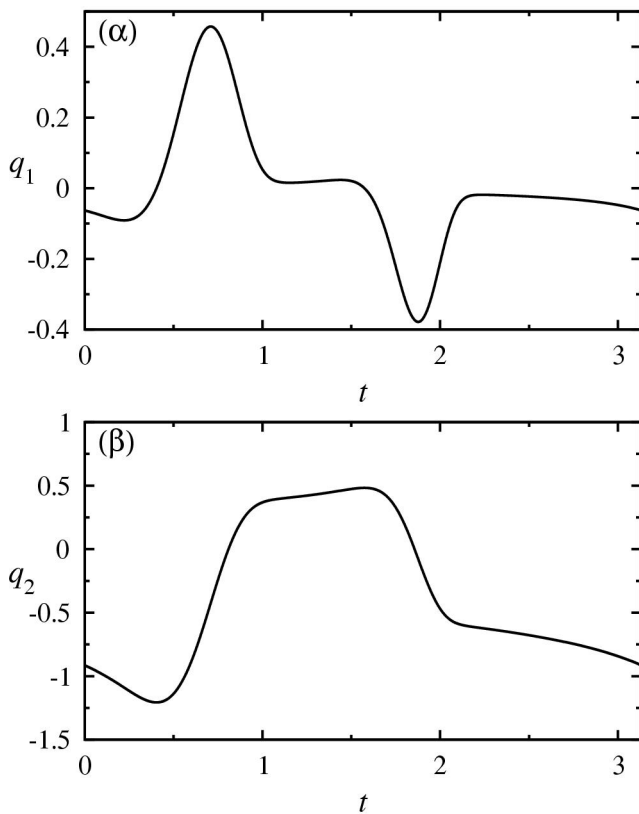
Πρακτικά, εφόσον έχουμε αλλάξει το πρόσημο του t , το σύστημα αυτό λύνεται για αυξανόμενους χρόνους. Η διαδικασία έχει ως εξής. Διαλέγουμε ένα σημείο επί του οριακού κύκλου, π.χ., $[x(t_{\max}), y(t_{\max})]$. Διαλέγουμε επίσης αρχικές συνθήκες για τα q_1 και q_2 που ικανοποιούν την συνθήκη κανονικοποίησης, Εξ. (5.22). Μία επιλογή είναι η εξής,

$$q_1(0) = \frac{0.5\mu}{x(t_{\max}) - \frac{1}{3}x^3(t_{\max}) - y(t_{\max})},$$

$$q_2(0) = \frac{0.5\mu}{x(t_{\max}) + d}.$$

Τέλος, ολοκληρώνουμε την Εξ. (5.27) για *αυξανόμενους χρόνους*. Θα πρέπει να σημειωθεί όμως ότι τα $x(t)$, $y(t)$ θα πρέπει να εξελίσσονται για μειούμενους χρόνους. Η αριθμητική λύση του προβλήματος αυτού θα μας δώσει την περιοδική λύση $\mathbf{q}(t)$. Ένα παράδειγμα για μία περίοδο των στοιχείων του $\mathbf{q}(t)$, για $\mu = 0.1$, παρουσιάζεται στο Σχ. 5.1. Αφόσον οι ταλαντωτές είναι όμοιοι ισχύει $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$.

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης σύζευξης H_1 και H_2 για κάθε ταλαντωτή στο *συζευγμένο* σύστημα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να



Σχήμα 5.1: Εξέλιξη του $\mathbf{q}(t)$ για μία περίοδο για $\mu = 0.1$. (α) Εξέλιξη του $q_1(t)$ και (β) εξέλιξη του $q_2(t)$. Περίοδος $T = 3.13$.

υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της Εξ. (5.4). Θέτοντας $\chi = \phi_2 - \phi_1$, οι εξισώσεις αυτές γράφονται,

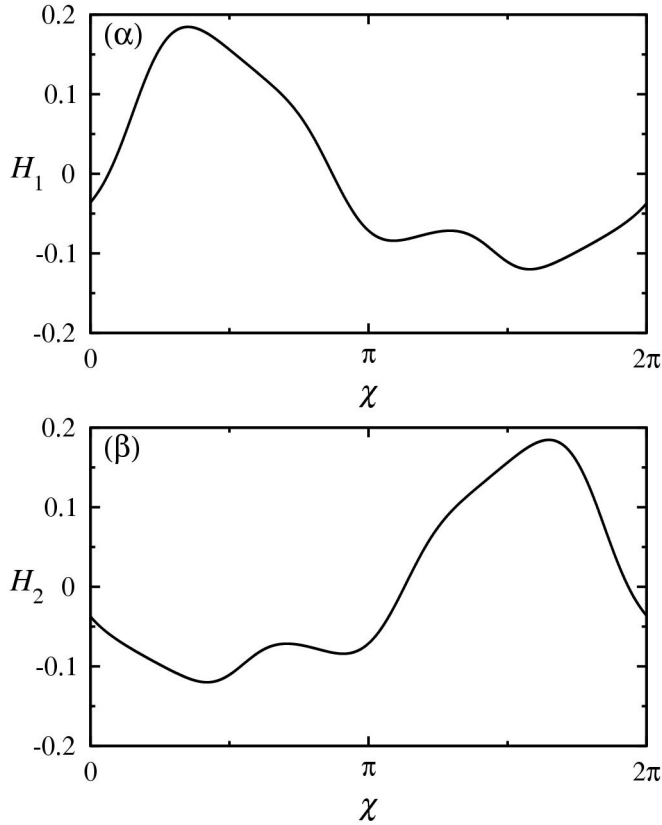
$$\begin{aligned} H_1(\chi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}(t)^T \mathbf{g}_1(\tilde{\mathbf{x}}(t + \chi)) dt, \\ H_2(-\chi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}(t)^T \mathbf{g}_2(\tilde{\mathbf{x}}(t - \chi)) dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Για να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα με τον κανόνα του τραπεζίου θα πρέπει να

γραφεί η αναλυτική μορφή της συνάρτησης g_i . Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε,

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ολοκληρώνοντας την Εξ. (5.28) για μία περίοδο, προκύπτουν οι H_1 και H_2 , όπως φαίνεται στο Σχ. 5.2. Φθάσαμε λοιπόν στο σημείο όπου κάθε ταλαντωτής του



Σχήμα 5.2: Εξέλιξη της συνάρτησης H_i για μία περίοδο και $\mu = 0.1$. (α) Εξέλιξη της $H_1(\chi)$ και (β) εξέλιξη της $H_2(\chi)$.

συζευγμένου συστήματος περιγράφεται μόνο από την φάση. Άρα μπορούμε να

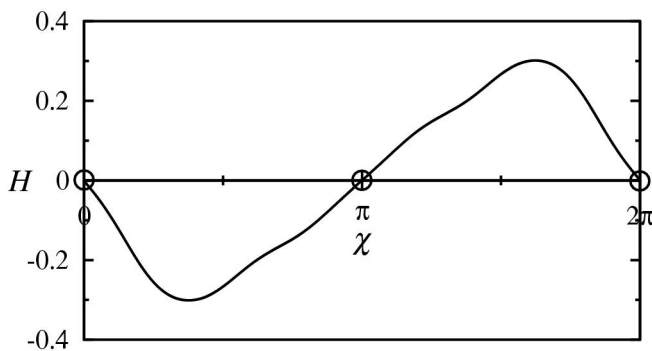
πούμε ότι η φάση κάθε ταλαντωτή στο συζευγμένο σύστημα καθορίζεται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= H_1(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\phi}_2 &= H_2(\phi_1 - \phi_2),\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $\chi = \phi_2 - \phi_1$, η *διαφορά φάσης* μεταξύ των ταλαντωτών δίνεται από τη σχέση,

$$\dot{\chi} = H_2(-\chi) - H_1(\chi) = H(\chi). \quad (5.29)$$

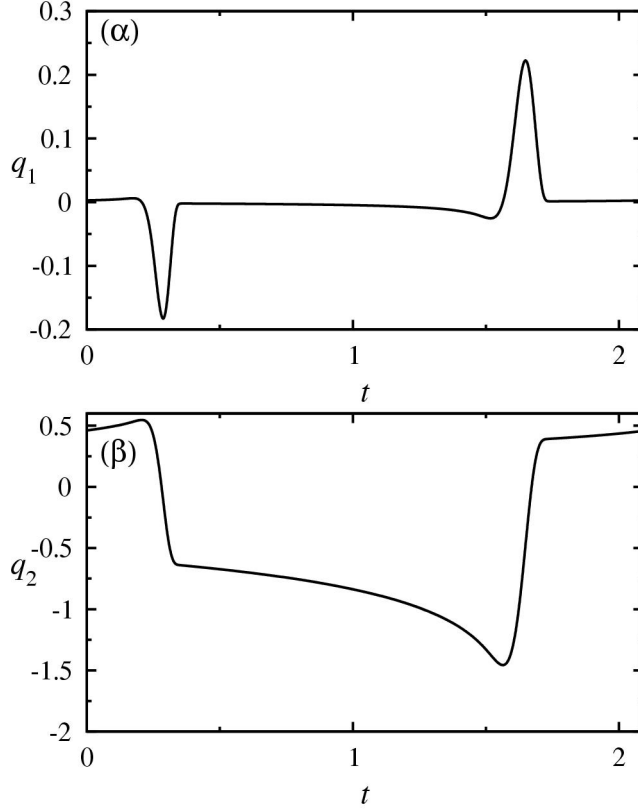
Προφανώς οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (5.29) θα αντιστοιχούν στις συγχρονισμένες λύσεις του συζευγμένου συστήματος. Μία γραφική παράσταση του $H(\chi)$ φαίνεται στο Σχ. 5.3. Οι τιμές του χ στις οποίες η $H(\chi)$ έχει τιμή μηδέν είναι οι στατικές καταστάσεις, και η κλίση στα σημεία αυτά καθορίζει την ευσταθεια. Είναι προφανές από το σχήμα αυτό ότι υπάρχουν δύο στατικές καταστάσεις μία



Σχήμα 5.3: Εξέλιξη της H για μία περίοδο για $\mu = 0.1$. Οι κύκλοι παριστούν στατικές καταστάσεις.

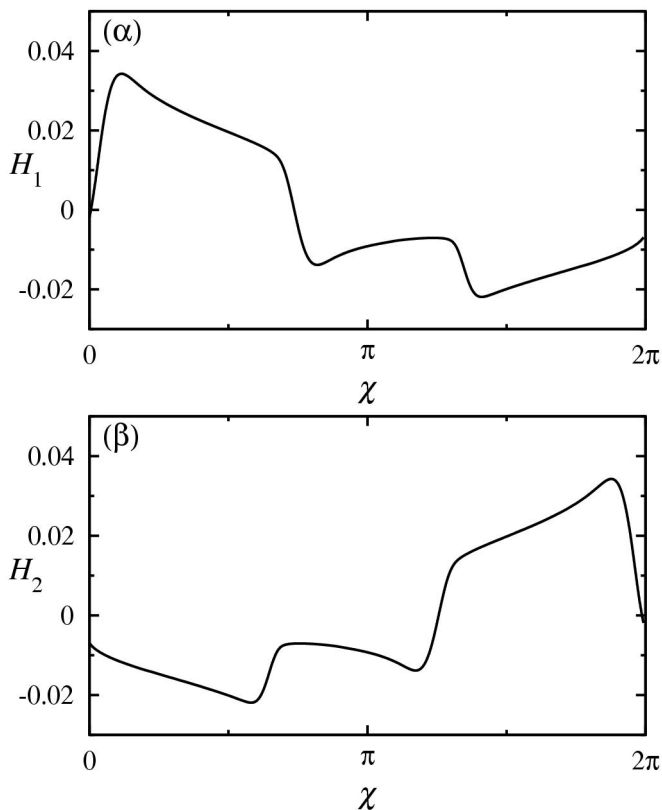
για $\chi = 0$ και μια δεύτερη για $\chi = \pi$. Η πρώτη είναι ευσταθής γιατί η κλίση είναι αρνητική και η άλλη είναι ασταθής. Άρα ο συγχρονισμός *εντός φάσης* είναι ευσταθής ενώ ο συγχρονισμός *εκτός φάσης* είναι ασταθής, για $\mu = 0.1$. Όλα τα παραπάνω ισχύουν μόνο όταν $\varepsilon \ll 1$, όταν δηλαδή η σύζευξη είναι ασθενής.

Ας διερευνήσουμε τι συμβαίνει ότι οι ταλαντωτές Bonhoeffer-van der Pol είναι τύπου ανατροπής, για $\mu = 0.01$. Στην περίπτωση αυτή η περίοδος είναι $T = 2.09$. Η λύση του συζυγούς προβλήματος παρουσιάζεται στο Σχ. 5.4. Όπως και στην



Σχήμα 5.4: Εξέλιξη του $\mathbf{q}(t)$ για μία περίοδο για $\mu = 0.01$. (α) Εξέλιξη του $q_1(t)$ και (β) εξέλιξη $q_2(t)$. Περίοδος $T = 2.09$.

προηγούμενη περίπτωση, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις H_1 και H_2 . Το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο Σχ. 5.5. Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι οι κλίσεις των συναρτήσεων H_i είναι μεγαλύτερες στα σημεία που μηδενίζεται η συνάρτηση, ειδικότερα στο γράφημα της συνάρτησης H που παρουσιάζεται στο Σχ. 5.6. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει τέσσερις στατικές καταστάσεις, όπου οι καταστάσεις *εντός φάσης* και *αντίθετης φάσης* είναι και οι δύο *ευσταθείς*. Το ενδιαφέρον στην περίπτωση αυτή είναι ότι όταν οι ταλαντωτές γίνουν τύπου ανατροπής προκύπτουν νέες ευσταθείς συγχρονισμένες καταστάσεις για το συζευγμένο



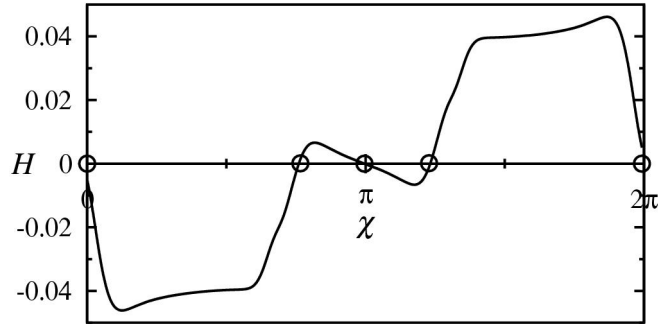
Σχήμα 5.5: Εξέλιξη της συνάρτησης H_i για μία περίοδο και για $\mu = 0.01$. (α) Εξέλιξη του $H_1(\chi)$ και (β) εξέλιξη του $H_2(\chi)$.

σύστημα.

Τέλος, ας επιστρέψουμε στην περίπτωση $\mu = 0.1$ και ας μεταβάλουμε την το διάνυσμα σύζευξης, δηλ. τις συναρτήσεις $\mathbf{g}_i$. Ας υποθεθεί σύζευξη τύπου διάχυσης. Στην περίπτωση αυτή οι $\mathbf{g}_i$ γράφονται,

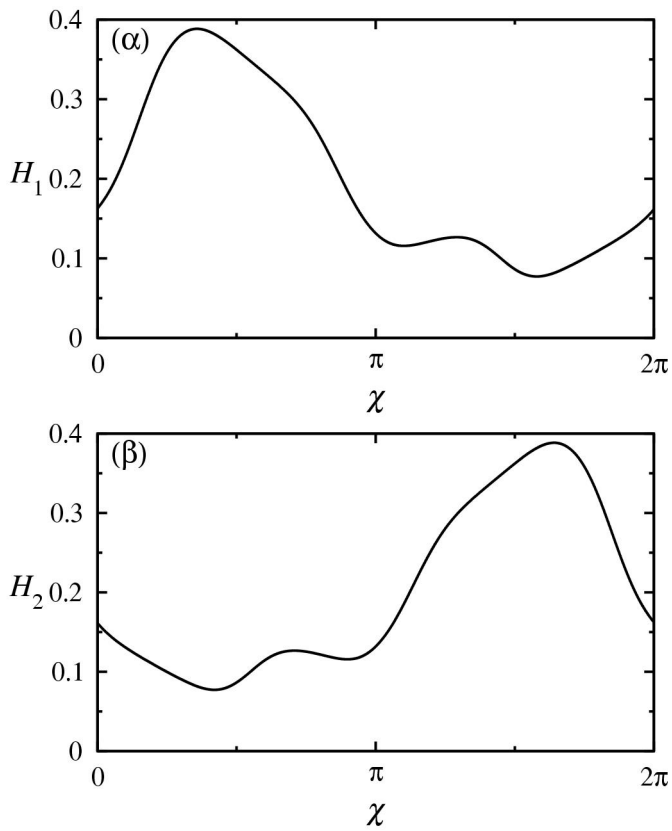
$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του συζυγούς συστήματος παραμένει η ίδια με αυτή του Σχ. 5.1. Οι συ-



Σχήμα 5.6: Εξέλιξη της H για μία περίοδο για $\mu = 0.01$. Οι κύκλοι παριστούν στατικές καταστάσεις.

ναρτήσεις H_i όμως, εξαρτώνται από το είδος της σύζευξης. Έτσι, στην περίπτωση σύζευξης τύπου διάχυσης οι συναρτήσεις αυτές έχουν την μορφή των γραφημάτων του Σχ. 5.7. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή οι H_1 και H_2 είναι όμοιες με αυτές που παρουσιάστηκαν στο Σχ. 5.2 αλλά είναι μετατεθειμένες προς θετικότερες τιμές. Προφανώς, ο ρόλος του όρου x_1 στην συνάρτηση g_1 (και του x_2 στην συνάρτηση g_2 είναι να μετακινεί τη συνάρτηση σύζευξης προς θετικότερες τιμές, κι έτσι δεν αλλάζει τις τιμές των στατικών καταστάσεων χ της συνάρτησης H . Η συνάρτηση H στην περίπτωση σύζευξης τύπου διάχυσης είναι και πάλι αυτή που παρουσιάζεται στο Σχ. 5.3.



Σχήμα 5.7: Εξέλιξη της συνάρτησης H_i για μία περίοδο, $\mu = 0.1$ και σύζευξη τύπου διάχυσης. (α) Εξέλιξη της $H_1(\chi)$ και (β) εξέλιξη $H_2(\chi)$.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικές μέθοδοι και τεχνικές

6.1 Στόχος του κεφαλαίου

Μελετώντας μη γραμμικά δυναμικά συστήματα της μορφής,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}), \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p,\end{aligned}\tag{6.1}$$

βρισκόμαστε αντιμέτωποι με τουλάχιστον πέντε διαφορετικά υπολογιστικά προβλήματα:

1. Υπολογισμός των στατικών καταστάσεων
2. Ευστάθεια στατικών σημείων και οριακών κύκλων
3. Διακλαδώσεις στατικών σημείων και οριακών κύκλων
4. Λύση συστημάτων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων
5. Χαρακτηρισμός της δυναμικής συμπεριφοράς

Ως το σημείο αυτό, μελετήσαμε παραδείγματα όπου τα περισσότερα από αυτά τα υπολογιστικά προβλήματα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν αναλυτικά. Παρόλα αυτά, στις περισσότερες των περιπτώσεων που αντιμετωπίζουμε στην πράξη, κάποια ή όλα τα παραπάνω προβλήματα δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με απλές αναλυτικές μαθηματικές τεχνικές. Άρα είμαστε αναγκασμένοι να εφαρμόσουμε αριθμητικές τεχνικές και να κάνουμε χρήση αλγορίθμων για υπολογιστές ώστε να μελετήσουμε τα περισσότερα από τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα τέσσερα πρώτα υπολογιστικά προβλήματα, δηλαδή, τον υπολογισμό, ευστάθεια, διακλάδωση στατικών καταστάσεων

και τη λύση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Θα συζητήσουμε μόνο τα βασικά αριθμητικά εργαλεία χωρίς να ασχοληθούμε με πιο προχωρημένους αλγόριθμους. Θα υποθέσουμε επίσης ότι βασικές αρχές προγραμματισμού είναι γνωστές και οι περισσότεροι αλγόριθμοι θα παρουσιαστούν σε Fortran 77. Οι αναγνώστες που είναι εξοικειωμένοι με άλλες γλώσσες προγραμματισμού μπορούν σχετικά εύκολα να προσαρμόσουν τις ρουτίνες που παρουσιάζονται στις ανάγκες τους. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου θα παρουσιαστεί το πακέτο Auto 97 το οποίο έχει την ικανότητα να επιλύσει πληθώρα προβλημάτων ευστάθειας και διακλαδώσεων.

6.2 Στατικές καταστάσεις: Η μέθοδος Newton-Raphson

Το πρώτο πρόβλημα που θα συζητηθεί είναι ο υπολογισμός των *στατικών καταστάσεων*. Όπως γνωρίζουμε, η στατική κατάσταση $\bar{\mathbf{x}}$ του συστήματος Εξ. (6.1) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\mu}) = 0, \quad (6.2)$$

για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου $\boldsymbol{\mu}$. Η Εξ. (6.2) είναι ουσιαστικά ένα n -διάστατο σύστημα μη γραμμικών *αλγεβρικών* εξισώσεων. Οι άγνωστοι του συστήματος αυτού είναι τα n στοιχεία του διανύσματος $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο *Newton-Raphson*.

Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{x}$ είναι μία προσεγγιστική τιμή της στατικής κατάστασης [δηλ. μία προσεγγιστική λύση της Εξ. (6.2)]. Ας υποθέσουμε επίσης ότι $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ είναι η ακριβής (άγνωστη) στατική κατάσταση. Ας αναλύσουμε την Εξ. (6.2) σε μία σειρά Taylor γύρω από την πραγματική στατική κατάσταση (ας αγνοήσουμε την παράμετρο $\boldsymbol{\mu}$ προς το παρόν),

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} + \text{h.o.t.}, \quad (6.3)$$

όπου, ως συνήθως, ο πίνακας $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι ο $n \times n$ Ιακωβιανός πίνακας,

$$D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}} & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right|_{\mathbf{x}} & \cdots & \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

όπου όλες οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες επί της *προσεγγιστικής τιμής της στατικής κατάστασης*.

Εφόσον $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ είναι η ακριβής στατική κατάσταση του συστήματος, το αριστερό σκέλος της Εξ. (6.3) ισούται με το μηδέν. Άρα, αγνοώντας όρους υψηλότερης τάξης, η εξίσωση αυτή γράφεται,

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

Ας διερευνήσουμε την Εξ. (6.5). Ο Ιακωβιανός είναι ένας σταθερός πίνακας, αφού όλες οι παράγωγοι είναι υπολογισμένες επί της προσεγγιστικής τιμής της στατικής κατάστασης. Το διάνυσμα $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι επίσης ένα n -διάστατο σταθερό διάνυσμα, εφόσον τα στοιχεία του υπολογίζονται στο σημείο $\mathbf{x}$. Το n -διάστατο διάνυσμα $\delta\mathbf{x}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων. Άρα, η Εξ. (6.5) είναι ένα σύστημα n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με n αγνώστους. Αργότερα θα δούμε πώς μπορούμε να λύσουμε αυτό το σύστημα. Επί του παρόντος, αν λύσουμε την Εξ. (6.5) τότε σχηματίζουμε την διορθωμένη λύση,

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}.$$

Αν η τιμή του $\bar{\mathbf{x}}$ εμπίπτει σε μία περιοχή επιθυμητής ακρίβειας, η στατική κατάσταση έχει προσδιοριστεί. Αν όχι, θέτουμε $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια.

Πρακτικά, είναι συχνά χρήσιμο να εισάγουμε ένα εμπειρικό παράγοντα s , δηλ.,

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + s\delta\mathbf{x}.$$

Έτσι, ξεκινούμε από την τιμή $s = 1$. Αν δεν μπορούμε να επιτύχουμε σύγκλιση διαιρούμε το s δια του 2 και επαναλαμβάνουμε έως ότου η λύση συγκλίνει με την επιθυμητή ακρίβεια.

Παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας την μέθοδο Newton-Raphson το πρόβλημα ανάγεται στη λύση ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων n -διάστατο με n αγνώστους, Εξ. (6.5). Ας παρουσιάσουμε τώρα διάφορους τρόπους λύσης αυτού του προβλήματος.

6.2.1 Μέθοδος απαλοιφής Gauss

Η κύρια ιδέα πίσω από την μέθοδο απαλοιφής Gauss είναι να μετατραπεί ο πίνακας $\mathbf{J}$ σε άνω τριγωνικό πίνακα (δηλ. όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο να είναι μηδέν). Εφόσον γίνει αυτό, η λύση μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση. Ας δούμε πως γίνεται αυτό.

Ως παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα 4×4 . Ας συμβολίσουμε τα στοιχεία του $\mathbf{J}$ ως $a_{i,j}$, το στοιχεία του $\delta\mathbf{x}$ ως x_i και τα στοιχεία του $-\mathbf{f}$ ως b_i .

Άρα, η Εξ. (6.5) γράφεται ως,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = b_1, \quad (6.6)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = b_2, \quad (6.7)$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 = b_3, \quad (6.8)$$

$$a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + a_{4,4}x_4 = b_4. \quad (6.9)$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι,

- Ανταλλάσσοντας οποιεσδήποτε δύο εξισώσεις του συστήματος αυτού [δηλ. ανταλλάσσοντας οποιεσδήποτε δύο σειρές του $\mathbf{J}$ και τις αντίστοιχες σειρές του $\mathbf{f}$ στην Εξ. (6.5)] δεν αλλοιώνεται η λύση.
- Αν αντικαταστήσουμε οποιαδήποτε εξίσωση με ένα γραμμικό συνδυασμό του εαυτού της και άλλης εξίσωσης (δηλ. αντικαθιστώντας οποιαδήποτε γραμμή του $\mathbf{J}$ και $\mathbf{f}$ στην Εξ. (6.5) με ένα γραμμικό συνδυασμό του αυτού της και μία άλλης σειράς) δεν υπάρχει επίδραση στη λύση.

Επιθυμούμε να μετατρέψουμε τον πίνακα $\mathbf{J}$ σε άνω τριγωνική μορφή. Ας ξεκινήσουμε απαλείφοντας τον όρο $a_{2,1}x_1$. Για να το κάνουμε αυτό πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (6.6) με $a_{2,1}/a_{1,1}$ και αφαιρούμε την προκύπτουσα εξίσωση από την Εξ. (6.7). Το αποτέλεσμα είναι,

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 &= b_1, \\ a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + a_{2,4}^{(2)}x_4 &= b_2^{(2)}, \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 &= b_3, \\ a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + a_{4,4}x_4 &= b_4, \end{aligned}$$

όπου, $a_{2,j}^{(2)} = a_{2,j} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}a_{1,j}$ και $b_2^{(2)} = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}b_1$.

Για να απαλείψουμε τον όρο $a_{3,1}x_1$, πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (6.6) με $a_{3,1}/a_{1,1}$ και αφαιρούμε την προκύπτουσα εξίσωση από την Εξ. (6.8). Με τον ίδιο τρόπο, πολλαπλασιάζουμε την Εξ. (6.6) με $a_{4,1}/a_{1,1}$ και αφαιρούμε την προκύπτουσα σχέση από την Εξ. (6.9). Το αποτέλεσμα είναι,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = b_1, \quad (6.10)$$

$$a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + a_{2,4}^{(2)}x_4 = b_2^{(2)}, \quad (6.11)$$

$$a_{3,2}^{(2)}x_2 + a_{3,3}^{(2)}x_3 + a_{3,4}^{(2)}x_4 = b_3^{(2)}, \quad (6.12)$$

$$a_{4,2}^{(2)}x_2 + a_{4,3}^{(2)}x_3 + a_{4,4}^{(2)}x_4 = b_4^{(2)}, \quad (6.13)$$

όπου $a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}a_{1,j}$ και $b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}b_1$. Στην παραπάνω διαδικασία καλούμε το στοιχείο $a_{1,1}$ ως στοιχείο βηματισμού.

Στο επόμενο στάδιο, επιθυμούμε να απαλείψουμε τον όρο $a_{3,2}^{(2)}x_2$ στην Εξ. (6.12). Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε ως στοιχείο βηματισμού τον συντελεστή $a_{2,2}^{(2)}$ και να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία. Τελικά θα προκύψει,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = b_1, \quad (6.14)$$

$$a_{2,2}^{(2)}x_2 + a_{2,3}^{(2)}x_3 + a_{2,4}^{(2)}x_4 = b_2^{(2)}, \quad (6.15)$$

$$a_{3,3}^{(3)}x_3 + a_{3,4}^{(3)}x_4 = b_3^{(3)}, \quad (6.16)$$

$$a_{4,4}^{(4)}x_4 = b_4^{(4)}. \quad (6.17)$$

Προφανώς, οι Εξ. (6.14)-(6.17) είναι σε άνω τριγωνική μορφή και το σύστημα μπορεί να λυθεί με αντικατάσταση. Η λύση θα είναι,

$$x_4 = \frac{b_4^{(4)}}{a_4^{(4)}}, \quad (6.18)$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i)}x_j}{a_{i,i}^{(i)}}, \quad (6.19)$$

όπου, $i = n-1, n-2, \dots, 1$.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ένα πιθανό πρόβλημα. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία διαιρούμε πάντα με το στοιχείο βηματισμού $a_{i,i}$. Τι θα συμβεί αν το $a_{i,i}$ είναι μηδέν ή σχεδόν μηδέν; Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε διαίρεση δια του μηδενός και ο υπολογιστής θα σταματήσει την εκτέλεση του προγράμματος. Στη δεύτερη περίπτωση το σφάλμα στρογγυλοποίησης θα αυξηθεί δραματικά. Για να αποφύγουμε μηδενικά ή σχεδόν μηδενικά στοιχεία βηματισμού εφαρμόζουμε μία τεχνική γνωστή ως μερικό βηματισμό. Έτσι, πριν κανονικοποιήσουμε ως προς το στοιχείο βηματισμού εντοπίζουμε το μεγαλύτερο συντελεστή στην ίδια στήλη με το στοιχείο βηματισμού. Τότε οι σειρές μπορούν να ανταλλαχθούν έτσι ώστε το μεγαλύτερο στοιχείο να καταστεί στοιχείο βηματισμού. Μία απλή διαδικασία που εφαρμόζει τη μέθοδο απαλοιφής Gauss με μερικό βηματισμό παρουσιάζεται στην ρουτίνα GAUSS:

```
SUBROUTINE GAUSS(Y,N,M,PAR,X)
  INTEGER N,M
  REAL Y(N),PAR(M)
  REAL DERIV,F
  REAL Z(N,N),C(N),X(N),O(N),S(N)
```

```

C      NUMBER OF EQUATIONS IS N
C      Z(I,J) IS THE COEFFICIENTS OF THE UNKNOWNNS
C      C(I) IS THE NON-HOMOGENEOUS TERM

DO I = 1, N
  DO J = 1, N
    Z(I,J) = DERIV(Y,I,J,N,M,PAR)
  END DO
  C(I) = -F(Y,I,N,M,PAR)
  X(I)=0.
END DO

DO I = 1, N
  O(I) = I
  S(I) = ABS(Z(I,1))
  DO J = 2, N
    IF (ABS(Z(I,J)).GT.S(I)) S(I) = ABS(Z(I,J))
  END DO
END DO

DO K = 1, N - 1
  CALL PIVOT(N,K,Z,C,X,O,S)
  DO I = K + 1, N
    FACTOR = Z(O(I),K)/Z(O(K),K)
    DO J =K+1, N
      Z(O(I),J) = Z(O(I), J)-FACTOR*Z(O(K),J)
    END DO
    C(O(I)) = C(O(I)) - FACTOR*C(O(K))
  END DO
END DO

X(N) = C(O(N))/Z(O(N),N)
DO I = N - 1, 1, -1
  SUM = 0.0
  DO J = I + 1, N
    SUM = SUM + Z(O(I),J)*X(J)
  END DO
  X(I) = (C(O(I))-SUM)/Z(O(I),I)
END DO
RETURN
END

SUBROUTINE PIVOT(N,K,Z,C,X,O,S)

REAL Z(N,N),C(N),X(N),O(N),S(N)

P = K
BIG = ABS(Z(O(K),K)/S(O(K)))
DO II = K + 1, N
  DUMMY = ABS(Z(O(II),K)/S(O(II)))
  IF (DUMMY.GT.BIG) THEN
    BIG = DUMMY
    P = II
  END IF
END DO

```

```

DUMMY = 0(P)
0(P) = 0(K)
0(K) = DUMMY

RETURN
END

```

Μία μέθοδος εναλλακτική της μεθόδου Gauss είναι η μέθοδος *Gauss-Jordan* όπου αντί να μετασχηματισθεί ο $\mathbf{J}$ σε άνω τριγωνικό πίνακα μετατρέπουμε σε μοναδιαίο πίνακα. Έτσι δεν απαιτείται αντικατάσταση, δηλ. οι Εξ. (6.18) και (6.19), δεν απαιτούνται. Στο Παράδειγμα 6.1 παρουσιάζεται μία εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής Gauss.

6.2.2 Διάσπαση LU

Μία καλύτερη μέθοδος λύσης της Εξ. (6.5) είναι η διάσπαση LU . Ας θεωρήσουμε ότι ο Ιακωβιανός μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο πινάκων,

$$\mathbf{LU} = \mathbf{J}, \quad (6.20)$$

όπου ο $\mathbf{L}$ είναι κάτω τριγωνικός και $\mathbf{U}$ είναι άνω τριγωνικός. Αν συμβολίσουμε ως $a_{i,j}$ τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{J}$, η Εξ. (6.20) γράφεται, για την περίπτωση 4×4 ,

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & 0 \\ l_{4,1} & l_{4,2} & l_{4,3} & l_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Συνδυάζοντας την Εξ. (6.5) και Εξ. (6.20) μπορούμε να γράψουμε,

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{x} = (\mathbf{LU})\delta\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{U}\delta\mathbf{x}) = -\mathbf{f}.$$

Άρα, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε δύο στάδια, αρχικά λύνοντας το πρόβλημα $\mathbf{Ly} = -\mathbf{f}$ ώστε να προσδιοριστεί το $\mathbf{y}$ και κατόπιν το πρόβλημα $\mathbf{U}\delta\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ώστε να προσδιοριστεί ο αρχικός άγνωστος $\delta\mathbf{x}$. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι η λύση (άνω ή κάτω) τριγωνικών συστημάτων είναι προφανής και μπορεί να προσδιοριστεί με απευθείας αντικατάσταση,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-f_1}{l_{1,1}}, \\ y_i &= \frac{-f_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}y_j}{l_{i,i}}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

για $i = 2, 3, \dots, n$, και, τέλος, με αντικατάσταση,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{y_n}{u_{n,n}}, \\ x_i &= \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j}x_j}{u_{i,i}}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

για $i = n-1, n-2, \dots, 1$.

Τα πλεονεκτήματα της μεθόδου LU είναι τώρα προφανή, αλλά ας δούμε πως μπορεί να γίνει η διάσπαση του αρχικού πίνακα. Ας μελετήσουμε το παράδειγμα της Εξ. (6.21) και ας γενικεύσουμε στην πορεία. Η Εξ. (6.21) είναι ένα σύστημα 16 γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με 20 αγνώστους (τα στοιχεία $l_{i,j}$ και $u_{i,j}$). Γενικά, αν n είναι η αρχική διάσταση του συστήματος Εξ. (6.5) τότε η διάσταση της Εξ. (6.21) θα είναι n^2 ενώ ο αριθμός των αγνώντων θα είναι $n^2 + n$. Άρα, θα πρέπει να λυθεί ένα σύστημα όπου ο αριθμός των αγνώντων είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων. Για να λύσουμε ένα τέτοιο σύστημα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο *Crout*:

- Θέτουμε $l_{i,i} = 1$ για $i = 1, 2, \dots, n$.
- Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ κάνουμε τα παρακάτω:

1. Για $i = 1, 2, \dots, j$, λύνουμε ως προς $u_{i,j}$,

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}u_{k,j}, \quad (6.24)$$

όπου το άθροισμα ισούται με μηδέν για $i = 1$.

2. Για $i = j+1, j+2, \dots, n$, λύνουμε ως προς $l_{i,j}$,

$$l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k}u_{k,j}}{u_{j,j}}. \quad (6.25)$$

Έπειτα χρησιμοποιούμε το επόμενο j (ας θυμηθούμε ότι, $a_{i,j}$ είναι τα στοιχεία του Ιακωβιανού).

Για άλλη μια φορά μπορούμε να δούμε ότι στην Εξ. (6.25), απαιτείται μερικός βηματισμός. Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα δούμε πως αυτό γίνεται εφικτό. Τώρα, εφόσον τα στοιχεία $l_{i,j}$ και $u_{i,j}$ έχουν προσδιοριστεί, τότε η λύση δx μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση, Εξ. (6.22) και (6.23).

6.3 Χρήση βιβλιοθηκών

Οι περισσότεροι αλγόριθμοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων έχουν ελεγχθεί ευρέως και μπορούν να βρεθούν σε βιβλιοθήκες, οι οποίες περιέχουν τις κατάλληλες ρουτίνες.

Μία από τις πιο διαδεδομένες βιβλιοθήκες για τη λύση γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων είναι η βιβλιοθήκη LAPACK (Linear Algebra Package) η οποία στην ουσία περιλαμβάνει άλλες γνωστές βιβλιοθήκες όπως την LINPACK και EISPACK. Σε πολλές περιπτώσεις η βιβλιοθήκη LAPACK αποτελεί συστατικό ακόμα μεγαλύτερων βιβλιοθηκών όπως η CXML της Digital.

Όταν κάποιος κάνει χρήση βιβλιοθηκών όπως της LAPACK, ο αλγόριθμος που λύνει το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα καλείται από το πρόγραμμα ως μία απλή υπορουτίνα. Έτσι, απλά θα πρέπει ο προγραμματιστής να γράψει ένα απλό πρόγραμμα ‘οδηγό’ το οποίο επιτελεί τους κύκλους της μεθόδου Newton-Raphson και να παρέχει επίσης τον Ιακωβιανό και τις συναρτήσεις του δεξιού σκέλους του γραμμικού συστήματος. Μία εφαρμογή αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 6.2. για τη μέθοδο LU.

6.4 Ολοκλήρωση ΣΔΕ: Η μέθοδος Runge-Kutta

Η πιο απλή μέθοδος για την ολοκλήρωση συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι η μέθοδος Euler. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το αρχικό δυναμικό σύστημα, Εξ. (6.1), γράφεται,

$$\frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{\delta t} \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_i),$$

δηλαδή,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}_i). \quad (6.26)$$

Στην Εξ. (6.26), $h = \delta t$ είναι το βήμα της ολοκλήρωσης (δηλ. η αύξηση του χρόνου) και $\mathbf{x}_{i+1}$ η εξέλιξη της λύσης. Η μέθοδος Euler δεν συνίσταται για πρακτική χρήση γιατί δεν είναι ακριβής ή σταθερή.

Η μέθοδος Euler μπορεί να βελτιωθεί με την προσθήκη επιπλέον (δοκιμαστικού) βήματος στο μέσον του διαστήματος ολοκλήρωσης. Η δοκιμαστική τιμή χρησιμοποιείται στην συνέχεια για τον προσδιορισμό του ‘πραγματικού’ βήματος για το συνολικό το διάστημα ολοκλήρωσης. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + 0.5\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Η μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην Εξ. (6.27) ονομάζεται μέθοδος *Runge-Kutta* δεύτερης τάξης.

Η μέθοδος Runge-Kutta μπορεί να βελτιωθεί παραπάνω. Έτσι, η μέθοδος *Runge-Kutta* τέταρτης τάξης γράφεται,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + 0.5\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + 0.5\mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 &= h\mathbf{f}(\mathbf{x}_i + \mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4). \end{aligned} \tag{6.28}$$

Η μέθοδος Runge-Kutta εφαρμόζεται στην παρακάτω ρουτίνα, RKK4:

```

SUBROUTINE RKK4(Y,N,TSTEP,PAR)
C   The fourth order Runge-Kutta subroutine
C   The updated solution is stored in Y(1:n)
C   Uses YPRIM

REAL Y1(1:10),Y2(1:10),Y3(1:10),Y4(1:10)
REAL YY1(1:10),YY2(1:10),YY3(1:10),Y(1:10)
REAL YPRIM, TSTEP,PAR(1:10)
INTEGER K,N

DO K = 1, N
    Y1(K) = TSTEP*YPRIM(Y,K,PAR)
END DO

DO K = 1, N
    YY1(K) = Y(K)+Y1(K)/2.0
END DO

DO K = 1, N
    Y2(K) = TSTEP*YPRIM(YY1,K,PAR)
END DO

DO K = 1, N
    YY2(K) = Y(K)+Y2(K)/2.0
END DO

DO K = 1, N
    Y3(K) = TSTEP*YPRIM(YY2,K,PAR)
END DO

DO K = 1, N
    YY3(K) = Y(K)+Y3(K)
END DO

DO K = 1, N
    Y4(K) = TSTEP*YPRIM(YY3,K,PAR)
END DO

```

```

DO K = 1, N
  Y(K) = Y(K)+(Y1(K)+2.0*Y2(K)+2.0*Y3(K)+Y4(K))/6.0
END DO

RETURN
END

```

Μία εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 6.4.

6.5 Το πακέτο AUTO 97

Το καλύτερο πακέτο για την μελέτη διακλαδώσεων σε μη γραμμικά προβλήματα είναι το AUTO 97. Το πακέτο αυτό μαζί με έναν οδηγό χρήσης παρέχεται ελεύθερα από τον δικτυακό τόπο,

<http://indy.cs.concordia.ca/auto/>

και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιβάλλον Unix. Συνοδεύεται από γραφικό περιβάλλον και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιβάλλον εντολών (command mode). Μία απλή εφαρμογή του AUTO 97 παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 6.3.

Μία εναλλακτική λύση του AUTO 97 είναι το πακέτο XPP-Aut το οποίο μπορεί να βρεθεί στον τόπο,

<http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>.

6.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1 Θεωρείστε ένα σύστημα όπου χημικά είδη παράγονται ηλεκτροχημικά στην άνοδο και μεταφέρονται στο ηλεκτρολυτικό διάλυμα λόγω διάχυσης και ηλεκτρομεταφοράς. Ας θεωρηθεί ότι όλο το ρεύμα το ηλεκτρολυτικό διάλυμα μεταφέρεται από αυτά τα ιόντα και ότι αλλαγές λαμβάνουν χώρα μόνο κατά τη διάσταση κάθετη στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου. Τέλος, ας θεωρηθεί ότι ισχύει το μοντέλο Nerst για τη στοιβάδα διάχυσης. Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{u} &= \sigma(v - u) - f(x, u), \\ \dot{x} &= 1 - x - \sigma(v - u) + g(x, u), \end{aligned} \quad (6.29)$$

όπου u είναι το αδιάστατο δυναμικό στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου και x η αδιάστατη συγκέντρωση στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου. Ας υποθέσουμε ότι το ολικό φαρανταϊκό ρεύμα δίνεται από την εξίσωση,

$$f(x, u) = x(a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3),$$

και ότι $g(x, u) = \alpha f(x, u)$. Θεωρείστε το v σαν παράμετρο διακλάδωσης στην περιοχή $25 \leq v \leq 30$ και βρείτε τις στατικές καταστάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Newton-Raphson* και την απαλοιφή *Gauss*. Χρησιμοποιείστε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους: $\sigma = 0.1$, $\varepsilon = 0.001$, $\alpha = 0.1$, $a_1 = 1.125$, $a_2 = -0.075$, $a_3 = 0.00125$.

Λύση:

Για να βρεθούν οι στατικές καταστάσεις του προβλήματος θα πρέπει πρώτα να γραφεί ένα απλό πρόγραμμα με τους ορισμούς και το βρόχο της μεθόδου *Newton-Raphson*:

```

PROGRAM MAIN
  INTEGER N,M,K,KMAX
  REAL Y(2), PAR(7),X(2)
  REAL V,LMT,VST,VED,SUM,NORM,VSTEP,DUMMY
C   Number of equations
  N=2
C   Number of parameters
  M=7
C   Parameter values
  PAR(1)=1.125
  PAR(2)=-0.075
  PAR(3)=0.00125
  PAR(4)=0.1
  PAR(5)=0.1
  PAR(7)=0.01
C   Initial guess
  Y(1)=16.40838838
  Y(2)=0.22675495
C   Limits and step size
  VST=25.
  VED=30.
  VSTEP=0.005
C   Maximum number of N-R iterations
  KMAX=100
C   Desired accuracy
  LMT=1.E-4

  SUM=0.

  OPEN(1,FILE='results.dat',STATUS='UNKNOWN')

C   Q=1: Forward scan
C   Q=2: Backward scan
  DO Q=1,2
    DO V=VST, VED,VSTEP
      PAR(6)=V
C   The N-R iteration loop
10    DO K=1,KMAX
        CALL GAUSS(Y,N,M,PAR,X)
        DO I=1,N
          Y(I)=Y(I)+X(I)
          SUM=SUM+X(I)**2
        END DO
    
```

```

        NORM=SQRT(SUM)
        SUM=0.
C      Check the norm
        IF (NORM.LE.LMT) EXIT
        END DO
        IF (NORM.GT.LMT) THEN
            PAUSE 'NO CONVERGENCE OR JUMP POINT. INCREASE KMAX'
            GOTO 10
        ELSE
            WRITE(1,100) V,Y(1),Y(2)
        END IF
        END DO
        DUMMY=VST
        VST=VED
        VED=DUMMY
        VSTEP=-VSTEP
        END DO
        CLOSE(1)
100    FORMAT (3F15.8)
        STOP
        END

```

Θα πρέπει επίσης θα εισαχθεί το διάνυσμα του δεξιού σκέλους της Εξ. (6.5). Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

```

REAL FUNCTION F(Y,I,N,M,PAR)
INTEGER I,M,N
REAL Y(N),PAR(M)
IF(I.EQ.1) F=PAR(5)*(PAR(6)-Y(1))-
$   Y(2)*(PAR(1)*Y(1)+PAR(2)*Y(1)**2+PAR(3)*Y(1)**3)
IF(I.EQ.2) F=1.-Y(2)-PAR(5)*(PAR(6)-Y(1))+
$   PAR(5)*Y(2)*(PAR(1)*Y(1)+PAR(2)*Y(1)**2+PAR(3)*Y(1)**3)
RETURN
END

```

Επίσης θα πρέπει να εισαχθούν τα στοιχεί του Ιακωβιανού για την Εξ. (6.5). Αυτό γίνεται με το ορισμό της παρακάτω συνάρτησης:

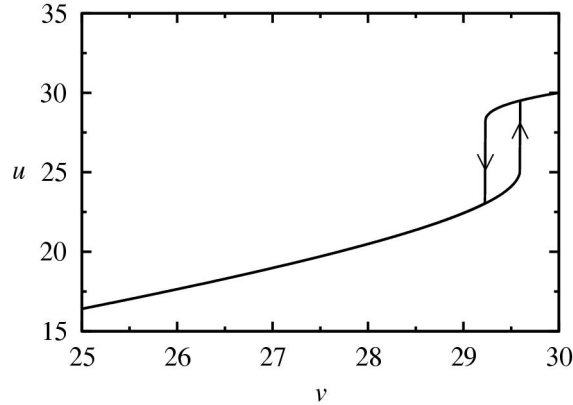
```

REAL FUNCTION DERIV(Y,I,J,N,M,PAR)
INTEGER I,J,N,M
REAL Y(N),PAR(M)

IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.1) DERIV=-PAR(5)-Y(2)*(PAR(1)
$   +2.*PAR(2)*Y(1)+3.*PAR(3)*Y(1)**2)
IF (I.EQ.1.AND.J.EQ.2) DERIV=-PAR(1)*Y(1)+PAR(2)*Y(1)**2
$   +PAR(3)*Y(1)**3
IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.1) DERIV=PAR(5)*Y(1)+PAR(4)*(Y(2)*(PAR(1)
$   +2.*PAR(2)*Y(1)+3.*PAR(3)*Y(1)**2))
IF (I.EQ.2.AND.J.EQ.2) DERIV=-1. + PAR(4)*(PAR(1)*Y(1)+
$   PAR(2)*Y(1)**2+PAR(3)*Y(1)**3)
RETURN
END

```

Η χρήση των παραπάνω ρουτινών μαζί με την ρουτίνα GAUSS δίνει το αποτέλεσμα που παρουσιάζεται στο Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1: Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (6.29) συναρτήσει του ν .

Από το Σχ. 6.1 παρατηρούμε από την απλή αυτή εφαρμογή της μεθόδου Gauss ότι ένας κλάδος στατικών καταστάσεων δεν έχει προσδιοριστεί (ο κλάδος εντός της περιοχής υστέρησης). Προκειμένου να υπολογιστεί και αυτός ο κλάδος ο αλγόριθμος θα πρέπει μερικώς να τροποποιηθεί. Επιπλέον, στα σημεία όπου οι στατικές καταστάσεις μεταπηδούν από ένα κλάδο σε άλλο θα μπορούσε κάποιος να υποπτευθεί την ύπαρξη διακλάδωσης σάγματος - κόμβου. Η υποψία αυτή μπορεί να επαληθευθεί εύκολα για αυτό το δισδιάστατο πρόβλημα μία που ο Ιακωβιανός προσδιορίζεται σε κάθε σημείο της καμπύλης, οπότε ο υπολογισμός των ιδιοτιμών είναι σχετικά απλός.

Παράδειγμα 6.2 Να λυθεί το πρόβλημα του Παραδείγματος 6.1 με χρήση της τεχνικής *LU* και τη χρήση της βιβλιοθήκης *LAPACK*. (Βοήθεια: χρησιμοποιήστε την ρουτίνα *Sgesv*).

Λύση: Το πρόβλημα του Παραδείγματος 6.1 μπορεί να λυθεί εύκολα με τη χρήση της βιβλιοθήκης *LAPACK*. Οι ρουτίνες *F* και *DERIV* παραμένουν οι ίδιες. Το πρόγραμμα τροποποιείται ως εξής:

```
PROGRAM MAINLIB
INTEGER N,M,K,KMAX,LDA,LDB,INFO,NRHS,IPIV(2)
REAL DERIV,F
REAL A(100,2),B(100,2)
REAL Y(2), PAR(7),X(2)
REAL V,LMT,VST,VED,SUM,NORM,VSTEP,DUMMY
```

```

C      Number of equations
      N=2
C      Number of parameters
      M=7
C      Parameter values
      PAR(1)=1.125
      PAR(2)=-0.075
      PAR(3)=0.00125
      PAR(4)=0.1
      PAR(5)=0.1
      PAR(7)=0.01
C      Initial guess
      Y(1)=16.40838838
      Y(2)=0.22675495
C      Limits and step size
      VST=25.
      VED=30.
      VSTEP=0.005
C      Maximum number of N-R iterations
      KMAX=100
C      Desired accuracy
      LMT=1.E-4

      SUM=0.
      NRHS=1
      LDA=100
      LDB=100

      OPEN(1,FILE='results-lib.dat',STATUS='UNKNOWN')

C      Q=1: Forward scan
C      Q=2: Backward scan
      DO Q=1,2
        DO V=VST, VED,VSTEP
          PAR(6)=V
C      The N-R iteration loop
10      DO K=1,KMAX
          DO I = 1, N
            DO J = 1, N
              A(I,J) = DERIV(Y,I,J,N,M,PAR)
            END DO
            B(I,1) = -F(Y,I,N,M,PAR)
          END DO
C      Call the LU decomposition routine
          CALL SGESV(N,NRHS,A,LDA,IPIV,B,LDB,INFO )
          DO I=1,N
            Y(I)=Y(I)+B(I,1)
            SUM=SUM+B(I,1)**2
          END DO
          NORM=SQRT(SUM)
          SUM=0.
C      Check the norm
          IF (NORM.LE.LMT) EXIT
        END DO
        IF (NORM.GT.LMT) THEN
          PAUSE 'NO CONVERGENCE OR JUMP POINT. INCREASE KMAX'
          GOTO 10
        ELSE

```

```

        WRITE(1,100) V,Y(1),Y(2)
      END IF
    END DO
    DUMMY=VST
    VST=VED
    VED=DUMMY
    VSTEP=-VSTEP
  END DO
  CLOSE(1)
100  FORMAT (3F15.8)
  STOP
  END

```

Για να περιλάβουμε την βιβλιοθήκη στο εκτελέσιμο πρόγραμμα, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε εντολή της μορφής (π.χ. για ένα σύστημα Tru64 Unix)

```
f77 main-lib.f jacob.f rhp.f -ldxml
```

όπου `jacob.f` και `rhp.f` περιλαμβάνουν τις ρουτίνες `DERIV` και `F`, αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα είναι αυτό που παρουσιάζεται στο Σχ. 6.1.

Παράδειγμα 6.3 *Η λύση του πλήρους προβλήματος διακλάδωσης του Παραδείγματος 6.1 με το πακέτο Auto 97.*

Λύση:

Για να χρησιμοποιηθεί το πακέτο Auto 97 για τις εξισώσεις του Παραδείγματος 6.1 θα πρέπει να παρέχουμε τις παραγωγούς. Αυτό γίνεται στην υπορουτίνα `FUNC`:

```

C-----
C-----
C   aut.f :      Model AUTO-equations file
C-----
C-----
C
C   SUBROUTINE FUNC(NDIM,U,ICP,PAR,IJAC,F,DFDU,DFDP)
C   -----
C
C   C Evaluates the algebraic equations or ODE right hand side
C
C   C Input arguments :
C     NDIM : Dimension of the algebraic or ODE system
C     U    : State variables
C     ICP  : Array indicating the free parameter(s)
C     PAR  : Equation parameters
C
C   C Values to be returned :
C     F    : Equation or ODE right hand side values
C
C   C Normally unused Jacobian arguments : IJAC, DFDU, DFDP (see manual)
C
C   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

```

```

      DIMENSION U(NDIM), PAR(*), F(NDIM), ICP(*)

      P=U(1)
      C=U(2)
      S=0.1
      A=0.1
      EPSI=0.001
      V=PAR(1)
      A1=1.125
      A2=-0.075
      A3=0.00125
C
      F(1)= (S*(V-P)-C*(A1*P+A2*P**2+A3*P**3))/EPSI
      F(2)= 1.-C-S*(V-P)+A*C*(A1*P+A2*P**2+A3*P**3)
C
      RETURN
      END

```

Ο ορισμός των παραμέτρων και των αρχικών συνθηκών γίνεται στην υπορουτίνα STPNT ως εξής:

```

C-----
C-----
C
      SUBROUTINE STPNT(NDIM,U,PAR)
C      -----
C
C Input arguments :
C   NDIM   :   Dimension of the algebraic or ODE system
C
C Values to be returned :
C   U      :   A starting solution vector
C   PAR    :   The corresponding equation-parameter values
C
C Note : For time- or space-dependent solutions this subroutine has
C        arguments (NDIM,U,PAR,T), where the scalar input parameter T
C        contains the varying time or space variable value.

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION U(NDIM), PAR(*)
C
C Initialize the equation parameters
      PAR(1)= 25.
C      PAR(2)= ....
C
C Initialize the solution
      U(1)= 16.40838838
      U(2)= 0.22675495
C
      RETURN
      END

```

Τέλος, θα πρέπει να οριστούν οι παράμετροι για τους υπολογισμούς. Αυτό γίνεται στο αρχείο r.*,

```

2 1 0 1 NDIM,IPS,IRS,ILP
2 1 11 N1CP,(1CP(1),1=1,N1CP)
15 4 3 1 1 1 2 1 NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
350 25 29.7 -1e+10 1e+10 NMx,RLO,RL1,AO,A1
50 5 3 8 5 3 0 NPR,MXBF,1ID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-06 1e-06 0.0001 EPSL,EPsU,EPSS
0.02 0.001 0.05 1 DS,DSMIN,DSMAX,IADS
1 NTHL,((1,THL(1)),1=1,NTHL)
11 0
0 NTHU,((1,THU(1)),1=1,NTHU)
0 NUZR,((1,UZR(1)),1=1,NUZR)

```

Το αποτέλεσμα των υπολογισμών αποθηκεύεται στα αρχεία q.*, p.* και d.*. Εκεί μπορούν να βρεθούν όλες οι πληροφορίες σχετικά με την ευστάθεια των στατικών καταστάσεων. Μέρος της πληροφορίας αυτής παρουσιάζεται παρακάτω:

BR	PT	TY	LAB	PAR(1)	U(0)	U(1)	U(2)
1	1	EP	1	2.50000E+01	1.64084E+01	1.64084E+01	2.26755E-01
1	50		2	2.65099E+01	1.83117E+01	1.83117E+01	2.62166E-01
1	62	HB	3	2.68402E+01	1.87596E+01	1.87596E+01	2.72740E-01
1	100		4	2.79031E+01	2.03333E+01	2.03333E+01	3.18720E-01
1	150		5	2.90471E+01	2.25504E+01	2.25504E+01	4.15298E-01
1	200		6	2.95863E+01	2.49728E+01	2.49728E+01	5.84787E-01
1	205	LP	7	2.95901E+01	2.51930E+01	2.51930E+01	6.04266E-01
1	250		8	2.93142E+01	2.74114E+01	2.74114E+01	8.28747E-01
1	267	LP	9	2.92355E+01	2.82330E+01	2.82330E+01	9.09774E-01
1	271	HB	10	2.92414E+01	2.84215E+01	2.84215E+01	9.26213E-01
1	298	EP	11	2.97065E+01	2.96651E+01	2.96651E+01	9.96271E-01

Total Time 0.192E+00

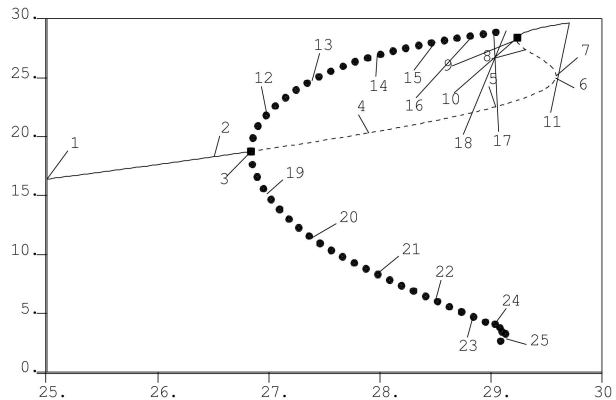
Από αυτόν τον κατάλογο παρατηρούμε ότι έχουμε δύο διακλαδώσεις Hopf (HB) και δύο διακλαδώσεις σάγματος - κόμβου (LP). Αν κάνουμε ένα δεύτερο υπολογισμό χρησιμοποιώντας τις παρακάτω παραμέτρους,

```

2 2 3 1 NDIM,IPS,IRS,ILP
2 1 11 N1CP,(1CP(1),1=1,N1CP)
15 4 3 1 1 1 2 1 NTST,NCOL,IAD,ISP,ISW,IPLT,NBC,NINT
350 25 29.7 -1e+10 1e+10 NMx,RLO,RL1,AO,A1
50 5 3 8 5 3 0 NPR,MXBF,1ID,ITMX,ITNW,NWTN,JAC
1e-06 1e-06 0.0001 EPSL,EPsU,EPSS
0.02 0.001 0.05 1 DS,DSMIN,DSMAX,IADS
1 NTHL,((1,THL(1)),1=1,NTHL)
11 0
0 NTHU,((1,THU(1)),1=1,NTHU)
0 NUZR,((1,UZR(1)),1=1,NUZR)

```

θα βρούμε το γεωμετρικό τόπο των περιοδικών τροχιών στο διάγραμμα διακλάδωσης. Μία γραφική παράσταση του Auto 97 παρουσιάζεται στο Σχ. 6.2. Μπορεί να παρατηρηθεί η ύπαρξη μίας διακλάδωσης Hopf στο σημείο 3 και η ύπαρξη δύο διακλαδώσεων σάγματος - κόμβου στα σημεία 7 και 9. Επίσης, η ένταση των περιοδικών ταλαντώσεων παρουσιάζεται με τους μαύρους κύκλους. Από την πληροφορία του αρχείου d.* παρατηρούμε ότι οι περιοδικές τροχιές είναι ευσταθείς.



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα διακλάδωσης της Εξ. (6.29) θεωρώντας το v σαν παράμετρο διακλάδωσης

Επίσης, στο σημείο 7 ένας ασταθής κόμβος γίνεται σαγματικό σημείο και στο σημείο 9 το σαγματικό σημείο γίνεται ασταθής κόμβος. Μία επιπλέον διακλάδωση Hopf λαμβάνει χώρα στο σημείο 10.

Παράδειγμα 6.4 Γράψτε ένα πρόγραμμα που να λύνει αριθμητικά τις εξισώσεις Lorenz, Εξ. (4.100), με τη μέθοδο Runge-Kutta. (Σημείωση: Θέτοντας $\rho = \bar{\rho} - 1$ λαμβάνουμε τις πρωτότυπες εξισώσεις Lorenz).

Λύση:

Για να γράψουμε ένα πρόγραμμα που θα ολοκληρώνει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (στη συγκεκριμένη περίπτωση τις εξισώσεις Lorenz) θα πρέπει να γράψουμε :

- Τους γενικούς ορισμούς
- Μία υπορουτίνα με τη μέθοδο Runge-Kutta
- Μία υπορουτίνα με τον ορισμό των διαφορικών εξισώσεων

Εδώ παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ενός προγράμματος που περιλαμβάνει τους ορισμούς και τις κλήσεις των υπορουτινών:


```

PROGRAM LORENZ
C   Integration of the Lorenz equations with the
C   fourth order Runge-Kutta. Y(1:n) are the
C   dynamical variables. TSTEP is the integration
C   step. TT is the 'real time'. The results
C   are stored in the array YSOL(m,n) and can
C   be written in a file.
C   Uses RKK4

REAL Y(1:10),PAR(1:10), YSOL(0:20000,1:10)
REAL TSTEP,TT
INTEGER N,TMAX,K,I

C   N: NUMBER OF EQUATIONS
N=3

C   Initial conditions
YSOL(0,1)=0.1
YSOL(0,2)=0.1
YSOL(0,3)=0.1

Y(1)=YSOL(0,1)
Y(2)=YSOL(0,2)
Y(3)=YSOL(0,3)

C   Model parameters
C   Sigma
PAR(1)=10.
C   Rho
PAR(2)=28.
C   Beta
PAR(3)=8./3.

C   Computational parameters
TSTEP = 0.01
TMAX = 10000

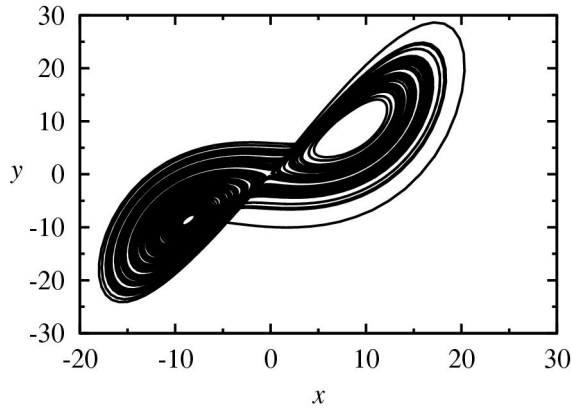
DO I = 1,TMAX
C   Call to the Runge-Kutta subroutine
CALL RKK4(Y,N,TSTEP,PAR)
DO K = 1, N
YSOL(I,K) = Y(K)
END DO
END DO

C   Write the results into a file
OPEN(UNIT=1,FILE='lorenz.dat',STATUS='UNKNOWN')
TT=0.
DO I=0,TMAX
TT=TT+TSTEP
WRITE(1,10) TT,YSOL(I,1),YSOL(I,2),YSOL(I,3)
END DO
CLOSE (1)

10 FORMAT (4F15.8)

STOP
END

```



Σχήμα 6.3: Λύση των εξισώσεων Lorenz με τη μέθοδο Runge-Kutta για $\sigma = 10$, $\rho = 28$ και $\beta = 8/3$.

Τέλος ορίζουμε τις διαφορικές εξισώσεις. Αυτό γίνεται στην συνάρτηση YPRIM:

```

      REAL FUNCTION YPRIM(Y,K,PAR)
C     The Lorenz equations. PAR(1) is sigma,
C     PAR(2) is rho and PAR(3) is beta.

      REAL Y(1:10)
      REAL PAR(1:10)
      INTEGER K

      IF (K.EQ.1) YPRIM=PAR(1)*(Y(2)-Y(1))
      IF (K.EQ.2) YPRIM=PAR(2)*Y(1)-Y(2)-Y(1)*Y(3)
      IF (K.EQ.3) YPRIM=-PAR(3)*Y(3)+Y(1)*Y(2)

      RETURN
      END

```

Μία προβολή $x - y$ των αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στο Σχ. 6.3.

Κεφάλαιο 7

Χάος μέσα από παραδείγματα

7.1 Εισαγωγή

Ως το σημείο αυτό διερευνήσαμε την ευστάθεια και την απόκριση σχετικά απλών μη-γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Παρά την απλότητα τους παρατηρήσαμε ότι μία ποικιλία στατικών καταστάσεων μπορούν να συνυπάρχουν και μία σειρά από διαφορετικές διακλαδώσεις μπορούν να συμβούν που να έχουν ως αποτέλεσμα διαφορετικές τροχιές στο χώρο των φάσεων.

Ένα από τα πιο συναρπαστικά θέματα που σχετίζονται με τα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι η *χαοτική* συμπεριφορά και η ύπαρξη του *χαοτικού* ή αλλιώς *παράξενου* ελκυστή στο χώρο των φάσεων. Λόγω της μαθηματικής πολυπλοκότητας της ανάλυσης της χαοτικής συμπεριφοράς θα ασχοληθούμε μόνο με ορισμένα παραδείγματα που εκδηλώνουν χαοτική συμπεριφορά. Ως αποτέλεσμα δεν θα επιμείνουμε στις μαθηματικές λεπτομέρειες.

Ακόμα κι ο ορισμός του χαοτικού ελκυστή είναι αρκετά πεπλεγμένος. Μια που ένα χαρακτηριστικό της χαοτικής συμπεριφοράς είναι η *ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες* ας εκφράσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 7.1 (*Ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες*) Έστω ένα δυναμικό σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

και έστω η τροχιά αυτού του συστήματος $\varphi(t, \mathbf{x})$. Έστω επίσης ότι υπάρχει ένας υποχώρος Λ του χώρου των φάσεων όπου $\varphi(t, \Lambda) \subset \Lambda$ για κάθε t . Η τροχιά $\varphi(t, \mathbf{x})$ θα έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες στον υποχώρο Λ αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\mathbf{x} \in \Lambda$ και σε κάθε περιοχή κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει $\mathbf{y}$ σε αυτή την περιοχή τέτοιο ώστε $|\varphi(t, \mathbf{x}) - \varphi(t, \mathbf{y})| > \varepsilon$ για $t > 0$.

Με άλλα λόγια, για κάθε σημείο $\mathbf{x} \in \Lambda$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα σημείο αυθαίρετα κοντά το οποίο αποκλίνει από το $\mathbf{x}$. Τώρα αν ένας ελκυστής είναι

χαοτικός τότε η τροχιάς του $\varphi(t, \mathbf{x})$ έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες στον υποχώρο Λ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλα τα συστήματα που έχουν ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες δεν είναι κατ' ανάγκη χαοτικά.

7.2 Η λογιστική απεικόνιση

Αν και ως αυτή τη στιγμή μελετήσαμε δυναμικά συστήματα που περιγράφονται από συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, στο σημείο αυτό θα είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε ένα διαφορετικό είδος δυναμικών συστημάτων που μπορούν να περιγραφούν από διακριτές απεικονίσεις της μορφής,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i),$$

ή, γενικότερα (η απεικόνιση μπορεί να είναι μη-αντιστρέπτη),

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Στην περίπτωση των απεικονίσεων, η στατική κατάσταση ικανοποιεί την εξίσωση,

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}),$$

ή αλλιώς,

$$\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

Η στατική κατάσταση θα είναι ευσταθής (ασταθής) αν οι ιδιοτιμές των γραμμικοποιημένων εξισώσεων έχουν μέτρο μικρότερο (μεγαλύτερο) της μονάδας. Για να γίνει αντιληπτό το γεγονός αυτό, ας παρατηρήσουμε τη γραμμική μονοδιάστατη απεικόνιση,

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

με αρχική συνθήκη x_0 . Η στατική της κατάσταση θα είναι η λύση της εξίσωσης,

$$\bar{x}(1 - \lambda) = 0$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $\bar{x} = 0$ είναι στατική κατάσταση. Η τροχιά, $x_0, x_1, \dots, x_n$ αυτής της απεικόνισης θα είναι,

$$x_1 = \lambda x_0$$

$$x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$$

$$x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_0$$

$$\vdots$$

δηλαδή,

$$x_{n+1} = \lambda^{n+1} x_0$$

Για $n \rightarrow \infty$ η τροχιά τείνει στην στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ μόνο αν για την ιδιοτιμή ισχύει $-1 < \lambda < 1$. Για $\lambda > 1$ η τροχιά αποκλίνει εκθετικά από το 0 ενώ για $\lambda < -1$ η τροχιά αποκλίνει ταλαντούμενη από το 0. Συνεπώς, η ευστάθεια αλλάζει στα σημεία $|\lambda| = 1$.

Ας δούμε πως μία διακριτή απεικόνιση μπορεί να προκύψει από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ας θεωρήσουμε ένα είδος του οποίου ο πληθυσμός μεταβάλλεται σύμφωνα με τον παρακάτω νόμο,

$$\frac{dy}{dt} = Ay - By^2, \quad (7.1)$$

όπου A και B είναι θετικές σταθερές. Το νόημα των Εξ. (7.1) είναι ότι τα είδη μπορούν να αυξάνονται εκθετικά καθώς αυξάνει ο πληθυσμός καθώς επίσης να μειώνονται (λόγων του παράγοντα $-By^2$) λόγω, π.χ., περιορισμών στην παροχή τροφής. Επίσης θεωρούμε πλήρη απουσία θυτών.

Η Εξ. (7.1) μπορεί να γραφεί ως εξίσωση Riccati της μορφής,

$$\frac{dy}{dt} = Ay \left(1 - \frac{y}{K} \right),$$

όπου $K = A/B$. Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι,

$$y(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-At}}.$$

Άρα, παρατηρούμε ότι ο πληθυσμός τελικά φτάνει σε μία τιμή κορεσμού όπου $y_{\max} = K$. Θέτοντας $x = y/y_{\max}$, η Εξ. (7.1) γράφεται,

$$\frac{dx}{dt} = Ax(1 - x), \quad (7.2)$$

όπου $0 \leq x \leq 1$. Ας γράψουμε την Εξ. (7.2) σε διακριτή μορφή,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = Ax_n(1 - x_n).$$

Μετά από ανακατανομή των όρων, η Εξ. (7.2) μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής,

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad (7.3)$$

ή, γενικότερα,

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax(1-x), \\ x &\in [0, 1], a > 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Η Εξ. (7.4) συχνά αναφέρεται ως *λογιστική απεικόνιση*. Ας διερευνήσουμε τη λογιστική απεικόνιση. Οι στατικές καταστάσεις της Εξ. (7.4) είναι,

$$\bar{x} = 0, \quad (7.5)$$

$$\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}, \quad (7.6)$$

Για $a \leq 1$ η δεύτερη στατική κατάσταση Εξ. (7.6) δεν υπάρχει εφόσον $x \in [0, 1]$. Άρα έχουμε μία μόνο στατική κατάσταση, Εξ. (7.5), η οποία είναι ευσταθής εφόσον το μέτρο της ιδιοτιμής $\lambda = a - 2a\bar{x}$ είναι μικρότερο της μονάδας.

Για $a > 1$ η στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ καθίσταται ασταθής (η ιδιοτιμή που της αντιστοιχεί έχει μέτρο μεγαλύτερο από τη μονάδα). Αλλά, τι είδος διακλάδωσης λαμβάνει χώρα για $a = 1$; Αν θέσουμε $f(x, a) = ax(1-x)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_{0,1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{0,1} &= -2 \neq 0 \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} \right|_{0,1} &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα, η διακλάδωση αυτή είναι μία *υπερκρίσιμη διακλάδωση* για τη λογιστική απεικόνιση [βλ. τα κριτήρια της υπερκρίσιμης διακλάδωσης, Εξ. (4.42)].

Για $a = 1$ η δεύτερη στατική κατάσταση, $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$, εμφανίζεται. Η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί είναι $\lambda = -a + 2$, άρα η στατική κατάσταση είναι ευσταθής. Τι συμβαίνει αν αυξηθεί η τιμή του a ; Για την τιμή $a = 3$ η ιδιοτιμή για τη στατική κατάσταση Εξ. (7.6) είναι $\lambda = -1$. Τι είδους διακλάδωση είναι αυτή; Ας πάρουμε το *δεύτερο βήμα* της λογιστικής απεικόνισης,

$$x \mapsto a[ax(1-x)][1-ax(1-x)]. \quad (7.7)$$

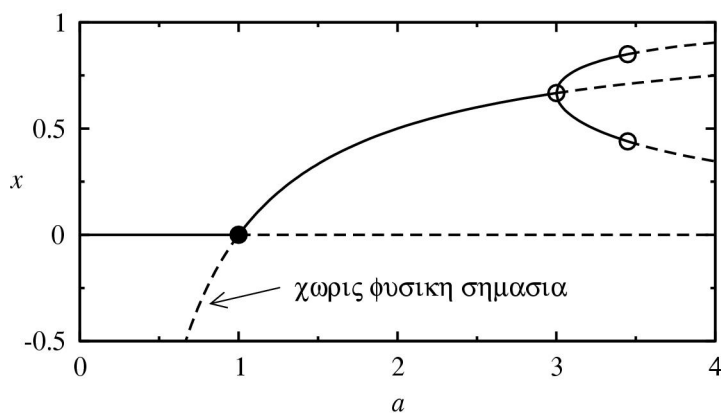
Προφανώς, το σημείο $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$ είναι ένα στατικό σημείο για το δεύτερο βήμα της λογιστικής απεικόνισης, Εξ. (7.7), για την τιμή $a = 3$. Η ιδιοτιμή για την Εξ. (7.7) είναι $\lambda = 1$. Άρα, το *δεύτερο βήμα* της λογιστικής απεικόνισης διακλαδίζεται στο

σημείο $a = 3$ για το στατικό σημείο $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$. Είναι εύκολο να βρεθεί τι είδους διακλάδωση είναι αυτή μια που η ιδιοτιμή είναι $\lambda = 1$. Άρα, για την Εξ. (7.7) έχουμε (θέτοντας $g(x, a) = a[ax(1-x)][1-ax(1-x)]$),

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial g}{\partial a} \right|_{\bar{x}, a} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right|_{\bar{x}, a} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial a} \right|_{\bar{x}, a} &= 2 \neq 0, \\ \left. \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right|_{\bar{x}, a} &= -108 \neq 0.\end{aligned}$$

Άρα, το δεύτερο βήμα της λογιστικής απεικόνισης, Εξ. (7.7) διακλαδίζεται με μία διχλωτή διακλάδωση στο σημείο $a = 3$ [βλ. τα κριτήρια για τη διχλωτή διακλάδωση, Εξ. (4.49)]. Οπότε, αναμένουμε τη γέννηση δύο επιπλέον στατικών καταστάσεων σε αυτό το σημείο διακλάδωσης, τα οποία είναι στατικές καταστάσεις του δεύτερου βήματος αλλά όχι στατικές καταστάσεις του πρώτου βήματος [μια που γνωρίζουμε όλες τις στατικές καταστάσεις της Εξ. (7.4)]. Αφού οι νέες στατικές καταστάσεις είναι στατικές καταστάσεις του δεύτερου βήματος, θα πρέπει να είναι στατικές καταστάσεις με περίοδο δύο για το πρώτο βήμα. Άρα, μπορούμε να πούμε ότι η λογιστική απεικόνιση, Εξ. (7.4) διακλαδίζεται με μία διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου στο σημείο $(\bar{x}, a) = (1 - \frac{1}{a}, 3)$.

Στο Σχ. 7.1 παρουσιάζεται μέρος του διαγράμματος διακλάδωσης για τη λογιστική απεικόνιση. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $a < 1$ υπάρχει μόνο μία στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ και αυτή είναι ευσταθής. Στο σημείο $a = 1$ έχουμε μία υπερκρίσιμη διακλάδωση και την εμφάνιση μία δεύτερης στατικής κατάστασης $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$. Αυτός ο κλάδος είναι ευσταθής ενώ η στατική κατάσταση $\bar{x} = 0$ καθίσταται ασταθής. Θα πρέπει ακόμα να παρατηρηθεί ότι λόγω των παραδοχών του προβλήματος, ο κλάδος $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$ για $a < 1$ δεν υπάρχει στην πραγματικότητα. Για $a = 3$ παρατηρούμε μία ακόμα διακλάδωση για τη στατική κατάσταση $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$. Αυτή είναι μία διχλωτή διακλάδωση για το δεύτερο βήμα της λογιστικής απεικόνισης, δηλ. μία διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου της Εξ. (7.4). Ως αποτέλεσμα, γεννιούνται δύο νέες στατικές καταστάσεις οι οποίες είναι ευσταθείς. Η στατική κατάσταση $\bar{x} = 1 - \frac{1}{a}$ καθίσταται ασταθής στο σημείο αυτό. Αυξάνοντας την τιμή του a παρατηρούμε μία ακόμα διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου



Σχήμα 7.1: Διάγραμμα διακλάδωση για τη λογιστική απεικόνιση. Στην τιμή $a = 1$ το σύστημα διακλαδίζεται με μία υπερκρίσιμη διακλάδωση ($\bullet$). Για $a = 3$ το σύστημα υπόκειται σε μία διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου ($\circ$). Μία επιπλέον διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου ($\circ$) παρατηρείται στο σημείο $a = 3.44949$. Συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν ευσταθείς και ασταθείς στατικές καταστάσεις, αντίστοιχα.

για τις δύο νέες στατικές καταστάσεις (στην τιμή $a = 3.44949$). Αυξάνοντας την τιμή του a στην περιοχή $3 < a < a_\infty$ όταν $a_\infty = 3.569946 \dots$ μία αλληλουχία από διακλαδώσεις διπλασιασμού της περιόδου λαμβάνουν χώρα για διάφορες κρίσιμες τιμές $a_1, a_2, \dots$. Στην περιοχή $a_\infty < a < 4$ η λογιστική απεικόνιση είναι χαοτική. Μερικά παραδείγματα της διαδρομής προς το χάος μέσω διπλασιασμού της περιόδου για τη λογιστική απεικόνιση παρουσιάζεται στο Σχ. 7.2.

Ένα επιπλέον ενδιαφέρον γεγονός που σχετίζεται με τη λογιστική απεικόνιση και το διαδρομή προς το χάος μέσω διπλασιασμού της περιόδου είναι ότι τα κρίσιμα σημεία όπου συμβαίνουν διπλασιασμοί της περιόδου ορίζονται από μία απλή σχέση,

$$a_n = a_\infty - cq^{-n}, \quad (7.8)$$

όπου $c = 2.6327 \dots$ και $q = 4.669202 \dots$. Ο αριθμός q καλείται *αριθμός Faigenbaum* και εμφανίζεται στα περισσότερα δυναμικά συστήματα που διακλαδίζονται με διπλασιασμό της περιόδου.

7.3 Διασκεδάζοντας με τις διακριτές απεικονίσεις

Περισσότερο για λόγους διασκέδασης, σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε ένα επιπλέον παράδειγμα διακριτής απεικόνισης η οποία παρουσιάζει ιδιόζουσα δυναμική συμπεριφορά. Πρόκειται για την *απεικόνιση της γάτας του Arnold*.

Η απεικόνιση της γάτας του Arnold περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση,

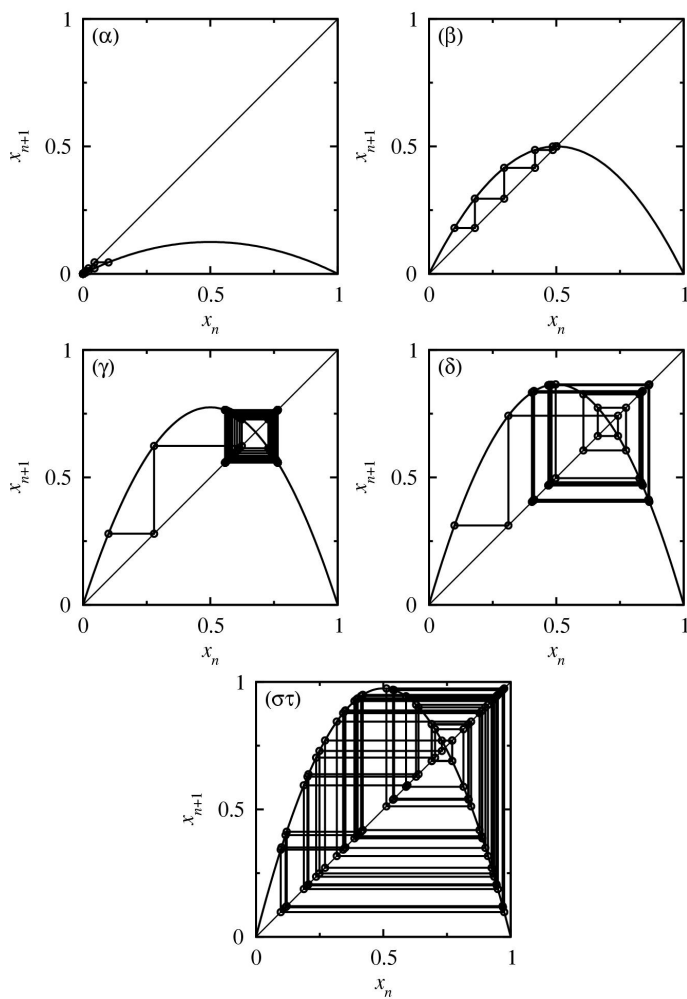
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

όπου τόσο η μεταβλητή x και y ορίζονται ως προς mod(1). Αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική και ουσιαστικά είναι περιοδική ανά ορισμένο αριθμό βημάτων. Αυτό που κάνει η απεικόνιση αυτή είναι να διπλώνει και τεντώνει τις τιμές των μεταβλητών εντός ενός τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα, κι έτσι σχετίζεται με τη χαοτική απόκριση.

Η απόκριση της απεικόνισης της γάτας του Arnold μπορεί να παρασταθεί αν λάβουμε υπόψη τη επίδραση του πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ στις συντεταγμένες μίας εικόνας που αποτελείται από $n \times n$ pixels. Μετά από μερικά βήματα, η αρχική εικόνα είχε διαταραχθεί παντελώς και γειτονικά σημεία έχουν απομακρυνθεί μεταξύ τους. Μετά από ορισμένο αριθμό βημάτων, ως δια μαγείας, η αρχική εικόνα έχει αποκατασταθεί.

Στο Σχ. 7.3 παρουσιάζεται η επίδραση αυτής της απεικόνισης στη γάτα, όπως και είχε γίνει αρχικά από τον Arnold....

Φυσικά, δεν υπάρχει κάτι ειδικό στην επιλογή της γάτας. Η απεικόνιση της γάτας του Arnold μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε περιοχή διάστασης $n \times n$



Σχήμα 7.2: Η λογιστική απεικόνιση για (α) $a = 0.5$, μία στατική κατάσταση μηδενικής περιόδου, (β) $a = 2$, περίοδος ένα, (γ) $a = 3.1$, περίοδος δύο, (δ) $a = 3.46$, περίοδος τέσσερα και $a = 3.9$, χάος.



Σχήμα 7.3: Η απεικόνιση της γάτας του Arnold για μία γάτα 32×32 pixels για το βήμα $i = 0, 1, 2, 3, 14, 21$ και 22 .

και το αποτέλεσμα θα είναι ανάλογο. Στο Σχ. 7.4 παρουσιάζεται η επίδραση της Εξ. (7.9) σε έναν άτυχο ευθελοντή.

7.4 Οι εξισώσεις Rössler

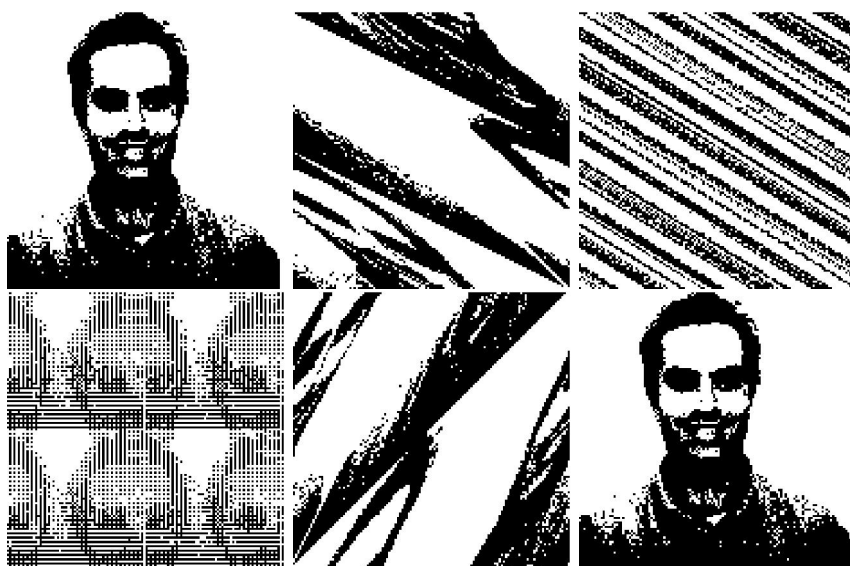
Οι εξισώσεις Rössler παριστούν ένα μη ρεαλιστικό χημικό σενάριο με τις παρακάτω κινητικές εξισώσεις,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + xz - cz.\end{aligned}\tag{7.10}$$

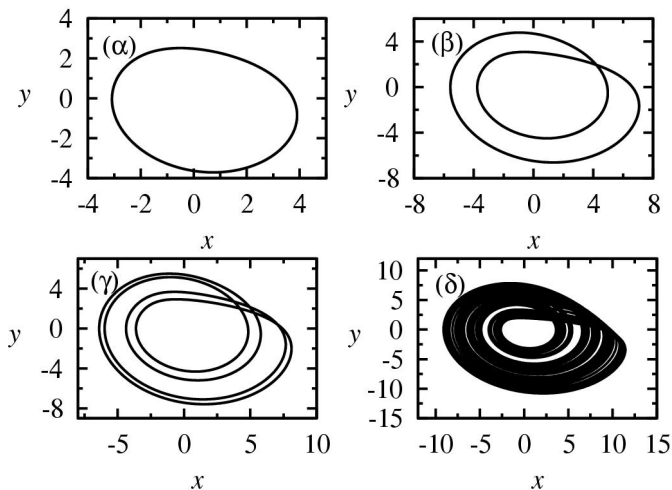
Παρόλο που το τρισδιάστατο αυτό δυναμικό σύστημα έχει μόνο μία απλή μη-γραμμικότητα (τον όρο xz) παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά. Η διαδρομή προς τον χαοτικό ελκυστή είναι μέσω διπλασιασμού της περιόδου. Ένα παράδειγμα για τη διαδρομή στο χάος για τις εξισώσεις Rössler παρουσιάζεται στο Σχ. 7.5 για $a = b = 0.2$.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν και οι εξισώσεις Rössler και η λογιστική απεικόνιση είναι πολύ διαφορετικά δυναμικά συστήματα, και τα δύο ακολουθούν τη διαδρομή προς το χάος μέσω διπλασιασμού της περιόδου. Μπορούμε να διαπιστώσουμε επιπλέον ομοιότητες αν κατασκευάζουμε ένα διακριτό σύστημα από τις εξισώσεις Rössler. Ας κατασκευάσουμε τη διακριτή απεικόνιση κάνοντας ‘δειγματοληψία’ της λύσης της Εξ. (7.10) κάθε φορά που η μεταβλητή x παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Αυτή η διαδικασία θα δώσει μία αλληλουχία από σημεία, x_i , για $i = 1, 2, \dots, N$. Τότε, όμοια με τη λογιστική απεικόνιση, ας κατασκευάσουμε το διάγραμμα της τιμής x_{i+1} ως προς την τιμή x_i . Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται απεικόνιση Poincaré των εξισώσεων Rössler.

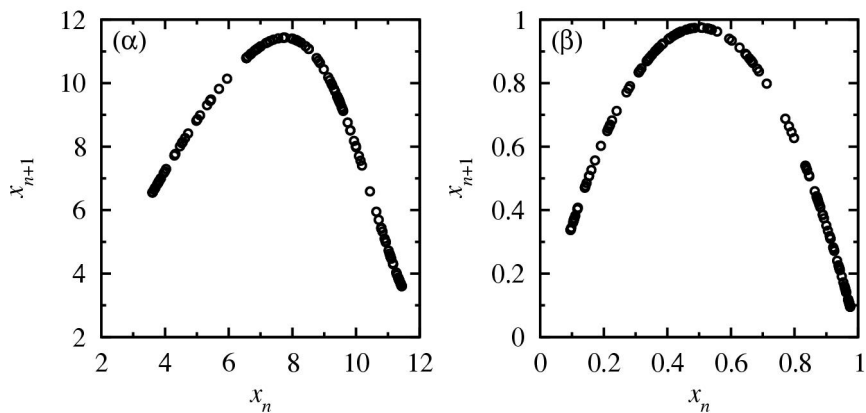
Στο Σχ. 7.6 παρουσιάζεται η απεικόνιση Poincaré των εξισώσεων Rössler για $c = 5.7$ καθώς και, για λόγους σύγκρισης, η λογιστική απεικόνιση για $a = 3.9$. Η ομοιότητα των δύο απεικονίσεων είναι εντυπωσιακή. Και τα δύο συστήματα που ακολουθούν ίδια διαδρομή προς το χάος μπορούν να παρασταθούν από όμοιες διακριτές απεικονίσεις.



Σχήμα 7.4: Η απεικόνιση της γάτας του Arnold για μία εικόνα ενός εθελοντή διάστασης 128×128 pixels για το βήμα $i = 0, 1, 3, 48, 95$ και 96 .



Σχήμα 7.5: Λύση των εξισώσεων Rössler για (α) $c = 2$, περίοδος ένα, (β) $c = 3.5$, περίοδος δύο, (γ) $c = 4$, περίοδος τέσσερα (δ) $c = 5.7$, χάος.



Σχήμα 7.6: (α) Απεικόνιση Poincaré για τις εξισώσεις Rössler για $c = 5.7$ και (β) η λογιστική απεικόνιση για $a = 3.9$.

Βιβλιογραφία

- V.I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.
- S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, volume 2 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- H. Anton. *Elementary Linear Algebra*. Willey, New York, 5 edition, 1987.
- R.A. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1955.
- M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- R. Grimshaw. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1990.
- J.J. Stoker. *Non Linear Vibrations*. Wiley, New York, 1950.
- H.T. Davis. *Introduction to nonlinear differential and integral equations*. Dover Publications, Inc., New York, 1962.
- J. Guckenheimer and Ph. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Spriger-Verlag, New York, 1983.
- J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*, volume 35 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1981.

- F.C. Hoppensteadt and E.M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*, volume 126 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- E. M. Izhikevich. Phase equations for relaxation oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(5):1789–1805, 2000.
- J.K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Wiley Interscience, New York, 1969.
- J.K. Hale. *Oscillations in Nonlinear Systems*. Dover Publications Inc., New York, 1992.
- T.L. Saaty. *Modern Nonlinear Equations*. Dover Publications Inc., New York, 1981.
- T.L. Williams and G. Bowtell. The calculation of frequency-shift functions for chains of coupled oscillators, with application to a network model of the lamprey locomotor pattern generator. *J. Comput. Neurosci.*, 4:47–55, 1997.